

Roman KONIECZNY

Instytut Transportu Kolejowego
Politechniki Śląskiej

ZESTAWIENIE MODELI MATEMATYCZNYCH WSPÓŁPRACY DYNAMICZNEJ ODBIERAKA PRĄDU Z SIECIĄ TRAKCYJNĄ

C z ę ł ć I

PODSTAWOWE KLASY MODELI

Streszczenie. W artykule zestawiono podstawowe klasy modeli matematycznych współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Znajomość walorów poszczególnych modeli jest niezbędna do oceny jakości współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną przy użyciu symulacji komputerowej.

1. WPROWADZENIE

Dążenie do zwiększenia prędkości pociągów jest jedną z cech rozwojowych kolei, mającą swe uzasadnienia gospodarcze i społeczne. Rozwój ten realizowany jest głównie w oparciu o trakcję elektryczną. W szeregu krajach maksymalne prędkości osiągają od 160 do 250 km/h, a badania prowadzone są dla prędkości do 300 km/h, a nawet powyżej. Przykładem mogą być: Francja, Japonia, Wielka Brytania, ZSRR, Włochy, RFN i inne kraje. Zagadnienie to jest również aktualne dla Polskich Kolei Państwowych [21].

Jednym z ważniejszych problemów technicznych przy dużych prędkościach jazdy - jest zapewnianie prawidłowej współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Od współpracy tej uzależniona jest jakość zasilania pojazdu trakcyjnego, a także zużycie materiałów tworzących zestyk ślizgowy.

Odwzorowanie wszystkich zjawisk towarzyszących dynamicznej współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną jest zadaniem niezwykle trudnym. Wynika to z faktu, że sieć trakcyjna jest układem o przestrzennie rozłożonych parametrach, posiadającym nieskończoną liczbę stopni swobody. Natomiast odbierak prądu jest układem o parametrach skupionych, przemieszczającym się wzdłuż sieci. Na drgania wymuszane przez odbierak nakładają się drgania odbite od elementów podwieszenia sieci oraz od kotwienia końcowego. Na układ działają również zakłócenia: w postaci drgań lokomotywy, czy wiatru bocznego. Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej w przypadku jednoczesnej współpracy z siecią kilku odbieraków prądu, gdzie na drgania generowane przez rozpatrywany odbierak nakładają się drgania generowane przez odbieraki sąsiednie.

Wszystkie dotychczas stosowane metody badawcze dynamicznej współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną można umownie podzielić na trzy grupy:

- metody analityczne,
- metody pomiarowe,
- metody symulacyjne.

Wadą metod analitycznych jest konieczność dokonywania zbyt daleko idących uproszczeń rozpatrywanych zjawisk. Wadą metod pomiarowych z kolei są znaczne koszty i ograniczony zakres badań. Powyższych wad nie posiadają metody symulacyjne realizowane przy użyciu komputerów. Zastosowanie symulacji komputerowej do oceny jakości współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną daje następujące korzyści:

- umożliwile badanie rozpatrywanego układu w szerokim zakresie zmian parametrów;
- umożliwile dowolną praktycznie komplikację modelu matematycznego;
- umożliwile szybkie uzyskanie wyników;
- zmniejsza koszty badań;
- umożliwile uzyskanie wielu odpowiedzi dotyczących badanego układu na etapie opracowywania koncepcji, tzn. w fazie przedprojektowej (przed przystąpieniem do fazy projektowania i realizacji).

Bezą wyjściową dla symulacji komputerowej jest model matematyczny rozpatrywanego układu. Współpraca dynamiczna odbieraka prądu z siecią trakcyjną może być odwzorowana za pomocą jednego z kilkunastu modeli matematycznych. Modele te według [11] można podzielić na następujące klasy:

- K1 - klasa modeli dyskretnych pojedynczych, w których masę sieci trakcyjnej zastąpiono masą skupioną w punkcie styku z odbierakiem prądu i przyjęto jako stałą bez względu na położenie punktu współpracy na długości przęsła zawieszania;
- K2 - klasa modeli dyskretnych pojedynczych, w których masę sieci trakcyjnej zastąpiono masą skupioną w punkcie styku z odbierakiem prądu i przyjęto jako zmienną - zależnie od położenia punktu styku na długości przęsła zawieszania;
- K3 - klasa modeli dyskretnych wielomasowych (numerycznych), w których sieć trakcyjną zastąpiono szeregiem mas skupionych;
- K4 - klasa modeli ciągłych, w których sieć trakcyjną przedstawiono w postaci struny lub belki.

