ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: MECHANIKA z. 122 Nr kol. 1267

Jerzy SKRZYPCZYK
Katedra Mechaniki Teoretycznej
Politechnika Śląska

MODELOWANIE UKŁADÓW DYNAMICZNYCH ZA POMOCĄ ABSTRAKCYJNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Streszczenie. W pracy zagadnienia dynamiki stochastycznych układów mechanicznych rozpatrywane są z punktu widzenia teorii systemów jako uporządkowany zbiór elementów. Zbiór czasowy jest określony jako lokalnie zwarta, uporządkowana grupa abelowa. Relację wejście-wyjście układu dynamicznego modeluje się za pomocą abstrakcyjnych losowych równań całkowych typu Volterry.

MODELLING OF DYNAMIC SYSTEMS BY ABSTRACT INTEGRAL EQUATIONS

Summary. In the paper dynamic problems of stochastic mechanical systems are considered as control systems, as an ordered set of some elements. Time set is defined as a locally compact, ordered Abelian group. Input-output relations are modelled by abstract random integral Volterra equations.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ АБСТРАКТНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНЯМИ

Резюме. В работе динамические проблемы в стохастических механических системах рассмотриваетсьа как системы управления, как упорядоченные множестьа некоторых елементов. Временное множестьо определено как локально компактная, упорядоченная абелева группа. Релачии вход-выход моделированы через абстрактые случайные интегральные уравнения типа Вольтерры.

1. WSTĘP

Na początku zastanówmy się, co oznaczać będzie podstawowe pojęcie "układ dynamiczny"? Z punktu widzenia mechaniki dynamika rozwiązuje dwa podstawowe zagadnienia: zagadnienie proste polega na tym, że znając ruch należy znaleźć siły; zagadnienie odwrotne zajmuje się wyznaczaniem ruchu, jeżeli znane są siły i tzw. warunki początkowe, tj. położenia i prędkości punktów w pewnej chwili. Praktycznie, zakres dynamiki obejmuje od dawna również wiele klasycznych zagadnień pokrewnych, np.: stabilność ruchu, bifurkacje, drgania okresowe, ich stabilność i wiele innych. Do najnowszych problemów należą zagadnienia związane z ogólnie pojętym sterowaniem: identyfikacja obiektów mechanicznych, sterowanie optymalne, synteza układów sterowania itp. Metody analizy, charakterystyczne dla zagadnień mechaniki analitycznej, np. równania Hamiltona i Lagrange'a, zastosowano w wielu innych dziedzinach nauki, np. w elektrotechnice. Z drugiej strony należy odnotować fakt ogromnego wpływu np. teorii sterowania na mechanikę, co spowodowało, że wiele problemów z tego zakresu zapisuje się i analizuje w postaci układu równań 1. rzędu, tzw. równań stanu, a nie w postaci układu równań 2. rzędu, które są tak charakterystyczne dla zagadnień mechaniki.

Odnotujmy również fakt, że wiele zagadnień z zupełnie różnych od mechaniki dziedzin nauki, takich jak np. telekomunikacja, biologia, obsługa masowa, chemia czy genetyka, opisywanych jest za pomocą modeli matematycznych, które pod względem formalnym nie różnią się niczym od modeli typowych dla mechaniki teoretycznej.

Wspomniane argumenty powodują, że rozpatrywanie układów mechanicznych z punktu widzenia teorii systemów pozwala na daleko posunięte uogólnienia. W związku z powyższym określenie "układ dynamiczny" jest traktowane w pracy jako uporządkowany zbiór pewnych pojęć, którego najważniejszymi elementami są: zbiory sygnałów wejściowych i wyjściowych oraz relacja wejście-wyjście układu.

Drugim elementem charakterystycznym dla pracy jest przyjęcie założenia, że czas jest elementem pewnej lokalnie zwartej grupy abelowej G. Przyjęto, że wspomniana grupa jest częściowo lub całkowicie liniowo uporządkowana.

Dlaczego zdecydowano się na wprowadzenie do rozważań, ściśle związanych z techniką, tak wyrafinowanego aparatu matematycznego, jakim jest niewątpliwie teoria grup?

