ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

LUDWIK MÜLLER

OBLICZANIE NAPRĘŻEŃ W PODSTAWIE ZĘBA

TRANSPORT

Z. 8
GLIWICE
1988

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 933

LUDWIK MÜLLER

OBLICZANIE NAPRĘŻEŃ W PODSTAWIE ZĘBA

GLIWICE 1988

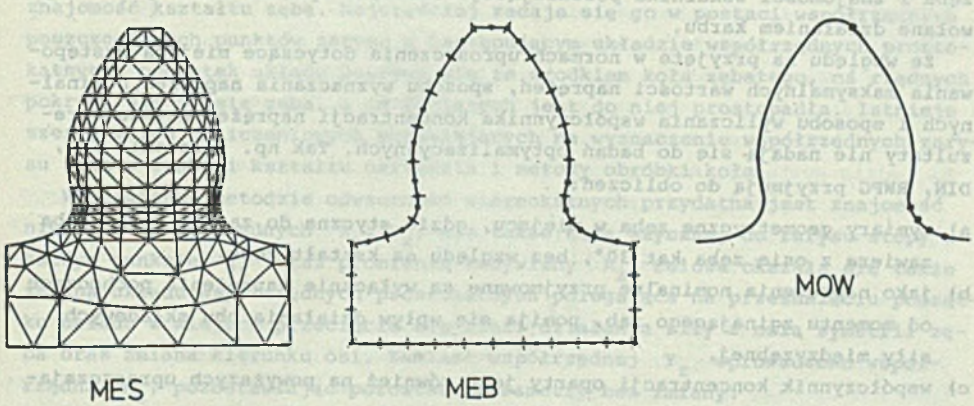
SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

WPROWADZENIE

Niniejsze opracowanie ma na celu przystosowanie metody odwzorowań wiernokątnych do numerycznych obliczeń naprężeń w stopie zębów kół zębatych*.



Rys. 1. Liczba elementów i punktów obliczeniowych w metodach: MES, MEB, MOW
Fig. 1. Number of elements and computation points in the methods: MES, MEB, MOW

Rysunek 1 przedstawia poglądowo trzy metody wyliczania naprężeń w stopie zęba.

1. Metoda elementów skończonych MES wymaga podziału zęba na przynajmniej 250 elementów i rozwiązania od 500 do 1500 równań liniowych.

2. Metoda elementów brzegowych MEB wymaga wyznaczenia na obrysie zęba przynajmniej 50 punktów i rozwiązania 100 równań liniowych.

3. Opisana w dalszej części opracowania metoda odwzorowań wiernokątnych daje zadowalające rezultaty już przy założeniu tylko 4 punktów na zarysie stopy zęba i rozwiązania 8 równań tym razem jednak nieliniowych, co stwarza nowe problemy obliczeniowe.

*Pracę wykonano w ramach CPBP 02.01 nr zadania 2.10 "Metody projektowania przekładni zębatych dużych mocy".

Ze względu na małą liczbę równań zadanie daje się rozwiązać za pomocą ogólnie rozpowszechnionych mikrokomputerów, w tym także za pomocą niektórych programowalnych komputerów kieszonkowych.

Ostatecznym celem obliczeń jest nie tylko określenie maksymalnych wartości naprężenia w stopie zęba, ale co aktualnie jest bardzo istotne ze względu na procedury optymalizacyjne, metoda daje możność oceny wpływu drobnych zmian kształtu zęba wywołanych zmianami parametrów narzędzia lub koła zębatego.

Normy i liczne metody obliczeń wytrzymałościowych kół zębatych bazują najczęściej na znajomości nominalnych naprężeń w określonym punkcie stopy zęba i znajomości wskaźnika pozwalającego określić spiętrzenie naprężeń wywołane działaniem karbu.

Ze względu na przyjęte w normach uproszczenia dotyczące miejsca występowania maksymalnych wartości naprężeń, sposobu wyznaczania naprężeń nominalnych i sposobu wyliczania współczynnika koncentracji naprężeń uzyskane rezultaty nie nadają się do badań optymalizacyjnych. Tak np. zalecenia ISO, DIN, RWPG przyjmują do obliczeń:

a) wymiary geometryczne zęba w miejscu, gdzie styczna do zarysu stopy zęba zawiera z osią zęba kąt 30°, bez względu na kształt zęba,
b) jako naprężenia nominalne przyjmowane są wyłącznie naprężenia pochodzące od momentu zginającego ząb, pomija się wpływ działania obu składowych siły międzyzębnej,
c) współczynnik koncentracji oparty jest również na powyższych upraszczających założeniach.

Jak wynika z badań elastooptycznych, tensometrycznych oraz numerycznych metodami MES i MEB a także z niektórych rozwiązań analitycznych, powyższe założenia nie mogą stanowić podstawy obliczeń optymalizacyjnych, wymagających dużej dokładności.

Ze względu na objętość opracowania szczegółowe algorytmy postępowania wydzielono w postaci osobnych załączników zawartych na końcu opracowania.

Rozdział 1

WYZNACZENIA ZARYSU ZĘBA

Podstawą wszelkich obliczeń wytrzymałościowych w każdej metodzie jest znajomość kształtu zęba. Najczęściej zadaje się go w postaci współrzędnych poszczególnych punktów zarysu w następującym układzie współrzędnych prostokątnych: początek układu pokrywa się ze środkiem koła zębatego, oś rzędnych pokrywa się z osią zęba, a oś odciętych jest do niej prostopadła. Istnieje szereg metod obliczeniowych pozwalających na wyznaczenie współrzędnych zarysu zęba w funkcji kształtu narzędzia i metody obróbki koła.

W omawianej metodzie odwzorowań wiernokątnych przydatna jest znajomość nie tylko współrzędnych X_z, Y_z, ale także kąta stycznej do zarysu stopy w każdym punkcie γ_z oraz promienia krzywizny R_z. Celowa okazała się także zmiana układu współrzędnych prostokątnych polegająca na przesunięciu początku układu w miejsce przecięcia się linii działania siły z osią symetrii zęba oraz zmiana kierunku osi. Zamiast współrzędnej Y_z wprowadzono współrzędną H_z, pozostawiając pozostałe parametry bez zmiany.

W załączniku 1 podano algorytm obliczania współrzędnych zarysu zęba X_z, H_z oraz wielkości kąta stycznej γ_z i promienia krzywizny stopy zęba R_z przy zastosowaniu następujących narzędzi do obróbki obwiedniowej:

a) zębatki o dowolnym kącie zarysu α_{on}, dowolnym kącie proturberancji α_{pn}, dowolnej wysokości proturberancji k, dowolnych dalszych parametrach zębatki: wysokości zęba h_{ao} i promienia zaokrąglenia głowy zęba narzędzia ρ_{ao},

b) narzędzie Fellowsa o dowolnym kącie zarysu, dowolnej liczbie zębów narzędzia, dowolnej wartości współczynnika przesunięcia zarysu narzędzia, dowolnej wartości promienia zaokrąglenia głowy zębów narzędzia i dowolnej wysokości głowy zębów narzędzia.

Te dwa przypadki wyczerpują większość praktycznych rozwiązań, mogą też stanowić schemat postępowania w innych przypadkach.

R o z d z i a ł 2

WYZNACZENIE PARAMETRÓW FUNKCJI ODWZOROWANIA ZĘBA NA PÓŁPŁASZCZYZNĘ

Wszyscy autorzy zajmujący się odwzorowaniem kół zębatych są zgodni, że nie jest konieczne wierne odwzorowanie całego koła zębatego, umożliwiające badanie wpływu sąsiednich zębów na wysokość naprężeń w zębie obciążonym. Okazało się, że nie jest też konieczne wierne odwzorowanie głowy zęba ograniczonej kołem wierzchołkowym. Najistotniejsze jest odwzorowanie stopy zęba, gdzie występują największe naprężenia i najsilniejsze ich zmiany.

Rysunek 2 przedstawia schematycznie 3 sposoby odwzorowania pojedynczego zęba. We wszystkich trzech przypadkach zrezygnowano z wiernego odwzorowania głowy zęba w okolicy koła wierzchołkowego, przyjęto natomiast ten sam układ współrzędnych.

Początek układu pokrywa się z punktem przecięcia się kierunku działania siły z osią zęba. Współrzędna H rośnie w kierunku stopy zęba, a jej wartość bez względu na liczbę zębów w kole nie przekracza całkowitej wysokości zęba, co ułatwia kontrolę wyników obliczeń. Współrzędna X jest prostopadła do kierunku H i skierowana w stronę obciążonej flanki zęba. W tych warunkach współrzędna H jest jednocześnie ramieniem działania siły zginającej ząb, a współrzędna X równa jest połowie szerokości zęba w rozpatrywanym miejscu.

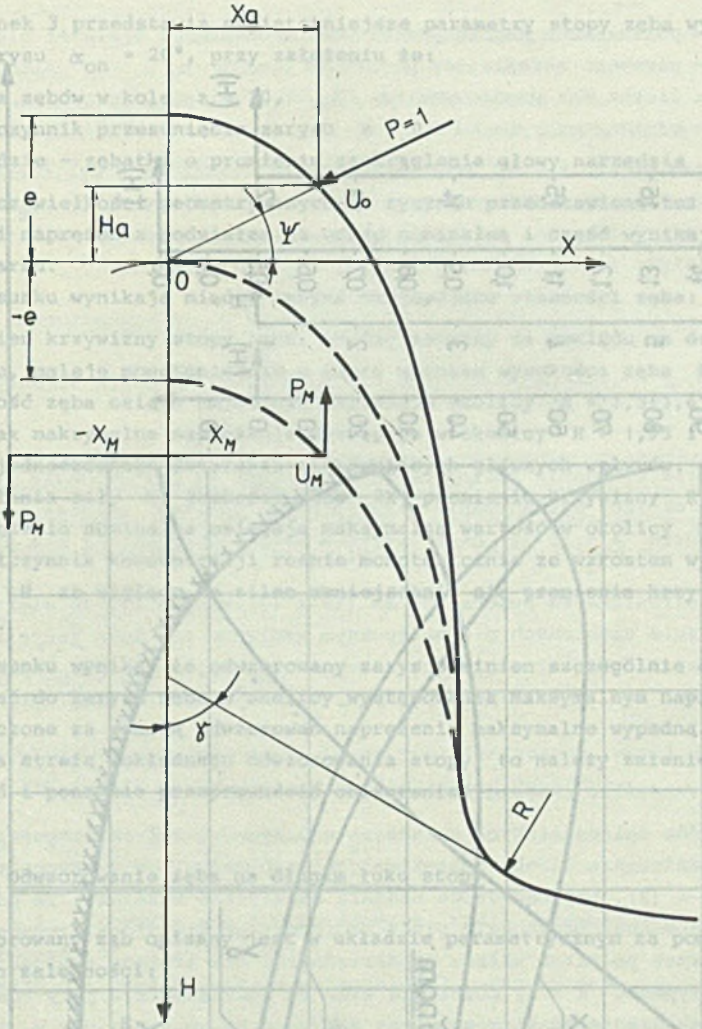
W literaturze przedmiotu spotyka się inne układy odniesienia, najczęściej początek układu pokrywa się ze środkiem koła zębatego, spotyka się też zamianę oznaczeń współrzędnych itd.

Jak wynika z rysunku 2, wymienione sposoby odwzorowania różnią się wielkością odcinka e, a tym samym przebiegiem flanki poza stopą zęba.

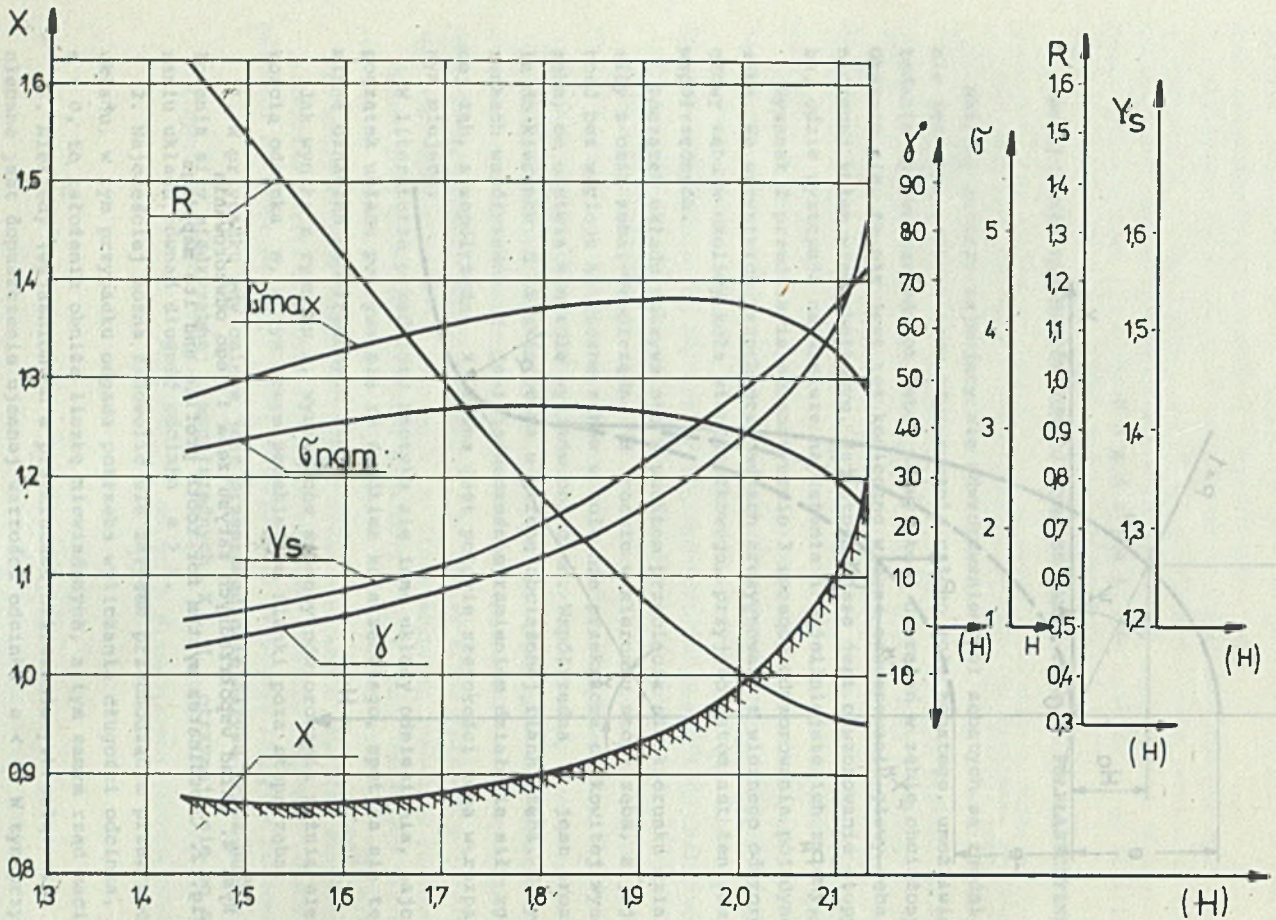
1. W przypadku gdy celowe jest przeprowadzenie zarysu przez punkt przyłożenia siły międzyzębnej o współrzędnych X_a, H_a, otrzymuje się po rozwiązaniu układu równań długość odcinka $e > 0$.

2. Najczęściej można zadowolić się zarysem przechodzącym przez początek układu, w tym przypadku odpada potrzeba wyliczania długości odcinka, bowiem $e = 0$, to założenie obniża liczbę niewiadomych, a tym samym rząd macierzy.

3. Niekiedy (wyjaśnionych w przykładach obliczeniowych załącznika 2) konieczne jest dopuszczenie ujemnej wartości odcinka $e < 0$. W tym przypadku konieczne jest dodatkowe obciążenie zęba momentem zginającym (parą sił P_M) i wyznaczenie maksymalnych naprężeń przez superpozycję.



Rys. 2. Układ współrzędnych zarysu zęba i jego odwzorowania
Fig. 2. Coordinates system for tooth profile and its mappings



Rys. 3. Kształt stopy zęba i wskaźniki dla z = 20, x = 0, α_{on} = 20°, ρ_o = 0,2

Fig. 3. Shape of toothfoot and indices for z = 20, x = 0, α_{on} = 20, ρ_o = 0,2

Rysunek 3 przedstawia najistotniejsze parametry stopy zęba wyliczone dla kąta zarysu $\alpha_{on} = 20°$, przy założeniu że:

- liczba zębów w kole $z = 20$,
- współczynnik przesunięcia zarysu $x = 0$,
- narzędzie - zębatka o promieniu zaokrąglenia głowy narzędzia $\rho_{ao} = 0,2$.

Oprócz wielkości geometrycznych na rysunku przedstawiono też przybliżone wartości naprężeń z podziałem na część nominalną i część wynikającą z działania karbu.

Z rysunku wynikają między innymi następujące własności zęba:

a) promień krzywizny stopy zęba, bardzo istotny ze względu na działanie karbu, maleje monotonicznie w miarę wzrostu wysokości zęba H,
b) grubość zęba osiąga najniższą wartość w okolicy $H = 1,5-1,6$,
c) jednak maksymalne naprężenie występuje w okolicy $H = 1,95$ i jest funkcją jednoczesnego działania następujących głównych wpływów: ramienia działania siły H, grubości zęba $2X$, promienia krzywizny R,
d) naprężenia nominalne osiągają maksymalną wartość w okolicy $H = 1,8$,
e) współczynnik koncentracji rośnie monotonicznie ze wzrostem wysokości zęba H ze względu na silne zmniejszanie się promienia krzywizny stopy zęba.

Z rysunku wynika, że odwzorowany zarys powinien szczególnie dokładnie przylegać do zarysu zęba w okolicy występowania maksymalnym naprężeń. Jeżeli wyliczone za pomocą odwzorowań naprężenia maksymalne wypadną na skraju lub poza strefą dokładnego odwzorowania stopy, to należy zmienić punkty odwzorowań i ponownie przeprowadzić obliczenia.

2.1. Odwzorowanie zęba na długim łuku stopy

Odwzorowany ząb opisany jest w układzie parametrycznym za pomocą następujących zależności:

$$X_m = u_m + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_m}{u_m^2 + b_k^2} \tag{1}$$

$$H_m = \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_k b_k}{u_m^2 + b_k^2} \right] - e \tag{2}$$

gdzie:

X_m - współrzędna punktu o numerze m,

H_m - współrzędna punktu o numerze m,

a_k, b_k - poszukiwane współczynniki odwzorowania,
u_m - parametr określający położenie punktu m,
K - liczba par współczynników a_k, b_k,
e - odcinek wg rysunku 2.

Oznaczając przez X_z, H_z rzeczywiste współrzędne zęba wyliczone dla jednostkowego modułu, dobiera się tak wartości współczynników a_k, b_k oraz parametru u_m i odcinka e, aby wyliczone za pomocą równań (1) i (2) współrzędne spełniały w każdym punkcie zarysu (u_m) zależności:

$$\Delta X = |X_m - X_z| \leqslant 10^{-4} \tag{3}$$

$$\Delta H = |H_m - X_z| \leqslant 10^{-4} \tag{4}$$

Tak wysokie wymagania konieczne są ze względu na odwzorowanie promienia krzywizny w okolicy występowania maksymalnych naprężeń. Oznacza to, że nawet przy module $m = 10$ mm, błąd zarysu w wybranych punktach nie przekracza 1 μm.

Funkcja określona za pomocą równań (1) i (2) nadaje się do większości kół zewnętrznie uzębionych o symetrycznym względem osi zęba zarysie. Nie udaje się uzyskać dostatecznie dokładnego rozwiązania dla kół wewnętrznie uzębionych ani też zębów asymetrycznych, tj. o różnych kątach zarysu po obu stronach osi zęba.

2.1.1. Szczególne przypadki funkcji

Ze względów obliczeniowych, zwłaszcza w przypadku małych komputerów, celowe jest ograniczenie liczby poszukiwanych współczynników występujących we wzorach (1) i (2). Dotychczasowe badania numeryczne wykazały, że poszukiwana funkcja powinna przechodzić przez minimum 4 punkty zlokalizowane w stopie zęba oraz przez początek układu współrzędnych, dla którego odcinek $e = 0$.

W tym przypadku $K = 2$, pozostają więc do rozwiązania 4 pary równań typu (3) i (4) zawierające 8 niewiadomych: (a_1, a_2, b_1, b_2, u_1, u_2, u_3, u_4).

W przypadku gdy $e > 0$ oraz $K = 2$, trzeba rozwiązać 5 par równań o 10 niewiadomych: (a_1, a_2, b_1, b_2, e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5).

Analogicznie dla $K = 3$ otrzymuje się:

- w przypadku $e = 0$ 12 niewiadomych: $a_1 \ldots a_3$, $b_1 \ldots b_3$, $u_1 \ldots u_6$,
- w przypadku $e > 0$ 14 niewiadomych: $a_1 \ldots a_3$, $b_1 \ldots b_3$, e, $u_1 \ldots u_7$.

Już przy $K = 3$ trudno jest uzyskać rozwiązanie, gdy wszystkie punkty skupione są w stopie zęba, zwykle udaje się umieścić 5 punktów na stopie, a pozostałe trzeba dać na ewolwentowej części zarysu.

Dalsze zwiększanie liczby wyrazów K prowadzi do zgrubnych rozwiązań uzyskanych metodami prób i błędów. Nie zapewniają one dostatecznie dokładnego odwzorowania promienia karbu. Wynika to z następujących powodów:

- albo nie istnieje rozwiązanie układu równań nieliniowych z wymaganą dokładnością,
- albo punkty startu są zbyt odległe od rozwiązania,
- albo odchyłki wywołane niedokładnością obliczeń numerycznych uniemożliwiają uzyskanie dostatecznie dokładnego rozwiązania.

Przykłady obliczeń podano w załączniku 2, tam też zamieszczono jeszcze inne postacie odwzorowań.

2.2. Odwzorowanie stopy w 2 punktach

Odpowiednie algorytmy postępowania podano w załączniku 2 w dwóch wariantach:

2.2.1. W wybranych dwóch punktach stopy, obejmujących obustronnie miejsce występowania maksymalnych naprężeń stawia się oprócz warunków dotyczących współrzędnych X i H, tj. oprócz zależności wyrażonych wzorami (3) i (4), dodatkowe warunki dotyczące promienia karbu i kąta stycznej, tzn.

$$\Delta R = |R_m - R_z| \leq 10^{-4} \tag{5}$$

$$\Delta \gamma = |\gamma_m - \gamma_z| \leq 10^{-4} \tag{6}$$

Krzywą odwzorowania prowadzi się przez początek układu, czyli zakłada się e = 0. W ten sposób otrzymuje się następujące niewiadome:

$$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, u_1, u_2)$$

Przy K = 3 otrzymuje się 8 niewiadomych, które wyznacza się z dwóch kompletów równań (3), (4), (5) i (6).

Przykład obliczeń zawarto w załączniku 2 punkt 2.10.

2.2.2. W wybranych dwóch punktach stopy zęba oznaczonych liczbami (1) i (2) stawia się następujące warunki:

- w punkcie (1) wymaga się spełnienia równań (3), (4), (5) i (6),
- natomiast w punkcie 2 tylko warunków (3) i (4).

W tych warunkach otrzymuje się następujące niewiadome: $(a_1, a_2, b_1, b_2, u_1, u_2)$, które wylicza się z 6 równań.

Przykład obliczeń zawarto w załączniku 2 w punkcie 2.8.

2.2.3. W wybranym punkcie stopy poszukuje się następujących wartości (a, b, u, e), które wyznacza się z równań (3), (4), (5) i (6). W tym przypadku e < 0, co wymaga dodatkowego dociążenia zęba. Ponieważ nie jest znane miejsce występowania maksymalnych naprężeń, obliczenia prowadzi się dla

kilku kolejno wybranych punktów stopy zęba aż do uzyskania lokalnego ekstremum naprężeń.

Przykład obliczeń zawarto w załączniku 2, punkt 2.9. Ten sposób obliczeń jest najmniej dogodny i najmniej dokładny, ale pozwala objąć szerszy zakres kształtów ze względu na małą liczbę zmiennych.

R o z d z i a ł 3

OBLICZANIE NAPRĘŻEŃ W STOPIE ZĘBA

W rozdziale 2 zgodnie z załącznikiem 2 określono wartości współczynników a_k, b_k, wielkość odcinka e oraz zakres zmian parametru u dla stopy zęba. Dodatkowo potrzebna jest znajomość kąta działania siły międzyzębnej mierzonego od osi X oraz współrzędnych X_a, H_a wierzchołka zęba. Sposób wyliczania tych wielkości podano w załączniku 1 określającym kształty zęba.

