ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: ENERGETYKA z. 130 Nr kol. 1397

Krzysztof GRYSA
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

Michał CIAŁKOWSKI
Politechnika Poznańska, Poznań

ZAGADNIENIA ODWROTNE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO - PRZEGLĄD LITERATURY LAT 1989-1995*

Streszczenie. Przedstawiono przegląd prac z dziedziny zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego, opublikowanych w latach 1989-1995. Omówiono:
- zagadnienia identyfikacji temperatury brzegu (jedno- i wielowymiarowe, liniowe i nieliniowe),
- liniowe i nieliniowe zagadnienia identyfikacji współczynników,
- zagadnienia ustalone,
- zagadnienia identyfikacji położenia lub/i intensywności źródeł ciepła,
- zagadnienia odwrotne dotyczące wymiany ciepła przez promieniowanie.

THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS - A REVIEW OF PAPERS PUBLISHED IN 1989-1995

Summary. A review of papers (published in 1989-1995) that concern the inverse heat conduction problems is presented. The following topics are mentioned:
- boundary temperature identification problems (one- and multidimensional, linear and non-linear)
- linear and non-linear problems of coefficients identification
- steady state problems
- problems of identification of the source intensity and/or location
- inverse problems in heat conduction with radiation

* Praca powstała w ramach grantu KBN nr 8T10B01913.

WSTĘP

Ostatnie lata przyniosły - na skutek szybkiego rozwoju elektronicznych technik obliczeniowych - olbrzymi postęp w dziedzinie rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Zagadnienia te, należące do klasy źle postawionych zagadnień matematyki, ze względu na swoją trudność i problemy wyznaczenia stabilnych rozwiązań, dopiero od około 30.-40. lat goszczą częściej na łamach literatury fachowej.

Przedmiotem rozważań w pracach dotyczących tej tematyki są metody wyznaczania temperatur i strumieni ciepła na brzegu rozważanego obszaru na podstawie pomiarów temperatury w jego punktach wewnętrznych oraz zagadnienia określenia lokalnych własności termicznych lub termomechanicznych ciała.

Problematyka, od której rozpoczął się rozwój metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego ponad 50 lat temu, czyli problematyka związana z badaniami klimatu, pojawia się obecnie niezbyt często na łamach czasopism, publikujących prace dotyczące zagadnień odwrotnych. W ostatnich latach prac takich było niewiele (np. [92]).

W latach wcześniejszych, których dorobek doczekał się opracowań przeglądowych lub cytujących obszerną literaturę ([1], [2], [15], [14], [32], [42], [48], [52], [65], [95],[51]), rozwijane były głównie metody analityczne, dotyczące zagadnień liniowych, szczególnie zależnych od jednej zmiennej przestrzennej i czasu. Także metody regularyzacji były szeroko rozwijane i doczekały się swoich opracowań podsumowujących dorobek w tej dziedzinie (chociażby znana monografia [96]) oraz przeglądowych ([3]). W ostatnich latach zaczęły pojawiać się prace przeglądowe, omawiające zagadnienia odwrotne, dotyczące poszczególnych działów teorii przewodnictwa cieplnego (np. praca [17], w której przedstawiono dorobek z zakresie zagadnień odwrotnych wymiany ciepła przez promieniowanie, czy [55], gdzie omówiono zagadnienia odwrotne dotyczące wymiany ciepła i masy w ciałach dyspersyjnych). Dopiero lata osiemdziesiąte i dziewięćdziesiąte przyniosły znaczniejszy rozwój technik rozwiązywania zagadnień nieliniowych oraz dwu- i trójwymiarowych.

Coraz więcej pojawia się prac, w których rozwijane są metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych promieniowania ciał doskonale czarnych oraz nagrzewania poprzez promieniowanie.

W niniejszym przeglądzie uwagę skupiono głównie na pracach lat 1989-1995. Główny podział omawianych prac dokonany został ze względu na zagadnienia identyfikacji temperatury lub strumienia ciepła na brzegu, zagadnienia identyfikacji współczynników oraz identyfikacji położenia lub/i intensywności źródeł ciepła. Wewnątrz tych grup prac omówiono podgrupy liniowość - nieliniowość oraz jednowymiarowość - wielowymiarowość. Osobno omówiono prace dotyczące zagadnień ustalonych, w których identyfikowane są źródła ciepła oraz zagadnień odwrotnych, związanych z promieniowaniem.

ZAGADNIENIA IDENTYFIKACJI TEMPERATURY BRZEGU

Zagadnienia jednowymiarowe liniowe

Jedną z bardziej popularnych w latach siedemdziesiątych metod rozwiązywania liniowych jednowymiarowych zagadnień odwrotnych było wykorzystywanie transformacji Laplace'a. W pracy [21] metoda ta jest wykorzystana w połączeniu z metodą elementów skończonych. Po przetransformowaniu równania przewodnictwa (z niezerowym członem źródłowym) i warunków (w tym także związku określającego wewnętrzną odpowiedź temperaturową) autorzy formułują postać funkcjonałową zagadnienia, dzielą odcinek (0,1) na elementy skończone i wykorzystują aparat MES przy założeniu, że w każdym elemencie temperatura zmienia się liniowo. W efekcie zagadnienie sprowadzone jest w dziedzinie obrazów do układu równań algebraicznych, po rozwiązaniu którego numerycznie odwracana jest transformata temperatury. Przedstawione trzy przykłady zastosowania tego podejścia ilustrują jego wysoką efektywność dla przypadków identyfikowania stałej temperatury lub strumienia ciepła na brzegu. Jeden z przykładów dotyczy materiału dwuwarstwowego.

Zbliżone podejście zaprezentowano w pracy [19]. Względem zmiennych przestrzennych zastosowano metodę elementów skończonych, zaś względem zmiennej czasowej - metodę dyskretnej transformacji Fouriera. Otrzymana postać zagadnienia nie wymaga dalszej stabilizacji, a dokładność wyznaczanych strumieni ciepła poprawia się, gdy krok czasowy jest zmniejszany.

Wykorzystanie transformacji Laplace'a stało się podstawą wyznaczenia strumienia ciepła na brzegu warstwy płaskiej w pracy [90]. Przy odwracaniu transformat wykorzystuje się rozwinięcie występujących tam funkcji hiperbolicznych w szereg potęgowy względem parametru transformacji i obcięcie tych szeregów na trzecim wyrazie. Prezentowany jest przykład, z którego wynika, że błąd metody nie przekracza 3%.

W pracy [6] rozważane zagadnienie sprowadzono do równań całkowych typu splotowego. Autorzy założyli tutaj zależność warunków wymiany ciepła od czasu. Algorytm rozwiązywania zagadnienia przedstawiony jest opisowo, przy minimalnej ilości wzorów. Podano przykład możliwości zastosowania prezentowanej metody.

Całkowe równania typu splotowego były także rozważane w pracy [35]. Sprzężone z transformacją Laplace'a pozwoliły skonstruować pewne rozwiązania dla ciał o prostej geometrii. W pracy tej przedstawiono także rozwiązania przybliżone, uzyskane przez zastąpienie pochodnej po czasie różnicą wsteczną i wykorzystanie stowarzyszonych równań całkowych dla równania Helmholtza.

Stabilność rozwiązań badana była w pracy [25] przy wykorzystaniu metody różnic skończonych. Rozważane zagadnienie sprowadzono do równania macierzowego. Przedstawiono tam zależność dokładności rozwiązania od promienia spektralnego macierzy, odgrywającej kluczową rolę przy budowaniu rozwiązania.

W pracy [66] poprzez przedstawienie temperatury w węzłach jako iloczynu funkcji zależnej od czasu i pewnej zależnej od czasu przestrzennej funkcji kształtu sprowadzono równanie przewodnictwa cieplnego do postaci, w której pojawiają się temperatury węzłów siatki, zależne od czasu. Stosując następnie procedurę Galerkina sprowadza się równanie przewodnictwa do układu równań rożniczkowych na temperatury węzłowe, sformułowanych przy wykorzystaniu metody elementów skończonych. Dyskretyzacja odcinka pomiędzy brzegami warstwy płaskiej przebiega zgodnie z pewną strategią, nazwaną strategią deformującą siatkę. Przedstawiony jest przykład identyfikacji strumienia ciepła na wewnętrznej powierzchni dyszy silnika rakietowego przy wykorzystaniu omówionej techniki. Wprowadzenie strategii deformującej siatkę pozwala w sposób istotny zmniejszyć liczbę iteracji prowadzącą do rozwiązania zagadnienia z wymaganą dokładnością.

Sprzężenie metod regularyzacji Lavrentieva i odpowiedzi częstości urojonych było podstawą do wyznaczenia niestacjonarnego pola temperatury w przewodzącej ciepło ściance na podstawie wyników pomiarów temperatury w jej wewnętrznym punkcie, [102]. Otrzymano wyniki w postaci wygodnej do obliczeń numerycznych.