Zanim podjęta będzie próba odpowiedzi na to pytanie, zauważmy, że ostatnie 30 lat, to burzliwy rozwój najróżnorodniejszych metod analizy układów dynamicznych związanych z dokładnością, wrażliwością, stabilnością, sterowaniem itp. Rozwój tych wszystkich dziedzin odbywał się w zasadzie niezależnie dla układów z tzw. czasem ciągłym (zwanych w pracy układami ciągłymi) i układów impulsowych z tzw. czasem dyskretnym (zwanych w pracy układami dyskretnymi). Pomijając prace, w których analizy dokonuje się na poziomie równań operatorowych, niewiele jest publikacji, których wyniki można zastosować jednocześnie do układów ciągłych i dyskretnych. Z drugiej strony łatwo zauważyć daleko idące analogie między wynikami osiągniętymi dla obu wspomnianych rodzajów układów dynamicznych.

Dlatego zdecydowano się na przyjęcie założenia, że czas jest elementem częściowo uporządkowanej grupy abelowej, co pozwala na jednolite traktowanie np. wspomnianych już układów ciągłych i dyskretnych. Przyjęte założenie pozwala na podobne traktowanie również układów bardziej wyrafinowanych, np. określonych na torusie.

Charakterystyczną cechą rozważań jest zastosowanie do opisu zjawisk zachodzących w układach dynamicznych losowych równań całkowych. Przyjęcie powyższych założeń w konstrukcji pracy spowodowało konieczność zastosowania niewątpliwie trudnego aparatu matematycznego, pozwoliło jednak na jednolite sformułowanie wielu ważnych zagadnień analizy układów dynamicznych i na liczne uogólnienia.

Przy zastosowaniu wspomnianej metodologii abstrahuje się od charakteru rozpatrywanych układów, tzn. nie ma większego znaczenia, czy mamy do czynienia z badaniem ruchu układu punktów materialnych pod wpływem działających na nie sił, czy też np. z badaniem zachowania się populacji, analizą układu elektro mechanicznego lub też z zagadnieniem telekomunikacji, pod jednym warunkiem, że modele matematyczne rozpatrywanych układów mechanicznych będą takie same. Ogromne zróżnicowanie badanych współcześnie zagadnień z różnych dziedzin nauki, ich wzajemne przenikanie się, wymuszają takie właśnie uniwersalne podejście do spraw dynamiki.

2. POJĘCIE UKŁADU DYNAMICZNEGO

Pojęcie "układ dynamiczny" nie jest w literaturze określone jednoznacznie [2-3,5,7-16]. 1,109,123,134,138,225,250,270,297,374].

Będziemy mówić, że określony jest układ dynamiczny, jeżeli są zdefiniowane jego następujące elementy:

A1) Zbiór chwil czasowych T, o którym zakładamy, że jest częściowo uporządkowaną (ze względu na relację "$\leq$"), lokalnie zwartą, addytywną grupą abelową $(G, \leq)$, $T=G$,

A2) Zbiór stanów układu jest przestrzenią liczb rzeczywistych $X=\mathbf{R}^n$.

A3) Zbiór chwilowych wartości wielkości wejściowych (sygnałów wejściowych) jest przestrzenią liczb rzeczywistych $X_u = \mathbf{R}^p$.

A4) Zbiór dopuszczalnych oddziaływań wejściowych $u \in U$ (sygnałów wejściowych) $u:T \to X_u$ w przypadku deterministycznym lub $u:\Omega x T \to X_u$, jeżeli mamy do czynienia z układem z sygnałem wejściowym stochastycznym, zakłada się, że U jest przestrzenią topologiczną, na ogół przestrzenią Banacha.

A5) Zbiór chwilowych wartości wielkości wyjściowych (sygnałów wyjściowych) jest przestrzenią $X_y = \mathbf{R}^m$.

A6) Zbiór sygnałów wyjściowych $y \in Y, y:T \to X_y$ w przypadku deterministycznym lub $y:\Omega x T \to X_y$, jeżeli mamy do czynienia z układem deterministycznym z wejściem stochastycznym, układem o parametrach losowych lub układem, który łączy obie te cechy, zakłada się, że Y jest przestrzenią topologiczną, na ogół przestrzenią Banacha.