Dalszy tok postępowania zależny jest od wielkości odcinka e. Rozróżnia się trzy przypadki: $e > 0$, $e = 0$ oraz $e < 0$. Sposób postępowania podano w załączniku 3, punkt 3.2.

Obliczanie naprężeń przeprowadza się wyłącznie w zakresie dobrego odwzorowania stopy zęba, tj. w takim zakresie zmian parametru u, któremu odpowiada dobre odwzorowanie, nie tylko spełnienie warunków (3) i (4) dotyczących współrzędnych X i H, ale także w którym z dostatecznym przybliżeniem (ok. 1%) zachowane są wartości kąta stycznej i promienia karbu. Jeżeli maksymalna wartość naprężeń wypada poza zakresem prawidłowego odwzorowania, konieczne jest powtórzenie obliczeń przy nowych założeniach.

Obliczenia naprężeń nie stwarzają żadnych trudności rachunkowych, są jednak dość czasochłonne. Wszystkie szczegóły dotyczące sposobu postępowania zawarto w załączniku 3.

Rozdział 4

ANALIZA PORÓWNAWCZA SPOSOBÓW OBLICZANIA NAPRĘŻEŃ

Obszerne rozważania na temat teorii naprężeń w kołach zębatych oparte na współrzędnych krzywoliniowych lub odwzorowaniach wiernokątnych opublikował w 1964 r. H. Neuber (L.1). Przedstawił tam funkcje odwzorowujące całe koło zębate ze wszystkimi zębami. Jednakże metoda ta okazała się mało przydatna i sam autor w roku 1970 opublikował prostszą metodę obliczeń, dotyczącą jednego zęba odpowiednio utwierdzonego, w której uzyskał analityczny wzór określający maksymalną wartość naprężenia w stopie zęba.

Analityczna forma rozwiązania wymagała szeregu uproszczeń, co w sposób istotny zaważyło na dokładności obliczeń.

Stosując poprzednio przyjęte oznaczenia, można wzory podane przez Neubera (L.2) przekształcić do postaci:

$$\sigma_{max} = \frac{P_x}{2X}\left[\frac{3H}{X}\alpha_1 + \alpha_3\right] - \frac{P_H}{2X}\alpha_2 \tag{7}$$

gdzie zgodnie z poprzednio podanymi oznaczeniami

$$P_x = \cos\psi \qquad P_H = \sin\psi \tag{8}$$

gdzie:

X - połowa szerokości zęba,

H - ramię działania siły,

a ponadto współczynnik koncentracji przy zginaniu

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}\alpha_2 \tag{9}$$

współczynnik koncentracji przy ściskaniu

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{2X}{\pi R}\left(\alpha_3 - \frac{4}{\pi}\right)} \tag{10}$$

oraz współczynnik wpływu siły tnącej

$$\alpha_3 = \frac{4}{\pi}\left[\sqrt{\left(\frac{X}{R}\right)^2 + 6\frac{X}{R} + 1} - \frac{X}{R}\right] \tag{11}$$

gdzie:

R - promień krzywizny w stopie zęba.

Poniższe zestawienie przedstawia wartości naprężeń wyliczone za pomocą wzoru (7) w kolejnych 24 punktach stopy zęba o następujących występujących w większości przykładów parametrach: liczba zębów w kole $z = 30$, współczynnik przesunięcia zarysu $x = 0$, zębatka o kącie zarysu $\alpha_{on} = 20°$, wysokości głowy zęba $h_{ao} = 1,25$ oraz promieniu zaokrąglenia głowy zęba zębatki $\rho_{ao} = 0,38$.

Oprócz występujących we wzorze (7) wielkości X, H, R tablica zawiera wartość kąta stycznej γ, umożliwiającą określenie miejsca występowania naprężenia. Do obliczeń przyjęto siłę normalną $P_n = 1$, działającą pod kątem $\psi = 0,469862$ i przyłożoną na wierzchołku zęba o parametrach X_a, H_a.

X	H	γ	R	σ
0,940998	1,572550	0,089	1,223	1,940
0,962937	1,712957	0,229	0,850	2,379
0,985090	1,790038	0,335	0,694	2,638
1,005959	1,842788	0,421	0,612	2,796
1,025805	1,882950	0,498	0,562	2,893
1,044922	1,915431	0,567	0,530	2,951
1,063520	1,942702	0,631	0,507	2,983
1,081743	1,966167	0,690	0,490	2,997
1,099694	1,986699	0,747	0,477	2,998
1,117443	2,004874	0,801	0,467	2,990
1,135043	2,021090	0,852	0,460	2,974
1,152534	2,035636	0,902	0,453	2,953
1,169946	2,048726	0,950	0,448	2,928
1,187304	2,060523	0,997	0,444	2,901
1,204627	2,071154	1,043	0,441	2,870
1,221930	2,080718	1,088	0,438	2,838
1,239228	2,089294	1,133	0,435	2,804
1,256532	2,096946	1,176	0,433	2,769
1,273851	2,103726	1,219	0,432	2,733
1,291196	2,109673	1,262	0,430	2,696
1,308574	2,114821	1,304	0,429	2,659
1,32994	2,119194	1,346	0,429	2,621
1,343464	2,122812	1,387	0,428	2,582
1,360991	2,125687	1,429	0,428	2,543

Jak wynika z powyższego zestawienia pomimo stale malejącej wartości promienia karbu R naprężenia wg Neubera osiągają maksymalną wartość w okolicy kąta stycznej $\gamma = 0,747$ = ok. 43°, nie jest to zgodne z wynikami badań elastooptycznych i tensometrycznych a także z wynikami obliczeń innymi metodami. Bardziej istotne jest to, że wartość maksymalna $\sigma_{max} = 2,998$ odbiega znacznie od wartości wyliczonej innymi metodami, np. metodą MES lub odwzorowań wiernokątnych i stanowi zaledwie 82% wartości wyliczonej innymi metodami.

W czasie analizy wartości współczynników koncentracji wyrażonych za pomocą wzorów (9), (10) i (11) łatwo zauważyć ich ograniczony zakres stosowalności, szczególnie gdy R rośnie nieograniczenie, tj. gdy nie występuje spiętrzenie naprężeń.

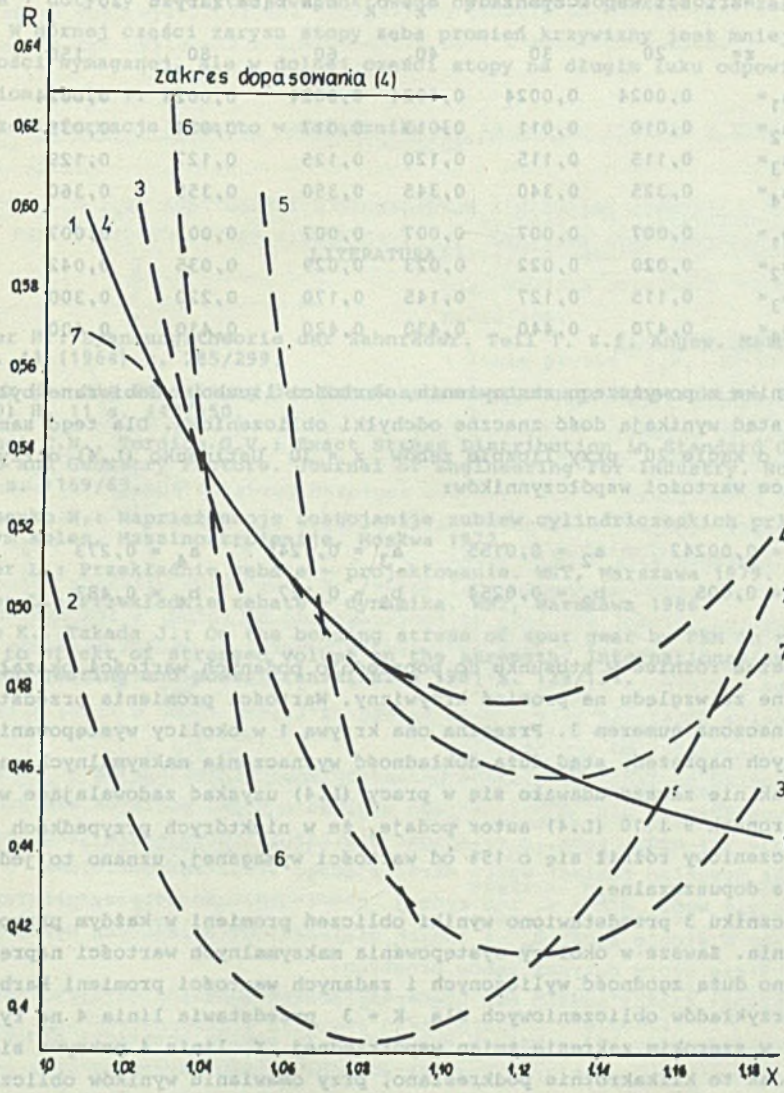
Krótkie wprowadzenie w zasady odwzorowań wiernokątnych oraz wyniki obliczeń naprężeń dla dwóch typów kół: o kącie zarysu 20° oraz o kącie zarysu 25° podano w pracy (L.3). Do rozwiązywania układów równań stosowano metodę prób i błędów. Przy kącie zarysu 25° osiągnięto wyższą dokładność aniżeli przy kącie 20°.

W obu przypadkach stosowano K = 4 pary współczynników a_k, b_k. Pomimo to ze względu na przyjętą metodę obliczeń odwzorowanie nie było dostatecznie dokładne, co przedstawiono na rys. 4 za pomocą krzywej nr 2. Jak widać, promień krzywizny znacznie odbiega od wartości zadanej krzywą 1 przedstawiającą rzeczywiste wartości promienia w omawianym przykładzie. Te i inne odchylenia w odwzorowaniu doprowadziły do tego, że maksymalna wartość wyliczona przez autorów pracy przekraczała o 15% wartości uzyskane innymi metodami.

Uzyskane przez autorów wartości współczynników mogą służyć jako wartości startowe w przypadku dokładniejszych obliczeń przy założeniu K = 4.

Wartości współczynników a_k, b_k dla kąta zarysu 20°

z=	20	30	40	60	80	150
a_1=	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024
a_2=	0,017	0,016	0,015	0,013	0,012	0,012
a_3=	0,130	0,127	0,124	0,115	0,112	0,110
a_4=	0,220	0,250	0,275	0,325	0,335	0,340
b_1=	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
b_2=	0,025	0,025	0,025	0,023	0,023	0,022
b_3=	0,127	0,127	0,127	0,125	0,124	0,124
b_4=	0,490	0,487	0,483	0,470	0,455	0,450



Rys. 4. Odwzorowanie krzywizny stopy zęba wg różnych metod obliczeniowych:

1 - rzeczywista wartość promienia krzywizny stopy, 2 - wartość wyliczona wg L.3, 3 - wartość wyliczona wg L.4, 4 - wartość wyliczona wg algorytmu 6-punktowego, 5 - wartość wyliczona wg algorytmu 1-punktowego, 6 - wartość wyliczona wg algorytmu 1-punktowego, 7 - wartość wyliczona wg algorytmu 2-punktowego M 6x6, 8 - pokrywa się z linią (4) wg algorytmu 2-punktowego M 8x8

Fig. 4. Mapping of toothfoot curvature according to different calculation methods

Wartości współczynników a_k, b_k dla kąta zarysu 20°

z=	20	30	40	60	80	150
a_1=	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024
a_2=	0,010	0,011	0,013	0,017	0,024	0,035
a_3=	0,115	0,115	0,120	0,125	0,127	0,129
a_4=	0,325	0,340	0,345	0,350	0,355	0,360
b_1=	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
b_2=	0,020	0,022	0,023	0,029	0,035	0,042
b_3=	0,115	0,127	0,145	0,170	0,220	0,300
b_4=	0,470	0,440	0,430	0,420	0,410	0,400

Jak wynika z powyższego zestawienia, wartości liczbowe dobierane były skokowo, stąd wynikają dość znaczne odchyłki obliczeniowe. Dla tego samego narzędzia o kącie 20° przy liczbie zębów z = 30 Ustinenko (L.4) otrzymał następujące wartości współczynników:

a_1 = 0,00242 a_2 = 0,0155 a_3 = 0,1245 a_4 = 0,273

b_1 = 0,005 b_2 = 0,0254 b_3 = 0,127 b_4 = 0,483

Nieznaczne różnice w stosunku do poprzednio podanych wartości okazały się istotne ze względu na promień krzywizny. Wartości promienia przedstawia krzywa oznaczona numerem 3. Przecina ona krzywą 1 w okolicy występowania maksymalnych naprężeń, stąd duża dokładność wyznaczenia maksymalnych naprężeń. Jednak nie zawsze udawało się w pracy (L.4) uzyskać zadowalające wyniki. Na stronach 9 i 10 (L.4) autor podaje, że w niektórych przypadkach promień obliczeniowy różnił się o 15% od wartości wymaganej, uznano to jednak jeszcze za dopuszczalne.

W załączniku 3 przedstawiono wyniki obliczeń promieni w każdym przypadku odwzorowania. Zawsze w okolicy występowania maksymalnych wartości naprężeń otrzymywano dużą zgodność wyliczonych i zadanych wartości promieni karbu. Jeden z przykładów obliczeniowych dla K = 3 przedstawia linia 4 na rys.4. Jak widać w szerokim zakresie zmian współrzędnej X, linia 4 pokrywa się z linią 1. Jak to kilkakrotnie podkreślano, przy omawianiu wyników obliczeń można każdorazowo przesunąć zakres prawidłowego odwzorowania w okolicę występowania maksymalnych naprężeń.

Linie 5 i 6 dotyczą algorytmu jednopunktowego, w którym zakłada się zgodność promieni w wybranym miejscu (punkcie przecięcia się z linią 1), ale jak wynika z rysunku, poza tym miejscem promienie znacznie różnią się od wartości zadanych, co oczywiście wpływa na dokładność określenia maksymalnych naprężeń.

Linia 7 dotyczy algorytmu dwupunktowego opisanego w punkcie 2.8 załącznika 2. W górnej części zarysu stopy zęba promień krzywizny jest mniejszy od wartości wymaganej, ale w dolnej części stopy na długim łuku odpowiada wartościom linii 1.

Dalsze informacje zawarto w załączniku 4.

LITERATURA

1. Neuber H.: Spannungstheorie der Zahnräder. Teil 1. Z.f. Angew. Math. Mech. 44 (1964) s. 285/299.
2. Neuber H.: Die Berechnung der Zahnfussbeanspruchung. Konstruktion 22 (1970) H. 11 s. 447/450.
3. Baronet C.N., Tordion G.V.: Exact Stress Distribution in Standard Gear Teeth and Geometry Factors. Journal of Engineering for Industry. Nov. 1973 s. 1159/63.
4. Ustinenko W.: Napriażennoje sostojanije zubiew cylindriczeskich priamozubnym koles. Maszinostrojenije, Moskwa 1972.
5. Müller L.: Przekładnie zębate - projektowanie. WNT, Warszawa 1979.
6. Müller L.: Przekładnie zębate - dynamika. WNT, Warszawa 1986.
7. Kondo K., Takada J.: On the bending stress of spur gear by FEM in relation to effekt of stressed volume on the strength. International symposium on gearing and power transmission 1981 s. 129/134.

Załącznik 1

ALGORYTM OBLICZANIA WSPÓŁRZĘDNYCH ZARYSU ZĘBA X_z, H_z ORAZ WARTOŚCI KĄTA STYCZNEJ γ_z I PROMIENIA KRZYWIZNY STOPY ZĘBA R_z

1.1. Wprowadzenie

Spotykane w literaturze wzory określające kształt zęba opierają się na prostokątnym układzie współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem koła zębatego. Jedna oś (Y) pokrywa się z osią zęba, a druga (X) jest do niej prostopadła. W obliczeniach naprężeń bardziej praktyczny okazał się układ współrzędnych, którego początek pokrywa się z punktem przecięcia się linii działania siły z osią zęba.

W tym przypadku wartości współrzędnej X_z są w obu układach jednakowe, natomiast odległości mierzone od środka układu są różne, a ich kierunki są przeciwnie skierowane. W celu wykluczenia pomyłek wielkości mierzone wzdłuż osi zęba w kierunku środka koła oznaczono H_z, mają one bezpośredni związek z ramieniem działania siły i mało zależą od liczby zębów w kole, a tym samym od odległości od środka koła.

Wszystkie odcinki określające parametry zęba odniesione są do modułu lub wyliczone zostały dla $m = 1$. Z tego względu w niżej podanych wzorach nie występuje już moduł zęba, a wyliczone wielkości traktuje się jako bezwymiarowe. Na przykład zamiast wzoru określającego średnicę podziałową $d = z.m$ stosuje się wzór $d/m = z$ lub krócej $d = z$. To samo dotyczy promienia krzywizny w stopie zęba R_z i innych wielkości określających wymiary zęba.

Wszystkie wzory dotyczą zębów prostych.

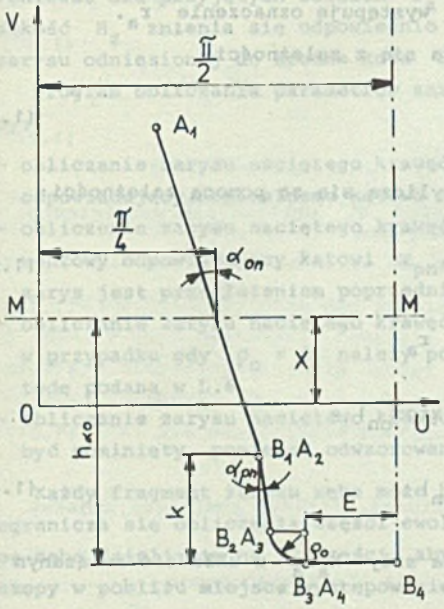
W dalszej części podano dwa algorytmy postępowania:

- pierwszy dotyczy kół zębatych wykonanych za pomocą zębatki z proturberancją, która może przybierać kształt zęba bez proturberancji,
- w drugim algorytmie podano sposób obliczania kształtu zęba wykonanego za pomocą narzędzia Fellowsa, ograniczając się wyłącznie do określania kształtu stopy zęba, ponieważ część ewolwentowa jest taka sama jak w przypadku zębatki bez proturberancji.

Bardzo często obliczenia ograniczają się do stopy zęba. Wtedy można stosować jeden algorytm postępowania, jak przy narzędziu Fellowsa. W przypadku kół wykonanych za pomocą zębatki zakłada się bardzo dużą liczbę zębów w narzędziu Fellowsa, np. $z_o = 10^5$, o ile tylko dokładność wyliczeń za pomocą

kalkulatora jest wystarczająca. Dotyczy to głównie współrzędnych Y_z i H_z, które muszą być wyliczone z dokładnością do 5 miejsca po kropce.

1.2. Obliczanie kształtu zęba wykonanego za pomocą zębatki z proturberancją



Rys. Z.1.1. Podstawowe parametry zębatki

Fig. Z.1.1. Basic tooth bar parameters

Rysunek Z.1.1 przedstawia zarys narzędzia zębatki z proturberancją. Zawiera on cztery linie ograniczające:

- linię prostą A_1B_1 pochyloną pod kątem zarysu α_{on},
- linię prostą A_2B_2 pochyloną pod kątem proturberancji α_{pn},
- łuk kołowy A_3B_3 o promieniu ρ_o,
- linię poziomą A_4B_4 sięgającą osi zęba narzędzia.

Dane obliczeniowe:

- dotyczące koła: liczba zębów w kole z, współczynnik przesunięcia zarysu x,
- dotyczące narzędzia: nominalny kąt zarysu α_{on}, kąt proturberancji α_{pn}, jeżeli $\alpha_{pn} = \alpha_{on}$, to narzędzie nie posiada proturberancji, wysokość głowy zęba narzędzia h_{ao}, wysokość proturberancji k, promień zaokrąglenia głowy zęba narzędzia ρ_o.

Przed przystąpieniem do wyliczania kolejnych współrzędnych zarysu konieczne jest przygotowanie wartości następujących wielkości:

a) promienia koła wierzchołkowego r_a,
b) promienia koła zasadniczego r_b,
c) kąta przyporu na średnicy wierzchołkowej α_a,
d) kąta działania siły Φ,
e) grubości zęba na wierzchołku X_a,
f) współrzędnej wierzchołka zęba Y_a.

a) Promień koła wierzchołkowego wylicza się najczęściej z pominięciem skrócenia wysokości głowy, ponieważ jego wielkość zależy od parametrów koła współpracującego. W tym przypadku zgodnie z poprzednio podaną uwagą (m = 1) promień wylicza się z zależności:

$$r_a = \frac{z}{2} + 1 + x \tag{1.1}$$

W programie obliczeniowym należy w tym miejscu umożliwić wprowadzenie w miejsce wartości wyliczonej za pomocą wzoru (1.1) innej wartości, np. promienia wierzchołkowego zębów skróconych lub promienia odpowiadającego jednoparowej współpracy zębów. Nie zmienia to w niczym dalszego toku postępowania i dlatego w dalszej części nadal występuje oznaczenie r_a.

b) Promień koła zasadniczego wylicza się z zależności:

$$r_b = \frac{z}{2} \cos\alpha_{on} \tag{1.2}$$

c) Kąt przyporu na promieniu r_a wylicza się za pomocą zależności:

$$\cos\alpha_a = \frac{r_b}{r_a} \tag{1.3}$$

d) Kąt działania siły na promieniu r_a

$$\psi = tg\alpha_a - tg\alpha_{on} + \alpha_{on} - \frac{1}{z}(\frac{\pi}{2} + 2xtg\alpha_{on}) =$$

$$= tg\alpha_a - inv\alpha_{on} - \frac{1}{z}(\frac{\pi}{2} + 2xtg\alpha_{on}) \tag{1.4}$$

e) f) Współrzędne punktu przyłożenia siły X_aY_a w układzie związanym z kołem zębatym oblicza się następująco:

- kąt pomocniczy

$$\vartheta_a = \frac{\pi}{2z} + \frac{2xtg\alpha_{on}}{z} + tg\alpha_{on} - \alpha_{on} - tg\alpha_a + \alpha_a \tag{1.5}$$

- następnie

$$X_a = r_a \sin\vartheta_a \tag{1.6}$$

$$Y_a = r_a \cos\vartheta_a \tag{1.7}$$

Dodatkowo oblicza się współrzędną punktu przyłożenia siły w układzie współrzędnych XH:

$$H_a = X_a tg\psi \tag{1.8}$$

Tak więc pomiędzy początkami obu układów współrzędnych istnieje przesunięcie $Y_a - H_a$, przy czym wartości H_z mierzone są w kierunku stopy zęba (środka koła), stąd w dalszych obliczeniach pojawi się wzór

$$H_z = Y_a - H_a - Y_z \tag{1.9}$$

Ponieważ dla przyjętych założeń Y_a oraz H_a są wartościami stałymi, wysokość H_z zmienia się odpowiednio do zmian wartości współrzędnej punktu zarysu odniesionej do środka koła Y_z.

Program obliczania parametrów zarysu zęba podzielono na następujące etapy:

- obliczanie zarysu naciętego krawędzią A_1B_1 - jest to zarys ewolwentowy odpowiadający nominalnemu kątowi zarysu α_{on},
- obliczenie zarysu naciętego krawędzią A_2B_2 - jest to również zarys ewolwentowy odpowiadający kątowi α_{pn}, w przypadku gdy $\alpha_{pn} = \alpha_{on}$ otrzymany zarys jest przedłużeniem poprzednio wyliczonej ewolwenty,
- obliczanie zarysu naciętego krawędzią A_3B_3 ograniczającego stopę zęba; w przypadku gdy $\rho_o = 0$, należy podstawić $\rho_o = 10^{-4}$ lub zastosować metodę podaną w L.6,
- obliczanie zarysu naciętego krawędzią A_4B_4, ten fragment obliczeń może być pominięty, ponieważ odwzorowanie nie obejmuje tej części zarysu zęba.

Każdy fragment zarysu zęba może być dowolnie gęsto określany. Zwykle ogranicza się obliczenia części ewolwentowej do 6 punktów, podczas gdy stopę zęba dzieli się na 20 części, aby uzyskać dostatecznie dokładny opis stopy w pobliżu miejsca występowania maksymalnych naprężeń.