Poszukiwanie temperatur brzegu przy wykorzystaniu danych generowanych przez rozwiązania odpowiednich zagadnień prostych i regularyzacji było przedmiotem rozważań w pracy

[87]. Rozważano dane dokładne i obarczone błędem. Metoda ta nazwana jest algorytmem genetycznym (genetic algorithm). Autorzy są zdania, że metoda ta może okazać się niezwykle efektywna przy rozwiązywaniu wielowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła.

Zagadnienia jednowymiarowe nieliniowe

Efektywne metody rozwiązywania nieliniowych zagadnień pojawiły się dopiero wraz z rozwojem zastosowań komputerów.

W pracy [7] rozważa się nieliniowe zagadnienie w warstwie płaskiej, w którym ciepło właściwe i współczynnik przewodzenia ciepła zależą od temperatury. Zakłada się znajomość wewnętrznej odpowiedzi temperaturowej i formułuje się funkcjonał, opisujący błąd średnio-kwadratowy. Autorzy prezentują metodę rozwiązania tego zagadnienia za pomocą aproksymacji poszukiwanej funkcji w postaci kombinacji liniowej B-splajnów, a następnie zastosowania iteracyjnej metody regularyzacji z wykorzystaniem metody gradientów sprzężonych. Warunkiem zakończenia iteracji jest osiągniecie przez minimalizowany funkcjonał wartości zgodnej z dokładnością pomiaru wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych. Znaczne polepszenie dokładności rozwiązania uzyskuje się przyjmując a priori informację dotyczącą gładkości poszukiwanej funkcji. Przedstawione przykłady numeryczne dobrze ilustrują efektywność metody.

W pracy [5] rozważa się ciało złożone z wielu warstw płaskich, dla którego poszukiwane są charakterystyki wymiany ciepła na brzegu. W równaniu nieliniowym przewodnictwa cieplnego uwzględnione są efekty związane z wymianą masy. Zastosowano podejście podobne jak w omówionej wyżej pracy [7], tzn. aproksymację poszukiwanej funkcji w postaci kombinacji liniowej B-splajnów, a następnie zastosowanie iteracyjnej metody regularyzacji z wykorzystaniem metody gradientów sprzężonych. W pracy podany jest przykład numeryczny. We wnioskach autorzy podkreślają zależność dokładności wyników od położenia termopar w ciele i od ich ilości. W podobny sposób wyznaczono stałe w jednowymiarowym zagadnieniu wyznaczenia charakterystyk termicznych w przepływie dwufazowym, [9].

Problem dokładności rozwiązania ciekawie był rozważany w pracy [16]. Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano tam - podobnie jak w [7] i [5] - metodę gradientów sprzężonych. Aby poprawić wyniki iteracji, proponuje się przerwanie ich w celu dokonania wykorzystania dodatkowego pomiaru temperatury, który - wprowadzony do obliczeń - poprawia dokładność wyników. Uwzględnia się przy tym zaburzenie pola temperatury przez wprowadzoną termoparę.

Także w pracy [30] do wyznaczenia przybliżonej postaci współczynników zależnych od temperatury wykorzystano B-splajny, ale tu zastosowano adaptacyjną metodę sekwencyjną. Rozwiązanie konstruuje się tu w następujących czterech etapach: (1) Rozwiązanie odpowiadającego zagadnienia prostego metodą różnic skończonych; (2) Zapis poszukiwanych funkcji opisujących temperaturę i strumień ciepła na brzegu z wykorzystaniem B-splajnów (nazwano to parametryzacją); (3) Wyznaczenie parametrów związanych z tym opisem poprzez minimalizację ważonej normy średniokwadratowej. Występujący tu nieliniowy układ równań algebraicznych rozwiązano stosując algorytm Levenberga-Marquardta; (4) Podano warunki jednoznaczności rozwiązania; (5) Wygładzono i ustabilizowano rozwiązanie wykorzystując nadmiarowe dane z pomiarów wewnętrznych odpowiedzi; (6) Powyższe kroki stosowano w sposób sekwencyjny w obszarze czasowym. Przedstawione przykłady dobrze ilustrują efektywność obliczeń.

Często stosowana jest metoda różnic skończonych. Tą metodą w pracy [45] rozwiązano zagadnienie identyfikacji termicznych warunków na ogrzewanym brzegu skończonej warstwy płaskiej. Na podstawie pomiarów temperatury i strumienia ciepła na brzegu nieaktywnym (co analitycznie znajduje swój wyraz przez opis temperatury na tym brzegu) wyznaczono temperaturę i strumień ciepła na brzegu ogrzewanym. Nieliniowe są tu warunki wymiany ciepła na brzegu ogrzewanym, przy czym współczynnik wymiany ciepła zależy od czasu. Do uzyskania stabilnych rozwiązań wykorzystano wygładzanie (mollification method) z zastosowaniem funkcji:

$$\rho_\delta(t) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}}\exp\left[\frac{-t^2}{\delta^2}\right]$$

Po wykonaniu splotu tej funkcji z funkcjami występującymi w rozważanym zagadnieniu formułuje się zagadnienie stowarzyszone dla tak otrzymanych funkcji. Dowodzi się, że metoda jest bezwarunkowo stabilna, po czym wyznacza się metodą różnic skończonych rozwiązania. Przedstawiono przykład ilustrujący zastosowanie tej metody.

Przykład zastosowania innego schematu różnicowego ("slowly divergent"), sprzężonego z metodą regularyzacji Tichonowa, przedstawiony jest w pracy [24]. Do przedstawienia różnic w zachowaniu się błędu przy zastosowaniu rożnych innych algorytmów do tego samego problemu i przy tej samej siatce wykorzystano analizę Lax-Richtmyera.

Odmienne podejście przedstawiono w pracy [71]. Wykorzystano tu metodę przedstawioną w pracy [19] (omówionej wyżej), którą rozszerzono na przypadek zależności charakterystyk cieplnych ciała od temperatury. Zagadnienie rozwiązywane jest iteracyjnie.

W pracy [68] przedstawiona jest oryginalna metoda rozwiązywania nieliniowych zagadnień odwrotnych przy wykorzystaniu idei obserwatora stanu i zaburzeń, wprowadzonej w latach siedemdziesiątych do teorii układów dynamicznych. Wprowadza się schemat obserwatora na prostym przykładzie liniowego zagadnienia odwrotnego. Równania obserwatora są tworzone przez dodanie odpowiednich poprawek do równań opisujących wymianę ciepła. Te poprawki to błędy pomiaru temperatury w punktach wewnętrznych, przemnożone przez pewne wagi (stałe). Jako przykład rozważa się identyfikację historii zmian strumienia ciepła na powierzchni przy wymuszonej konwekcji podczas wrzenia na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz ścianki parownika. Zdaniem autorów najistotniejszą zaletą tego podejścia jest niewrażliwość rozwiązania na błędy pomiarowe, łatwa implementacja przez zmodyfikowanie istniejących programów komputerowych, służących do rozwiązywania zagadnień prostych i systemowe traktowanie zwykle nieznanego rozkładu temperatury początkowej w chwili uruchamiania algorytmu. Nie ma ograniczeń co do liczby czujników czy obserwacji, wielkości kroku czasowego czy przestrzennego, typu układu współrzędnych czy rodzaju ciała. Dopuszczalne są własności termiczne ciała zależne od temperatury, jak również materiały kompozytowe. Jedynie przy dużej dynamice zmian metoda jest mniej skuteczna ze względu na nieuniknione opóźnienia w fazie.

Zagadnienie odwrotne, rozważane jako dwupunktowe zagadnienie początkowo-brzegowe z warunkiem brzegowym postawionym poprawnie tylko na jednym brzegu i zastąpieniem warunku na drugim brzegu przez wewnętrzną odpowiedź temperaturową, rozważane było w pracy [86]. Jest ono rozwiązane różniczkowo-całkową zmodyfikowaną metodą Bellmana, zaadaptowaną do techniki dekompozycji obszaru. Autor podaje poszczególne kroki na drodze do uzyskania rozwiązania. Przykład ilustruje zastosowanie tego podejścia w praktyce.

Problem zagadnienia odwrotnego w przypadku wysokich temperatur rozważany był w pracy [26]. Omówiono w niej problem wyznaczenia temperatury brzegu pręta grafitowego, stanowiącego źródło ciepła w elektrycznym piecu oporowym do wyżarzania grafityzującego. Ponieważ w temperaturach rzędu 2300-2800 nie ma mowy o stosowaniu tradycyjnych termopar, a ponadto wszelkie charakterystyki termiczne są silnie zależne od temperatury, więc w celu wyznaczenia nieznanej temperatury brzegu pręta (rozumianej jako temperatura w piecu) próbowano wykorzystać różne metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych.

Zagadnienia wielowymiarowe liniowe

Wielowymiarowość często oznaczała kształt sferyczny, kulisty lub taki, w którym łatwo wprowadza się układy współrzędnych, pozwalające rozwiązywać zagadnienie zależne od jednej zmiennej przestrzennej i czasu. Dopiero użycie komputerów pozwoliło na efektywne rozwiązywanie zagadnień zależnych od dwóch i trzech zmiennych przestrzennych.