A7) Odwzorowanie zwane operatorem (operacją, transmitancją) przejścia układu dynamicznego

$$\phi : U \to Y.$$

które w przypadku probabilistycznym może być operatorem o parametrach losowych. Będziemy zakładać, że warunek ten jest spełniony, jeżeli znana jest relacja (równanie), która wiąże sygnały wejściowe i wyjściowe w zależność funkcyjną.

W całej pracy zakłada się, że relacja wejście - wyjście przyjmuje postać wielowymiarowego, nieliniowego, losowego równania całkowego typu Volterry-Stieltjesa 2. rodzaju postaci

$$y(t,\omega) = u(t,\omega) + \int_Q h(ds,\omega) f(t-s, y(t-s,\omega),\omega), \quad t\in Q, \omega\in Q$$

gdzie $Q\subset G$ jest pewną półgrupą, h jest miarą wektorową o wahaniu ograniczonym, $h\in V(Q;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\wp;\mathfrak{L}(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n)))$ lub w postaci losowego równania całkowego typu Volterry 2. rodzaju

$$x(t,\omega) = u(t,\omega) + \int_Q k(t,\tau,\omega) f(\tau, x(\tau,\omega),\omega)\mu(d\tau), \quad t\in Q, \omega\in Q$$

gdzie losowe jądro $k(t,\tau,\omega)$ jest określone na $\Delta\times\Omega$

$$\Delta := \{(t,\tau): t,\tau\in Q, \tau\le t\}$$

$k(t,\tau,\cdot) = 0$ dla $(t,\tau,\cdot)\notin\Delta$, mod $(\wp)$ oraz

$$k(t,\cdot,\cdot)\in L^1_{loc}(G;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\wp;\mathfrak{L}(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n))), \ \forall\ t\in Q \blacksquare$$

A8) Zadana jest funkcja (operator) wyjścia $\psi: T\times X \to Y$ lub $\psi: T\times X\times\Omega \to Y$ określająca w przypadku losowym sygnał wyjściowy $\psi(t,\omega) = \psi(t,x(t,\omega))$,

Jeżeli $T=\mathbf{R}^1$, będziemy mówić o układzie dynamicznym z czasem ciągłym lub po prostu o układzie ciągłym. W przypadku gdy $T=\mathbf{Z}^1$ (lub $T=\mathbf{Z}^1$), mówimy o układzie dynamicznym z czasem dyskretnym lub po prostu o układzie dyskretnym.

W licznych rozważaniach teoretycznych, jak również w zastosowaniach zbiór T występuje jako obiekt o bardziej złożonej strukturze algebraicznej, niż dzieje się to w przypadkach klasycznych, tzn. gdy $T=\mathbf{R}^1$ lub $T=\mathbf{Z}^1$ (w ogólności $T=\mathbf{R}^1$ lub $T=\mathbf{Z}^1$). Interesujące są prace [2-3,9-10] dotyczące analizy układów dynamicznych z czasem, który jest elementem pierścienia abelowego. Bardzo interesująca jest analiza drgań okresowych w dynamicznym układzie mechanicznym przy wykorzystaniu odwzorowań Poincarego i pojawienie się w tym kontekście "czasu" jako elementu jednowymiarowego torusa $T=\mathbf{T}^1$ [16].

Koncepcja analizy układów dynamicznych, w których czas jest elementem grupy abelowej, nie jest nowa. W różnym stopniu założenie to było wykorzystywane w pracach [4-6,8,11-16].

Konsekwencją przyjęcia założenia (A1) jest fakt,że opis układu dynamicznego za pomocą równań różniczkowych nie jest najlepszym pomysłem z prostego powodu: grupa, bez dodatkowych założeń, nie jest zbiorem liniowym i zdefiniowanie zwykłej operacji różniczkowania (operacji różnicowej) nie jest w ogólnym przypadku możliwe. Ponadto okazuje się, że wiele ważnych własności układów dynamicznych,takich jak: ciągłości, przyczynowość, stacjonarność itp., odnosi się do dużo szerszej klasy operacji niż wspomniane operacje różniczkowe lub różnicowe. Dotychczasowa praktyka wynika zatem raczej z decydującej roli, jaką w teorii układów mechanicznych odgrywają do chwili obecnej równania różniczkowe (różnicowe).