1. Współrzędną punktów A_1 i B_1 oblicza się z zależności:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} - tg\alpha_{on} \tag{1.10}$$

$$B_1 = \frac{\pi}{4} + (h_{ao} - k)\,tg\alpha_{on} \tag{1.11}$$

Odcinek A_1B_1 dzieli się na określoną liczbę części uzyskując krok obliczeniowy

$$\Delta u = \frac{A_1 - B_1}{n} \tag{1.12}$$

Następnie kolejno dla wartości $u = A_1$, $u = A_1 - \Delta u$, $u = A_1 - 2\Delta u$ itd. aż do $u = B_1$ oblicza się wielkości pomocnicze:

$$G_1 = \frac{1}{tg\alpha_{on}} \tag{1.13}$$

$$F_1 = \frac{\pi}{4} G_1 + x \tag{1.14}$$

$$v_1 = F_1 - G_1 u_1 \tag{1.15}$$

$$C_1 = \frac{z}{2} + F_1 - G_1 u_1 \tag{1.16}$$

$$D_1 = G_1^2 u_1 - G_1 F_1 \tag{1.17}$$

$$\varphi_1 = \frac{2(u_1 + D_1)}{z} \tag{1.18}$$

Znając każdorazowe wartości C_1, D_1 oraz φ_1 oblicza się współrzędne zarysu ze wzorów:

$$X_z = C\sin\varphi - D\cos\varphi \tag{1.19}$$

$$Y_z = C\cos\varphi + D\sin\varphi \tag{1.20}$$

$$H_z = Y_a - H_a - Y_z \tag{1.21}$$

Wzory te pojawią się w dalszej części obliczeń, dlatego pominięto indeksy (1).

2. Współrzędne punktów A_2 i B_2 wylicza się następująco:

$$A_2 = B_1 \tag{1.22}$$

$$E = \frac{\pi}{4} - h_{ao}\mathrm{tg}\alpha_{on} + k(\mathrm{tg}\alpha_{on} - \mathrm{tg}\alpha_{pn}) - (1 - \sin\alpha_{pn})\frac{\rho_o}{\cos\alpha_{pn}} \tag{1.23}$$

$$B_2 = \frac{\pi}{2} - E - \rho_o\cos\alpha_{pn} \tag{1.24}$$

Odcinek A_2B_2 dzieli się na określoną liczbę części uzyskując krok obliczeniowy

$$\Delta u_2 = \frac{A_2 - B_2}{n} \tag{1.25}$$

i podobnie jak poprzednio dla poszczególnych wartości $u_2 = A_2$, $u_2 = A_2 - \Delta u_2$ itd. oblicza się wartości pomocnicze:

$$G_2 = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_{pn}} \tag{1.26}$$

$$F_2 = k - h_{ao} + x + G_2B_2 \tag{1.27}$$

$$v_2 = F_2 - G_2u_2 \tag{1.28}$$

$$C_2 = \frac{z}{2} + F_2 - G_2u_2 \tag{1.29}$$

$$D_2 = G_2^2u_2 - G_2F_2 \tag{1.30}$$

$$\varphi_2 = \frac{2(u_2 + D_2)}{z} \tag{1.31}$$

Znając każdorazowe wartości C_2, D_2 oraz φ_2 oblicza się współrzędne zarysu ze wzorów (1.19), (1.20) oraz (1.21). Niektóre fragmenty krzywej mogą leżeć poza strefą zainteresowania, ale ułatwiają narysowanie zarysu i znalezienie punktów przecięcia się poszczególnych fragmentów.

3. Najbardziej istotne dla prawidłowego odwzorowania są współrzędne stopy zęba. W celu ułatwienia kontroli poprawności doboru elementów odwzorowania w tym etapie wylicza się oprócz wartości X_z, Y_z i H_z dodatkowo kąt stycznej do zarysu γ_z oraz promień krzywizny w badanym punkcie R_z. W tym celu wylicza się współrzędne punktów A_3 i B_3 z zależności:

$$A_3 = B_2 \tag{1.32}$$

E - ze wzoru (1.23)

$$B_3 = \frac{\pi}{2} - E \tag{1.33}$$

Odcinek A_3B_3 dzieli się na określoną liczbę części (zwykle $n = 20$) otrzymując krok obliczeniowy:

$$\Delta u_3 = \frac{A_3 - B_3}{n} \tag{1.34}$$

i podobnie jak w poprzednich dwóch przypadkach oblicza się kolejno wartości pomocnicze:

$$G_3 = \rho_o - h_{ao} + x \tag{1.35}$$

$$F_3 = \sqrt{\rho_o^2 - (u_3 - B_3)^2} \tag{1.36}$$

$$v_3 = G_3 - F_3 \tag{1.37}$$

$$C_3 = \frac{z}{2} + G_3 - F_3 \tag{1.38}$$

$$D_3 = (G_3 - F_3)(u_3 - B_3)\frac{1}{F_3} \tag{1.39}$$

$$\varphi_3 = \frac{2(u_3 + D_3)}{z} \tag{1.40}$$

Znając każdorazowe wartości C_3, D_3 oraz φ_3 oblicza się współrzędne zarysu stopy zęba ze wzorów (1.19), (1.20) oraz (1.21).

Dodatkowo w tej części zarysu zęba wylicza się kąt stycznej γ_z oraz promień krzywizny R_z z następujących wzorów:

$$- \operatorname{tg}\gamma_z = \frac{D\sin\varphi + (C-r)\cos\varphi}{D\cos\varphi - (C-r)\sin\varphi} = T \tag{1.41}$$

$$\gamma_z = -\operatorname{arctg}T \tag{1.42}$$

w tych warunkach kąt γ_z posiada wartość dodatnią, korespondującą z wartością wyliczoną z funkcji odwzorowania

$$- R_z = \rho_{on} + \frac{2G^2}{\left[\sin^2(\gamma_z + \varphi)z - 2G\right]\sin(\gamma_z + \varphi)} \tag{1.43}$$

Podczas gdy kąt stycznej γ_z najczęściej zgodny jest z wartością uzyskaną z odwzorowania, to promień krzywizny R_z zgodny jest tylko w wąskim zakresie zarysu stopy zęba.

4. Współrzędne punktów A_4 i B_4 oblicza się następująco:

$$A_4 = B_3 \tag{1.44}$$

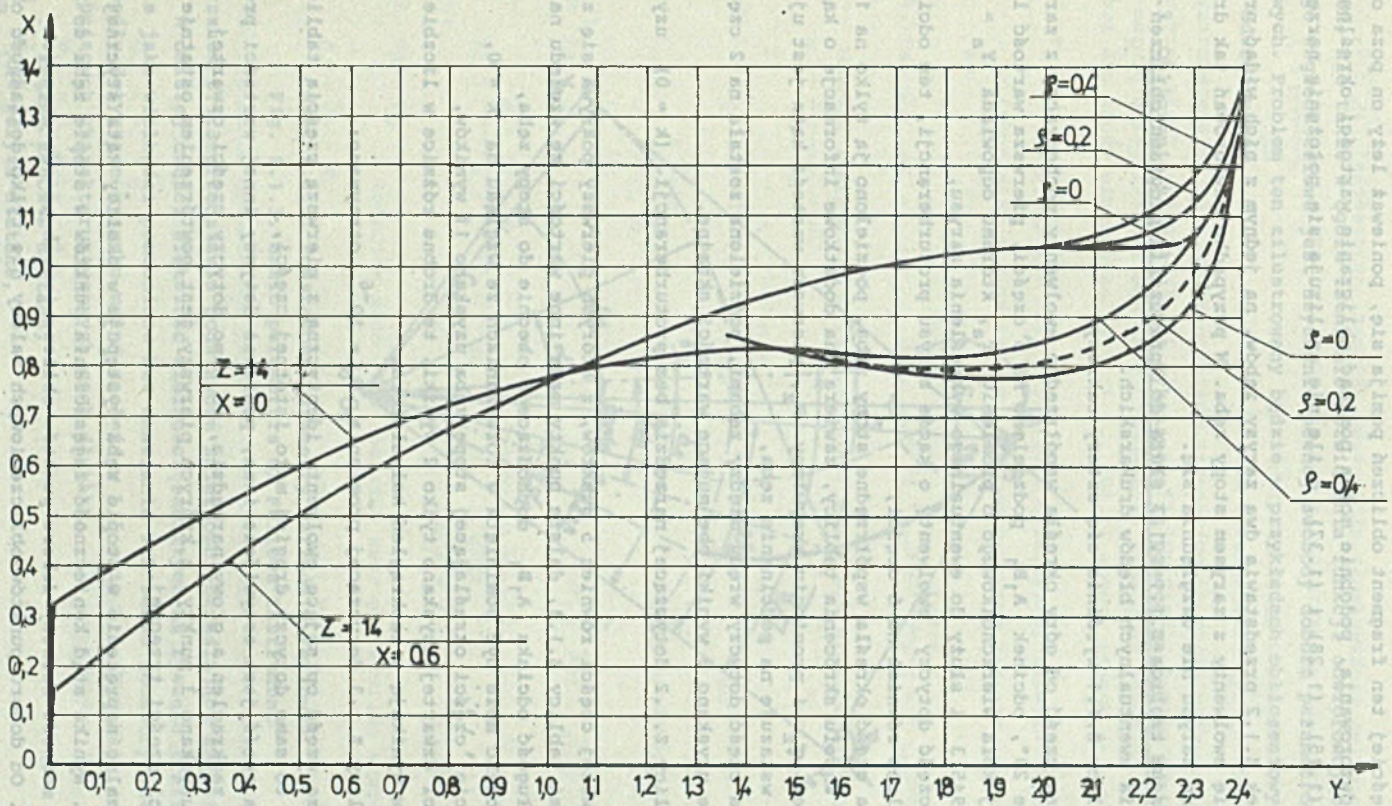
$$B_4 = \frac{\mathfrak{T}}{2} \tag{1.45}$$

Odcinek A_4B_4 dzieli się na kilka części otrzymując kolejne wartości u_4, dla których wylicza się kolejne wartości pomocnicze:

$$C_4 = \frac{z}{2} - h_{ao} + x \tag{1.46}$$

$$D_4 = 0 \tag{1.47}$$

$$\varphi_4 = \frac{2u_4}{z} \tag{1.48}$$



Rys. Z.1.2. Zarys zęba z = 14, x = 0 oraz x = 0,6

Fig. Z.1.2. Tooth profile z = 14, x = 0 and x = 0,6

Najczęściej ten fragment obliczeń pomija się, ponieważ leży on poza obszarem odwzorowania, podobnie można pominąć obliczanie wartości określonych wzorami (1.15), (1.28) i (1.37), o ile nie analizuje się położenia narzędzia.

Rysunek Z.1.2 przedstawia dwa zarysy zębów, na jednym z nich widać przecięcie się ewolwenty z zarysem stopy zęba. W przypadku odwzorowań tak drobnych zmian zarysu nie uwzględnia się.

Dołączone tablice Z.1.1-Z.1.3 służą do sprawdzenia programu obliczeń i wykrycia ewentualnych błędów drukarskich.

W tablicy Z.1.1 wyróżnia się cztery zakresy:

- pierwsza część od góry określa współrzędne ewolwenty pochodzącej z zarysu o kącie 20°, odcinek A_1B_1 podzielono na 5 części, pierwsza wartość leży powyżej koła wierzchołkowego o promieniu r_a, któremu odpowiada Y_a = = 10,994513 i służy do ewentualnego wykreślenia zarysu,
- druga część dotyczy ewolwenty o kącie zarysu proturberancji, ten odcinek podzielono również na 5 części,
- trzecia część określa współrzędne stopy zęba, podzielono ją tylko na 10 części w celu skrócenia tablicy, zawiera ona dodatkowe informacje o kącie stycznej γ_z i promieniu krzywizny R_z, pierwsza wartość kąta jest ujemna, co wskazuje na podcinanie zęba,
- czwarta część dotyczy wrębu między zębami, podzielona została na 2 części, ale uzyskano 3 wyniki obejmujące wartości skrajne.

W tablicy Z.1.2 dotyczącej narzędzia bez proturberancji (k = 0) uzyskano:

- w pierwszej części również 5 punktów, z których pierwszy pokrywa się z wynikami tablicy Z.1.1, dalsze punkty mają inne wartości ze względu na inną długość odcinka A_1B_1 dochodzącego obecnie do stopy zęba,
- druga część może być pominięta w rozważaniach ze względu na k = 0,
- w trzeciej części określającej stopę zęba uzyskano 11 wyników,
- w części czwartej uzyskano tylko 2 wyniki, te drobne różnice w liczbie punktów wynikają z zaokrągleń kalkulatora.

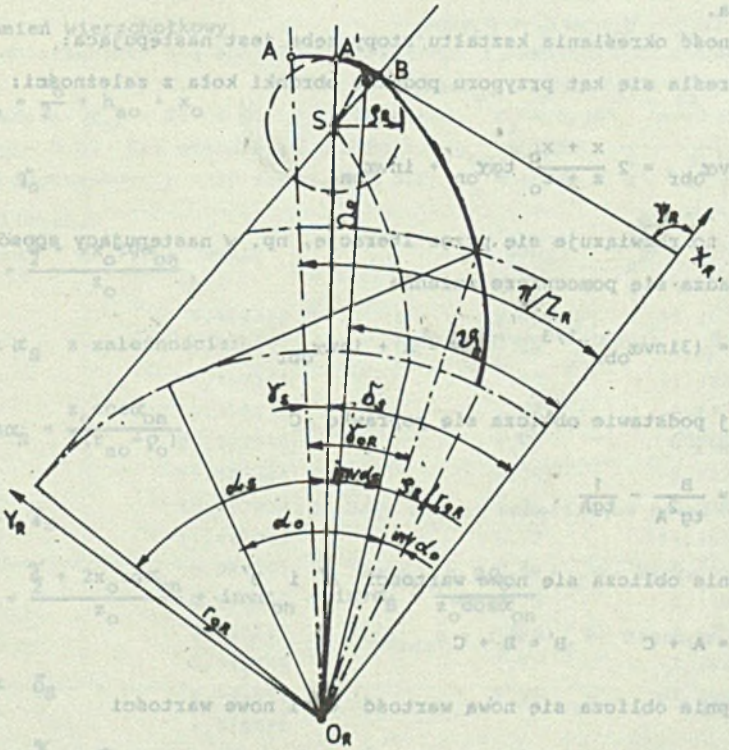
W tablicy Z.1.3 dotyczącej promienia $\varrho_o = 10^{-6}$ otrzymano:

- pierwszą część opisującą ewolwentę identyczną z pierwszą częścią tablicy Z.1.2, to samo dotyczy drugiej mało istotnej części,
- trzecia część jest oczywiście inna, ponieważ dotyczy innej wartości promienia zaokrąglenia głowy narzędzia, to samo dotyczy części czwartej, gdzie uzyskano 3 punkty, z których pierwszy jest powtórzeniem ostatniej wartości części trzeciej.

Maksymalne naprężenie w stopie zęba występuje w okolicy kąta stycznej γ_z = 0,5. Wynika stąd konieczność zagęszczenia punktów w stopie zęba do 20, aby mieć możność swobody doboru punktów obliczeniowych po obu stronach γ_z = 0,5. Od doboru punktów obliczeniowych zależy nie tylko dokładność ob-

liczeń, ale także w ogóle istnienie rozwiązania funkcji odwzorowującej. Z tego względu celowe jest uzyskanie pewnej swobody doboru parametrów wejściowych. Problem ten zilustrowany będzie w przykładach obliczeniowych funkcji odwzorowania.

1.3. Obliczenie kształtu zęba wykonanego za pomocą narzędzia Fellowsa



Rys. Z.1.3. Podstawowe parametry narzędzia Fellowsa

Fig. Z.1.3. Basic parameters of Fellows'instrument

Rysunek Z.1.3 przedstawia podstawowe zależności określające kształt dłutaka. W dalszej części większość wielkości zawartych na rysunku traktowana będzie jako wielkości pomocnicze bez omawiania ich sensu geometrycznego. Szczegóły dotyczące rysunku można znaleźć w L.5 oraz L.6. Wynikają one z następujących charakterystycznych cech dłutaka:

z_o - liczba zębów w dłutaku,

α_{on} - kąt zarysu dłutaka,

x_o - współczynnik przesunięcia zarysu dłutaka, zmieniający się podczas ostrzenia,

ρ_o - promień zaokrąglenia głowy zęba dłutaka, najczęściej $\rho_o = 0$.

Nacinane koło charakteryzuje się następującymi cechami:

z - liczba zębów w nacinanym i badanym kole,

x - współczynnik przesunięcia zarysu.

Przed przystąpieniem do obliczania kształtu stopy zęba należy obliczyć wielkości określone równaniami (1.1) ... (1.9). Ewolwentową część zarysu zęba można obliczyć za pomocą programu dotyczącego zębatki bez proturberancji, tj. za pomocą wzorów (1.10) ... (1.21), najczęściej może ona być pominięta.

Kolejność określania kształtu stopy zęba jest następująca:

1. Określa się kąt przyporu podczas obróbki koła z zależności:

$$\mathrm{inv}\alpha_{obr} = 2\,\frac{x + x_o}{z + z_o}\,\mathrm{tg}\alpha_{on} + \mathrm{inv}\alpha_{on} \tag{1.49}$$

Równanie to rozwiązuje się przez iterację, np. w następujący sposób:

a) wprowadza się pomocnicze zmienne

$$A = (3\mathrm{inv}\alpha_{obr})^{1/3} \qquad B = A + \mathrm{inv}\alpha_{obr} \tag{1.50}$$

b) na tej podstawie oblicza się poprawkę C

$$C = \frac{B}{\mathrm{tg}^2 A} - \frac{1}{\mathrm{tg}A} \tag{1.51}$$

c) ponownie oblicza się nowe wartości A' i B'

$$A' = A + C \qquad B' = B + C \tag{1.52}$$

d) następnie oblicza się nową wartość C' i nowe wartości

$$A'' = A' + C' \qquad B'' = B' + C' \tag{1.53}$$

e) obliczenia powtarza się tak długo, aż poprawka C będzie dostatecznie mała. Liczba A zdąża do poszukiwanej wartości kąta α_{obr}.

2. Oblicza się odległość między środkami kół podczas obróbki

$$a_{obr} = \frac{(z + z_o)\cos\alpha_{on}}{2\cos\alpha_{obr}} \tag{1.54}$$

3. Promień tarczy

$$r = \frac{-a_{obr}}{1 + \frac{z_o}{z}} \tag{1.55}$$

4. Promień R_o

$$R_o = \left| r \frac{z_o}{z} \right| \tag{1.56}$$

5. Promień wierzchołkowy

$$r_{ao} = \frac{z_o}{2} + h_{ao} + x_o \tag{1.57}$$

6. Kąt γ_o

$$\gamma_o = \frac{\frac{\pi}{2} + 2x_o tg\alpha_{on}}{z_o} \tag{1.58}$$

7. Kąt α_S z zależności:

$$\cos\alpha_S = \frac{z_o \cos\alpha_{on}}{2(r_{ao} - \rho_o)} \tag{1.59}$$

8. Kąt γ_S

$$\gamma_S = \frac{\frac{\pi}{2} + 2x_o tg\alpha_{on}}{z_o} + inv\alpha_{on} - inv\alpha_S - \frac{2\rho_o}{z_o \cos\alpha_{on}} \tag{1.60}$$

9. Kąt δ_S

$$\delta_S = \frac{\pi}{z_o} - \gamma_S \tag{1.61}$$

10. Następnie wylicza się graniczne wartości kąta ψ_R oznaczając je przez ψ_{2R} oraz ψ_{1R}

$$\psi_{2R} = \delta_S + \frac{\pi}{2} \tag{1.62}$$

$$\psi_{1R} = \delta_S + \alpha_S \tag{1.63}$$

11. Różnicę kątów dzieli się na n równych części, np. wg zależności

$$\Delta\psi = \frac{\psi_{2R} - \psi_{1R}}{20} \tag{1.64}$$

otrzymując w ten sposób krok obliczeniowy.

12. Dla poszczególnych kątów ψ_R zmianianych o krok $\Delta\psi$ powtarza się kolejno następujące obliczenia:

a) $X_R = (r_{ao} - \rho_o)\cos\delta_S + \rho_o\sin\psi_R$ (1.65)

b) $Y_R = (r_{ao} - \rho_o)\sin\delta_S - \rho_o\cos\psi_R$ (1.66)

c) $q_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}$ (1.67)

d) $\vartheta_R = \mathrm{arctg}(\frac{Y_R}{X_R})$ (1.68)

e) $\Theta_R = \psi_R - \mathrm{arcos}\left[\frac{q_R}{R_o}\cos(\psi_R - \vartheta_R)\right]$ (1.69)

f) $\Theta = \Theta_R \frac{R_o}{r}$ (1.70)

Poszukiwane współrzędne zarysu wynoszą:

g) $X_z = q_R\sin(\Theta - \Theta_R + \vartheta_R) - a_{obr}\sin\Theta$ (1.71)

h) $Y_z = -q_R\cos(\Theta - \Theta_R + \vartheta_R) + a_{obr}\cos\Theta$ (1.72)

i) $H_z = Y_a - H_a - Y_z$ (1.73)

j) kąt stycznej w przybliżeniu określa się ze wzoru

$$T = \frac{q_R(1 - \frac{r}{R_o})\cos(\Theta - \Theta_R + \vartheta_R) - a_{obr}\cos\Theta}{q_R(1 - \frac{r}{R_o})\sin(\Theta - \Theta_R + \vartheta_R) - a_{obr}\sin\Theta} \tag{1.74}$$

$$\gamma_z = -\mathrm{arctg}T \tag{1.75}$$

k) promień krzywizny R_z wylicza się z zależności pomocniczych

$$A = q_R \sin(\psi_R - \vartheta_R) - R_o \sin(\psi_R - \Theta_R) \tag{1.76}$$

$$B = r \frac{R_o}{a_{obr}} \sin(\psi_R - \Theta_R) \tag{1.77}$$

$$-R_z = \varrho_o + \frac{(A - \varrho_o)^2}{A - \varrho_o - B} \tag{1.78}$$

Przykład obliczeniowy dla sprawdzenia programu i ewentualnych błędów drukarskich.

Dane narzędzia: $\alpha_{on} = 20° = \frac{\pi}{9}$, $z_o = 20$ zębów, $x_o = 0{,}105$ (nowe narzędzie), $\varrho_o = 0{,}05$ dla ułatwiania kontroli, $h_{ao} = 1{,}3$.

Dane koła nacinanego: $z = 30$ zębów, $x = 0{,}2$, $r_a = 16{,}2$

Wyniki obliczeń:

nr wzoru	wynik	nr wzoru	wynik
1.1	16,2	1.64	-0,048737
1.4	0,494379	1.65	11,265647
1.6	0,340838	1.66	1,631307
1.8	0,183721	1.67	11,383144
1.49	0,379574	1.68	0,143804
1.54	25,292575	1.69	0,363917
1.55	-15,175545	1.70	-0,242611
1.56	10,117030	1.71	0,994952
1.57	11,405000	1.72	14,365766
1.58	0,082362	1.73	1,646928
1.59	0,596052	1.75	0,136962
1.60	0,009640	1.76	2,675856
1.61	0,147439	1.77	-2,249166
1.62	0,743491	1.78	-1,464377
1.63	1,718235		

Pełny przebieg współrzędnych stopy zęba podano w tablicy Z.1.4. Jak wynika z tablicy, krok określony wzorem 1.64 był dodawany do wartości początkowej określonej wzorem 1.63 aż do uzyskania wartości wyrażonej wzorem 1.62

Tablica Z.1.1

X_z	Y_z	N_z	γ_z	$-R_z$
0,137841	11,337091	-0,539209	-	-
0,458120	10,788972	0,008909	-	-
0,671681	10,311073	0,486809	-	-
0,798119	9,918890	0,878992	-	-
0,858996	9,624443	1,173438	-	-
0,886913	9,623435	1,174447	-	-
0,888655	9,635850	1,162032	-	-
0,892012	9,655754	1,142127	-	-
0,897403	9,683062	1,114820	-	-
0,905249	9,717667	1,080214	-	-
0,915961	9,759449	1,038433	-0,265	2,677
0,859510	9,038130	1,759752	0,198	0,839
0,904993	8,892717	1,905165	0,425	0,542
0,945217	8,820465	1,977416	0,597	0,431
0,981510	8,774531	2,023351	0,743	0,376
1,015461	8,742072	2,055810	0,874	0,344
1,048025	8,718004	2,079878	0,996	0,325
1,079799	8,699888	2,097994	1,110	0,313
1,111192	8,686421	2,111461	1,221	0,305
1,142516	8,676878	2,121003	1,329	0,301
1,174037	8,670879	2,127003	-	-
1,271500	8,657124	2,140758	-	-
1,368802	8,642273	2,155609	-	-

Parametry koła zębatego:
liczba zębów $z = 20$, współczynnik przesunięcia zarysu $x = 0$.
Parametry narzędzia:
kąt zarysu $\alpha_{on} = 20°$, kąt proturberancji $\alpha_{pn} = 15°$, wysokość $k = 0,5$, wysokość głowy narzędzia $h_{ao} = 1,25$, promień zaokrąglenia głowy narzędzia $\rho_o = 0,2$.
Obliczenia przeprowadzono dla danych: $\psi = 0,515074$, $r_a = 11,0000$, $X_a = 0,347382$, $Y_a = 10,994513$.