W pracy [8] rozważa się wielowarstwowe ciało o geometrii sferycznej, w którym wyznacza się temperaturę powierzchni zewnętrznej na podstawie wewnętrznej odpowiedzi temperaturowej. Prezentowany algorytm rozwiązywania zagadnienia bazuje na minimalizacji błędu średniokwadratowego metodą gradientów sprzężonych. W pracy brak jest przykładów numerycznych, ale podane są szczegółowo wzory opisujące poszczególne etapy rozwiązania.

W pracy [23] zagadnienie sprowadzono do minimalizacjo błędu średniokwadratowego (tzw. funkcjonał jakości), a następnie zdyskretyzowano, formułując je w języku elementów skończonych. Zastosowana metoda funkcji kary pozwoliła zbudować układ równań, z którego wyznaczono stabilne przybliżone rozwiązania. Jako przykład wyznaczono dla dwóch różnych siatek temperaturę brzegu obszaru płaskiego o kształcie kwadratu.

Oparte na przedstawieniu poszukiwanego rozwiązania w postaci szeregu zawierającego jego pochodne w punktach, w których zmierzono wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe oraz na metodzie regularyzacji podejście do zagadnień odwrotnych przedstawiono w pracy [58]. Równanie przewodnictwa cieplnego sformułowano dla obszaru dwuwymiarowego o dowolnych kształtach. Autor bazuje na pewnych wynikach wcześniejszych swoich prac, [54], otrzymując rozwiązanie w postaci szeregu, w którym należy wyznaczyć wspomniane pochodne (z założenia ograniczone). Pochodne te liczone są z wykorzystaniem metody regularyzacji. Przedstawiono jednowymiarowe przykłady, korespondujące między innymi z wynikami przedstawionymi w [14].

Zagadnienie dokładności rozwiązania interesująco rozważano w pracy [18]. Aby uwzględnić wpływ źródła ciepła, będącego elementem obcym w ogrzewanym ciele, zbudowano dwa modele matematyczne procesu - ścisły i przybliżony. Następnie metodą iteracyjną.

przy wykorzystaniu gradientów sprzężonych, wyznaczono strumień ciepła na brzegu obszaru. Jako przykład omówiono zagadnienie ogrzewania cylindrycznego ciała o skończonych wymiarach z grzałką w osi.

W pracy [44] do wyznaczenia temperatury tak punktów brzegowych, jak i wewnętrznych rozważanego obszaru zastosowano metodę Monte Carlo. Jak piszą autorzy, jest to idealna do zastosowania metoda, gdy dysponujemy komputerem z współbieżnymi procesorami, gdyż nie wymaga komunikacji pomiędzy nimi, dopóki nie zakończy się poszczególnych kroków tej procedury. Metoda opisana jest szczegółowo w pracy [40]. Jest ona bardzo efektywna w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych w ciałach o skomplikowanych kształtach. Dokładność metody jest porównywalna z dokładnością innych metod, natomiast czas pracy komputera jest krótszy. Metoda polega na przechodzeniu krok po kroku od punktu ze zmierzoną wewnętrzną odpowiedzią temperaturową do punktu brzegowego z wyznaczaniem po drodze temperatury w przypadkowo wybranych punktach leżących na kierunku "do brzegu". Podane są trzy przykłady, wszystkie dotyczące wyznaczania temperatury na powierzchni cylindrycznej na podstawie wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych, otrzymanych z termopar, umieszczonych we wnętrzu obszaru.

W pracy [10] poszukiwany jest strumień ciepła na brzegu trójwymiarowego obszaru na podstawie pomiarów temperatury na tym brzegu. Praca wykazuje w samym sformułowaniu tematu pewne podobieństwo do szerzej, ujmującej podobny problem (lecz w obszarze jednowymiarowym), pracy [20]. Przykład szczegółowy (symulacja) dotyczy identyfikacji strumienia ciepła rozłożonego w jednolity sposób na powierzchni.

Metodę elementów brzegowych do wyznaczenia warunków termicznych na brzegu obszaru zastosowano w pracach [57],[59] i [60]. W [57] zagadnienie zdyskretyzowano po czasie, a następnie wyznaczono w pierwszym etapie współczynniki wrażliwości, które wykorzystano w drugim etapie rozważań w procedurze nazwanej metodą specyfikacji funkcji (będącej odmianą metody Gaussa-Newtona). W obu etapach wykorzystano MEB, w której usunięto całkę po obszarze dzięki zastosowaniu wielokrotnej zasady wzajemności, [74]. Przedstawione przykłady dotyczą obszaru prostokątnego. Ilustrują one stabilność metody i dokładność wyników oraz ich słabą wrażliwość na błędy pomiarów wewnętrznych odpowiedzi. W pracy [59], aby otrzymać stabilne wyniki, zastosowano kombinowaną metodę specyfikacji funkcji i regularyzacji. W pracy [60] natomiast do tego celu posłużono się kombinowaną metodą "kroków w przyszłość" i regularyzacji.

MEB wykorzystano także w pracy [81] do wyznaczenia temperatur i strumienia ciepła w pobliżu kątowego załamania brzegu na podstawie wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych w ciele dwuwymiarowym. Wykorzystano schemat różnicowy ze względu na czas z "krokiem w przyszłość" i regularyzacją, podobnie jak w [60]. Okazało się, że dokładność rozwiązania w dużym stopniu zależy od kąta: im mniejszy kąt, tym większe problemy z dokładnością. Procedura zlokalizowanej regularyzacji pozwoliła obejść ten problem.

Podobnie jak w pracy [45] dla zagadnienia jednowymiarowego w pracy [73] zastosowano do zagadnienia trójwymiarowego metodę różnic skończonych, zaś do uzyskania stabilnych rozwiązań wykorzystano wygładzanie (mollification method). Analiza stabilności przedstawiona jest razem z przykładem numerycznym.

Natomiast w pracy [88] przedstawiono technikę rekonstrukcji tomograficznej rozkładu defektów w trójwymiarowym obszarze na podstawie niekompletnych i zakłóconych danych. Stowarzyszony problem prosty rozwiązano numerycznie, a następnie, aby rozwiązać zagadnienie odwrotne, wykorzystano algorytm ograniczonej optymizacji z wykorzystaniem techniki regularyzacyjnej, dotyczącej maksimum entropii. Przykłady numeryczne obrazują dobrą zgodność modelowej rzeczywistości z wynikami otrzymanymi proponowaną metodą.

Zagadnienia wielowymiarowe nieliniowe

W pracy [75] rozważane są dwa zagadnienia: stacjonarne i niestacjonarne. Do otrzymania rozwiązań w obu przypadkach wykorzystano metodę elementów brzegowych. W obu zagadnieniach współczynnik przewodnictwa cieplnego jest funkcją temperatury. Powoduje to konieczność posłużenia się transformacją Kirchhoffa. Wielkościami poszukiwanymi są transformaty Kirchhoffa funkcji opisujących warunki wymiany ciepła na brzegu obszaru. Formułowane są reprezentacje całkowe rozwiązań. Dyskretyzacja obszaru prowadzi do sformułowania problemu z wykorzystaniem MEB. Przedstawiono przykład zastosowania metody w przypadku zagadnienia stacjonarnego.

Podobne podejście, oparte na MEB, zaprezentowano w pracy [79]. Także i tu rozważane są zagadnienia stacjonarne i niestacjonarne, dla których formułowane są reprezentacje całkowe rozwiązań, a wielkościami poszukiwanymi są transformaty Kirchhoffa funkcji opisujących warunki wymiany ciepła na brzegu obszaru. Obszernie omówiono problem regularyzacji zagadnienia po zmiennych przestrzennych i po czasie. Liczne przykłady dwuwymiarowych zagadnień odwrotnych ilustrują przedstawione podejścia.

Zagadnienie regularyzacji, odgrywające bardzo ważną rolę przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych (źle postawionych), było przedmiotem rozważań w pracy [98]. Równanie przewodnictwa cieplnego sformułowano dla obszaru dwuwymiarowego o dowolnych kształtach, podobnie jak w pracy [58], jednak tutaj parametry fizyczne mogą być funkcjami zmiennych przestrzennych. Rozważano tam oszacowanie optymalnego parametru regularyzacji przy wykorzystaniu metody GCV (generalized cross-validation), dla zastosowania której jedynymi wymaganymi informacjami są dane pomiarowe oraz model matematyczny. Parametr ten pojawia się w wyrażeniu opisującym błąd średniokwadratowy. Metoda ta wraz z dynamicznym programowaniem stoi u podstaw wyznaczenia rozwiązania zagadnienia odwrotnego (strumienia ciepła na brzegu na podstawie wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych). Przedstawiono i przedyskutowano dwa przykłady numeryczne, na podstawie których omówiono zalety i ograniczenia metody.

