ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: MECHANIKA z.122 Nr kol. 1267

Maciej MINCH, Aleksander TROCHANOWSKI
Instytut Budownictwa
Politechnika Wrocławska

NUMERYCZNA ANALIZA KONSTRUKCJI ŻELBETOWYCH METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie. W referacie opisano algorytm nieliniowych obliczeń konstrukcji żelbetowych z rysami z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Przedstawiono wyniki obliczeń dla przypadku żelbetowej tarczy. Dla przyrostowo narastającego obciążenia wyznaczono propagację zarysowania i szerokości rozwarcia rys. Obliczono pole przemieszczeń i rozkłady naprężeń w zbrojeniu i betonie. Uzyskane wyniki porównano z wynikami badań doświadczalnych i wynikami obliczeń autorów. Przeprowadzona analiza pozwoliła na weryfikację zaproponowanej metody.

THE NUMERICAL ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE USING FINITE ELEMENTS METHOD

Summary. The present report shows the results of calculations on a reinforced concrete disk with cracks. The nonlinear, numerical model of calculations of reinforced concrete is describe. Using finite elements method some calculations were made. The results of calculations like displacements stresses and cracking are shown on diagrams. They were compared with experimental result and other finding. Some conclusions about the described model and results of calculations are shown.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЖЕЛЕЗНОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Резюме. В работе представлено алгоритм численного расчета железобетонных конструкций с трещинами. Расчет выпольнено методом конечных элементов. Показано результаты расчета железобетонного щита. Для сменной нагрузки расчислено положение и величину трещин. Показано перемещения. Результаты численной анализы сравнано с экспериментом и другими расчетами. Доказано что результаты расчетоб согласны с другими решениями.

1. WSTĘP

Wieloletnie badania konstrukcji żelbetowych, prowadzone pod kierunkiem prof. A. Borcza pokazują, że elementy betonowe i żelbetowe przy obciążeniach cyklicznych zachowują się sprężyście. Te obserwacje były podstawą założenia, że całkowite odkształcenia są sumą odkształceń sprężystych i odkształceń resztkowych [1]. Sprężyste zachowanie się elementów pod obciążeniem cyklicznym wyjaśnić można samonaprężeniami wywołanymi nieliniowymi odkształceniami resztkowymi W procesie monotonicznego obciążania powstają deformacje niesprężyste betonu. Są one nieliniowe względem naprężenia, nie spełniają warunku nierozdzielności. Przy założeniu warunku płaskiego przekroju muszą utworzyć się dodatkowe odkształcenia sprężyste, które łącznie z odkształceniami niesprężystymi dopełniają warunku nierozdzielności. Samonaprężenia są wynikiem tych odkształceń sprężystych i stanowią układ samozrównoważony. Pojęcie samonaprężeń w powyższym rozumieniu jak i model betonu były zaproponowane i rozwijane przez wiele lat przez prof. A. Borcza. Autorzy referatu, jako uczniowie profesora, podjęli próbę numerycznego modelowania konstrukcji wykorzystując myśl swojego mistrza. Pominięto bardziej szczegółowy opis samego modelu zawarty w pracach [1, 2] ograniczając się do analizy obliczeń.

2. ITERACYJNA NIELINIOWA ANALIZA MES

W procesie analiazy nieliniowej zastosowano metodę elementów skończonych. Jest ona na tyle znana, że pominięto jej szczegółowy opis. Wszelkie oznaczenia przyjęto za Zienkiewiczem [3]. Do dyskretyzacji konstrukcji użyto elementów prostokątnych z powszechnie stosowanymi funkcjami kształtu. Wykorzystano gotowe rozwiązania na macierz sztywności elementu opisane między innymi przez Rockey'a [4]. W opracowanym algorytmie obliczeń numerycznych ograniczono się do płaskiego stanu, jakkkolwiek zaproponowana metoda nieliniowej analizy konstrukcji ma charakter ogólny i może być rozszerzona na elementy przestrzenne.