Tablica Z.1.2

X_z	Y_z	H_z	γ_z	$-R_z$
0,137842	11,337091	-0,539209	-	-
0,529213	10,644524	0,153357	-	-
0,753255	10,075619	0,722263	-	-
0,853454	9,660167	1,137715	-	-
0,877852	9,418094	1,379787	-	-
0,877133	9,358839	1,439042	-	-
0,876910	9,357126	1,440755	-0,077	1,652
0,901999	8,986144	1,811738	0,258	0,730
0,944858	8,870267	1,927615	0,462	0,510
0,982826	8,806940	1,990941	0,623	0,418
1,017492	8,765041	2,032840	0,762	0,370
1,050165	8,734803	2,063079	0,888	0,341
1,081645	8,712089	2,085793	1,005	0,323
1,112446	8,694834	2,103048	1,116	0,312
1,142928	8,681905	2,115976	1,224	0,305
1,173371	8,672663	2,125218	1,329	0,301
1,204020	8,666766	2,131115	1,433	0,300
1,204020	8,666766	2,131115	-	-
1,286469	8,654912	2,142970	-	-

Parametry koła zębatego:

liczba zębów $z = 20$, współczynnik przesunięcia zarysu $x = 0$.

Parametry narzędzia:

kąt zarysu $\alpha_{on} = 20°$, kąt proturberancji $\alpha_{pn} = 20°$, wysokość $k = 0$, wysokość głowy narzędzia $h_{ao} = 1,25$, promień zaokrąglenia głowy narzędzia $\varrho_o = 0,2$.

Tablica Z.1.3

X_z	Y_z	H_z	γ_z	$-R_z$
0,137842	11,337091	-0,539209	-	-
0,529213	10,644524	0,153357	-	-
0,753255	10,075619	0,722263	-	-
0,853454	9,660167	1,137715	-	-
0,877852	9,418094	1,379787	-	-
0,877133	9,358839	1,439042		
0,877552	9,362342	1,435540	-0,120	1,897
0,890961	8,927623	1,870258	0,240	0,716
0,929906	8,816541	1,981340	0,453	0,424
0,959904	8,765509	2,032373	0,619	0,300
0,983886	8,736324	2,061558	0,762	0,234
1,004091	8,717644	2,080237	0,891	0,196
1,021868	8,704916	2,092966	1,011	0,171
1,038075	8,695970	2,101912	1,124	0,156
1,053303	8,689666	2,108215	1,234	0,146
1,067999	8,685379	2,112503	1,341	0,141
1,082536	8,682777	2,115105	1,447	0,139
1,082536	8,682777	2,115105	-	-
1,225836	8,663707	2,134174	-	-
1,368802	8,642273	2,155609	-	-

Parametry koła zębatego:

liczba zębów $z = 20$, współczynnik przesunięcia zarysu $x = 0$.

Parametry narzędzia:

kąt zarysu $\alpha_{on} = 20°$, kąt proturberancji $\alpha_{pn} = 20°$, wysokość $k = 0$, wysokość głowy narzędzia $h_{ao} = 1,25$, promień zaokrąglenia głowy narzędzia $\varrho_o = 10^{-6}$ zamiast wartości $\varrho_o = 0$.

Tablica Z.1.4

Współrzędne stopy zęba

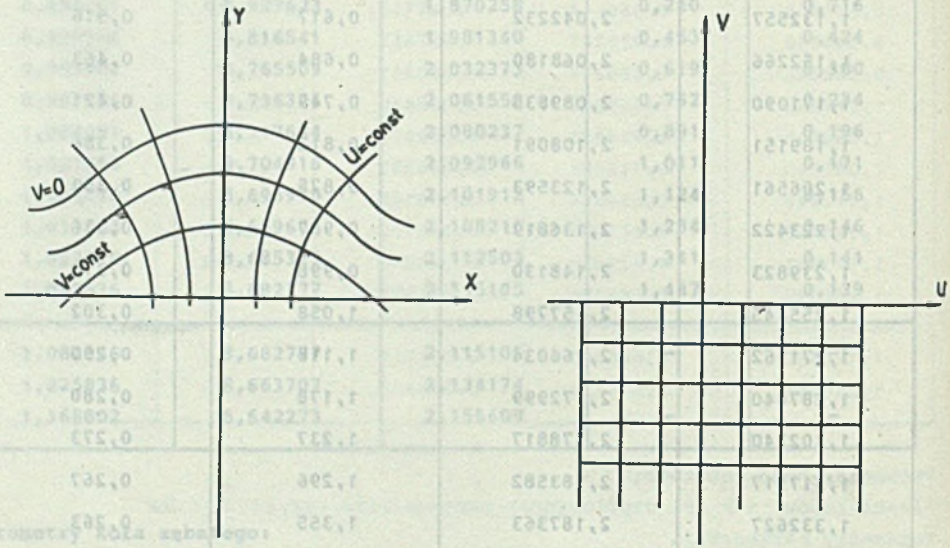
X_z	H_z	γ_z	$-R_z$
0,994952	1,646928	0,137	1,464
1,018215	1,771972	0,235	1,150
1,042854	1,858698	0,322	0,936
1,066964	1,922658	0,402	0,783
1,089992	1,971811	0,477	0,669
1,111836	2,010727	0,548	0,583
1,132557	2,042232	0,617	0,516
1,152266	2,068180	0,684	0,463
1,171090	2,089835	0,749	0,421
1,189151	2,108091	0,812	0,386
1,206561	2,123593	0,875	0,359
1,223422	2,136819	0,937	0,336
1,239823	2,148130	0,998	0,317
1,255845	2,157798	1,058	0,302
1,271562	2,166034	1,118	0,290
1,287040	2,172999	1,178	0,280
1,302340	2,178817	1,237	0,273
1,317517	2,183582	1,296	0,267
1,332627	2,187363	1,355	0,263
1,347721	2,190210	1,414	0,260
1,362851	2,192152	1,473	0,260

Załącznik 2

ODWZOROWANIE ZARYSU ZĘBA NA PÓŁPŁASZCZYZNĘ

2.1. Wprowadzenie

Rysunek Z.2.1 przedstawia zasadę odwzorowania płaszczyzny o współrzędnych x - y związanych z zarysem zęba na półpłaszczyznę u - v, której



Rys. Z.2.1. Zasada odwzorowania układu uv, na układ xy

Fig. Z.2.1. A rule of mapping from uv onto xy

stan naprężeń przy zadanym obciążeniu jest określony analitycznie i może stanowić podstawę obliczeń naprężeń w odwzorowywanym zarysie. W najprostszym przypadku, posiadającym największe praktyczne znaczenie, odwzorowanie ogranicza się do zewnętrznego zarysu zęba, czemu odpowiada w płaszczyźnie u - v linia v = 0.

W niektórych opracowaniach ograniczono się do najprostszej postaci funkcji odwzorowania:

$$x + iy = w + \frac{a}{w - ib} \tag{2.1}$$

gdzie:

$$w = u + iv \tag{2.2}$$

a, b - współczynniki liczbowe, $i = \sqrt{-1}$.

W celu uzyskania prawidłowego odwzorowania zarysu zęba, a zwłaszcza jego stopy konieczne jest przyjęcie bardziej złożonej postaci funkcji (2.1) zawierającej większą liczbę współczynników a, b, np. wg zależności

$$x + iy = w + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{w - ib_k} \tag{2.3}$$

Rozdzielając zmienne i biorąc pod uwagę założenie $v = 0$ otrzymuje się następującą zależność współrzędnych zarysu od wartości współczynników a_k, b_k i parametru u_m:

$$x_m = u_m + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_m}{u_m^2 + b_k^2} \tag{2.4}$$

$$y_m = \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k b_k}{u_m^2 + b_k^2} \tag{2.5}$$

Jednakże ten układ współrzędnych jest mało praktyczny. W dalszej części opracowania przyjęto nowy układ, którego początek pokrywa się z wierzchołkiem krzywej.

Jak łatwo zauważyć, dla $x_m = 0$, $u_m = 0$ wtedy $y_m = y_{max}$

$$y_{max} = \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{b_k} \tag{2.6}$$

W dalszych obliczeniach używane będą następujące współrzędne:

$$X_m = x_m = u_m + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_m}{u_m^2 + b_k^2} \tag{2.7}$$

oraz

$$H_m = y_{max} - y_m - e = \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{b_k} - \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k b_k}{u_m^2 + b_k^2} - e \tag{2.8}$$

Wprowadzając dodatkowo ewentualne przesunięcie układu X_zH_z względem układu X_mH_m o wielkość e otrzymuje się możliwość dowolnego wzajemnego położenia układów współrzędnych.

W przypadku gdy e = 0, początek układu X_mH_m pokrywa się z początkiem układu X_zH_z, który leży w miejscu przecięcia się kierunku siły z osią zęba, powoduje to znaczne odstępstwo zarysu od ewolwenty w pobliżu wierzchołka.

W przypadku gdy odwzorowywany zarys ma przechodzić przez punkt przyłożenia siły do zarysu ewolwentowego, otrzyma się z obliczeń odpowiednią wartość e > 0.

Przy zbyt małej liczbie współczynników a_k, b_k, w szczególności gdy stosuje się funkcję określoną równaniem (2.1), w której K = 1, z obliczeń wypada e < 0, co oznacza, że odwzorowany ząb musi być dodatkowo obciążony momentem zginającym.

2.2. Wyliczanie współczynników a_k, b_k, u_m oraz e

Niżej omówiony będzie szczególny przypadek wyliczania poszukiwanych wartości współczynników dla K = 3 oraz e > 0. Może on stanowić podstawę opracowywania programów dla innych wartości K względnie dla przypadku e = 0. Oddzielnie omówiony będzie algorytm postępowania dla bardziej złożonych przypadków, stosowanych wtedy, gdy nie uzyska się rozwiązania za pomocą podstawowego algorytmu.

Algorytm ilustrowany będzie przykładem obliczeniowym, co ułatwi interpretację.

Przed przystąpieniem do obliczeń trzeba przygotować wartości X_z, H_z, γ_z i R_z, te dwie ostatnie w celach kontrolnych. Zwykle przygotowuje się w nadmiarze, aby można było ewentualnie wybrać inną kombinację danych.

W celu skrócenia opisu podana będzie tylko wybrana kombinacja współrzędnych X_z, Z_z

nr punktu	X_z	H_z	γ_z	$-R_z$
1	X_a = 0,368667	H_a = -0,187206	-	-
2	0,662123	0,471840	-	-
3	0,976384	1,763248	0,295	0,744
4	1,009999	1,851616	0,437	0,600
5	1,041146	1,909411	0,554	0,535
6	1,070848	1,952487	0,655	0,499
7	1,099694	1,986699	0,747	0,477

Punkt 1 leży na wierzchołku zęba w miejscu przyłożenia siły, stąd dodatkowe oznaczenie X_a, H_a, punkt 2 leży na ewolwentowej części zęba, pozosta-

łe punkty leżą na stopie zęba i są tak rozmieszczone, aby obustronnie obejmowały miejsce występowania maksymalnych naprężeń, tj. około kąta stycznej $\gamma_z = 0,5$.

Następnie wybiera się wartości początkowe współczynników występujących w równaniach (2.7) i (2.8) oraz dodatkowo zakłada wstępną wartość przesunięcia początków układów e. W omawianym przykładzie e jest dodatnie.

W dalszej kolejności przystępuje się do rozwiązywania układu 14 nieliniowych równań zawierających następujące niewiadome: $u_1 \ldots u_7$, $a_1 \ldots a_3$, $b_1 \ldots b_3$ oraz e, które wstępnie należy przyjąć.

Obliczenia rozpoczyna się od wyliczenia wyrazów wolnych, które mają zdążać do zera, a praktycznie poniżej wartości 10^{-4}.

Obliczenia przerywa się, gdy każdy wyraz wolny spełnia warunek

$$|X_m - X_z| < 10^{-4} \tag{2.9}$$

$$|H_m - H_z| < 10^{-4} \tag{2.10}$$

W celu zilustrowania sposobu postępowania przyjęto:

$u_1 = 0,005$	$a_1 = 0,014$
$u_2 = 0,023$	$a_2 = 0,14$
$u_3 = 0,34$	$a_3 = 0,29$
$u_4 = 0,42$	$b_1 = 0,014$
$u_5 = 0,48$	$b_2 = 0,13$
$u_6 = 0,53$	$b_3 = 0,54$
$u_7 = 0,58$	$e = 0,3$

Z równań (2.7) i (2.8) w powyższym przykładzie otrzymano:

$W_1 = -0,000594$	$W_8 = 0,001965$
$W_2 = 0,012597$	$W_9 = -0,008526$
$W_3 = 0,006110$	$W_{10} = 0,027083$
$W_4 = 0,007744$	$W_{11} = 0,032465$
$W_5 = 0,006397$	$W_{12} = 0,030104$
$W_6 = 0,003181$	$W_{13} = 0,026124$
$W_7 = 0,002097$	$W_{14} = 0,025801$

Ponieważ warunki (2.9) i (2.10) nie są spełnione, należy przystąpić do wyliczania elementów macierzy o wymiarze 14 x 14 zgodnie z metodą Newtona. Elementy macierzy zawierają wartości pochodnych wielkości X_m i H_m wzglę-

dem współczynników $a_1 \ldots a_3$, $b_1 \ldots b_3$, e oraz parametru $u_1 \ldots u_7$. Można je wyznaczyć numerycznie. W dalszej części podane będą wzory określające poszczególne elementy macierzy metodą analityczną. W celu skupienia uwagi macierz podzielono na cztery części wg schematu:

I II

III IV

Część I zawiera wartości pochodnej $\frac{\partial X_m}{\partial u_m}$ umieszczone wyłącznie na przekątnej.

Pozostałe pola tej części macierzy o wymiarach 7 x 7 zapełnione są wartościami zerowymi. Różniczkując wyrażenie (2.7) względem u uzyskuje się następującą formułę

$$\frac{\partial X_m}{\partial u_m} = 1 + \sum_{1}^{3} \frac{a_k(b_k^2 - u_m^2)}{(u_m^2 + b_k^2)^2} \tag{2.11}$$

Oznaczając przez C poszczególne elementy macierzy otrzymuje się:

$C_{11} = 59{,}257803$ $C_{22} = 0{,}664659$ $C_{33} = 0{,}400256$ $C_{44} = 0{,}475810$

$C_{55} = 0{,}515785$ $C_{66} = 0{,}542975$ $C_{77} = 0{,}567160$

Część III zawiera wartości pochodnej $\frac{\partial H_m}{\partial u_m}$ umieszczone wyłącznie na przekątnej.

Pozostałe pola tej części macierzy o wymiarach 7 x 7 zapełnione są wartościami zerowymi. Różniczkując wyrażenia (2.8) względem u uzyskuje się następującą formułę:

$$\frac{\partial H_m}{\partial u_m} = \sum_{k=1}^{3} \frac{2a_k b_k u_m}{(u_m^2 + b_k^2)^2} \tag{2.12}$$

Elementy tej części macierzy mają następujące wartości:

$C_{8.1} = 40.783984$ $C_{9.2} = 19{,}993357$ $C_{10.3} = 1{,}357096$

$C_{11.4} = 1{,}015025$ $C_{12.5} = 0{,}840952$ $C_{13.6} = 0{,}726625$ $C_{14.7} = 0{,}631752$

Część II zawiera wartości dalszych pochodnych wyliczonych ze wzoru (2.7). Trzy pierwsze kolumny tej części zawierają wartości pochodnej

$$\frac{\partial X_m}{\partial a_k} = \frac{u_m}{u_m^2 + b_k^2} \tag{2.13}$$

	k = 1	k = 2	k = 3
m = 1	22,624434	0,295421	0,017145
m = 2	31,724138	1,319640	0,078732
m = 3	2,936198	2,566038	0,834971
m = 4	2,378310	2,172788	0,897436
m = 5	2,081563	1,940962	0,919540
m = 6	1,885477	1,779718	0,925764
m = 7	1,723134	1,641664	0,923567

Trzy następne kolumny zawierają wartości pochodnej

$$\frac{\partial X_m}{\partial b_k} = \frac{-2a_k b_k u_m}{(u_m^2 + b_k^2)^2} \tag{2.14}$$

	k = 1	k = 2	k = 3	ostatnia kolumna
m = 1	-40,130218	-0,635351	-0,018414	0
m = 2	-17,152913	-2,756032	-0,084411	0
m = 3	-0,009940	-0,704934	-0,642222	0
m = 4	-0,005279	-0,409154	-0,600592	0
m = 5	-0,003539	-0,285690	-0,551724	0
m = 6	-0,002629	-0,217534	-0,506462	0
m = 7	-0,002007	-0,169138	-0,460607	0

Ostatnia kolumna zawiera wartości pochodnej

$$\frac{\partial X_m}{\partial e} = 0, \tag{2.15}$$

co wpisano wyżej.

Część IV zawiera wartości dalszych pochodnych wyliczonych ze wzoru (2.8). Trzy pierwsze kolumny tej części zawierają wartości pochodnej

$$\frac{\partial H_m}{\partial a_k} = \frac{1}{b_k} - \frac{b_k}{u_m^2 + b_k^2} \tag{2.16}$$

	k = 1	k = 2	k = 3
m = 1	8,080155	0,011362	0,000159
m = 2	52,118227	0,233475	0,003353
m = 3	71,307669	6,711176	0,525722
m = 4	71,349294	7,019778	0,698006
m = 5	71,367859	7,166630	0,817369
m = 6	71,378766	7,255773	0,908620
m = 7	71,386979	7,324348	0,991979

Trzy następne kolumny zawierają wartości pochodnej

$$\frac{\partial H_m}{\partial b_k} = \frac{-a_k}{b_k^2} + \frac{a_k(b_k^2 - u_m^2)}{(u_m^2 + b_k^2)^2} \tag{2.17}$$

	k = 1	k = 2	k = 3	ostatnia kolumna
m = 1	-22,412376	-0,036673	-0,000256	-1
m = 2	-80,298013	-0,739040	-0,005396	-1
m = 3	-71,549064	-9,071094	-0,686694	-1
m = 4	-71,507672	-8,881644	-0,841982	-1
m = 5	-71,489180	-8,772763	-0,929379	-1
m = 6	-71,478307	-8,700780	-0,985046	-1
m = 7	-71,470116	-8,642377	-1,027456	-1

Ostatnia kolumna zawiera wartości pochodnej

$$\frac{\partial H_m}{\partial e} = -1, \tag{2.18}$$

co wpisano wyżej.

Mając wyliczone poszczególne wyrazy macierzy Jacobiego i kolumnę wyrazów wolnych $W_1 - W_{14}$ rozwiązuje się układ równań liniowych otrzymując następujące pierwiastki równań:

x_1 = 0,000472	x_8 = -0,000470	(a_1)
x_2 = 0,002874	x_9 = -0,013209	(a_2)
x_3 = -0,000002	x_{10} = 0,004745	(a_3)
x_4 = 0,006116	x_{11} = 0,000662	(b_1)
x_5 = 0,004633	x_{12} = -0,018418	(b_2)
x_6 = -0,000185	x_{13} = -0,038064	(b_3)
x_7 = -0,000771	x_{14} = -0,000786	(e)

Pierwiastki te traktuje się jako poprawki do poprzednio przyjętych wartości współczynników, przy czym x_1 do x_7 odnoszą się do wartości u_1 do u_7, a pozostałe skojarzenia podano powyżej.

Najczęściej zachodzi potrzeba wprowadzenia pewnej modyfikacji metody Newtona polegającej na tym, że do dalszych obliczeń wprowadza się wielkości $u_1 \ldots u_7$, $a_1 \ldots a_3$, $b_1 \ldots b_3$, e, które oznaczono ogólnie od N_1 do N_{14} skorygowane wg zależności:

$$N_{i\ nowe} = N_{i\ stare} - x_i \cdot M \tag{2.19}$$

Wartość współczynnika $M \leqslant 1$ uzależnia się od stosunku wartości poprawki i wielkości poprawianej. Jeśli bowiem poprawka przekracza wartość poprawianą, to może nastąpić zmiana znaku, co całkowicie niweczy dalsze obliczenia, nie dotyczy to tylko wielkości e, która może być zarówno dodatnia jak i ujemna.

W celu wyznaczenia wielkości M należy określić maksymalną wartość stosunku poprawki do wielkości poprawianej z pominięciem znaku, tj. znaleźć

$$\max \left| \left(\frac{x_i}{N_{i\ stare}} \right) \right| = S \tag{2.20}$$

Jeżeli S jest mniejsze od pewnej wartości progowej (najczęściej wystarczy $S \leqslant 0{,}5$), to do obliczeń przyjmuje się $M = 1$, co oznacza, że poprawki wprowadzane są bez zmian. Jeśli natomiast S przekracza założony próg, to współczynnik M wylicza się z zależności:

$$M = \frac{0{,}5}{S}, \tag{2.21}$$

co powoduje odpowiednie zmniejszenie wszystkich poprawek.

W powyższym przykładzie poprawki są o rząd niższe od pierwotnych wartości, stąd $M = 1$, to jest do dalszych obliczeń przyjmuje się wartości:

$u_1 = 0{,}004528$	$a_1 = 0{,}014470$
$u_2 = 0{,}020126$	$a_2 = 0{,}153209$
$u_3 = 0{,}340002$	$a_3 = 0{,}285255$
$u_4 = 0{,}413884$	$b_1 = 0{,}013339$
$u_5 = 0{,}475367$	$b_2 = 0{,}148418$
$u_6 = 0{,}530185$	$b_3 = 0{,}578064$
$u_7 = 0{,}580771$	$e = 0{,}300786$

W niektórych przypadkach konieczne jest przyjęcie progu 0,1. Dla tych nowych wartości współczynników powtarza się obliczenia począwszy od równań (2.7) i (2.8) tak długo, aż nie będzie spełniony warunek (2.9) i (2.10).

Po kilku iteracjach uzyskano wyniki końcowe:

$u_1 = 0{,}004906$	$a_1 = 0{,}013629$
$u_2 = 0{,}023082$	$a_2 = 0{,}141208$
$u_3 = 0{,}339977$	$a_3 = 0{,}287237$
$u_4 = 0{,}415081$	$b_1 = 0{,}013597$

$u_5 = 0{,}477217$ $\qquad$ $b_2 = 0{,}133152$

$u_6 = 0{,}532617$ $\qquad$ $b_3 = 0{,}545637$

$u_7 = 0{,}583858$ $\qquad$ $e = 0{,}304154$

które zapewniają warunki (2.9) i (2.10) z dużym nadmiarem.

2.3. Obliczenia kąta stycznej i promienia odwzorowania

W celu ostatecznego sprawdzenia poprawności odwzorowania oblicza się na podstawie końcowych wyników kąt stycznej γ_m oraz promień krzywizny R_m w stopie zęba, tj. dla $u_3 \ldots u_7$, z następujących zależności:

$$A = \frac{\partial X_m}{\partial u_m} \text{ ze wzoru (2.11)} \tag{2.22}$$

$$B = \frac{\partial^2 X_m}{\partial u_m^2} = \sum_{k=1}^{K} \frac{2a_k u_m (u_m^2 - 3b_k^2)}{(u_m^2 + b_k^2)^3} \tag{2.23}$$

$$C = \frac{\partial H_m}{\partial u_m} \text{ ze wzoru (2.12)} \tag{2.24}$$

$$D = \frac{\partial^2 H_m}{\partial u_m^2} = \sum_{k=1}^{K} \frac{2a_k b_k (b_k^2 - 3u^2)}{(u_m^2 + b_k^2)^3} \tag{2.25}$$

Kąt pochylenia stycznej γ_m wylicza się z zależności:

$$\gamma_m = \operatorname{arctg} \frac{A}{C} \tag{2.26}$$

Promień krzywizny R_m wylicza się ze wzoru:

$$-R_m = \frac{(A^2 + C^2)^{1,5}}{|A.D - B.C|} \tag{2.27}$$

W niektórych opracowaniach stosowano inną konwencję znaków wprowadzając:

$$^*R_m = -R_m \tag{2.28}$$

Wprowadzając końcowe wyniki obliczeń współczynników otrzymano:

w punkcie 3 gdy	$u_3 = 0{,}339977$	$\gamma_3 = 0{,}291$	$-R_3 = 0{,}761$
w punkcie 4 gdy	$u_4 = 0{,}415081$	$\gamma_4 = 0{,}437$	$-R_4 = 0{,}600$
w punkcie 5 gdy	$u_5 = 0{,}477217$	$\gamma_5 = 0{,}554$	$-R_5 = 0{,}535$
w punkcie 6 gdy	$u_6 = 0{,}532617$	$\gamma_6 = 0{,}655$	$-R_6 = 0{,}499$
w punkcie 7 gdy	$u_7 = 0{,}583858$	$\gamma_7 = 0{,}747$	$-R_7 = 0{,}481$

Jak widać, tylko skrajne punkty ($m = 3$ i $m = 7$) wykazują odchylenie od wartości γ_z i R_z wynikających z zarysu zęba. Jeżeli w dalszej części okaże się, że maksymalne naprężenia występują pomiędzy punktami $m = 4$ i $m = 6$, to można uznać odwzorowania za prawidłowo dobrane. Jeżeli wartość m wypadnie poza tym zakresem, to trzeba przemieścić punkty obliczeniowe w odpowiednim kierunku i powtórzyć obliczenia.