Problem identyfikacji temperatury i strumienia ciepła na brzegu dwuwymiarowego obszaru był rozważany w pracy [63]. Autor uogólnił algorytm regularyzacyjny, dotyczący jednowymiarowych zagadnień na przypadek dwuwymiarowy. Stwierdził on jednakże, że nieliniowe zagadnienia dwu- i trójwymiarowe niezwłocznie potrzebują skutecznych i stabilnych metod rozwiązywania. Autor zbadał między innymi wpływ błędu danych początkowych na rozwiązanie zagadnienia odwrotnego.

ZAGADNIENIA IDENTYFIKACJI WSPÓŁCZYNNIKÓW

Zagadnienia jednowymiarowe nieliniowe

Metody stosowane do wyznaczania temperatury brzegu były z powodzeniem wykorzystywane także do wyznaczania nieznanych własności termicznych ciał.

W pracy [4], w której nieznanymi wielkościami (zależnymi od temperatury) są ciepło właściwe, współczynnik przewodnictwa cieplnego, gęstość, temperatura początkowa oraz charakterystyki dotyczące wymiany masy i strumienia ciepła przez zmieniającą się powierzchnię, wykorzystano tę samą metodę co w pracy [7], tzn. iteracyjną metodę regularyzacji z wykorzystaniem metody gradientów. Praca ta zawiera nowy element, jakim jest uwzględnienie zależności położenia powierzchni od czasu. Przedstawiono przykład numeryczny.

W pracy [11] rozważa się jednowymiarowe zagadnienie identyfikacji zmieniających w się w sposób odcinkowo-liniowy (w zależności od zmiennej przestrzennej) współczynników w opisie procesu transportu plazmy. Zbudowana jest suma odchyleń średniokwadratowych poszukiwanych i zmierzonych wartości temperatur (z wagami). Sumę tę traktuje się jako funkcjonał zależny od wektorów, opisujących wartości poszukiwanych współczynników. Minimum tego funkcjonału wyznacza poszukiwane współczynniki.

Problem wyznaczenia pojemności cieplnej zależnej od temperatury w ciele jednorodnym rozważany jest w pracy [47]. Nie zakłada się postaci pojemności cieplnej jako funkcji; dopiero na podstawie wyników oszacowuje się jej postać. Poszukiwaną pojemność cieplną oszacowuje się wykorzystując metodę gradientów sprzężonych oraz minimalizację równania stowarzyszonego. Badana jest dokładność metody za pomocą symulowanych dokładnych i obarczonych przypadkowym błędem danych, jakimi są pomiary temperatury na brzegu. Metoda cechuje się krótkim czasem obliczeń i dobrymi przybliżeniami pojemności cieplnej nawet przy niedokładnych wynikach.

Z kolei problem wyznaczenia liniowo zależnego od temperatury współczynnika przewodnictwa cieplnego (a ściśle mówiąc - tworzących go parametrów) w ciele ortotropowym rozważany był w [91]. Procedura iteracyjna bazowała tutaj na minimalizowaniu błędu średniokwadratowego. W celu rozwiązania zagadnienia posłużono się iteracyjną procedurą Levenberga-Marquardta.

W pracy [93] rozważano zagadnienie odwrotne dla jednowymiarowego równania przewodnictwa cieplnego z członem nieliniowym i nieznanym, zależnym od położenia współczynnikiem. Dane jest rozwiązanie dla pewnej chwili, nazwanej końcową. Udowodniono, że rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne. Przedstawiono także numeryczną metodę wyznaczenia rozwiązania tego zagadnienia.

Problem wyznaczenia zależnego od temperatury współczynnika przewodnictwa cieplnego w nieliniowym stacjonarnym równaniu przewodnictwa, zawierającym parametr, rozważany był w pracy [29]. Dodatkowe informacje, niezbędne do określenia poszukiwanego współczynnika, dostarczone są przez funkcję zależną od parametru, otrzymaną jako rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego. Dla tego problemu udowodniono twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania.

ZAGADNIENIA WIELOWYMIAROWE NIELINIOWE

W pracy [76] rozważano wymianę ciepła przez powierzchnię dwuwymiarowego obszaru. opisanego we współrzędnych biegunowych. Identyfikowanym współczynnikiem był zależny od miejsca i czasu współczynnik wymiany ciepła na brzegu. Metoda rozwiązania bazuje na wykorzystaniu informacji o temperaturze z przyszłości. Poszukiwany współczynnik jest aproksymowany przez pewne funkcje bazowe (liniowe lub "dachowe"). Wykorzystanie metody różnic skończonych oraz współczynników wrażliwości pozwala uzyskać dobre wyniki nawet dla nagłych i dużych zmian współczynnika wymiany ciepła lub liczby Biota.

Zagadnienie wyznaczenia charakterystyk temperaturowych włóknistych kompozytów rozważano w pracy [37]. Zagadnienie opisuje układ równań (odrębne równania dla każdego komponentu) zależnych od zmiennych r, z oraz czasu. Po uśrednieniu temperatur po przekroju włókna stosuje się transformacje Laplace'a i kosinusową Fouriera, sprowadzając zagadnienie do układu równań algebraicznych. Po ich rozwiązaniu odwraca się transformaty. Następnie w celu wyznaczenia nieznanych współczynników przewodnictwa cieplnego buduje się sumę kwadratów różnic zmierzonych i obliczonych średnich temperatur brzegu. Do tak otrzymanego funkcjonału stosuje się metodę Newtona i metodę Newtona-Gaussa w celu otrzymania optymalnych wartości poszukiwanych współczynników.

Do wyznaczenia zależnego od zmiennej kątowej współczynnika wymiany ciepła w zagadnieniu ustalonym dotyczącym rury o przekroju kołowym wykorzystano w pracy [70] dwie metody. Pierwsza, analityczna, wykorzystuje pewne podstawienie, linearyzujace zagadnienie oraz pewne szczególnego rodzaju rozdzielenie zmiennych. Druga - to wykorzystanie metody elementów brzegowych przy zastosowaniu transformacji Kirchhoffa, gdy współczynnik przewodnictwa cieplnego zależy od temperatury. W obu metodach wprowadzone są człony regularyzujące w celu zminimalizowania wpływu błędu pomiarowego na wyniki. Obie techniki zastosowano do obróbki danych eksperymentalnych. Otrzymane rezultaty są zgodne ze sobą i z wynikami otrzymanymi przez innych autorów. Obszernie omówiono zalety i wady takiego podejścia w porównaniu z metodą bazującą na podejściu energetycznym. Praca ta jest rozwinięciem wcześniejszych wyników, [67].

Metodę elementów brzegowych oraz transformację Laplace'a wykorzystano do wyznaczenia nieznanych własności termicznych oraz współczynnika wymiany ciepła w pracy [101]. Zagadnienie odwrotne zredukowano do zagadnienia optymalizacji, w którym szacuje się układ parametrów opisujących poszukiwane wielkości. Przeprowadzono eksperyment numeryczny, aby zbadać wpływ błędu pomiarów wewnętrznych odpowiedzi na wyniki obliczeń. Kilka przykładów ilustruje opisaną metodę, która jednak wykazuje dużą wrażliwość na błędy pomiarów.

W pracy [56] przedstawiona jest iteracyjna metoda wyznaczenia współczynnika wymiany ciepła dla obszaru dwuwymiarowego, charakteryzującego się tym, że jest wąski i długi. Współczynnik ten zależy od zmiennych przestrzennych. Problem zdyskretyzowano względem zmiennych przestrzennych stosując metodę elementów skończonych. Następnie w uzyskanym w ten sposób układzie równań rożniczkowych pierwszego rzędu względem czasu zastąpiono pochodną temperatury po czasie różnicą wsteczną. Iteracyjność metody związana jest z wprowadzaniem korekty do wartości szukanego współczynnika w celu otrzymania zgodności temperatur zmierzonych i wyliczonych. Podejście to zilustrowane jest trzema przykładami.

Ogólna procedura sekwencyjna do określenia N lokalnych współczynników wymiany ciepła na brzegu na podstawie zmiennych w czasie wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych, zmierzonych w N punktach, przedstawiona jest w pracy [99]. Własności termiczne ciała mogą zależeć od temperatury, zaś współczynnik wymiany ciepła - od położenia i czasu. Autor przyjmuje skokową zmienność współczynnika wymiany ciepła w zależności od parametru s, mierzonego wzdłuż brzegu i czasu. Wyznaczenie tego współczynnika odbywa się metodą iteracyjną (przedstawioną przez autora we wcześniejszej pracy, [97]), przy wykorzystaniu całego szeregu innych technik. Aby uzyskać stabilne rozwiązanie, pomimo wykorzystania danych obarczonych przypadkowym błędem, wykorzystuje się wygładzanie danych metodą najmniejszych kwadratów przy wykorzystaniu splajnow trzeciego stopnia, metodę kroków z przyszłości lub analizę w większych przedziałach. Trzy przykłady, w których wykorzystano dane eksperymentalne, ilustrują efektywność przedstawionej metody.