W liniowych zagadnieniach teorii sprężystości dotyczących małych odkształceń, w sformułowaniu przemieszczeniowym, dochodzimy zawsze do ostatecznego równania MES

$$K\{\delta\}-\{R\} = 0 \tag{1}$$

w którym wektor {R} obejmuje wszystkie siły od obciążeń zewnętrznych, naprężeń, odkształceń początkowych itd. W powyższym równaniu zakłada się dodatkowo ważność liniowego prawa reologicznego

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\}) + (\sigma_o) \tag{2}$$

z dodatkowymi wymaganiami liniowej zależności pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniam, ciągłości przemieszczeń i przybliżonego zachowania równowagi.

W zadaniach, w których stosowane są nieliniowe związki reologiczne, w przypadku małych

odkształceń muszą być zachowane warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi, zmianie ulega jedynie zależność (2). Zamiast niej można ogólnie zapisać związek reologiczny

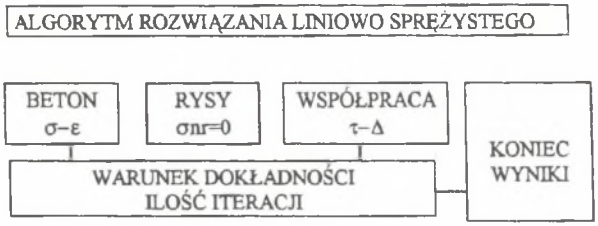
$$F(\{\sigma\},\{\varepsilon\}) = 0 \tag{3}$$

Oczywiście, w takim przypadku, niezbędne jest postępowanie iteracyjne. Jeżeli iteracje prowadzi się zmieniając macierz [D], to sposób taki nazwano sposobem zmiennej sztywności. Jeżeli zmieniane są wartości $\{\varepsilon_o\}$ lub $\{\sigma_o\}$, to mamy odpowiednio sposób początkowego odkształcenia lub początkowego naprężenia.

W opracowanym algorytmie obliczeń numerycznych do opisu nieliniowego związku σ - ε dla betonu wykorzystano metodę odkształceń początkowych. W kolejnych krokach iteracji wyrównane więc są odkształcenia. Przyjęto, że charakter funkcji σ - ε jako parabolę madrycką, zalecaną przez CEB.

Do modelowania zarysowania elementu betonowego zastosowano metodę naprężeń początkowych. Założono warunek, że naprężenia normalne do rysy są równe zeru. Kierunek rys zdeterminowany jest głównym kierunkiem naprężeń rozciągających z rozwiązania nieliniowo sprężystego. Wyjątek stanowią węzły, przez które przechodzą pręty zbrojeniowe. W tym przypadku, w zależności od kierunku pręta zbrojeniowego, całość lub część naprężeń przenoszona jest przez zbrojenie. Oczywiście rozwiązanie prowadzone jest iteracyjnie.

Zbrojenie w metodzie uwzględniono jako liniowe elementy stalowe łączące węzły. Sztywność tych elementów sumowana jest do globalnej macierzy sztywności układu. W fazie przed zarysowaniem zbrojenia "widoczne" jest właśnie jako ta dodatkowa sztywność. Po zarysowaniu konstrukcji żelbetowej pręty przecinające rysę przejmują uwolnione przez pęknięcie naprężenia. W omawianej metodzie zastosowano związki zaproponowane przez Dorra [5] do określenia wartości naprężeń stycznych w elementach prętowych. Te naprężenia styczne scałkowane po poszczególnych prętach przyłożono do węzłów wzdłuż prętów jako zewnętrzne obciążenie. Obciążenie to wymusza dodatkowe odkształcenia pręta wynikające z jego poślizgu w betonie. Obliczenia prowadzone są iteracyjnie. Założono, że wpływ naprężeń stycznych ujawnia się dopiero po zarysowaniu elementu. W fazie pracy bez rys przyjęto więc równość odkształceń betonu i stali $\varepsilon_a = \varepsilon_b$.