2.4. Obliczenie kształtu zęba odwzorowanego

W pewnych przypadkach celowe jest wyrysowanie zarysu zęba, który tylko w okolicy stopy ($m = 3...7$) był gęsto przeliczany. W części ewolwentowej może on znacznie odbiegać od zarysu zęba, w pewnych sytuacjach można uznać obliczenia za mało pewne i zmienić założenia. Obliczeń dokonuje się za pomocą wzorów (2.7) i (2.8) zmieniając wartość u od 0 do 0,7 w odstępach do 0,02.

2.5. Modyfikacje algorytmu

Najczęściej pomija się wierzchołek zęba o współrzędnych X_a, H_a i prowadzi krzywą odwzorowania przez początek układu współrzędnych X_m, H_m, tj. zakłada się wartość $e = 0$. W tych warunkach celowe jest przepisanie algorytmu i zmniejszenie liczby danych.

W omawianym przypadku uzyska się macierz Jacobiego o 12 elementach, wśród których zabraknie dotychczasowej kolumny 1 i 14 oraz wiersza 1 i 8. Oczywiście numeracja będzie zmieniona od $m = 1$ do $m = 6$. Dodatkową zaletą takiego sformułowania zadania jest znajomość współrzędnej miejsca przyłożenia siły $u_o = 0$, co ułatwia dalsze operacje. W takim przypadku można dać jeden punkt na zarysie ewolwentowym odpowiednio daleko od wierzchołka i 5 punktów na stopie zęba.

Przy niektórych kształtach zębów nie udaje się uzyskać 5 punktów w stopie. W tym przypadku można postąpić dwojako.

1. Próbować rozwiązać zadanie przy założeniu 3 punktów na części ewolwentowej i 4 w stopie lub

2. Zerować odpowiednie miejsca w kolumnie wyrazów wolnych, co jest jednoznaczne z akceptacją wyliczonych wartości X_m i H_m jako zgodnych z wartościami zadanymi X_z, H_z.

W takich przypadkach prościej jest zastosować nowy algorytm, w którym wystąpi macierz 8 x 8 odpowiadająca założeniu 4 punktów w stopie zęba i przejścia krzywej przez początek układu, tj. przy założeniu we wzorze (2.8) $e = 0$ i pominięciu pochodnych względem parametru e.

2.6. Przykłady zastosowania algorytmu 7-punktowego

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń odwzorowania tego samego zarysu $z = 30$ zębów w różnych wariantach ilustrujących sposób postępowania.

a) Założono przejście krzywej przez początek układu, tj. $u_1 = 0$; $X_1 = 0$; $H_1 = 0$, pozostawiając współrzędne pozostałych punktów od 2 do 7 bez zmian. Zastartowano z wyników końcowych poprzedniego przykładu, aczkolwiek wiadomo, że w tym przypadku $e = 0$. To spowodowało przedłużenie czasu iteracji, ale ostatecznie uzyskano następujące wyniki:

$u_1 = 0$ (z założenia)	$a_1 = 0{,}023637$
$u_2 = 0{,}030271$	$a_2 = 0{,}132769$
$u_3 = 0{,}339177$	$a_3 = 0{,}286204$
$u_4 = 0{,}414433$	$b_1 = 0{,}028882$
$u_5 = 0{,}476645$	$b_2 = 0{,}140605$
$u_6 = 0{,}532089$	$b_3 = 0{,}547581$
$u_7 = 0{,}583365$	$e = 0$ (z założenia)

W porównaniu z poprzednimi wartościami odpowiadającymi przejściu krzywej przez wierzchołek zęba o współrzędnych X_a, H_a różnice są niewielkie. Dlatego celowe jest startowanie z wyników uzyskanych w zbliżonych przypadkach. Jak łatwo sprawdzić za pomocą wzorów (2.26) i (2.27), także kąty i promienie krzywizny są zadowalające.

Za pomocą tego samego algorytmu rozwiązano następne zadanie, w którym w miejsce punktu 2 podstawiono parametry stopy zęba o $X_2 = 0{,}940998$ oraz $H_2 = 1{,}572550$ zachowując nadal $u_1 = 0$, tj. $X_1 = H_1 = 0$, ale stosownie do położenia punktu (2) przyjęto wstępnie $u_2 = 0{,}2$. Po kilku iteracjach otrzymano:

$u_1 = 0$ (z założenia)	$a_1 = 0{,}076728$
$u_2 = 0{,}223348$	$a_2 = 0{,}099304$
$u_3 = 0{,}334790$	$a_3 = 0{,}272222$
$u_4 = 0{,}410756$	$b_1 = 0{,}057064$
$u_5 = 0{,}473254$	$b_2 = 0{,}211407$
$u_6 = 0{,}528841$	$b_3 = 0{,}573211$
$u_7 = 0{,}580174$	$e = 0$ (z założenia)

Przeprowadzając obliczenia za pomocą wzorów (2.26) i (2.27) otrzymano następujące kąty i promienie w zestawieniu z wartościami dotyczącymi zęba

w punkcie (2)	$\gamma_z = 0{,}089$	$\gamma_2 = 0{,}092$	$-R_z = 1{,}223$	$-R_2 = 1{,}316$
w punkcie (3)	$\gamma_z = 0{,}295$	$\gamma_3 = 0{,}295$	$-R_z = 0{,}744$	$-R_3 = 0{,}739$
w punkcie (4)	$\gamma_z = 0{,}437$	$\gamma_4 = 0{,}437$	$-R_z = 0{,}600$	$-R_4 = 0{,}601$
w punkcie (5)	$\gamma_z = 0{,}554$	$\gamma_5 = 0{,}554$	$-R_z = 0{,}535$	$-R_5 = 0{,}535$
w punkcie (6)	$\gamma_z = 0{,}655$	$\gamma_6 = 0{,}655$	$-R_z = 0{,}499$	$-R_6 = 0{,}499$
w punkcie (7)	$\gamma_z = 0{,}747$	$\gamma_7 = 0{,}746$	$-R_z = 0{,}477$	$-R_7 = 0{,}483$

Z powyższego zestawienia wynika, że bardzo dobre przyleganie zarysów uzyskano od punktu 3 do 7, tj. łącznie w 5 punktach.

2.7. Przykłady zastosowania algorytmu 4-punktowego

Niektóre kształty zębów nie dają się poprawnie odwzorować za pomocą algorytmu 7- lub 6-punktowego, ponieważ nie można znaleźć rozwiązania układu równań i pozostaje nie stosowana w niniejszym opracowaniu metoda prób i błędów.

Tak np. metoda 6-punktowa z ewentualnym pominięciem jednego punktu w stopie daje rozwiązania dla $z = 30$ w zakresie do $x = 0{,}34$.

Obliczenia przeprowadzono dla stopy zęba, której parametry wyliczono za pomocą programu dotyczącego narzędzia Fellowsa, przy założeniu dużej liczby zębów w narzędziu, parametry narzędzia były następujące:

$$z_o = 10^5, \quad x_o = 0, \quad h_{ao} = 1{,}25, \quad \rho_o = 0{,}38, \quad \alpha_{on} = 20°$$

dla przypadku $z = 30$ zębów, $x = 0{,}2$ wybrano następujące punkty stopy zęba:

nr punktu	X_z	H_z	γ_z	$-R_z$
0	-	-	-	-
1	1,036755	1,837693	0,356	0,575
2	1,051606	1,873703	0,427	0,530
3	1,067377	1,905463	0,496	0,498
4	1,084068	1,933983	0,564	0,476
5	1,101674	1,959883	0,631	0,460

W przypadku punktu 0 wstawiono dowolną wartość $u_o = 0,1$ i zerowano odpowiednie wyrazy wolne, tj. akceptowano aktualnie wyliczone wartości X_o, H_o jako zadane wartości. W ten sposób program oparty jest w rzeczywistości na 5 punktach stopy, a punkt 6 o dowolnym położeniu jest zawsze akceptowany.

Uzyskano następujące wartości poszukiwanych współczynników:

$u_1 = 0,397815$ $\quad a_1 = 0,105933$

$u_2 = 0,432515$ $\quad a_2 = 0,120108$

$u_3 = 0,466735$ $\quad a_3 = 0,259088$

$u_4 = 0,500856$ $\quad b_1 = 0,071682$

$u_5 = 0,535096$ $\quad b_2 = 0,272702$

u_0 - dowolne $\quad b_3 = 0,654683$

Wyliczone wartości X_m, H_m wykazują założoną w obliczeniach dokładność, natomiast kąty stycznej i promienie krzywizny wykazały następujące wartości:

$\gamma_1 = 0,357$ $\quad -R_1 = 0,580$

$\gamma_2 = 0,427$ $\quad -R_2 = 0,532$

$\gamma_3 = 0,496$ $\quad -R_3 = 0,498$

$\gamma_4 = 0,564$ $\quad -R_4 = 0,476$

$\gamma_5 = 0,631$ $\quad -R_5 = 0,462$

Jezeli w obliczeniach naprężeń wartość maksymalna wypadnie pomiędzy punktami 2 i 4, to odwzorowanie uznać można za prawidłowe, ponieważ parametry stopy zęba pokrywają się z parametrami odwzorowania.

Postępując w ten sposób nadal, tj. pomijając punkt o numerze $m = 0$ i dobierając odpowiednio pozostałych 5 punktów, można było dojść tylko do wartości współczynnika przesunięcia zarysu $x = 0,34$. Dalsze powiększanie wartości współczynnika powodowało "rozbieganie się" pierwiastków układu równań, tj. utratę rozwiązania.

W takim przypadku konieczne jest dalsze zmniejszanie liczby punktów odwzorowania. Należy więc przygotować program na 4 punkty w stopie ewentual-

nie w dwóch wariantach: 1) z przejściem krzywej przez punkt przyłożenia siły X_a, H_a lub prościej 2) przez początek układu. W tym ostatnim przypadku macierz Jacobiego uzyskuje wymiar 8 x 8. Podane poniżej wyniki dotyczą tego samego narzędzia, przy czym krzywa oparta na 4 punktach w stopie zęba przechodzi przez początek układu.

Dla podanego przykładu o $z = 30$, $x = 0,2$ przy wykorzystaniu punktów od 1 do 4 otrzymano następujące wartości współczynników odwzorowania i wartości kąta stycznej oraz promienia krzywizny

$u_1 = 0,406813$	$\gamma_1 = 0,356$	$-R_1 = 0,564$	$a_1 = 0,138320$
$u_2 = 0,443021$	$\gamma_2 = 0,427$	$-R_2 = 0,533$	$a_2 = 0,298245$
$u_3 = 0,478702$	$\gamma_3 = 0,496$	$-R_3 = 0,499$	$b_1 = 0,083857$
$u_4 = 0,514344$	$\gamma_4 = 0,564$	$-R_4 = 0,466$	$b_2 = 0,483621$

Odwzorowanie jest poprawne, o ile maksymalna wartość naprężeń znajdzie się pomiędzy punktem 2 i 3. W przeciwnym przypadku należy przesunąć odcinek obliczeń i ponowić obliczenia.

Dla ułatwienia kontroli programów podano przykład dotyczący zakresu nie dającego się rozwiązać poprzednio podanymi algorytmami.

Koło o $z = 30$ zębach i $x = 0,5$ wykonano za pomocą tego samego narzędzia o $z_o = 10^5$ uzyskując następujące parametry stopy zęba:

nr punktu	X_z	H_z	γ_z	$-R_z$
1	1,101658	1,901488	0,390	0,444
2	1,113530	1,927848	0,456	0,428
3	1,126545	1,952298	0,522	0,418
4	1,140671	1,975138	0,587	0,411

Krzywa odwzorowująca charakteryzowała się następującymi parametrami:

$u_1 = 0,456924$	$\gamma_1 = 0,390$	$-R_1 = 0,439$	$a_1 = 0,178416$
$u_2 = 0,486619$	$\gamma_2 = 0,457$	$-R_2 = 0,429$	$a_2 = 0,311672$
$u_3 = 0,516709$	$\gamma_3 = 0,522$	$-R_3 = 0,421$	$b_1 = 0,101277$
$u_4 = 0,547351$	$\gamma_4 = 0,586$	$-R_4 = 0,416$	$b_2 = 0,560119$

W tym przypadku odchyłki promienia są małe, sposób oceny błędu wyliczenia naprężeń z powodu odchyłki promienia podano niżej.

2.8. Ocena wpływu odchyłki promienia karbu na wielkość naprężeń

W kołach zewnętrznie uzębionych opracowano szereg wzorów określających wpływ karbu w stopie zęba na wysokość naprężeń. Większość dotyczy konkretnej metody obliczania naprężeń, np. w miejscu gdzie styczna zawiera kąt 30° itp. Podana zależność badana była w szerokim zakresie zmian kształtu zęba i może posłużyć do oceny poprawki, jaką należałoby wnieść do naprężeń w związku ze zmianą promienia krzywizny w badanym miejscu. Może ona służyć też jako ocena wpływu odchyłki promienia karbu.

Oznaczając przez

σ_1 - naprężenia wyliczone przy założeniu X_1, R_1,

σ_2 - naprężenia wyliczone przy założeniu X_1, R_2,

określa się poprawkę z zależności:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{0{,}9 + 0{,}26\left(\frac{X}{|R_1|}\right)^{0{,}65}}{0{,}9 + 0{,}26\left(\frac{X}{|R_2|}\right)^{0{,}65}} \tag{2.29}$$

Zakłada się, że w obu przypadkach X wyliczone jest prawidłowo, a zmiana naprężeń pochodzi od zmiany R.

Poniższe zestawienie ilustruje wartość stosunku wyrażonego wzorem (2.29) w kilku najczęściej spotykanych przypadkach X, R. Założono zwiększenie promienia karbu o 10%, tj. $|R_2| = 1{,}1\ |R_1|$.

X =	1	1,05	1,1	1,2
$-R_1 = 0{,}4$	1,021	1,022	1,022	1,023
$-R_1 = 0{,}5$	1,019	1,020	1,020	1,021
$-R_1 = 0{,}6$	1,018	1,018	1,018	1,018

Najczęściej odchyłki promienia karbu nie przekraczają 10%. Oczywiście różnice wyliczonych naprężeń pochodzą nie tylko od zmiany promienia, ale przebiegu całej krzywej odwzorowania, co będzie zilustrowane w rozdziale dotyczącym obliczania naprężeń. Niektórych kształtów nie udaje się opisać za pomocą 4 punktów w stopie zęba. W takich przypadkach można posłużyć się niżej podaną metodą.

2.9. Algorytm 2-punktowy M 6 x 6

W algorytmie tym poszukuje się wartości u_1, u_2, a_1, a_2, b_1, b_2, krzywa przechodzi przez początek układu (e = 0) i spełnia następujące warunki:

- w punkcie 1 zakłada się wartości współrzędnych X_1, H_1 oraz dodatkowo kąt stycznej γ_1 i promień krzywizny R_1,
- w punkcie 2, którego położenie względem punktu 1 może być dowolnie obierane (w poniższym przykładzie wybrano położenie punktu 2 powyżej położenia punktu 1), zakłada się tylko wartości współrzędnych X_2 i H_2.

W ten sposób otrzymuje się 6 równań dla wyznaczenia 6 niewiadomych, stosując macierz Jacobiego o wymiarach 6 x 6.

Algorytm postępowania jest dość złożony i dlatego wprowadzono szereg wielkości pomocniczych ułatwiających zapis i kontrolę. Poszczególne pochodne oznaczane będą literą P z kolejnym indeksem od 1 do 14, podobnie oznaczane będą inne wielkości pomocnicze. We wszystkich przypadkach sumowanie odbywa się względem wskaźnika k od k = 1 do K = 2. Podstawowe zależności określające współrzędne X i H podane będą w wygodniejszej postaci.

Wprowadzając oznaczenie

$$\Delta_k = u_m^2 + b_k^2 \tag{2.30}$$

i biorąc pod uwagę założenie e = 0, dotychczas stosowane wzory (2.7) i (2.8) przyjmują postać:

$$X_m = u_m + u_m \sum_{k=1}^{2} \frac{a_k}{\Delta_k} \tag{2.31}$$

$$H_m = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_k b_k}{\Delta_k}\right) \tag{2.32}$$

Stosowane w dalszych obliczeniach pochodne cząstkowe przybierają następujące wartości:

$$P_1 = \frac{\partial X_m}{\partial u_m} = 1 + \sum_{k=1}^{2} \frac{a_k}{\Delta_k}\left(1 - \frac{2u_m^2}{\Delta_k}\right) \tag{2.33}$$

$$P_2 = \frac{\partial H_m}{\partial u_m} = \sum_{k=1}^{2} \frac{2u_m a_k b_k}{\Delta_k^2} \tag{2.34}$$

$$P_3 = \frac{\partial^2 X_m}{\partial u_m^2} = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{2u_m a_k}{\Delta_k^2}\left[\frac{2u_m^2}{\Delta_k} - 1\right] - \frac{4u_m b_k^2 a_k}{\Delta_k^3} \right\} \tag{2.35}$$

$$P_4 = \frac{\partial^2 H_m}{\partial u_m^2} = \sum_{k=1}^{2} \frac{2a_k b_k}{\Delta_k^2}\left(1 - \frac{4u_m^2}{\Delta_k}\right) \tag{2.36}$$

$$P_5 = \frac{\partial^3 X_m}{\partial u_m^3} = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{2a_k\left[-3u_m^4 - 2u_m^2 b_k^2 + b^4\right]}{\Delta_k^4}\left[\frac{2u_m^2}{\Delta_k} - 1\right] \right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{8u_m^2 a_k b_k^2}{\Delta_k^4} - \frac{4b_k^2 a_k \Delta_k^3 - 24u_m^2 a_k b_k^2 \Delta_k^2}{\Delta_k^6} \right\} \tag{2.37}$$

$$P_6 = \frac{\partial^3 H_m}{\partial u_m^3} = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{8u_m a_k b_k}{\Delta_k^3}\left[\frac{4u_m^2}{\Delta_k} - 1\right] - \frac{16u_m a_k b_k^3}{\Delta_k^4} \right\} \tag{2.38}$$

$$P_7 = \frac{\partial^2 X_m}{\partial u_m \partial a_k} = \frac{1}{\Delta_k}\left[1 - \frac{2u_m^2}{\Delta_k}\right] \tag{2.39}$$

$$P_8 = \frac{\partial^2 X_m}{\partial u_m \partial b_k} = \frac{2a_k b_k}{\Delta_k^2}\left[\frac{2u_m^2}{\Delta_k} - 1\right] + \frac{4u_m^2 b_k a_k}{\Delta_k^3} \tag{2.40}$$

$$P_9 = \frac{\partial^2 H_m}{\partial u_m \partial a_k} = \frac{2u_m b_k}{\Delta_k^2} \tag{2.41}$$

$$P_{10} = \frac{\partial^2 H_m}{\partial u_m \partial b_k} = \frac{2u_m a_k(\Delta_k^2 - 4b_k^2 \Delta_k)}{\Delta_k^4} \tag{2.42}$$

$$P_{11} = \frac{\partial^3 X_m}{\partial u_m^2 \partial a_k} = \frac{2u_m}{\Delta_k^2}\left[\frac{2u_m^2}{k} - 1\right] - \frac{4u_m b_k^2}{\Delta_k^3} \tag{2.43}$$

$$P_{12} = \frac{{}^3X_m}{\partial u_m^2 \partial b_k} = \frac{8u_m a_k b_k}{\Delta_k^3}\left[1 - \frac{2u_m^2}{\Delta_k}\right] - \frac{8u_m^3 a_k b_k}{\Delta_k^4} + \frac{4u_m a_k(2b_k \Delta_k^3 - 6b_k^3 \Delta_k^2)}{\Delta_k^6} \tag{2.44}$$

$$P_{13} = \frac{\partial^3 H_m}{\partial u_m^2 \partial a_k} = \frac{2b_k}{\Delta_k^2}\left(1 - \frac{4u_m^2}{\Delta_k}\right) \tag{2.45}$$

$$P_{14} = \frac{\partial^3 H_m}{\partial u_m^2 \partial b_k} = \frac{2a_k(\Delta_k - 4b_k^2)}{\Delta_k^3}\left(1 - \frac{4u_m^2}{\Delta_k}\right) + \frac{16a_k u_m^2 b_k^2}{\Delta_k^4} \tag{2.46}$$

We wszystkich tych wzorach $u_m = u_1$, ponieważ tylko w tym miejscu oblicza się kąt stycznej i promień krzywizny. Wskaźnik k przyjmuje wartości 1 lub 2 w zależności od rodzaju pochodnej.

Mając określone wszystkie wartości P wyznacza się dalsze wartości pomocnicze:

$$A = P_1^2 + P_2^2 \tag{2.47}$$

$$B = P_1 P_4 - P_3 P_2 \tag{2.48}$$

$$C = \frac{P_1}{P_2} \tag{2.49}$$

Kąt stycznej w punkcie (1) wylicza się z zależności

$$\gamma = \mathrm{arctg}C, \tag{2.50}$$

a promień krzywizny w punkcie (1) z zależności:

$$R = \frac{A^{1,5}}{B} \tag{2.51}$$

Dalej przygotowuje się następujące wielkości pomocnicze:

$$A_1 = \frac{3\,A^{0,5}\,P_1}{B} - \frac{A^{1,5}\,P_4}{B^2} \tag{2.52}$$

$$A_2 = \frac{3\,A^{0,5}\,P_2}{B} + \frac{A^{1,5}\,P_3}{B^2} \tag{2.53}$$

$$A_3 = \frac{A^{1,5}\,P_2}{B^2} \tag{2.54}$$

$$A_4 = -\frac{A^{1,5}\,P_1}{B^2} \tag{2.55}$$

$$B_1 = \frac{1}{(1 + C^2)\,P_2} \tag{2.56}$$

$$B_2 = \frac{-P_1}{(1 + C^2)\ P_2^2} \tag{2.57}$$

Za pomocą tych wielkości wyznacza się występujące w macierzy Jacobiego pochodne:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = A_1P_3 + A_2P_4 + A_3P_5 + A_4P_6 \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = A_1P_7 + A_2P_9 + A_3P_{11} + A_4P_{13} \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial R}{\partial b_k} = A_1P_8 + A_2P_{10} + A_3P_{12} + A_4P_{14} \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = B_1P_3 + B_2P_4 \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial a_k} = B_1P_7 + B_2P_9 \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial b_k} = B_1P_8 + B_2P_{10} \tag{2.63}$$

Wartości pozostałych pochodnych zawartych w macierzy Jacobiego wylicza się za pomocą poprzednio podanych zależności:

$\frac{\partial X_m}{\partial u_m}$ - ze wzoru (2.33) lub (2.11)

$\frac{\partial H_m}{\partial u_m}$ - ze wzoru (2.34) lub (2.12)

$\frac{\partial X_m}{\partial a_k}$ - ze wzoru (2.13)

$\frac{\partial X_m}{\partial b_k}$ - ze wzoru (2.14)

$\frac{\partial H_m}{\partial a_k}$ - ze wzoru (2.16)

$\frac{\partial H_m}{\partial b_k}$ - ze wzoru (2.17)

Macierz Jacobiego o wymiarach 6 x 6 przyjmuje postać:

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{\partial \gamma}{\partial u} & 0 & \frac{\partial \gamma}{\partial a_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial a_2} & \frac{\partial \gamma}{\partial b_1} & \frac{\partial \gamma}{b_2} \\
\frac{\partial R}{\partial u} & 0 & \frac{\partial R}{\partial a_1} & \frac{\partial R}{\partial a_2} & \frac{\partial R}{\partial b_1} & \frac{\partial R}{\partial b_2} \\
\frac{\partial X_1}{\partial u_1} & 0 & \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \frac{\partial X_1}{\partial a_2} & \frac{\partial X_1}{\partial b_1} & \frac{\partial X_1}{\partial b_2} \\
0 & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} & \frac{\partial X_2}{\partial a_1} & \frac{\partial X_2}{\partial a_2} & \frac{\partial X_2}{\partial b_1} & \frac{\partial X_2}{\partial b_2} \\
\frac{\partial H_1}{\partial u_1} & 0 & \frac{\partial H_1}{\partial a_1} & \frac{\partial H_1}{\partial a_2} & \frac{\partial H_1}{\partial b_1} & \frac{\partial H_1}{\partial b_2} \\
0 & \frac{\partial H_2}{\partial u_2} & \frac{\partial H_2}{\partial a_1} & \frac{\partial H_2}{\partial a_2} & \frac{\partial H_2}{\partial b_1} & \frac{\partial H_2}{\partial b_2}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6
\end{array}
$$

Wyrazy wolne W wylicza się jako różnicę wartości wyliczonej z parametrów krzywej w każdej iteracji i wartości zadanej z zarysu zęba:

W_1 - wynika ze wzoru (2.50) i wartości γ_z,

W_2 - wynika ze wzoru (2.51) i wartości R_z,

W_3 - wynika ze wzoru (2.31) dla $m = 1$ oraz wartości X_{z1},

W_4 - wynika ze wzoru (2.31) dla $m = 2$ oraz wartości X_{z2},

W_5 - wynika ze wzoru (2.32) dla $m = 1$ oraz wartości H_{z1},

W_6 - wynika ze wzoru (2.32) dla $m = 2$ oraz wartości H_{z2}.