ZAGADNIENIA USTALONE

Zagadnienie odwrotne sprowadza się tutaj do rozważania równania eliptycznego. W pracy [49] rozważano rozwiązania numeryczne dwóch zagadnień odwrotnych: wyznaczenia temperatury brzegu przy danych temperaturowych z wnętrza obszaru dla zagadnienia liniowego oraz dla zagadnienia, w którym współczynnik przewodnictwa cieplnego zależy od temperatury. Przedstawione są trzy modele matematyczne: klasyczna metoda elementów brzegowych. metoda najmniejszych kwadratów oraz metoda minimum energii (w których ostatecznie także zagadnienie sprowadzone jest do całek po brzegu i rozwiązywane metodą elementów brzegowych). W metodzie elementów brzegowych wykorzystywano rożne aproksymacje zmian temperatury pomiędzy węzłami: oprócz podejścia klasycznego rozważano zmiany liniowe i kwadratowe. Podano także sformułowanie metody elementów brzegowych dla zagadnienia nieliniowego. Dla tego przypadku zależny od temperatury współczynnik przewodnictwa cieplnego przybliżany jest funkcją kwadratową na pododcinkach przedziału zmienności temperatury. Jak wykazano w pracy, tylko metoda minimum energii daje rozwiązania stabilne. jakkolwiek rezultaty otrzymane przez zastosowanie MEB oraz metody najmniejszych kwadratów też są poprawne. Jednak w tych ostatnich przypadkach zwiększanie liczby punktów węzłowych powoduje zmniejszanie się dokładności wyników. Rozważania dotyczące tak zagadnień liniowych, jak i nieliniowych są zilustrowane przykładami dotyczącymi obszarów dwuwymiarowych.

W sposób podobny do opisanego wyżej (stosując MEB oraz metodę minimum energii) rozważano nieliniowe zagadnienie odwrotne w pracy [50]. Natomiast w pracy [43], w której rozważano laminarny przepływ cieczy przez kanał ograniczony równoległymi ścianami, zastosowano do wyznaczenia temperatury brzegu metodę gradientów sprzężonych. Zagadnienie jest nieliniowe, dwuwymiarowe, gdyż prędkość cieczy jest funkcją odległości od ścianek kanału oraz od jego początku. Opisano krok po kroku procedurę obliczeń numerycznych i przedstawiono zastosowanie metody na trzech przykładach.

Metodę elementów brzegowych, stowarzyszoną z procedurą regularyzujacą, zastosowano także w pracach [78] i [80] do wyznaczenia współczynnika wymiany ciepła z otoczeniem. Jako przykład pokazano w pracy [78] wyznaczenie tego współczynnika dla obszaru cylindrycznego. W pracy [80] podejście to zastosowano do dość złożonego obszaru, w którym oprócz współczynnika wymiany ciepła identyfikowano także strumień ciepła i temperaturę na części brzegu. Omówiono tu wpływ współczynnika regularyzacji, wpływ podziału na elementy oraz wpływ błędu pomiarów wewnętrznych odpowiedzi na wyniki.

Stosowaną w pracy [37] metodę Gaussa-Newtona wykorzystano w pracy [100] do wyznaczenia zależnego od temperatury współczynnika wymiany ciepła przy warunkach brzegowych zależnych od zmiennych przestrzennych w ustalonym zagadnieniu wymiany ciepła. Dwa wyczerpująco opisane przykłady ilustrują skuteczność metody. Warte podkreślenia jest to, że metoda może być z powodzeniem stosowana do ciał o złożonych kształtach, a także do przypadków zagadnień nieustalonych, jak to miało miejsce w pracy [37].

ZAGADNIENIA IDENTYFIKACJI POŁOŻENIA LUB/I INTENSYWNOŚCI ŹRÓDEŁ CIEPŁA

Wspomniana wcześniej, przy omawianiu pracy [98], metoda GCV, doczekała się - w połączeniu z metodą regularyzacji - zastosowania w zagadnieniu identyfikacji intensywności źródła ciepła, rozłożonego na wewnętrznej powierzchni w warstwie płaskiej, [41]. Zagadnienie sformułowano w języku równań macierzowych; wykorzystano analizę współczynników wrażliwości, zaprezentowaną między innymi w [14]. Poszukiwana intensywność źródła jest zdyskretyzowana ze względu na czas i występuje w postaci wektora. Opisany został iteracyjny sposób wyznaczania współczynnika regularyzacji. Podane przykłady obszernie ilustrują cechy zastosowanych metod. Pracę cechuje przejrzystość i staranność.

Dwuwymiarowe ustalone zagadnienie przewodnictwa cieplnego z nieznanymi płaskimi źródłami ciepła było przedmiotem rozważań w pracy [77]. Korzystając z metody elementów brzegowych proponuje się sposób określenia położenia źródeł, ich rozmiaru oraz intensywności, przy czym jako dane wykorzystuje się temperaturę i strumień ciepła na brzegu rozważanego obszaru. Fakt, że zagadnienie jest źle postawione, utrudnia otrzymanie poprawnych rozwiązań. Stosuje się metody takie, jak np. ekstrapolacja Richardsona, do poprawienia dokładności rozwiązania.

Badanie źródeł ciepła o nieznanej intensywności i położeniu było przedmiotem rozważań pracy [46]. Wykorzystując metodę gradientów sprzężonych w dwuwymiarowym zagadnieniu odwrotnym zbadano przestrzenne i czasowe zmiany strumieni ciepła w otoczeniach, w których generowane było ciepło. Autorzy twierdzą, że metoda ta może posłużyć do wykrywania dużych zmian strumieni ciepła, np. w ściankach silników spalinowych czy w prętach, stanowiących paliwo nuklearne, co już ma charakter diagnostyczny. Ponadto, znając te strumienie ciepła, można sterować bardziej efektywnie procesem chłodzenia.

PROMIENIOWANIE

Wymiana ciepła poprzez promieniowanie

W pracach tych celem jest wyznaczenie temperatury powierzchni ciała nagrzewającego poprzez promieniowanie drugiego ciała przy zadanych temperaturze i strumieniu ciepła na powierzchni tego drugiego ciała i charakterystykach termicznych procesu. W pracach [83], [84] i [85] autorzy formułują całkową postać tego zagadnienia. W pracy [83] wykorzystano do określenia rozwiązania metodę regularyzacji Tichonowa, [94]. W pracy [84] posłużono się oprócz regularyzacji Tichonowa także tzw. funkcjami opto-geometrycznymi. W [85] zaproponowano algorytm, którego celem jest określenie takiego rozwiązania, otrzymanego równania całkowego, aby przy zminimalizowaniu strat ciepła otrzymać na powierzchni nagrzewanej temperaturę i strumień ciepła możliwie bliskie żądanym. Podane są przykłady zastosowania tego algorytmu do zagadnienia nagrzewania jednej powierzchni przez drugą, oddaloną od niej o pewną odległość H, przy czym zadana jest temperatura, która ma zostać osiągnięta na powierzchni ciała nagrzewanego.

Liniowe równanie przewodnictwa cieplnego z warunkiem wypromieniowania na brzegu rozważane było w pracy [69]. Wyznaczaną wielkością jest właśnie człon, opisujący promieniowanie na brzegu. Zagadnienie sprowadzono do równań całkowych, dla których omawia się jednoznaczność i stabilność rozwiązania. Ponieważ rozwiązanie tych równań całkowych jest bardzo trudne, zagadnienie rozwiązano w sposób przybliżony.

Problem oszacowania temperatury i strumienia ciepła brzegu półprzeźroczystej warstwy na podstawie pomiarów wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych był przedmiotem rozważań pracy [89]. Wchodziło tu w grę tak przewodnictwo, jak i promieniowanie. Zastosowano technikę różnic skończonych ze względu na czas i zaproponowano algorytm iteracyjny do rozwiązania tego zagadnienia.

Zagadnienia odwrotne promieniowania ciał doskonale czarnych

Zagadnienie odwrotne dla ciała doskonale czarnego zostało sformułowane po raz pierwszy w pracy [12]. Chodziło w nim o określenie temperatury powierzchni promieniującego ciepło doskonale czarnego ciała na podstawie pomiarów mocy spektralnej tego promieniowania.

Ponieważ stosowane metody rozwiązań tego zagadnienia korespondują z metodami stosowanymi przy zagadnieniach odwrotnych, o których mowa w innych częściach tego przeglądu. więc krótko przedstawiamy i te zagadnienia.

Początkowe prace z tego zakresu skupiały się na stosowaniu transformacji Laplace'a i procesu iteracyjnego oraz poszukiwaniu rozwiązania w zamkniętej postaci (np. [13], [53]), [39]. [82]), podobnie jak to miało miejsce w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XX wieku przy rozwiązywaniu innych zagadnień odwrotnych. Wszystkie jednak tak otrzymane rozwiązania nie wytrzymywały konfrontacji z rzeczywistymi danymi (znany problem niestabilności rozwiązań zagadnień źle postawionych).

Ostatecznie problem ten został sformułowany w postaci całkowego równania Fredholma pierwszego rodzaju, charakterystycznej dla źle postawionych zagadnień. Od takiej postaci zagadnienia już tylko krok do metod regularyzacji. W pracy [27] do znalezienia stabilnego rozwiązania tego zagadnienia zastosowano z dobrym skutkiem metodę regularyzacji Tichonowa w jej klasycznej postaci, [94].