DEFINICJA. Układ dynamiczny określony na częściowo uporządkowanej lzga. $(G, \leq)$ rozpatrywany w pracy definiujemy jako uporządkowany zbiór, czyli ósemkę, wprowadzonych w (B1-B8) wielkości $((G, \leq), X, X_u, U, X_y, Y, \phi, \psi)$.

LITERATURA

[1] Bourbaki N.: Algebre: Groupes et Corps Ordonnws, Modules Sur les Anneaux Principaux, Wlwments de Mathwmatique, Herman, Paris 1964.

[2] Emre E.:On Necessary and Sufficient Conditions for Regulation of Line- ar Systems Over Rings, SIAM J.Control and Optimization, Vol.20 (1982), 155-160.

[3] Emre E.,Khargonekar P.P.:A Note on Dynamic Output Feedback For Linear Systems Over Rings, IEEE AC,Vol.AC-29 (1984) ,88-90.

[4] Falb P.L.,Freedman M.I.:A Generalized Transform Theory For Causal Operators, SIAM J.Control, Vol.7(1969),452-471.

[5] Falb P.L.,Freedman M.I.,Zames G.:Input-Output Stability - A General Viewpoint,Fourth Congress IFAC Warszawa 16-21 June 1969,WCT-NOT, Tech. Sesion N.41,3-15.

[6] Freedman M.I.,Falb P.L.,Zames G.:A Hilbert Space Stability Theory Over Locally Compact Abelian Groups,SIAM J.Control,Vol.7,(1969), 479-495.

[7] Harris C.J., Valenca J.M.E.: The Stability Of Input-Output Dynamical Systems, Academic Press London, New York 1983.

[8] Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.: Topics in Mathematical System The ory, Mc Graw-Hill Book Comp., New York 1969.

[9] Kamen E.W., Green W.L.: Asymptotic Stability of Linear Difference Equation Defined Over a Commutative Banach Algebras, J. Math.Anal. Appl., 75 (1980), 584-601.

[10] Khargonekar P.P.:On Matrix Fraction Representations for Linear Systems Over Commutative Rings,SIAM J.Control and Optimization, Vol.20 (1982), 172-197.

[11] Skrzypczyk J.:Frequency Methods in Hilbert Space Theory of Dynamic Systems,Proc. of the VIII Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, Prague 1978,Acad.Publ.House of the Czech.Acad.of Science,Prague 1979,659-664.

[12] Skrzypczyk J.:Periodic and Almost Periodic Vibrations in Nonlinear Dynamic Systems Described by Integral Equations Over Locally Compact Abelian Groups,XIth Int.Conf.on Nonlinear Oscillations,Budapest 17-23 1987.

[13] Skrzypczyk J.:Statistical Linearization Of Nonlinear Dynamic Systems Described By Integral Equations Over Locally Compact Abelian Groups, Proc. of Conf. Nonlinear And Random Vibrations, Oberwolfach 1986 September 14-20,Oberwolfach 1987.

[14] Skrzypczyk J.: A Note On Nonlinear Volterra Integral Equations Over Locally Compact Groups, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser.Mat.-Fiz. 28, Gliwice 1989,353-363.

[15] Skrzypczyk J.: On Existence of Periodic and Almost Periodic Motions in Nonlinear Dynamical Systems Over Locally Compact Abelian Groups, in Computational Stochastic Mechanics, Balkema, Rotterdam 1994 (w druku)

[16] Skrzypczyk J.: Dynamika złożonych układów mechanicznych o parametrach losowych, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser.Mechanika 120, Gliwice 1994.

[17] Wunsch G.:Systemtheorie,Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Partig K.-G.,Leipzig 1975.

Recenzent: prof. dr hab. inż . A. Tylikowski

Wpłynęło do redakcji w grudniu 1994 r.