Dla ułatwienia kontroli wyników podano wartości uzyskane z poszczególnych wzorów dla następujących założeń:

$u_1 = 0{,}435$	$X_{z1} = 1{,}009999$
$u_2 = 0{,}233$	$X_{z2} = 0{,}940998$
$a_1 = 0{,}106$	$H_{z1} = 1{,}851616$
$a_2 = 0{,}278$	$H_{z2} = 1{,}572550$
$b_1 = 0{,}069$	$\gamma_{z1} = 0{,}437$
$b_2 = 0{,}415$	$R_{z1} = -0{,}600$

Jak wynika z wartości H_{z2} oraz u_2, punkt (2) leży bliżej wierzchołka zęba, ale jeszcze na jego stopie.

(2.33) $P_1 = 0,444217$ (2.34) $P_2 = 0,937369$

(2.35) $P_3 = 0,532959$ (2.36) $P_4 = -3,060296$

(2.37) $P_5 = -0,953326$ (2.38) $P_6 = 11,146485$

(2.39) $P_7 = -0,130123$ (2.40) $P_8 = 1,932279$

(2.41) $P_9 = 2,763573$ (2.42) $P_{10} = -1,677121$

(2.43) $P_{11} = -6,032809$ (2.44) $P_{12} = -1,199636$

(2.45) $P_{13} = -6,950643$ (2.46) $P_{14} = 12,710831$

(2.47) $A = 1,075990$ (2.48) $B = -1,859015$

(2.59) $C = 0,473897$ (2.50) $\gamma = 0,442548$

(2.51) $R = -0,600384$

(2.52) $A_1 = 0,244751$ (2.53) $A_2 = -1,396985$

(2.54) $A_3 = 0,302731$ (2.55) $A_4 = -0,143464$

Wartości $P_7 \ldots P_{14}$ dotyczą przypadku $u_1 a_2 b_2$.

(2.56) $B_1 = 0,871169$ (2.57) $B_2 = -0,412845$

Pozostałe wartości pochodnych i wyrazów wolnych przedstawiono w poniższej tablicy

1,727726	0	-4,929037	-1,254286	0,070274	2,375733
2,517916	0	4,410281	-4,721674	-3,862279	0,629133
0,444217	0	2,242430	1,203486	-0,169096	-0,768273
0	0,133375	3,945809	1,028634	-0,977465	-1,047825
0,937369	0	14,137058	1,261485	-33,783839	-1,650342
0	2,025290	13,324252	0,577522	-23,769855	-0,975167

Wyrazy wolne są następujące:

$W_1 = 0,005548$ $W_2 = -0,000384$ $W_3 = -0,002732$

$W_2 = -0,003782$ $W_5 = -0,002395$ $W_6 = 0,000372$

Ponieważ wyrazy te przekraczają wartość 10^{-4}, rozwiązuje się układ równań otrzymując następujące pierwiastki:

$x_1 = -0,000135$ $x_2 = 0,000442$ $x_3 = -0,000902$

$x_2 = -0,000366$ $x_5 = -0,000508$ $x_6 = 0,000385$

W dalszym ciągu postępuje się zgodnie ze wzorami (2.19) i (2.20), w tym jednak przypadku obliczeń celowe jest zmniejszenie progu do $S \leqslant 0,1$, aby uzyskać dobrą zbieżność iteracji.

Po kilku iteracjach uzyskano końcowe wyniki spełniające warunki dokładności odwzorowania:

$u_1 = 0,435149$ $a_1 = 0,106896$ $b_1 = 0,069506$

$u_2 = 0,232573$ $a_2 = 0,278350$ $b_2 = 0,414580$

Należy jednak pamiętać, że krzywa dokładnie odwzorowuje kształt zęba wyłącznie w punkcie (1), który został dowolnie wybrany. Punkt (2) przyjęto tylko w celu przeprowadzenia krzywej przez początek układu, co wydatnie upraszcza dalsze obliczenia. W pewnym stopniu ułatwia on dopasowanie krzywej w pobliżu punktu (1), co zwiększa dokładność obliczenia naprężeń w punkcie (1). Zachodzi więc potrzeba powtórzenia obliczeń dla dalszych punktów stopy zęba w okolicy spodziewanego maksimum naprężeń, przy czym można w każdym przypadku przyjmować te same parametry punktu (2).

Poniżej podano końcowe wyniki obliczeń parametrów krzywej odwzorowania dla kolejnych położeń punktu (1).

a) dla $X_1 = 0,976384$, $H_1 = 1,763248$

$\gamma_1 = 0,295$, $R_1 = -0,744$

przy nie zmienionych parametrach punktu (2) otrzymano:

$u_1 = 0,371569$ $a_1 = 0,104236$ $b_1 = 0,069851$

$u_2 = 0,245064$ $a_2 = 0,257489$ $b_2 = 0,385369$

b) dla $X_1 = 1,041146$, $H_1 = 1,909411$

$\gamma_1 = 0,554$, $R_1 = -0,535$

przy tych samych parametrach punktu (2) otrzymano:

$u_1 = 0,489043$ $a_1 = 0,109727$ $b_1 = 0,069848$

$u_2 = 0,225379$ $a_2 = 0,293542$ $b_2 = 0,439253$

c) dla $X_1 = 1,041146$ $H_1 = 1,909411$

$\gamma_1 = 0,554$ $R_1 = -0,535$

oraz $X_2 = 0,662123$ $H_2 = 0,471840$

punkt (2) leży na części ewolwentowej zęba, otrzymano:

$u_1 = 0{,}521736$ $a_1 = 0{,}030677$ $b_1 = 0{,}026209$

$u_2 = 0{,}021369$ $a_2 = 0{,}333125$ $b_2 = 0{,}324039$

W załączniku 3 podane będą wyniki obliczenia naprężeń w kolejnych punktach (1), które wskażą, czy wybrany zakres zmian położeń punktu (1) jest wystarczający. Celowe jest narysowanie kształtu odwzorowania za pomocą wzorów (2.7) i (2.8), w którym przyjmuje się $e = 0$, można też przeliczyć kąt stycznej i promień krzywizny w stopie zęba za pomocą wzorów (2.26) i (2.27), co ułatwi podjęcie decyzji odnośnie do ewentualnej potrzeby zmiany założeń.

2.10. Algorytm 1-punktowy

W tym algorytmie poszukuje się krzywej ściśle stycznej tylko w jednym punkcie. Z tego względu pominięto indeksy oznaczające punkt. Poszukuje się następujących wartości: u, a, b, e. Krzywa nie dochodzi do początku układu, stąd potrzeba wyznaczenia odcinka $e < 0$. W badanym punkcie zakłada się współrzędne X, H, kąt γ i promień R. W ten sposób otrzymuje się 4 równania dla wyznaczenia 4 poszukiwanych wartości parametrów krzywej. W miejsce wzorów (2.30), (2.31) i (2.32) używa się wzorów:

$$\Delta = u^2 + b^2 \tag{2.64}$$

$$X = u + u\frac{a}{\Delta} \tag{2.65}$$

$$H = \frac{a}{b} - \frac{ab}{\Delta} - e \tag{2.66}$$

We wzorach (2.33)...(2.38) pomija się znak sumowania Σ oraz indeksy (m) i (k), natomiast we wzorach (2.39)...(2.46) pomija się indeksy, to samo dotyczy wzorów (2.59)...(2.63).

Ostatecznie otrzymuje się następującą macierz Jacobiego, w której dodatkowo pojawia się pochodna względem parametru e:

$$\frac{\partial X}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial e} = -1, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial e} = 0$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial a} & \frac{\partial \gamma}{\partial b} & 0 \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial a} & \frac{\partial R}{\partial b} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial b} & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial a} & \frac{\partial H}{\partial b} & -1 \end{matrix}$$

Wyrazy wolne $W_1 \ldots W_4$ oblicza się podobnie jak w algorytmie 2-punktowym, przy czym W_1 dotyczy kąta stycznej, W_2 - promienia krzywizny, W_3 - współrzędnej X, W_4 - współrzędnej H.

Ten sposób odwzorowania jest najmniej dokładny, głównie ze względu na szybkie zmiany promienia krzywizny poza punktem styku, dodatkowo trzeba rozszerzyć sposób obliczania naprężeń ze względu na zbyt niską wysokość zęba $e < 0$, o czym będzie mowa w załączniku poświęconym obliczaniu naprężeń. Obejmuje on jednak najszerszy zakres kształtów stopy zęba.

Dla ułatwienia kontroli uzyskanych wyników podano niektóre wartości wyliczone dla następujących założeń:

$u = 0{,}48$ $\quad a = 0{,}34$ $\quad b = 0{,}27$ $\quad e = -0{,}9$

$X = 1{,}009999$ $\quad H = 1{,}851616$ $\quad \gamma_z = 0{,}437$ $\quad -R_z = 0{,}600$

Wartości pochodnych:

$P_1 = 0{,}417877$ $\quad P_2 = 0{,}958008$ $\quad P_3 = 0{,}136873$ $\quad P_4 = -4{,}068691$

$P_5 = 10{,}216096$ $\quad P_6 = 19{,}682764$ $\quad P_7 = -1{,}712126$ $\quad P_8 = 4{,}068691$

$P_9 = 2{,}817670$ $\quad P_{10} = 0{,}136873$ $\quad P_{11} = 0{,}402569$ $\quad P_{12} = -19{,}682764$

$P_{13} = -11{,}966738$ $\quad P_{14} = 10{,}216096$

$A = 1{,}092400$ $\quad B = -1{,}831339$ $\quad C = 0{,}436194$ $\quad \gamma = 0{,}411314$

$R = -0{,}623454$

Macierz Jacobiego przybiera wartości:

	$\frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial}{\partial a}$	$\frac{\partial}{\partial b}$	$\frac{\partial}{\partial e}$	W
$\frac{\partial}{\partial \gamma}$	1,676435	-2,579338	3,515782	0	-0,025686
$\frac{\partial}{\partial R}$	7,107584	-3,803269	-5,366190	0	-0,023454
$\frac{\partial}{\partial X}$	0,417877	1,582591	-0,958008	0	0,008082
$\frac{\partial}{\partial H}$	0,958008	2,813496	-5,246046	-1	0,004973

Po prawej stronie wpisano wyrazy wolne.

Ostatecznie uzyskano następujące wartości współczynników odwzorowania:

a) dla $X_z = 0{,}976384$, $\quad H_z = 1{,}763248$ $\quad \gamma_z = 0{,}295$ $\quad -R_z = 0{,}744$

$u = 0{,}429084$ $\quad a = 0{,}307890$ $\quad b = 0{,}239317$ $\quad e = -0{,}781966$

b) dla $X_z = 1{,}009999$ $\quad H_z = 1{,}851616$ $\quad \gamma_z = 0{,}437$ $\quad -R_z = 0{,}600$

$u = 0{,}483105$ $\quad a = 0{,}335577$ $\quad b = 0{,}272576$ $\quad e = -0{,}917765$

c) dla $X_z = 1{,}041146$ $H_z = 1{,}909411$ $\gamma_z = 0{,}554$ $-R_z = 0{,}535$

$u = 0{,}532531$ $a = 0{,}356906$ $b = 0{,}300165$ $e = -1{,}007063$

d) dla $X_z = 1{,}070848$ $H_z = 1{,}952487$ $\gamma_z = 0{,}665$ $-R_z = 0{,}499$

$u = 0{,}582617$ $a = 0{,}372609$ $b = 0{,}324345$ $e = -1{,}075485$

W ten sposób objęto obustronnie miejsce przypuszczalnego występowania maksymalnych naprężeń, co sprawdzone zostanie w następnym załączniku. W każdym przypadku współczynnik e jest mniejszy od zera, co oznacza, że wierzchołek odwzorowania leży znacznie poniżej początku układu. Wymaga to dodatkowego obciążenia zęba momentem zginającym, którego wielkość zależy od odcinka e.

2.11. Algorytm 2-punktowy M 8 x 8

W tym algorytmie poszukuje się wartości u_1, u_2, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, krzywa przechodzi przez początek układu (e = 0) i spełnia następujące warunki:

- w punkcie 1 zakłada się wartości współrzędnych X_1, H_1 oraz kąt stycznej γ_1 i promień krzywizny R_1,
- w punkcie 2 zakłada się wartości współrzędnych X_2, H_2 oraz kąt stycznej γ_2 i promień krzywizny R_2.

W ten sposób otrzymuje się 8 równań dla wyznaczenia 8 niewiadomych, stosując macierz Jacobiego o wymiarach 8 x 8. Punkty (1) i (2) dobiera się w ten sposób, aby obejmowały miejsce przypuszczalnego występowania maksymalnych naprężeń. W tym przypadku zapewnia się zgodność promieni w skrajnych punktach i dostateczną zgodność całej krzywej w punktach pośrednich.

Poprzednio opisane algorytmy wyznaczające współczynniki a i b dla K = 3 wymagały macierzy 12 x 12.

Stosuje się te same zależności, które podano w punkcie 2.8, powtarzając w punkcie (2) te same czynności, jakie występowały w punkcie (1). Sumowanie prowadzi się od k = 1 do K = 3, podobnie wyznacza się K = 3 pochodne względem a_k oraz b_k.

Ze względu na zapewnienie zgodności promieni wystarczy ograniczyć iterację do zakresu błędów mniejszych od 10^{-3}.

Dla ułatwienia kontroli podano dwa przykłady obliczeniowe.

1. Przy założeniu $X_1 = 0{,}976384$, $H_1 = 1{,}763248$, $\gamma_1 = 0{,}295$, $-R_1 = 0{,}744$ oraz $X_2 = 1{,}041146$, $H_2 = 1{,}909411$, $\gamma_2 = 0{,}554$, $-R_2 = 0{,}535$ otrzymano następujące końcowe (10^{-3}) wartości współczynników:

$u_1 = 0{,}334772$ $a_1 = 0{,}078194$ $b_1 = 0{,}057563$

$u_2 = 0{,}473205$ $a_2 = 0{,}101413$ $b_2 = 0{,}217887$

$a_3 = 0{,}269386$ $b_3 = 0{,}578345$

2. Przy założeniu $X_1 = 1{,}036755$, $H_1 = 1{,}837693$, $\gamma_1 = 0{,}356$, $-R_1 = 0{,}575$ oraz $H_2 = 1{,}084068$, $H_2 = 1{,}933983$, $\gamma_2 = 0{,}564$, $-R_2 = 0{,}476$ otrzymano następujące wyniki:

- przy założeniu dokładności 10^{-3}:

$u_1 = 0{,}397812$ $a_1 = 0{,}105939$ $b_1 = 0{,}071823$

$u_2 = 0{,}500981$ $a_2 = 0{,}113909$ $b_2 = 0{,}265930$

$a_3 = 0{,}263565$ $b_3 = 0{,}643583$

natomiast przy założeniu dokładności 10^{-7} otrzymano:

$u_1 = 0{,}396602$ $a_1 = 0{,}110031$ $b_1 = 0{,}073098$

$u_2 = 0{,}499516$ $a_2 = 0{,}124232$ $b_2 = 0{,}287149$

$a_3 = 0{,}255736$ $b_3 = 0{,}672690$

Jak łatwo sprawdzić, uzyskane wartości niewiele różnią się od wartości uzyskanych w przypadku algorytmu $K = 3$ $e = 0$.

Dla ułatwienia ostatecznej kontroli macierzy Jacobiego i kolumny wyrazów wolnych a także uzyskanych rozwiązań $x_1 \ldots x_8$ podano w tablicy Z.2.1 wartości elementów macierzy, wyrazów wolnych W oraz pierwiastków tej iteracji.

Do obliczeń przyjęto następujące dane:

$u_1 = 0{,}397$ $a_1 = 0{,}110$ $b_1 = 0{,}073$

$u_2 = 0{,}500$ $a_2 = 0{,}124$ $b_2 = 0{,}287$

$a_3 = 0{,}256$ $b_3 = 0{,}673$

oraz następujące współrzędne zarysu:

$X_1 = 1{,}036755$ $H_1 = 1{,}837693$ $\gamma_1 = 0{,}356$ $R_1 = -0{,}575$

$X_2 = 1{,}084068$ $H_2 = 1{,}933983$ $\gamma_2 = 0{,}564$ $R_2 = -0{,}476$

Interesujące jest, że niewielka zmiana kąta w przykładzie 1), tj. przyjęcie zamiast $\gamma_2 = 0{,}554$ nowej wartości $\gamma_2 = 0{,}553345$, pozwoliła uzyskać zgodność parametrów z dokładnością lepszą od 10^{-8} przy następujących wartościach współczynników:

$u_1 = 0{,}334028$ $a_1 = 0{,}079853$ $b_1 = 0{,}058125$

$u_2 = 0{,}472157$ $a_2 = 0{,}104012$ $b_2 = 0{,}224798$

$a_3 = 0{,}268376$ $b_3 = 0{,}588042$

Przykład ten jest dobrą ilustracją trudności znalezienia dostatecznie dokładnego rozwiązania polegającego na dopasowaniu krzywej analitycznej do zadanego zarysu stopy zęba. Krzywa analityczna określona za pomocą równań (1) i (2) nie jest ewolwentą i może tylko przebiegać blisko ewolwenty, jak wynikało z powyższego przykładu nawet z dokładnością lepszą od 10^{-8}.

2.12. Praktyczne wskazówki

Celowe jest wyświetlanie podczas obliczeń następujących częściowych wyników iteracji:

- wartości wyrazów wolnych W, które powinny zdążać do zera, ilustrują one bowiem różnicę pomiędzy wartością wyliczoną a zadaną,
- wartości pierwiastków każdorazowego rozwiązania układu równań, które również powinny zdążać do zera jako poprawki do aktualnych wartości poszukiwanych współczynników odwzorowania.

Jeżeli pamięta się o wzorach (2.19)...(2.21), to nie potrzeba wyświetlać wartości skorygowanych, które oczywiście również mają zdążać do zera.

Aczkolwiek w każdym algorytmie liczba niewiadomych równa jest liczbie równań, to jednak uzyskane pierwiastki nie muszą prowadzić do rozwiązania problemu. W niektórych przypadkach pierwiastki przybierają coraz większe wartości i mimo stosowania wzorów (2.19)...(2.21) nie uzyskuje się zbieżności rozwiązań. W takim przypadku należy:

- zmienić wartości startowe prowadzące do małych wartości wyrazów wolnych W, a jeżeli nadal pierwiastki będą bardzo duże w porównaniu z założonymi startowymi wartościami poszukiwanych współczynników odwzorowania, należy
- zmienić algorytm obliczeń.

W niektórych przypadkach pomimo małych wartości pierwiastków układu równań nie można uzyskać wartości wyrazów wolnych w zadanych granicach. Sposób postępowania w takim przypadku zilustrowany będzie na przykładzie 1) punktu 2.10. Uzyskano tam wartości wyrazów wolnych poniżej 10^{-3}, ale nie udało się uzyskać wartości poniżej 10^{-4}, chociaż w następnym przykładzie 2) udało się nawet zejść poniżej 10^{-4}. Wyświetlając wartości wyrazów wolnych W zauważa się, że głównie wartość W_2 pochodząca z kąta γ_2 nie może osiągnąć wymaganej wartości, podczas gdy inne wartości są już dostatecznie małe.

W takim przypadku należy w każdym kroku iteracji zakładać $W_2 = 0$, co jest jednoznaczne z aprobowaniem wyliczonej wartości kąta γ_2.

W omawianym przypadku udało się uzyskać zgodność wartości wyliczonych z założonymi lepszą od $1{,}24 \cdot 10^{-8}$ z wyjątkiem kąta γ_2, który zamiast zadanej wartości $\gamma_2 = 0{,}554$ uzyskał wartość $\gamma_2'' = 0{,}553345$.

W końcowej iteracji uzyskano następujące wartości poszukiwanych współczynników:

$u_1 = 0{,}334030$	$a_1 = 0{,}079846$	$b_1 = 0{,}058122$
$u_2 = 0{,}472160$	$a_2 = 0{,}104002$	$b_2 = 0{,}224768$
	$a_3 = 0{,}268383$	$b_3 = 0{,}588008$

Powyższy przykład ilustruje sposób postępowania, ale nie ma praktycznego znaczenia w konkretnym przykładzie, gdyż dokładność 10^{-3} w odniesieniu do kąta a także innych wielkości, jak promienia itd. jest zupełnie zadowalająca.

Normy ISO, RWPG, DIN itp. zalecają wyznaczanie naprężeń w przypadku kół znormalizowanych wyłącznie w punkcie, gdzie styczna zawiera z osią zęba kąt $\gamma = 30° = 0{,}523599$ rad, podają jednocześnie sposób wyznaczenia potrzebnych wielkości: ramię działania siły, które w niniejszym opracowaniu oznaczono literą H, grubość zęba w obliczanym miejscu $s_f = 2\,X$, promień karbu itd.

Wielkości te można wyznaczyć także za pomocą wzorów podanych w załączniku 1 albo przez iterację lub przez interpolację wyników obliczeń w okolicy kąta 30°.

Obliczenia współczynników odwzorowania najwygodniej jest prowadzić za pomocą algorytmu 2-punktowego opisanego w punkcie 2.8. Natomiast obliczenia naprężeń prowadzi się wyłącznie w punkcie (1) zgodnie z założeniami normy. Dalsze informacje na ten temat podano w załączniku 3 dotyczącym obliczenia naprężeń.

Tablica Z.2.1

Wartości elementów macierzy 8 x 8 wolnych wyrazów W i pierwiastków równań x_i

	$\overline{\partial u_1}$	$\overline{\partial u_2}$	$\overline{\partial a_1}$	$\overline{\partial a_2}$	$\overline{\partial a_3}$	$\overline{\partial b_1}$	$\overline{\partial b_2}$	$\overline{\partial b_3}$	W
$\underline{\partial \vartheta_1}$	2,045872	0	-5,237305	-2,225590	0,205496	0,534093	1,797977	0,344310	0,001328
$\underline{\partial \vartheta_2}$	0	1,978276	-4,006801	-2,842642	-0,407600	-0,236431	1,156101	0,730287	0,001709
$\underline{\partial R_1}$	1,524095	0	3,174280	-4,640454	-2,357950	-4,960134	-1,345564	1,827919	0,002227
$\underline{\partial R_2}$	0	0,471161	3,416455	-1,075720	-2,077619	-1,839661	-1,969819	0,843267	0,000567
$\underline{\partial X_1}$	0,409870	0	2,436510	1,654318	0,650246	-0,240155	-0,490661	-0,366987	-0,000140
$\underline{\partial X_2}$	0	0,504142	1,958258	1,504352	0,711309	-0,123173	-0,322153	-0,348684	-0,000025
$\underline{\partial H_1}$	1,097802	0	13,250607	2,288378	0,383578	-21,272715	-1,667425	-0,362392	0,001828
$\underline{\partial H_2}$	0	0,794010	13,412725	2,620822	0,528462	-21,054605	-1,693584	-0,460072	0,001685
x_i	0,000553	0,000676	-0,000416	-0,001592	0,001125	-0,000215	-0,002466	-0,003506	

Załącznik 3

OBLICZENIE NAPRĘŻEŃ W ODWZOROWANYM ZARYSIE

3.1. Wprowadzenie

Rozkłady naprężeń w półpłaszczyźnie zostały wyznaczone analitycznie, pozostaje więc zadanie odszukania miejsca przyłożenia sił oraz miejsca występowania maksymalnych naprężeń odpowiadających stopie zęba lub zgodnie z niektórymi normami wyliczenia naprężeń w określonym punkcie, które przyjęto jako wartości porównawcze.