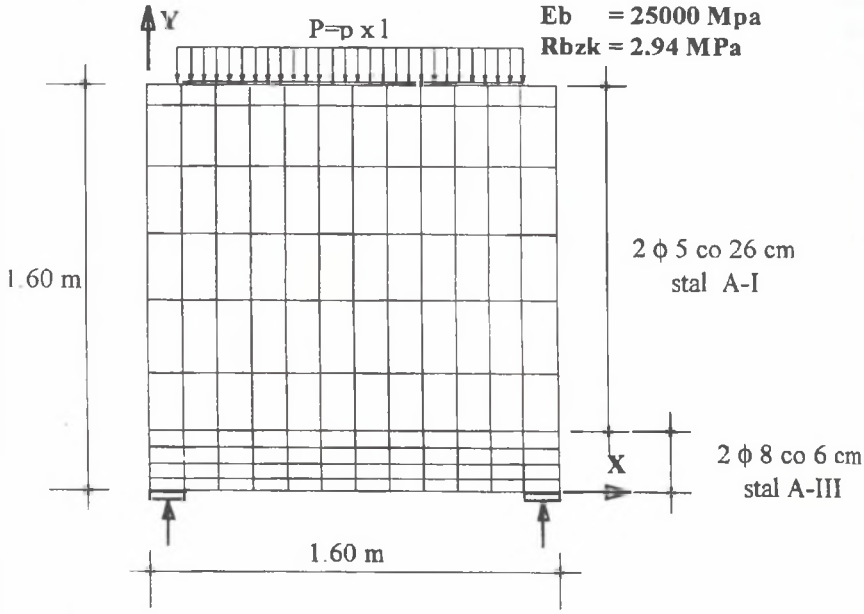
Rys. 1. Schemat procesu obliczeń
Fig. 1. The calculation scheme

Na rysunku 1 przedstawiono schemat procesu obliczeń. Podstawę stanowi algorytm rozwiązania liniowo-sprężystego. W opracowanym programie zastosowano metodę elementów skończonych. Możliwe jest jednak wykonanie dowolnej metody, np. różnic skończonych. Rozwiązanie liniowo sprężyste stanowi podstawę uzyskiwania rozwiązań próbnych w kolejnych krokach iteracji. Wykorzystany w obliczeniach algorytm MES ogranicza się do zadania przestrzennego. Wydaje się, że proponowana metoda może być stosowana również do zadań przestrzennych. Takie rozszerzenie w znacznym stopniu powiększy zakres możliwych analiz numerycznych. Oczywiście możliwe i pożądane jest rozszerzenie prawa konsytutywnego dla betonu do zadania dwuosiowego czy nawet trzyosiowego.

3. ANALIZA TARCZY BADANEJ PRZEZ LEONHARDTA I WALTHERA

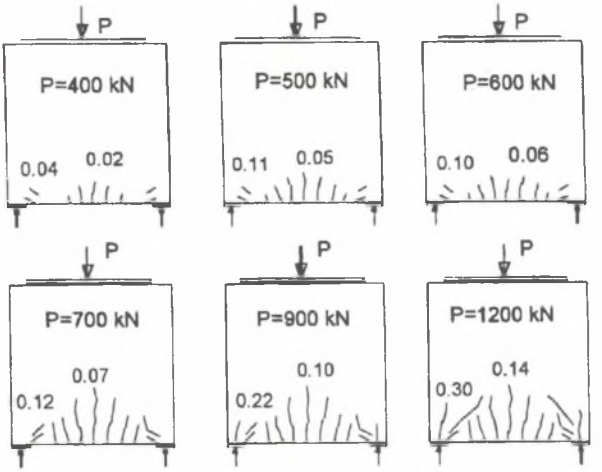
Przeprowadzono analizę numeryczną tarczy żelbetowej o symbolu WT3, badanej przez Leonhardta i Walthera [6]. Tarcza ta była również analizowana numerycznie przez Floegla [7], Buyukozturka [8] i Lewińskiego. Istnieje zatem materiał doświadczalny i teoretyczny do analizy porównawczej i weryfikacji proponowanej metody.

Rysunek 2 przedstawia schemat analizowanej tarczy. Przeprowadzono obliczenia dla różnych poziomów obciążenia śledząc za procesem powstawania rys i rozkładem naprężeń w konstrukcji. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 3 do 4.