ZAKOŃCZENIE

Jak wspomniano we wstępie, szybki rozwój metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego pozostaje w ścisłym związku z rozwojem elektronicznych technik obliczeniowych. Duża liczba prac, w których ostatecznie wyniki otrzymuje się przy wykorzystaniu metody elementów brzegowych, elementów skończonych czy różnic skończonych. potwierdza to.

Oprócz prac idących w kierunku rozwoju technik obliczeniowych odnotować należy także prace rozwijające teorię. Należą do nich takie prace, jak [22] czy [28], gdzie rozważa się jednoznaczność i stabilność funkcji opisujących trójwymiarowe źrodła ciepła, [38], w której rozważa się ciągłą zależność rozwiązań zagadnień odwrotnych od danych, [36], gdzie między innymi porównano metodę regularyzacji Tichonowa z metodą TSVD (truncated singular value decomposition), czy zbliżoną do niej pracę [34], traktującą o metodzie SVD.

Prowadzone są też prace w kierunku rozwiązywania zagadnień odwrotnych dla pól sprzężonych. Można tu wspomnieć o pracy [20], a także o [33], [35] (w tej ostatniej podana jest także obszerna literatura, dotycząca zagadnień odwrotnych) czy [31].

Interesujące są zastosowania metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych pól temperatur do takich zagadnień, jak problem wypromieniowania ciepła przez meteory, przelatujące przez wyższe partie atmosfery [62], czy próba rozwiązania zagadki meteora tunguskiego [61]. Także w medycznej radiometrii mikrofalowej czy w leczeniu niskimi temperaturami próbuje się wykorzystać metody, stosowane przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego, [64], [72].

Metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych pól temperatur wykraczają coraz bardziej poza ramy metod analitycznych i poza ramy wytyczone przez klasyczną teorię wymiany ciepła. Przyszłość, która związana jest z rozwojem technik numerycznych, pozwoli zapewne w jeszcze pełniejszy sposób potraktować sprzężenia pól temperatury z innymi polami, a to prowadzić będzie zapewne do nowych metod monitorowania nie tylko pól temperatur.

LITERATURA

1. Alifanov O.M.; Obratnye zadaci tepłoobmena v issledovanii teplovych processov i proektirovanii techniceskich sistem. Inz.-Fiz. Zhurnal, tom 33, nr 6, 1977.
2. Alifanov O.M.; Identifikacija processov teploobmena letatel'nych apparatov (vvedenie w teoriju obratnych zadac teploobmena). Mashinostroenije, Moskva 1979.
3. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V.; Extremal Methods of Solution of Ill-Posed Problems (in Russian), Nauka, Moskva 1988.
4. Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V.; Identifikaciya charakteristik teplovogo vzaimodeystviya materialov s gazowymi potokami. Teplofiz. Vys. Temp. (USSR), tom 28, nr 2, s.323-30, 1990.
5. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V.; Determination of Charakteristics in Thermal Interactions of Materials with High-Enthalpy Gas Flows through Methods of Inverse Problems. In: Ad vanced Computational Methods in Heat Transfer. Ed. by L.C. Wrobel; C.A. Brebbia; A.J. Nowak. Proc.of the First Int. Conf., Southampton, UK, 17-20 July 1990. Publ.: Comput. Mech. Publications, Southampton, UK, tom 1, s. 323-330.
6. Aryutkin Yu.I., Kuryakin V.F., Semenov Yu.K.; Rascetno- eksperimental'nyj metod reseniya temperaturnych zadac pri peremen- nych po koordinate i po vremeni granicnych uslovijach. Inz.-Fiz. Zhurnal, tom 61, nr 3, s.479-84, 1991.

7. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V.; Boundary Inverse Heat Conduction Problem in Parametric Form. In:Advanced Computational Methods in Heat Transfer II. Ed. by L.C. Wrobel; C.A. Brebbia; A.J. Nowak. Proc.of the Second Int. Conf.on Advanced Comp. Methods in Heat Transfer HT/92. Publ.: Comput. Mech. Publications, Southampton, UK, tom 1, s. 479-489.
8. Alifanov O.M., Nenarokomov A.V.; Trechmernaya obratnaya zadaca teplopro]vodnosti v ekstremal'noy postanovke. Doklady Akademii Nauk (Russia), tom 325, nr 4-6, s.950-4, 1992.
9. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V., Repin I.V.; Determinantion of Characteristics of the Thermal Interaction of Materials with Two-Phase Flows by the Inverse Problem Method. High-Temperature (USA), tom 31, nr 3, s.543-8, 1993.
10. Aksenov V.P., Isaev Yu.V., Zakharova E.V.; Heat flux measurement by the temperature field of a heated surface. I. Uniform flux. Inzh.Fiz.Zhurnal, tom 67, nr 3-4, s.275-80, 1994.
11. Andreev V.F., Popov M.A.; Inverse coefficients of the problem for transport equations of plasma physics. Comp.ans Math. Physics, tom 6, nr 1, s.16-24, 1995.
12. Bojarski N.N.; Inverse black body radiation. IEEE Trans. Antennas Propagat., tom AP-30, s.778-780, 1982.
13. Bojarski N.N.; Closed form approximation to the inverse black body radiation problem. IEEE Trans. Antennas Propagat., tom AP- 32, s.415-418, 1984.
14. Beck J.V., Blackwell B., St.Clair Jr Ch.R.; Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. A Wiley-Interscience Publ. New York,1985.
15. Baumeister J.; Stable Solution of Inverse Problems. Friedr.Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden,1987.
16. Balakovskii S.L.; Resenie obratnych zadac teploobmena dwuchmodel'nym metodom. Inz.-Fiz. Zhurnal, tom 57, nr 3, s.500-5, 1989.
17. Belonogov E.K. Postanovki i metody resenija obratnych zadac radiacyonnogo teploobmena. Inz.-Fiz.Zhurnal, tom 56, nr 3, s.491-8, March 1989.
18. Balakovskii S.L., Dilgenskii N.V.; Two-model Iteration Method for the Solution of an Inverse Boundary Heat Exchange Problem. J.of Eng.Physics (USA), tom 56, nr 2, s. 226-31, 1989. Tlumaczenie z: Inz.-Fiz. Zhurnal,tom 56, nr 2, s.313-19, 1989.

19. Bayo E., Moulin H., Cristalle O., Gimenez G.; Well-Conditioned Numerical Approach for the Solution of the Inverse Heat Conduction Problem. Numer.Heat Transfer, Part B, tom 21, s.79-98, 1992.

20. Ciałkowski M.J., Grysa K.; On a certain inverse problem of temperature and thermal stresses fields. Acta Mechanica, tom 36, s. 169-185, 1980.

21. Chen H.T., Chang S.M.; Application of the Hybrid Method to Inverse Heat Conduction Problems. Int.J.of Heat and Mass Transfer (UK), tom 33, nr 4, s.621-8, 1990.

22. Cannon J.R; Perez-Esteva S., Uniqueness and Stability of 3D Heat Sources. Inverse Problems (UK), tom 7, nr 1, s.57-62, 1991.

23. Ciałkowski M.J., Grysa K., Jankowski J.; Inverse Problems of the Linear Nonstationary Heat Transfer Equation. ZAMM, tom 72, s. T611- T614, 1992.

24. Carasso A.S., Slowly Divergent Space Marching Schemes in the Inverse Heat Conduction Problem. Num.Heat Transfer, Part B (UK), tom 23, nr 1, s.111-26, 1993.

25. Ciałkowski M.J., Grysa K., Jankowski J.; Numerical Stability Investigation of the Inverse Heat Conduction Problem. ZAMM, tom 74, s. T558-T560, 1994.

26. Chuanxing L., Mingsheng H., Hongwei Z.; Continuous determination of temperature in graphitizing resistance furnaces using inverse heat conduction. Elektrowaerme Int., Ed. B, tom 54, nr 1, s.B40-2, 1996.

27. Dou L., Hodgson J.WE.; Application of the Regularization Method to the Inverse Black Body Radiation Problem. IEEE Trans. Antennas Propagat., tom 40,, nr 10, s.1249-1253. 1992.

28. Denisov A.M., Solov'eva S.I.; Unique solvability of an inverse problem for the stationary heat conduction equation. Comp.Math. and Modeling. tom 5, nr 2, s.162-4, 1994.

29. Denisov A.M., Solov'eva S.I.; Determination of the coefficient in the stationary nonlinear equation of heat conduction. Comput. Math. and Modeling. tom 6, nr 1, s.1-4, 1995.

30. Flach G.P., Ozisik M.N.; An Adaptive Inverse Heat Conduction Method with Automatic Control. Trans.of the ASME J.of Heat Transfer (USA), tom 114, nr 1, s.5-13, 1992.

31. Figueiredo I., Trabucho L.; A class of contact and friction dynamic problems in thermoelasticity and in thermoviscoelasticity. Int.J.of Engng Science, tom 33, nr 1, s.45-66, 1995.