3.2. Wyznaczenie miejsca przyłożenia siły

W przytoczonych poprzednio algorytmach obliczania współczynników funkcji odwzorowania rozróżnia się trzy przypadki:

1) $e > 0$

W tym przypadku siła przyłożona była w punkcie o współrzędnych X_a, H_a, najczęściej przyjmowano parametry wierzchołka zęba. W innych przypadkach przyłożenia siły, np. w punkcie jednoparowego zazębienia, umownie parametry tego punktu również oznaczano za pomocą X_a, H_a.

Jeżeli znane są już wartości współczynników a_k, b_k, to za pomocą wzoru (2.4) przez iterację można wyznaczyć współrzędną u_a:

$$X_a = u_a + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_a}{u_a^2 + b_k^2}. \tag{3.1}$$

Wartość u_a znana jest łącznie z innymi wartościami u, jest dodatnia, ale bardzo bliska zeru, tj. bliska początkowi układu współrzędnych. Występuje ona we wzorach określających naprężenia w półpłaszczyźnie odwzorowującej ząb.

2) $e = 0$

W tym przypadku krzywa przechodzi przez początek układu i wtedy $u_a = 0$, co też wynika ze wzoru (3.1) przy założeniu $X_a = 0$. Jest to więc szczególny przypadek wartości u_a, umożliwia on odpowiednią zmianę dalszych wzorów, co jednak nie jest konieczne, wystarczy bowiem wprowadzać każdorazowo $u_a = 0$.

3) $e < 0$

Przypadek ten występuje wyłącznie w algorytmie 1-punktowym opisanym w punkcie 2.9. Algorytm ten stosowany jest wyjątkowo tylko w przypadkach, gdy inne algorytmy zawodzą.

Obliczenia naprężeń przeprowadza się w dwóch etapach:

- najpierw wyznacza się naprężenia wynikające z przyłożenia siły w wierzchołku krzywej, tj. dla $u = 0$,
- następnie wyznacza się naprężenia wynikające z dodatkowego obciążenia odwzorowanego zęba (o małej wysokości), momentem uzupełniającym obciążenie.

W tym celu zakłada się parę sił $P_n = \pm 1$ działających pod kątem prostym $\psi_M = \frac{\pi}{2}$ z obu stron osi zęba w odległości

$$X_M = \left|\frac{e}{2}\right| \cos\psi \tag{3.2}$$

gdzie ψ jest rzeczywistym kątem działania siły na ząb.

Dla tej wartości X_M wyznacza się przez iterację wartość parametru u_M z analogicznej do (3.1) zależności

$$\left| u_M + \sum_{k}^{K} \frac{a_k u_M}{u_M^2 + b_k^2} - X_M \right| < 10^{-9} \tag{3.3}$$

Naprężenie pochodzące od dodatkowego momentu wyznacza się dwukrotnie:

- dla siły $P_n = -1$ i wartości parametru $u_M > 0$,
- dla siły $P_n = 1$ i wartości parametru $u_M < 0$, to jest po drugiej stronie osi zęba.

Przez superpozycję uzyskuje się łączną wartość naprężenia wynikającego z przyłożenia siły w $u = 0$ oraz dwukrotnego przyłożenia dodatkowego obciążenia. Przykłady obliczeniowe zilustrują sposób postępowania.

3.3. Wyznaczenie wielkości pomocniczych

Ostateczny wzór w zapisie zmiennej rzeczywistej jest dość złożony, dlatego algorytm postępowania podzielono na etapy.

Znając wartości współczynników a_k, b_k, u_a względnie u_M oraz rzeczywisty kąt działania siły ψ układa się układ równań liniowych, tj. buduje macierz współczynników i kolumnę wyrazów wolnych dwa razy: dla wyznaczenia współczynników A_k i współczynników B_k. Tablica Z.3.1 przedstawia sposób wyznaczania współczynników A_k, natomiast tablica Z.3.2 dotyczy współczynników B_k.

Następnie znając wartości współczynników A_k, B_k i poprzednio wyznaczone wielkości oblicza się dla kolejno przyjmowanych wartości parametru u

w zakresie odpowiadającym dobremu odwzorowaniu krzywej kolejne wartości pomocnicze D, E, F, G, L zmieniając wartości u o 0,01 lub 0,005, wyliczając każdorazowo naprężenie w stopie σ_u. Spośród tych wartości wybiera się wartość maksymalną i jednocześnie zapamiętuje odpowiadającą jej wartość parametru u, który powinien znajdować się w strefie prawidłowego odwzorowania. Jeżeli wartość parametru wypadnie na skraju strefy odwzorowania, to należy zmienić założenia i ponowić wyliczanie współczynników odwzorowania.

W przypadku algorytmu opisanego w punktach 2.8 oraz 2.9 naprężenia wylicza się wyłącznie dla wartości u_1, w której spełnione są warunki odnośnie do kąta stycznej i promienia krzywizny. Przechodząc przez kilka położeń punktu u_1 znajduję się miejsce maksymalnych naprężeń.

3.4. Wyznaczenie naprężeń w punkcie o współrzędnej u

Wylicza się dla każdorazowej wartości u następujące wielkości:

$$F_k = \frac{a_k(u^2 - b_k^2)}{(u^2 + b_k^2)^2} \tag{3.4}$$

$$L_k = \frac{2ua_kb_k}{(u^2 + b_k^2)^2}$$

$$D = \frac{\sin\psi}{2\pi(u_a - u)} \tag{3.5}$$

$$E = \frac{\cos\psi}{2\pi(u_a - u)} \tag{3.6}$$

$$G_k = \left[\sum_k A_kL_k + \sum_k B_kF_k - D\right] \sum_k L_k \tag{3.7}$$

i ostatecznie poszukiwaną wartość naprężenia w miejscu u

$$\sigma_u = 4\,\frac{\left[\sum_k A_kF_k - \sum_k B_kL_k - E\right] \cdot \left[1 - \sum_k F_k\right] - G}{(1 - \sum_k F_k)^2 + (\sum_k L_k)^2} \tag{3.8}$$

Następnie zmienia się o krok wartość u i ponawia obliczenia od wzoru (3.4) do wzoru (3.8). Obliczenia prowadzi się dla $u > 0$, tj. dla rozciąganej strony zęba. Oczywiście w analogiczny sposób można przeprowadzić obliczenia dla ściskanej strony zęba przyjmując ujemne wartości u, pozostawiając dodatnią wartość u_a.

3.5. Przykłady obliczeniowe

Przykłady odnoszą się do wielkości wyliczonych w załączniku 2, dotyczących głównie zębów $z = 30$, $x = 0$; do obliczeń przyjęto wartości końcowe. W celu uniknięcia nieporozumień w pierwszym przykładzie powtórzone będą wyniki obliczeń:

$u_1 = 0{,}004906 = u_a$	$a_1 = 0{,}013629$
u_2 - poza zakresem obliczeń	$a_2 = 0{,}141208$
$u_3 = 0{,}339977$	$a_3 = 0{,}287237$
$u_4 = 0{,}415081$	$b_1 = 0{,}013597$
$u_5 = 0{,}477217$	$b_2 = 0{,}133152$
$u_6 = 0{,}532617$	$b_3 = 0{,}545637$
$u_7 = 0{,}583858$	$e = 0{,}304154$

Ponieważ $e > 0$ do obliczeń przyjmuje się $u_a = u_1$ oraz kąt działania siły na wierzchołku zęba $\psi = 0{,}469862$.

Dla tych wartości elementy macierzy z tablicy Z.3.1 przybierają wartości:

-45,33486	-6,55706	-0,91845	8,02114
-0,63287	-6,23857	-0,62341	0,57966
-0,04358	-0,30647	-1,83245	0,13439

Stąd uzyskano wartości współczynników A_k

$A_1 = -0{,}16559$ $\quad A_2 = -0{,}07036$ $\quad A_3 = -0{,}05764$

Na podstawie wzorów zawartych w tablicy Z.3.2 otrzymano:

8,47550	-6,55706	-0,91845	-7,54250
-0,63287	2,25627	-0,62341	-1,04440
-0,04358	-0,30647	1,35005	-0,25887

Stąd uzyskano wartości współczynników B_k

$B_1 = -1{,}80001$ $\quad B_2 = -1{,}10619$ $\quad B_3 = -0{,}500096$

Dalsze obliczenia prowadzone są dla poszczególnych wartości parametru u zmienianego co 0,01; obliczenia rozpoczęto od $u = 0{,}40$ uzyskując następujące wyniki:

u =	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47
σ_u =	3,571	3,589	3,602	3,611	3,617	3,620	3,619	3,615

Obliczenia przeprowadzone w szerszym zakresie zmian parametru u wykazały, że jedyne lokalne maksimum wypada przy $u = 0,45$ i wynosi $\sigma_{umax} = 3,62$. Parametr $u = 0,45$ leży pomiędzy punktami $m = 4$ i $m = 5$, a więc w zakresie prawidłowego odwzorowania, co było stwierdzone w załączniku 2.

Przy zastosowaniu 6-punktowego odwzorowania ($e = 0$) otrzymano w załączniku 2 następujące wartości współczynników:

$a_1 = 0,023637$ $\quad b_1 = 0,028882$

$a_2 = 0,132769$ $\quad b_2 = 0,140605$

$a_3 = 0,286204$ $\quad b_3 = 0,547581$

a stąd następujące wartości naprężenia w zakresie od $u = 0,4$

u =	0,4	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48
σ_u =	3,575	3,592	3,604	3,613	3,618	3,620	3,619	3,614	3,607

Ten wariant również bardzo dobrze określa naprężenia w stopie.

Następny wariant obliczeń oparty na innym punkcie stopy zęba charakteryzował się następującymi wartościami ($e = 0$):

$a_1 = 0,076728$ $\quad b_1 = 0,057064$

$a_2 = 0,099304$ $\quad b_2 = 0,211407$

$a_3 = 0,272222$ $\quad b_3 = 0,573211$

Na tej podstawie uzyskano dla tego samego zęba następujące wartości:

u =	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48
σ_u =	3,603	3,614	3,622	3,627	3,629	3,628	3,624	3,617	3,608

Ten wariant najlepiej odwzorowywał stopę zęba i może służyć jako wariant odniesienia. Różnice pomiędzy powyższymi wariantami są pomijalnie małe.

Przykład dotyczy algorytmu 2-punktowego, który opisano w punkcie 2.8. W tym przypadku oblicza się każdorazowo naprężenia wyłącznie w punkcie (1), tj. dla u_1, zakładając zawsze $e = 0$ oraz $\psi = 0,469862$ - w waiancie a) otrzymano:

$u_1 = 0,371569$ $\quad a_1 = 0,104236$ $\quad b_1 = 0,069851$

$a_2 = 0,257489$ $\quad b_2 = 0,385369$

Przeprowadzając stosowne przeliczenia otrzymuje się w punkcie u_1 naprężenie $\sigma_{u1} = 3,519$.

- w wariancie b) obejmującym niższe partie stopy otrzymano:

$u_1 = 0,489043$ $a_1 = 0,109727$ $b_1 = 0,069848$

$a_2 = 0,293542$ $b_2 = 0,439253$

a stąd naprężenie w punkcie u_1 $\sigma = 3,636$

- w wariancie c), w którym punkt (2) przeniesiono na ewolwentową część zęba, otrzymano:

$u_1 = 0,521736$ $a_1 = 0,030677$ $b_1 = 0,026209$

$a_2 = 0,333125$ $b_2 = 0,324039$

w tym samym punkcie stopy zęba, charakteryzującym się teraz inną wartością u_1, naprężenie $\sigma = 3,4720$.

Z powyższego przykładu wynika celowość obierania punktu (2) na stopie zęba, w przeciwnym przypadku krzywa ma niekorzystny kształt powyżej punktu obliczeniowego, co wpływa na wartość naprężeń w punkcie obliczeniowym (1).

Przykłady dotyczące algorytmu 2-punktowego wg 2.10.

W punkcie 2.10 podano dwa przykłady obliczeniowe dotyczące

a) $z = 30$, $x = 0$, $\Phi = 0,469862$ oraz b) $z = 30$, $x = 0,2$, $\Phi = 0,494378$

a) w pierwszym przykładzie otrzymano dla $e = 0$ w zakresie od $u = 0,33$ do $u = 0,47$ następujące współczynniki odwzorowania

$a_1 = 0,078194$ $b_1 = 0,057563$

$a_2 = 0,101413$ $b_2 = 0,217887$

$a_3 = 0,269386$ $b_3 = 0,578345$

otrzymując następujące wartości naprężeń:

u =	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40
σ_u =	3,424	3,460	3,493	3,522	3,547	3,568	3,587	3,602
u =	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48
σ_u =	3,613	3,621	3,627	3,629	3,628	3,625	3,618	3,609

b) w drugim przypadku dotyczącym zębów korygowanych otrzymano w zakresie $u = 0,39$ do $u = 0,50$ następujące wartości współczynników odwzorowania:

$a_1 = 0{,}105935$ $b_1 = 0{,}071838$

$a_2 = 0{,}113269$ $b_2 = 0{,}265333$

$a_3 = 0{,}263587$ $b_3 = 0{,}641719$

a stąd następujące wartości naprężeń:

u =	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46
σ_u =	3,379	3,407	3,430	3,449	3,465	3,476	3,484	3,488

u =	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52
σ_u =	3,489	3,486	3,480	3,470	3,457	3,441

W dotychczasowych przykładach opartych na więcej niż jednym punkcie odwzorowania otrzymano dla $z = 30$ zębów $x = 0$ następujące bardzo zbliżone do siebie wartości maksymalnych naprężeń:

3,620; 3,629; 3,636; 3,629

Największa rozpiętość 0,009 nie przekracza 0,25%, przy czym wiadomo, że wartość 3,629 jest najlepiej uzasadniona.

Przykład dotyczący algorytmu 1-punktowego wg 2.9

Ten algorytm postępowania jest najmniej dokładny, ponieważ krzywa odwzorowania dotyka tylko w jednym punkcie do stopy zęba spełniając warunek zgodności kąta stycznej i promienia krzywizny, tj. warunek zgodności dwóch pierwszych pochodnych.

Przy stosowaniu tego algorytmu otrzymuje się najczęściej $e < 0$, co wymaga wyliczenia wartości X_M wg wzoru (3.2) oraz współrzędnej u_M wg wzoru (3.3).

Dla wyliczonych w punkcie 2.9 wartości współczynników odwzorowania w poszczególnych punktach od a) do d) otrzymano następujące wartości poszczególnych składowych naprężenia w stopie:

punkt	u_M	σ_{M-}	σ_{M+}	σ_o	σ_{wyp}
a)	0,057273	1,4456	-0,0889	2,0170	3,3737
b)	0,079189	1,5472	-0,0558	1,9811	3,4725
c)	0,097984	1,5604	-0,0489	1,9251	3,4366
d)	0,113771	1,5285	-0,0538	1,8663	3,4010

gdzie:

σ_{M-} - oznacza naprężenie pochodzące od siły $P = -1$,

σ_{M+} - oznacza naprężenie pochodzące od siły $P = 1$,

σ_o - oznacza naprężenie wypadkowe od sił przyłożonych w wierzchołku krzywej,

σ_{wyp} - określa naprężenie wypadkowe, będące sumą trzech składowych.

Powiększenie siły wywołującej moment do $\pm$ 100 i odpowiednie zmniejszenie ramienia jej działania X_M nie wniosło istotnych zmian w naprężeniach. Największe naprężenie wykryto w punkcie b), co nie oznacza, że jest ono absolutnie maksymalne, ale trudno spodziewać się istotnych zmian w najbliższej okolicy. Przyjmując umownie tę wartość za maksymalną, popełnia się w stosunku do poprzednio wykrytych wartości błąd rzędu 4,3%.

3.6. Obliczanie współczynników koncentracji

W wielu przypadkach celowe jest wydzielenie z ogólnej wartości naprężenia w stopie zęba σ_u poszczególnych składowych wynikających z działania momentu zginającego siły promieniowej i siły stycznej do koła. Wyraża się to za pomocą następującej zależności:

$$\sigma_u = \sigma_{gnom}\alpha_g + \sigma_{cnom}\alpha_c + \sigma_{tnom}\alpha_t \tag{3.9}$$

gdzie:

$$\sigma_{gnom} = \frac{1,5\,h}{X^2}\cos\phi \tag{3.10}$$

σ - nominalne naprężenie od zginania zęba,

h - ramię zginania zęba,

ϕ - kąt działania siły,

X - połowa grubości zęba w rozpatrywanym przekroju,

$$\sigma_{cnom} = \frac{-\sin\phi}{2\,X} \tag{3.11}$$

- nominalne naprężenia od siły promieniowej

$$\sigma_{tnom} = \frac{\cos\phi}{2\,X} \tag{3.12}$$

- nominalne naprężenie od siły stycznej

α_g, α_c, α_t - współczynniki koncentracji.

Sposób poszukiwania współczynników koncentracji przedstawiony będzie na przykładzie obliczeniowym.

Znane są następujące współczynniki odwzorowania, zaczerpnięte z poprzednio omawianych przykładów:

$a_1 = 0{,}076728$ $b_1 = 0{,}057064$ $e = 0$

$a_2 = 0{,}099304$ $b_2 = 0{,}211407$ $\phi = 0{,}4698615$

$a_3 = 0{,}272222$ $b_3 = 0{,}573211$

Za pomocą wzorów (2.7), (2.8), (2.26) i (2.27) wyznacza się podstawowe parametry zęba w miejscu $u = 0{,}44$

$X = 1{,}024243$ $\gamma = 0{,}491911$

$H = 1{,}880060$ $R = -0{,}566528$

Wybrano w tym przykładzie $u = 0{,}44$, tj. okolicę występowania σ_{umax}. Ramię działania siły $h = H$. Dla przyjętych wielkości wyznacza się ze wzorów (3.10)...(3.12) nominalne wartości naprężeń w tym miejscu

$\sigma_{gnom} = 2{,}396857$

$\sigma_{cnom} = -0{,}221023$

$\sigma_{tnom} = 0{,}435263$

Aby wyznaczyć zależności umożliwiające określenie wartości współczynników koncentracji, celowe jest przyjęcie do obliczeń specjalnych przypadków obciążeń:

1) obciążenie siłą jednostkową pod kątem $\phi = \frac{\pi}{2} = 90°$, które wywołuje wyłącznie naprężenia od siły promieniowej, co pozwoli na bezpośrednie wyznaczenie współczynnika koncentracji α_c,

2) obciążenie siłą jednostkową pod kątem $\phi = 0$ na dwóch wysokościach h, co spowoduje zmianę naprężeń od zginania zęba przy stałej wartości naprężeń od siły stycznej.

Ad 1: Stosując wzory (3.4)...(3.8) wyznaczono dla $u = 0{,}44$ oraz $\phi = \frac{\pi}{2}$ wartość naprężeń $\sigma_u = -0{,}9379$, za pomocą wzoru (3.11) przy tych samych założeniach określono $\sigma_{cnom} = -0{,}488165$, biorąc pod uwagę, że naprężenia wyznaczone za pomocą wzorów (3.10) oraz (3.12) mają wartości zerowe, wylicza się ze wzoru (3.9) współczynnik koncentracji

$$\alpha_c = \frac{\sigma_u}{\sigma_{cnom}} = \frac{-0{,}9379}{-0{,}488165} = 1{,}9213$$

Ad 2. Przykładając siłę jednostkową pod kątem $\psi = 0$ na wierzchołku zęba ($u = 0$) otrzymuje się $h = H = 1{,}880060$, a stąd za pomocą wzorów (3.4)... (3.8) całkowite naprężenie $\sigma_u = 4{,}5464$ oraz następujące naprężenia nominalne $\sigma_{gnom} = 2{,}688171$ ze wzoru (3.10) oraz $\sigma_{tnom} = 0{,}488165$ ze wzoru (3.12).

Stąd otrzymuje się na podstawie równania (3.9) zależność

$$4{,}5464 = 2{,}688171\,\alpha_g + 0{,}488165\,\alpha_t \tag{3113}$$

W celu uzyskania drugiego równania należy zmienić wysokość działania siły przy tych samych pozostałych parametrach.

Wybiera się dowolną wartość parametru, np. $u_a = 0{,}05$ i dla tej wartości wylicza się z zależności (2.8) współrzędną $H_a = 0{,}612437$, co określa ramię działania siły na $h = H - H_a = 1{,}880060-0{,}612437 = 1{,}267623$. Na tej podstawie ze wzoru (3.10) wylicza się nominalne naprężenie $\sigma_{gnom} = 1{,}812489$ przy nie zmienionej wartości naprężenia nominalnego $\sigma_{tnom} = 0{,}488165$.

Za pomocą wzorów (3.4)...(3.8) wylicza się całkowite naprężenie dla $u_a = 0{,}05$, które wynosi $\sigma_u = 3{,}4041$. W ten sposób otrzymuje się drugie równanie zawierające poszukiwane wartości współczynników koncentracji zgodnie ze wzorem (3.9)

$$3{,}4041 = 1{,}812489\,\alpha_g + 0{,}488165\,\alpha_t \tag{3.14}$$

Odejmując stronami otrzymuje się:

$$1{,}1423 = 0{,}875682\,\alpha_g, \tag{3.15}$$

a stąd

$$\alpha_g = 1{,}30447$$

$$\alpha_t = 2{,}1299$$

oraz

$\alpha_c = 1{,}9213$ wyliczone w pierwszym etapie.

Dla sprawdzenia wyników oblicza się maksymalne naprężenie podczas działania siły pod kątem $\psi = 0{,}4698615$ zgodnie ze wzorem (3.9)

$$\sigma_u = 2{,}396857 \cdot 1{,}30447 - 0{,}221023 \cdot 1{,}9213 + 0{,}435263 \cdot 2{,}1299 = 3{,}629,$$

co jest zgodne z wynikami bezpośrednich obliczeń za pomocą wzorów (3.4)... (3.8).

Wyniki obliczeń współczynników koncentracji naprężeń zależą od miejsca przyłożenia siły. Jeżeli w powyższym przykładzie przyjmie się $u_a = 0,01$, to otrzyma się następujące wartości:

$$\alpha_c = 1,9213 \text{ (bez zmian)} \qquad \alpha_g = 1,336 \qquad \text{oraz} \qquad \alpha_t = 1,956$$

W przypadku poprawnego odwzorowania wierzchołka zęba o współrzędnych X_a, H_a, gdy $e > 0$, przy założeniu dwóch punktów przyłożenia siły: na wierzchołku, gdzie $u_a = 0,004906$ oraz nieco poniżej, gdzie $u = 0,01$, otrzymuje się w miejscu występowania maksymalnych naprężeń, tj. dla $u = 0,45$, następujące wartości współczynników:

$$\alpha_c = 1,88 \qquad \alpha_g = 1,35 \qquad \alpha_t = 1,84$$

Nieco inne wartości współczynników α_g i α_t otrzymuje się stosując czyste zginanie dla wyznaczenia współczynnika α_g.

Wyliczone wartości mają jednak tylko ograniczone zastosowanie w próbie nominalnego rozdziału naprężeń.

3.7. Wykorzystanie funkcji odwzorowań przy obliczaniu naprężeń metodami MES i MEB

Dobierając wartości współczynników a_k i b_k a także liczbę par tych współczynników K uzyskuje się figury przypominające zarys zęba o bardzo zróżnicowanych kształtach, dających się wyliczyć za pomocą wzorów (2.7), (2.8), (2.26) i (2.27).

Rozkład naprężeń na zarysie tak otrzymanej figury można wyliczyć za pomocą wzorów opisanych w punktach 3.3 i 3.4, oczywiście z wyjątkiem miejsca przyłożenia siły. Należy mieć na uwadze, że otrzymany występ usytuowany jest na półpłaszczyźnie utwierdzonej w nieskończonej odległości od występu.

Tak wyznaczony kształt i rozkład naprężeń na obwodzie może stanowić dogodny przykład obliczeniowy w metodach MES i MEB. Zmieniając liczbę i rozkład punktów obliczeniowych oraz sposób utwierdzenia można przeanalizować wrażliwość metod MES i MEB na sposób wyboru punktów obliczeniowych i przez próby wyznaczyć optymalne warunki obliczeniowe, a także ocenić wypadkowy błąd obliczeń.