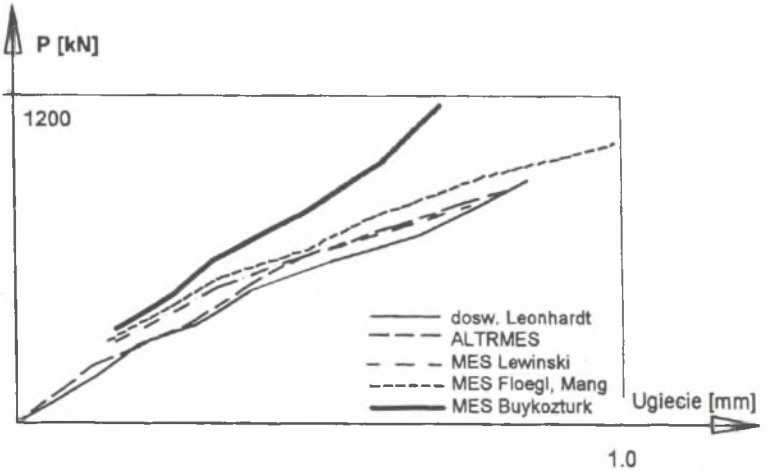


Rys. 2. Schemat analizowanej tarczy
Fig. 2. The scheme of calculated disk

Rysunek 3 przedstawia proces rozwijania się rys przy wzrastającym obciążeniu. Zaznaczono obliczone szerokości rozwarcia rys. Pierwsze rysy pojawiają się dla poziomu obciążenia P = 400 kN.



Rys. 3. Propagacja zarysowania
Fig. 3. The cracks under different load



Rys. 4. Zależność ugięcia od obciążenia
Fig. 4. Relationship beetwen load and displacement

Rysunek 4 obrazuje zależność pomiędzy całkowitym obciążeniem tarczy P a ugięciem w środku rozpiętości. Zestawiono wykresy uzyskane przez Leonhardta i Walthera [6] w badaniach doświadczalnych oraz wykresy uzyskane na podstawie nieliniowej analizy MES przez Buyukozturka [8] (90 elementów trójkątnych), Floegla i Manga [7] (72 elementy trójkątne), Lewińskiego [9] (45 elementów prostokątnych i wg analizy autora programem ALTRMES (169 elementów prostokątnych).

4. PODSUMOWANIE

W metodach początkowego naprężenia lub początkowego odkształcenia postuluje się stałą macierz sztywności. Ogólnie może to wymagać większej liczby kroków iteracyjnych, jednak może być to korzystniejsze z uwagi na brak konieczności wielokrotnego rozwiązywania podstawowego układu równań. Rozwiązanie sprężysto liniowe użyte jest jedynie jako środek do przyspieszania zbieżności rozwiązań "próbnych". Można też stosować wszelkie inne środki przyspieszające zbieżność. Istotnym jest by ostatecznie rozwiązanie spełniało nieliniowe związki prawa reologicznego. Korzystne może okazać się stosowanie metody kombinowanej polegającej na równoczesnym modyfikowaniu sztywności i poprawianiu naprężeń czy odkształceń.

LITERATURA

[1] Borcz A.: Teoria konstrukcji żelbetowych. Wybrane badania wrocławskie. Skrypty Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1986, część II

[2] Trochanowski A.: Numeryczny model konstrukcji betonowych żelbetowych. XXXVI Konferencja Naukowa KILiW PAM i KN PZITB, Krynica 1990, t.2, s. 137-142

[3] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972

[4] Rockey K.C., Evans H.R.: The finite element method, Crosby, Lockwood Staples, London 1975

[5] Dorr K.: Bond-Behaviour of Ribbed Reinforcement under transversal Pressure Nonlinear Behaviour of Reinforced Concrete Spatial Structures, Contributions to the IASS Symposium 1978, volume 1, s. 13-24

[6] Leonhardt F., Walther R.: Wandertige Trager Deutscher Ausschus für Stahlbeton, H. 178, 1966

[7] Floegl H, Mang H.A.: On tension stiffening in craced reinforced concrete slabs and shells considering geometric and physical nonlinearity, Ing. Arch., 51, 1981, s. 215-242

[8] Buyukozturk O.: Nonlinear analisis of reinforced concrete structure, Computers and Structures, 7, 1977, s. 149-156

[9] Lewinski P.M.: Nieliniowa analiza płyt i tarcz żelbetowych. Metoda elementów skończonych. Studia z zakresu inżynierii Nr 29, PWN, Warszawa-Łódź 1990

Recenzent: prof.dr hab.inż. W. Gutkowski

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.