32. Grysa K., Ciałkowski M.J.; Zagadnienia odwrotne pól temperatur - przegląd temperatury. Mech.Teoret.Stos. tom 18, nr 4, s. 535-554, 1980.

33. Grysa K., Ciałkowski M.J., Kaminski H.; An inverse temperature field in the theory of thermal stresses. Nucl. Engng. Design, tom 64, nr 2, s. 169-184, 1981.
34. Gerlach W., Unger F., von Wolfersdorf L.; On approximate computation of the heat flux of a body from the known surface temperature. ZAMM tom 67, nr 6, s.241-7, 1987.
35. Grysa K.; O ścisłych i przybliżonych metodach rozwiązywania zagadnień odwrotnych pól temperatur. Politechnika Poznańska, Rozprawy nr 204 Poznań, 1989 r.
36. Gilliam D.S., Lund J.R., Vogel C.R.; Quantifying Information Content for Ill-Posed Problems. Inverse Problems (UK), tom 6, nr 5, s.725-36, 1990.
37. Goncharov I.V; Mikov V.L. Resenie obratnoj zadaci po opredeleniju trech charakteristik voloknistogo kompozita. Inz.-Fiz. Zhurnal,tom 58, nr 3, s.493-9, 1990.
38. Golik W.; Continuous Dependance of Solution of Some Inverse Problems in Heat Conduction. Appl. Math. (Zast. Mat.), tom 21, s. 491-501, 1993.
39. Hunter J.D.; An improved closed-form approximation to the inverse black body radiation problem at microwave frequencies, IEEE Trans. Antennas Propagat., tom AP-34, s.261-262, 1986.
40. Haji-Sheikh A.; Monte Carlo Methods. Handbook of Numerical Heat Transfer, Chapt.16, W.J.Minkowycz at al., eds., Wiley, s. 673-722, 1988.
41. Huang C.H., Ozisik M.N.; Optimal regularization method to determine the strength of a plane surface heat source. Int.J.Heat and Fluid Flow (USA), tom 12, nr 2, s.173-8, 1991.
42. Hensel E.; Inverse Theory & Applications for Engineers. Prentice Hall Inc., 1991.
43. Huang C.H., Ozisik M.N.; Inverse Problem of Determining Unknown Wall Heat Flux in Laminar Flow Through a Parallel Plate Duct. Num. Heat Transfer, Part A (UK), tom 21, nr 1, s. 55-70, 1992.
44. Haji-Sheikh A., Buckingham. F. P.; Multidimensional Inverse Heat Conduction Using the Monte Carlo Method. Trans.of the ASME, J.of Heat Transfer (USA), tom 115,nr 1, s. 26-33, 1993.
45. Hinestroza D., Murio D.A.; Recovery of the Transient Heat Transfer Coefficient in the Nonlinear Boundary Value Problem for the Heat Equation. Comp.Math.with Appl.(UK), tom 25, nr 5, s.101-11, 1993.
46. Huang C.H., Wu J.Y.; Two-dimensional inverse problem in estimating heat fluxes of an enclosure with unknown internal hest sources. J.of Applied Physics, tom 76, nr 1, s.133-41, 1994.

47. Huang C.H., Wu J.Y.; An inverse problem in predicting temperature dependent heat capacity per unit volume without internal measurements. Int.J.Num.Methods in Engng., tom 39, nr 4, s.605-18, 1996.
48. Imanaliev M.I.; Metody reshenija nelinejnych obratnych zadac i ich prilozhenie. Ilim. Frunze, 1977.
49. Ingham D.B.; Improperly Posed Problems in Heat Transfer. In: Boundary Element Methods in Heat Transfer, Ed. by L.C. Wrobel and C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, s. 269-294, 1992.
50. Ingham D.B., Yuan Y.; The Solution of a Nonlinear Inverse Problem in Heat Transfer. IMA Journal of Applied Mathematics (UK), tom 50, nr 2, s.113-32,1993.
51. Ingham D.B., Yuan Y.; The Boundary Element Method for Solving Improperly Posed Problems. Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1994.
52. Kozdoba L.A., Krukovskij P.G.; Metody resenia obratnych zadac teploperenosa. Izd. "Naukova Dumka", Kiev, 1982.
53. Kim Y., Jaggard D.J.; Inverse black body radiation: An exact closed-form solution. IEEE Trans. Antennas Propagat., tom AP-33, s.797-800, 1985.
54. Kurpisz K., Skorek J.; Inverse Heat Conduction Problem. Techn.Report of the Inst.of Thermal Technology (in Polish). Technical University of Silesia, Gliwice, Poland, Raport nr NB-300/RME-3/87.
55. Kolesnikov P.M.; Obratnye zadaci teploobmena v polidispersnych sredach. Inz.-Fiz. Zhurnal, tom 56, nr 3, s.503-9, 1989.
56. Kang H.J., Tao W.Q.; An Iterative Solution Scheme to Estimate Local Heat Transfer Coefficient Distribution Along the Surface of an Axisymmetric Body. In: Advanced Computational Methods in Heat Transfer. Ed. by L.C. Wrobel; C.A. Brebbia; A.J. Nowak. Proc.of the First Int. Conf., Southampton, UK, 17-20 July 1990. Publ.: Comput. Mech. Publications, Southampton, UK, tom 1, s. 297-308.
57. Kurpisz K., Nowak A.J.; Applying BEM and the Sensitivity Coefficient Concept to Inverse Heat Conduction Problems. In: Advanced Computational Methods in Heat Transfer. Ed. by L.C. Wrobel; C.A. Brebbia; A.J. Nowak. Proc.of the First Int. Conf., Southampton. UK, 17-20 July 1990. Publ.: Comput. Mech. Publications, Southampton, UK, tom 1, s. 309-321.

58. Kurpisz K.; Numerical Solution of One Case of Inverse Heat Conduction Problems. Trans.ASME, J.Heat Transfer, tom 113, nr 2, s.180-6, 1991.

59. Kurpisz K., Nowak A.J.; Boundary Elements and Combined Techniques for the Analysis of the Inverse Heat Conduction Problems. In:Advanced Computational Methods in Heat Transfer II. Ed. by L.C. Wrobel; C.A. Brebbia; A.J. Nowak. Proc.of the Second Int. Conf.on Advanced Comp. Methods in Heat Transfer HT/92. Publ.: Comput. Mech. Publications, Southampton, UK, tom 1, s. 399-408.

60. Kurpisz K., Nowak A.J.; BEM approach to inverse heat conduction problems. Engn.Anal. Boundary Elements (UK), tom 10, nr 4, s.291-7, 1992.

61. Kalenichenko V.V.; Effects of single and progressive fragmentation of a body in the inverse problem of the physical theory of fireballs. II Analysis of the Prairie Network fireballs. Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel, tom 10, nr 4, s.25-35, 1994.

62. Kalenichenko V.V.; Radiative heat transfer in fireballs. I. Method for solving the inverse problem for single-body fireballs. Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel, tom 11, nr 1, s.23-31, 1995.

63. Kuzin A.Ja.; Regularized numerical solution of the nonlinear, two-dimensional, inverse heat-conduction problem. Zhurnal Prikl. Mekhaniki i Tekhn. Fiziki, tom 36, nr 1, s.106-112, 1995.

64. Liauh C.T., Roemer R.B.; Multiple Minima in Inverse Hyperthermia Temperature Estimation Problems. Tran.of the ASME, J.of Biomech. Engng (USA), tom 115, nr 3, s.239-46, 1993.

65. Macevityj Ju.M., Mul'tanovskij A.V., Idetifikacija v zadacach teploprovodnosti. Izd. "NAukova Dumka", Kiev, 1982.

66. Mehta R.C., Jayachandran T.; Deforming Grid Method Applied to the Inverse Problem of Heat Conduction. J.of Thermophysics and Heat Transfer (USA), tom 3, nr 2, s.226-8, 1989.

67. Maillet D., Degiovanni A.; Methode Analytique de Conduction Inverse Appliquee a la Mesure du Coefficient de Transfert Local sur un Cylindre en Convection Forcee. Revue de Physique Appliquee (France), tom 24, nr 7, s.741-59, 1989.

68. Marquardt W; Auracher H. An Observer-Based Solution of Inverse Heat Conduction Problems.Int.J.of Heat and Mass Transfer (UK), tom 33, nr 7, s.1545-62, 1990.

69. Mohsenj K.; Determination of an Unknown Radiation Term in an Inverse Problem of Heat Equation. Int.Comm.in Heat and Mass Transfer (UK), tom 17, nr 6, s.839-49, 1990.

70. Maillet D., Degiovanni A., Pasquetti R.; Inverse Heat Conduction Applied to the Measurement of Heat Transfer Coefficient on a Cylinder: Comparison Between an Analytical and a Boundary Element Technique. Trans.of the ASME, J.of Heat Transfer (USA), tom 113, nr 3, s.549-57, 1991.

71. Moulin H.C., Bayo E.; Well-Conditioned Numerical Method for the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem. Num.Heat Transfer, Part B (UK), tom 22, nr 3,s.321-47, 1992.