Tablica Z.3.1

Wyznaczanie wartości A_k

$\frac{-a_1}{(b_1 - b_1)^2} - \left[1 + \sum_k \frac{a_k}{(b_k + b_1)^2}\right]$	$\frac{-a_2}{(b_2 + b_1)^2}$	$\frac{-a_3}{(b_3 + b_1)^2}$	$\frac{u_a \cos\psi + b_1 \sin\psi}{2\pi (u_a^2 + b_1)^2}$
$\frac{-a_1}{(b_1 + b_2)^2}$	$\frac{-a_2}{(b_2 + b_2)^2} - \left[1 + \sum_k \frac{a_k}{(b_k + b_2)^2}\right]$	$\frac{-a_3}{(b_3 + b_2)^2}$	$\frac{u_a \cos\psi + b_2 \sin\psi}{2\pi (u_a^2 + b_b^2)}$
$\frac{-a_1}{(b_1 + b_3)^2}$	$\frac{-a_2}{(b_2 + b_3)^2}$	$\frac{-a_3}{(b_3 + b_3)^2} - \left[1 + \sum_k \frac{a_k}{(b_k + b_3)^2}\right]$	$\frac{u_a \cos\psi + b_3 \sin\psi}{2\pi (u_a^2 + b_3^2)}$

Analogicznie buduje się tablicę dla innych wartości K.

Tablica Z.3.2

Wyznaczanie wartości B_k

$\frac{-a_1}{(b_1 + b_1)^2} + \left[1 + \sum_k \frac{a_k}{(b_k + b_1)^2}\right]$	$\frac{-a_2}{(b_2 + b_1)^2}$	$\frac{-a_3}{(b_3 + b_1)^2}$	$\frac{u_a \sin\psi - b_1 \cos\psi}{2\pi (u_a^2 + b_1^2)}$
$\frac{-a_1}{(b_1 + b_2)^2}$	$\frac{-a_2}{(b_2 + b_2)^2} + \left[1 + \sum_k \frac{a_k}{(b_k + b_2)^2}\right]$	$\frac{-a_3}{(b_3 + b_1)^2}$	$\frac{u_a \sin\psi - b_2 \cos\psi}{2\pi (u_a^2 - b_2^2)}$
$\frac{-a_1}{(b_1 + b_3)^2}$	$\frac{-a_2}{(b_2 + b_3)^2}$	$\frac{-a_3}{(b_3 + b_3)^2} + \left[1 + \sum_k \frac{a_k}{(b_k + b_3)^2}\right]$	$\frac{u_a \sin\psi - b_3 \cos\psi}{2\pi (u_a^2 + b_3^2)}$

Analogicznie buduje się tablicę dla innych wartości K.

Załącznik 4

MATERIAŁY UZUPEŁNIAJĄCE

4.1. Wartości naprężeń uzyskane innymi metodami obliczeniowymi

W literaturze spotyka się informacje dotyczące maksymalnych naprężeń w stopie zęba dla szczególnych przypadków, uzyskane za pomocą różnych metod obliczeniowych. Niektóre informacje mogą posłużyć do analizy uzyskanych poprzednio opisanymi metodami wyników. Dają one także pogląd na złożoność zagadnienia i trudności występujące w rozwiązywaniu tego typu zadań.

W celu ujednolicenia oznaczeń w dalszej części opracowania stosowany będzie wzór definicyjny

$$Y_e = \frac{\sigma_{max} b m}{P_n} \tag{4.1}$$

Jego odpowiednikiem jest zgodnie z normą ISO, DIN, RWPG wyrażenie:

$$Y_e = Y_{Fa} \cdot Y_S, \tag{4.2}$$

gdzie:

Y_{Fa} - współczynnik kształtu zęba w przypadku przyłożenia siły na wierzchołku zęba,

Y_S - współczynnik koncentracji naprężeń.

W niektórych metodach obliczeń naprężenia odnoszone są nie do siły normalnej P_n, lecz siły obwodowej, co wymaga każdorazowego sprawdzenia oraz wprowadzenia ewentualnej korekty.

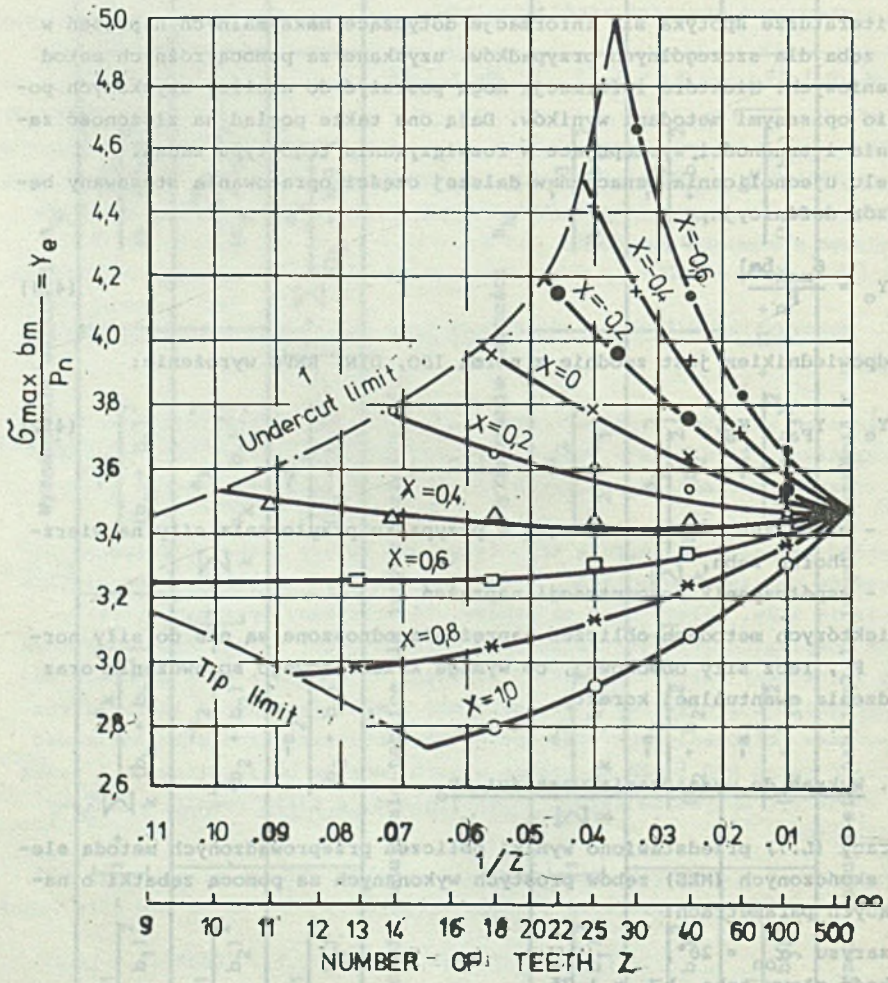
4.2. Wykres do wyznaczania wartości Y_e

W pracy (L.7) przedstawiono wyniki obliczeń przeprowadzonych metodą elementów skończonych (MES) zębów prostych wykonanych za pomocą zębatki o następujących parametrach:

- kąt zarysu $\alpha_{on} = 20°$,
- wysokość głowy zęba $h_{ao} = 1,25$,
- promień zaokrąglenia głowy zęba zębatki $\rho_{ao} = 0,375$.

Do obliczeń przyjęto 230 elementów czworobocznych, z których każdy miał 8 węzłów (4 w narożach i 4 w połowie boku). Łączna liczba węzłów wynosiła 761, a liczba równań przekraczała 1500.

Rysunek Z.4.1 przedstawia wartości współczynnika Y_e lub wartości naprężeń maksymalnych wyliczonych przy założeniu: $P_n = 1$, $b = 1$ oraz $m = 1$. Jak wynika z rysunku, poszczególne punkty obliczeniowe wykazywały nieznaczny rozrzut wobec linii $x = const$.



Rys. Z.4.1. Maksymalne naprężenia Y_e wyliczone metodą MES wg (L.7)

Fig. Z.4.1. Maximal stresses calculated by MES method

4.3. Wzór określający wartości Y_e na podstawie parametrów zęba i narzędzia

W nie publikowanej dotychczas pracy autor opracował wzór pozwalający z dokładnością lepszą od 3% obliczyć wartości współczynnika Y_e w szerszym zakresie zmiennych. Był on sprawdzany sporadycznie za pomocą danych literaturowych dotyczących innych przypadków, niż to obejmuje rysunek Z.4.1.

Wzór oparty jest na parametrach zęba, w miejscu gdzie styczna zawiera z osią zęba kąt 30°, co znacznie upraszcza obliczenia.

W celu skupienia uwagi wielkości te oznaczone będą w sposób wyróżniający je spośród poprzednio wyliczanych wielkości:

e - ramię działania siły odpowiada wysokości $H_{30°}$,

$s = \frac{s_f}{2}$ - połowa grubości zęba w rozpatrywanym przekroju odpowiada współrzędnej $X_{30°}$,

ϕ - kąt zawarty pomiędzy kierunkiem działania siły i osią X, jak w poprzednich obliczeniach,

ρ_k - promień karbu w rozpatrywanym miejscu równy $R_{z30°}$.

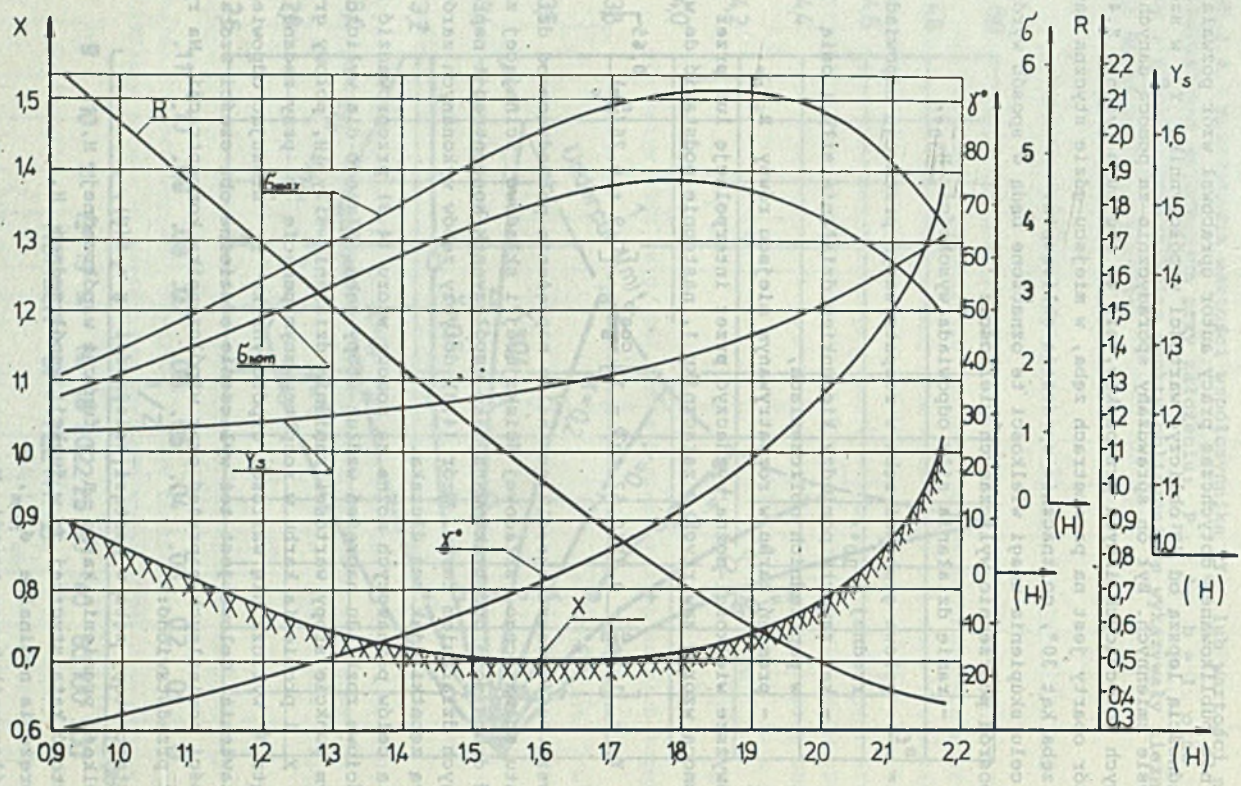
Powyższe wielkości można wyznaczyć przez interpolację lub przez iterację za pomocą wzorów zawartych w załączniku 1, następnie podstawić do wzoru:

$$Y_e = \left[1{,}5\,\frac{e}{s} - 0{,}75(0{,}52\ \mathrm{tg}\phi - 1)\right]\cdot\frac{\cos\phi}{s}\cdot\left[0{,}9 + 0{,}26\left(\frac{s}{\rho_k}\right)^{0{,}65}\right] \qquad (4.3)$$

Pierwsza część wzoru określa nominalne naprężenia pochodzące od działania momentu zginającego, składowej ściskającej i składowej ścinającej ząb. Część druga może być traktowana jako współczynnik koncentracji naprężeń wywołanych działaniem karbu. Wzór (4.3) dotyczy zębów wykonanych zarówno za pomocą zębatki, jak też dłutaka.

Dla celów poznawczych można za pomocą wzoru (4.3) przeprowadzić badania jakościowe rozkładu naprężeń wzdłuż stopy zęba. Dlatego dla wyliczonych w każdym punkcie stopy wartości ramienia działania siły H, połowy grubości zęba X i promienia karbu w rozpatrywanym punkcie R przy zadanej wartości kąta ϕ wylicza się wartości współczynnika Y_e stosując odpowiednie podstawienia. Celowe jest też wyliczenie oddzielne obu części wzoru, tj. wartości nominalnych naprężeń oraz współczynnika koncentracji. Na rys. Z.4.2 przedstawiono:

- kształt stopy zęba w postaci zależności $X = f(H)$,
- wielkość promienia karbu R w funkcji współrzędnej H,
- wartość kąta stycznej γ w funkcji współrzędnej H,
- naprężenia nominalne σ_{nom},
- współczynnik koncentracji Y_S,
- wypadkowe naprężenie maksymalne w określonym punkcie stopy zęba σ_{max}.



Rys. Z.4.2. Podstawowe parametry koła z = 10, x = 0

Fig. Z.4.2. Basic parameters of the circle z = 10, x = 0

Z rysunku wynika między innymi:

- znaczne podcięcie stopy zęba ze względu na małą liczbę zębów w kole $z = 10$, $x = 0$,
- monotoniczny spadek wartości promienia karbu w miarę wzrostu współrzędnej H,
- monotoniczny wzrost kąta stycznej do zarysu,
- monotoniczny wzrost współczynnika koncentracji naprężeń Y_S,
- wystąpienie maksymalnych wartości w stopie w okolicy $H = 1,85$, czemu odpowiada kąt stycznej ok. 15°, nie wystąpiły one w miejscu najwęższego przekroju zęba w okolicy $H = 1,6$.

4.4. Rozszerzenie zakresu odwzorowań

W niektórych przypadkach korzystnie jest wprowadzić dodatkowy współczynnik c umożliwiający rozszerzenie zakresu odwzorowań. W tym przypadku podane poprzednio zależności przyjmują następujące postacie:

wzór (1) z rozdziału 2.1

$$X_m = cu_m + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_m}{u_m^2 + b_m^2} \tag{4.4}$$

Wzór (2) pozostaje bez zmiany, co pozwala na zmianę stosunku X_m/H_m, gdy $c > 1$, to ząb jest grubszy niż w przypadku $c = 1$.

Wzory w załączniku 1 pozostają bez zmian.

W załączniku 2 występują następujące zmiany:

wzór (2.1) przyjmuje postać

$$x + iy = cw + \frac{a}{w - ib}, \tag{4.5}$$

wzór (2.3) przybiera postać

$$x + iy = cw + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{w - ib_k}, \tag{4.6}$$

wzór (2.4) otrzymuje postać

$$x_m = cu_m + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_m}{u_m^2 + b_k^2}, \tag{4.7}$$

wzór (2.7)

$$X_m = x_m = cu_m + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_m}{u_m^2 + b_k^2}, \tag{4.8}$$

wzór (2.11)

$$\frac{\partial X_m}{\partial u_m} = c + \sum_{1}^{3} \frac{a_k (b_k^2 - u_m^2)}{(u_m^2 + b_k^2)^2}, \tag{4.9}$$

wzór (2.22) stosownie do wzoru (2.11) przyjmuje postać (4.9).

W analogiczny sposób zmieniają się:

wzór (2.31) będący szczególną postacią wzoru (2.7) przyjmuje wartość wg wzoru (4.8),

wzór (2.33) zmienia się stosownie do wzoru (2.11) i przyjmuje postać wg wzoru (4.9).

Wzory w załączniku 3 ulegają następującym zmianom

wzór (3.1) przyjmuje postać

$$X_a = cu_a + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_a}{u_a^2 + b_k^2} \tag{4.10}$$

wzór (3.3) przyjmuje postać

$$\left| cu_M + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k u_M}{u_M^2 + b_k^2} - X_M \right| < 10^{-9} \tag{4.11}$$

wzór (3.8) otrzymuje postać

$$\sigma_u = 4 \frac{\left[\sum_k A_k F_k - \sum_k B_k L_k - E\right] \cdot \left[c - \sum_k F_k\right] - G}{(c - \sum_k F_k)^2 + (\sum_k L_k)^2} \tag{4.12}$$

Ostatnie zmiany dotyczą tablic Z.3.1 oraz Z.3.2:

Wyrażenia w graniastych nawiasach występujące na przekątnej macierzy mają w miejsce 1 wartość c wg symbolicznego zapisu

$$\left[c + \sum_k \frac{a_k}{(b_k + b_j)^2}\right]. \tag{4.13}$$

4.5. Programy obliczeniowe

W Instytucie Transportu Politechniki Śląskiej znajdują się programy na IBM:

1) obliczanie naprężeń metodą MOW opisaną w niniejszym opracowaniu,
2) obliczanie naprężeń w zębach o dowolnych kształtach metodą MEB.

Sposób wykorzystania programów komputerowych wg uzgodnienia.

OBLICZANIE NAPRĘŻEŃ W PODSTAWIE ZĘBA

S t r e s z c z e n i e

W teorii sprężystości znane są stany naprężeń w płaskich figurach zbliżonych kształtem do zębów kół zębatych. Uzyskano je za pomocą odwzorowania wiernokątnego na półpłaszczyznę. Dobierając odpowiednio wartości współczynników zawartych w funkcjach odwzorowania można z bardzo dużą dokładnością uzyskać kształt zęba, ze szczególnym uwzględnieniem miejsca występowania maksymalnych naprężeń w stopie zęba.

W pracy podano algorytmy numerycznych obliczeń naprężeń w podstawie zębów prostych, przystosowane do możliwości małych kalkulatorów. W rozdziale 1 omówiono algorytm obliczania zarysu zęba wytworzonego za pomocą narzędzi o bardzo zróżnicowanych parametrach. Ta część opracowania może być wykorzystana także przy stosowaniu innych metod obliczania naprężeń, np. MES lub MEB, wymagających jednak kalkulatorów o dużej pojemności.

W rozdziale 2 omówiono zasadę i przedstawiono algorytm poszukiwania parametrów funkcji odwzorowania w różnych wersjach, umożliwiających uzyskanie wymaganej dokładności dla szerokiej grupy kół zewnętrznie uzębionych. Poszukiwana funkcja zapewnia spełnienie nie tylko wymagań odnośnie do współrzędnych zarysu, ale, co jest bardzo istotne, zapewnia zgodność pierwszej i drugiej pochodnej, co jest konieczne dla prawidłowego odwzorowania krzywizny podstawy zęba.

W rozdziale 3 przedstawiono algorytmy wyliczania naprężeń u podstawy zęba dla dowolnego położenia siły międzyzębnej, np. na wierzchołku zęba lub w miejsce jednoparowego zazębienia. Umożliwia to badanie wpływu stopnia zazębienia na wartość naprężeń w podstawie.

Rozdział 4 zawiera analizę porównawczą podstawowych sposobów wyliczania naprężeń znanych z literatury przedmiotu oraz materiały uzupełniające przydatne w tej analizie.

Rozpowszechnione a często też znormalizowane metody obliczeń wytrzymałości zęba zawierają z konieczności szereg założeń upraszczających, które utrudniają procedury optymalizacyjne szczególnie w przypadku istotnych zmian kształtu narzędzia wytwarzającego ząb.

Bardzo trudno jest porównywać wyniki obliczeń otrzymanych za pomocą takich metod, przystosowanych do celów praktycznych, tj. omijających trudniejsze problemy obliczeniowe.

Przedstawione algorytmy umożliwiają ocenę wpływu nawet drobnych zmian kształtu narzędzia i parametrów koła zębatego na wielkość naprężeń w podstawie. Umożliwia to prowadzenie analiz optymalizacyjnych głównie z uwagi na wytrzymałość zęba na złamanie, co wobec stosowania powszechnie powierzchni utwardzanych ma obecnie szczególne praktyczne znaczenie.

РАСЧЁТ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСНОВЕ ЗУБА

Р е з ю м е

В теории упругости известны состояния напряжений в плоских фигурах, формой напоминающих зубья зубчатых колёс. Состояния эти получены при помощи конформного отображения на полуплоскость. Подбирая соответственно значения коэффициентов, имеющихся в отображающих функциях, можно с большой точностью получить форму зуба, с особым учётом места выступания наибольших напряжений в основе зуба.

В работе представлены алгоритмы машинных расчётов напряжений в основе простых зубьев. Алгоритмы приспособлены для малых калькуляторов.

В первой части представлены алгоритмы расчёта профиля зуба, изготовляемого при помощи инструментов с различными параметрами. Эта часть разработки может быть использована также с применением других методов расчёта напряжений, например МЕС или МЕБ, требующих калькуляторов большей мощности.

Во второй главе оговорен принцип и представлен алгоритм поиска параметров функции отображения с различной конфигурацией, позволяющей получить требуемую точность расчётов для широкого класса зубчатых колёс с внешним зацеплением. Найденная функция выполняет не только требования по отношению к координатам профиля но и то, что является весьма существенным, соответствует требованиям по согласованности первой и второй производной, что в свою очередь является необходимым для правильного отображения кривой основания зуба.

В третьей главе даны алгоритмы расчёта напряжений в основе зуба для произвольного положения силы действующей между зубьями, например, на верхушке зуба или в точке однопарного зацепления. Это даёт возможность исследования влияния степени зацепления на величину напряжений в основе зуба.

В четвёртой главе дан сравнительный анализ методов расчёта напряжений известных по литературным источникам а также дополнительные материалы пригодные в анализе.

Необходимо заметить, что вообще применяемые, неоднократно нормированные, методы расчёта сопротивления зуба, как правило учитывают ряд упрощений, которые однако затрудняют оптимизационные процедуры расчётов в случае существенных изменений формы инструмента изготовляющего зубья. Поэтому очень трудно сравнивать результаты расчётов, полученных таким образом, т.е. методов приспособленных для практических целей и обходящих трудные расчётные проблемы.

Представленные в данной работе алгоритмы позволяют оценивать влияние даже незначительных изменений формы обрабатывающего инструмента и параметров зубчатого колеса, на величину напряжений в основе зуба. Это даёт возможность вести оптимализационный анализ главным образом с учётом сопротивления на поломку зуба, что имеет большое практическое значение в виду на всеобщее применение закалки поверхности зубьев.

STRESSES COMPUTATION IN THE BASIS OF A TOOTH

S u m m a r y

In the elasticity theory stresses states in the plane figures similar to gear teeth are known. Conformal mapping onto the half plane is used to find them. Choosing values of cofficients contained in the mapping functions the shape of the tooth is obtained with great accuracy with special attention paid to the places of maximal stresses in the base of the tooth.

In the work numerical algorithms are given which enable the stresses computation in the base of simple teeth. In the section 1 the algorithm for finding the boundary line of the tooth made by tools with differentiated parameters is proposed. This part may be also used to appl other methods of stresses calculation eg. MES or MEB, for which however calculators with big memory is needed.

In the section 2 a principle and an algorithm for search of parameters of the mapping function in different versions is presented. It enables to obtain the required accuracy for broad class of externally toothed wheels. These requirements are fulfilled by this function which ensures also the agreement of the first and second derivative necessary for the right mapping of the curvature of the tooth base.

In the section 3 the algorithms of stresses calculation for any placement of the interteeth force are presented. It enables the investigation of the influence of the tooth degree onto the value of the stress in the base.

In the section 4 the comparison analysis of basic methods known from the literature is presented as well as the materials applicable in this analysis. The popular and often normalized methods of the tooth strenght calculation contain many simplifying assumptions which complicate optimization subroutines especially in the case of the important changes of the shape of the tool producing the tooth. It is very difficult to compare the results of the computations obtained by the use of such methods prepared for practical purposes i.e. by passing more difficult computational problems.

Presented algorithms enable the estimation of the effect of small changes in the shape of the tool and parameters of tooth gear onto the value of the stresses in the base. It enables to perform the optimization analysis mainly for the bending strenght. It is especially important because hardened surfaces are often used in practice.

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 006, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-850 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 38
40-098 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 043, Pl. Kościuszki 10
41-506 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 001, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
43-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
47-800 Zabrze — Księgarnia nr 280, ul. Wolności 188
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.