72. Mizushina S., Ohba K., Abe K., Mizoshiri S., Sugiura T.; Recent trends in medical microwave radiometry. IEICE Trans.on Communications, tom E78-B, nr 6, s.789-98, 1995.

73. Murio D.A., Zheng H.C.; A stable algorithm for 3D-IHCP. Computers Math. with Appl., tom 29, nr 5, s.97-110, 1995

74. Nowak A.J.; The Multiple Reciprocity Method of solving heat conduction problems. Proc. 11th BEM Conf., Cambridge, Massachusetts, USA (ed. C.A.Brebbia & J.J.Connor) Springer-Verlag, tom 2, s.81-95, 1989.

75. Le Niliot C., Papini F., Pasquetti R.; Boundary Element Method for Inverse Heat Conduction Problems. In: Advanced Computational Methods in Heat Transfer. Ed. by L.C. Wrobel; C.A. Brebbia; A.J. Nowak. Proc.of the First Int. Conf., Southampton, UK, 17-20 July 1990. Publ.: Comput. Mech. Publications, Southampton, UK, tom 1, s. 285-295.

76. Osman A.M., Beck J.V.; Nonlinear Inverse Problem for the Estimation of Time- and Space-Dependent Heat Transfer Coefficients. J.of Thermophysics and Heat Transfer (USA), tom 3, nr 2, s.146-52, 1989.

77. Ohmichi M., Noda N,; Inverse analysis of two-dimensional steady state heat conduction problem with many plane hest sources. Trans.of the Inf.Processing Soc.of Japan, tom 36, nr 11, s.2266- 72, 1955.

78. Pasquetti R., Le Niliot C.; Conduction inverse par elements de frontiere. Cas stationaire.France. Rev.de Phys.Appl. (France), tom 25, nr 1, s.99-107, 1990.

79. Pasquetti R., Le Niliot C.; Boundary Element Approach for Inverse Heat Conduction Problems: Application to a Bidimensional Transient Numerical Experiment. Num. Heat Transfer, Part B (UK), tom 20, nr 2, s.169-89, 1991.

80. Petit D., Debray V., Le Niliot C., Pasquetti R.; Identification of Local Heat Transfer Coefficient Using a Boundary Element Formulation. In: Advanced Computational Methods in Heat Transfer II. Ed. by L.C. Wrobel; C.A. Brebbia; A.J. Nowak. Proc.of the Second Int. Conf.on Advanced Comp. Methods in Heat Transfer HT/92. Publ.: Comput. Mech. Publications, Southampton, UK, tom 1, s. 467-477.

81. Pasquetti R., Petit D.; Inverse heat conduction problems with boundary elements: analysis of a corner effect. Eng.Analysis with Boundary Elements, tom 13, nr 4, s.321-31, 1994.

82. Ragheb H.A., Hamid M; An approximation of Planck's formula for the inverse black body radiation problem. IEEE Trans. Antennas Propagat., tom AP-35, s.739-742, 1987.

83. Rusin S.P., Leonov A.S.; 0n optimal mathematical design of hightemperature radiators.Power-Engineering (USSR Acad.of Sci.)(USA), tom 25, nr 4, s.142-6, 1987.

84. Rusin S.P.; Solution of inverse problems in the design of heating systems by means of opto-geometric functions.Soviet J.of Applied Physics (USA), tom 3, nr 1, s.19-25, 1989.

85. Rusin S.P., Leonov A.S.; Use of the regularization method to solve inverse radiative transfer problems. Power-Engineering (USSR Acad.of Sci.)(USA), tom 29, nr 2, s.131-6, 1991.

86. Repaci A.; A Nonlinear Inverse Heat Transfer Problem.4th Int. Workshop of the Bellman Continuum, Manhattan,KS, USA, May 1990.In: Comp.Math.with Appl. (UK), tom 21, nr 11-12 s.139-43, 1991.

87. Raudensky M., Woodbury K.A., Kral J., Brezina T.; Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problem. Num.Heat Transfer, Part B, tom 28, nr 3, s.293-306. 1995.

88. Ramos F.M., Giovannini A.; Solution of a multidimensional heat conduction inverse problem using the finite analytic metod and principle of maximum entropy. Int.J. Heat and Mass Transfer, tom 38, nr 1, s.101-11, 1995.

89. Ruperti Jr. N.J., Raynaud M., Sacadura J.F.; A method for the solution of the coupled inverse heat conduction-rdiation problem. Trans. ASME, J.Heat Transfer, tom 118, nr 1, s.10-17, 1996.

90. Surkov G.A., Lanin Yu.I.; An Engineering Method for Determining the Heat Flux from Temperature Measurements. Heat Transfer Soviet Research (USA), tom 23, nr 5, s.579-85, 1991.

91. Sawaf B., Ozisik M.N., Jarny Y.; An inverse analysis to estimate linearly temperature dependenttermal conductivity components and heat capacity of an orthotropic medium. Int.J.Heat and Mass Transfer, tom 38, nr 16, s.3005-10, 1995.
92. Shen P.Y., Pollack H.N., Huang S., Wang K.; Effects of subsurface heterogenity on the interference of climate change from borehole temperature data: model studies and field examples from Canada. J.of Geophysical Research, tom 100, noB4, s.6383-96, 1995.
93. Savateev E.G., Riganti R.; Inverse problem for the nonlinear heat equation with the final overdetermination. MAth. and Comp. Modelling, tom 22, nr 1, s.29-43, 1995.
94. Tikhonov A.N.; Regularization of incorrectly posed problems. Sov. Math. Dokl., tom 4.,s.1624-1627, 1963.
95. Temkin A.G.; Obratnye metody teploprovodnosti. Izd. Energia, Moskva, 1963.
96. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ja.; Metody resenija nekorrektnych zadac. Nauka, Moskva 1979.
97. Taler J.; A general method for the experimental determination of local transient heat transfer coefficient. Warme- und Stoffubertrag, tom 23, s.283-289, 1988.
98. Trujillo D.M., Busby H.R.; Optimal Regularization of the Inverse Heat-Conduction Problem. J.of Thermophysics and Heat Transfer (USA),tom 3,nr 4,s. 423-7, 1989.
99. Taler J., Numerical Solutions for General Inverse Heat Conduction Problem. Waerme- und Stoffuebertragung (Germany), tom 27, nr 8, s.505-13, 1992.
100. Taler J., Nonlinear steady-state inverse heat conduction problem with space-variable boundary conditions.Trans.of the ASME, J.of Heat Transfer (USA), tom 114, nr 4, s.1048-51, 1992.
101. Tanaka M., Nakamura M., Shiozaki A.; A Boundary-Element Inverse Analysis Procedure for Estimation of Thermal Properties in Transient Heat Conduction.J. of the Soc.of Mat. Sci. Japan (Japan), tom 42, nr 477, s.708-13, 1993.
102. Trofimov A.S., Kryzhnii V.V., Kryzhnyaya E.P.; Calculation of the temperature of a heat transmitting surface from the results of indirect measurements. Inzh.Fiz.Zhurnal, tom 68, nr 1, s.156-9, 1995.

Recenzent: Dr hab.inż. Janusz Skorek

Wpłynęło do Redakcji 24.03.1998 r.

Abstract

The inverse heat conduction problems (IHCP) - in the contrary to the direct (initial-boundary) problems - still have no general method to deal with. The initial-boundary problems may be solved with use of BEM or related methods; the IHCPs- in view of the complexity and ill-posedness - are still a challenge for reaserchers. Many different problems concerning identification of the boundary temperature (heat flux), coefficient identification, change of the considered domain shape and so forth are called IHCP - and in general they are ill-posed. That is the main reason why so numerous approaches and methods the IHCP are considered. In the review 102 papers and monographs are briefly described and commentated.

Mostly papers are devoted to the linear and nonlinear problems of the boundary temperature (heat flux) identification. One of the most difficult problems is the solution dependance on time causing instabilities in the case of inaccurate input date. The Laplace transform is used rather rarely. The BEM and related methods are frequently applied.

Numerous papers deal with the stability problems.

In many papers nonlinear problems are considered. Such methods like Levenberg-Marquardt algorithm, mollification method, conjugate gradient method, Tikhonov regularization method are frequently used together with BEM, B-splines approximation or finite differences as a basic approach. Also steps in future method and some stohcastic ones are applicable to the IHCP.

The coefficient identification is also a frequent subject the researches deal with.

Most of the papers are devoted to the transient problems However, one can meet also papers devoted to the steady-state problems. In such a case for linear problems the elliptic equation is dealt with and BEM is the most popular basic method (together with energy balance, least square method and others).

Some papers are devoted to the problem of heat source intencity and/ot location identification. There are also papers that deal with radiation inverse problems being a modification of the temperature (heat flux) IHCP.

The methods of solving the IHCPs are more and more based on computer methods. However, the analytic ones still are important, especially when the basic problems are those of solution existence and/or uniqueness. Analitic methods are now almost always verified with what is called computer experiment.

But there is not a shadow of hope for finding a general method to deal with the IHCPs. However, variety of the inverse problems stands for a good justification of this situation.