Poniżej omówione zostały najbardziej reprezentatywne modele poszczególnych klas.

2. MODELE KLASY K1

Na przestrzeni lat 1933-1966 ukazały się publikacje następujących autorów: Beiera (1933), Niethammers (1934), Niblere (1949), Göttingera (1953),

Własowa (1954), Bücknera (1957), Fujii-Shibata (1957), Płaska (1959-1966).

Beier [5] w swoim modelu przedstawia trajektorię punktu styku odbieraka prądu z siecią trakcyjną w postaci cosinusoidy lub paraboli, których kształt uzależniony jest tylko od długości przęsła zawieszenia i od prędkości jazdy pociągu. Również Niethamer [5] przedstawia trajektorię punktu styku w postaci paraboli, uzależniając jej kształt od zwisu wstępnego sieci i od długości przęsła, względnie - od naprężenia drutu jezdnego i od jednoosobowego obciążenia (naciąku) działającego na ten drut.

Koncepcje Güttingera i Bücknera również zacytowano w pracy [5].

2.1. Model Niblera [4, 5, 11]

W modelu przyjęto następujące założenia:

- prędkość przemieszczania odbieraka prądu wzdłuż sieci trakcyjnej jest stała;
- masa zastępcza sieci jest stała na całej długości przęsła;
- sztywność sieci trakcyjnej posiada sinusoidalny rozkład wzdłuż przęsła zawieszenia;
- odbierak prądu jest reprezentowany przez masę zastępczą, zredukowaną do punktu styku z siecią trakcyjną.

Na podstawie powyższych założeń uzyskano następujący model matematyczny:

$$\pm (m_s + M) \frac{d^2 y}{dt^2} = F_{st_{1,2}} - y \cdot k_{max} \cos \omega t, \quad (1)$$

gdzie:

- m_s - masa zastępcza sieci trakcyjnej,
- M - masa zastępcza odbieraka prądu,
- y - przemieszczenia pionowa punktu styku,
- $F_{st_{1,2}}$ - siła statyczna odbieraka prądu, odpowiednio przy ruchu w górę i w dół,
- k_{max} - maksymalna sztywność sieci trakcyjnej,
- ω - prędkość kątowa obliczona ze wzoru:

$$\omega = \frac{2\pi}{L} v \quad (2)$$

v - prędkość przemieszczania się odbieraka prądu wzdłuż sieci trakcyjnej,

L - długość przęsła zawieszenia.

2.2. Model Niblera-Własowa [4, 7]

W modelu przyjęto następujące założenia:

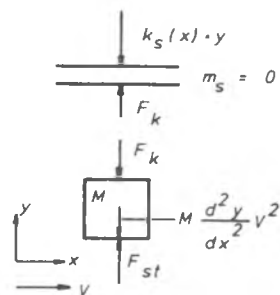
- masa zastępcza sieci jest stała na całej długości przęsła,
- prędkość przemieszczania odbieraka jest stała,
- sztywność odpężynowania ślizgacza równa jest nieskończoności;
- składowej aerodynamicznej nie uwzględnia się,
- siła tarcia w przegubach zmienia swój znak w momencie zmiany kierunku ruchu przez ślizgacz (tj. w punktach ekstremalnych).

Nibler i Własow wychodząc z założenia niemożliwości analitycznego rozwiązania równań różniczkowych opisujących współpracę odbieraka prądu z siecią trakcyjną - zaproponowali uproszczony sposób rozwiązania w postaci metody analityczno-graficznej. Omówienie tej metody oraz jej modyfikację przedstawiono w artykule [7].

2.3. Model Fujii-Shibata [4, 5]

Przyjęto następujące założenia:

- masa sieci trakcyjnej, jako rozłożona przestrzennie, nie jest uwzględniana,
- odbierak prądu posiada masę zastępczą M (zredukowaną do punktu styku) i wywiera stały nacisk F_{st} na drut jezdny,
 - sztywność sieci trakcyjnej posiada sinusoidalny rozkład wzdłuż przęsła zawieszenia,
 - przemieszczenie drutu jezdnego (y) jest proporcjonalne do siły naciśku,
 - prędkość przemieszczania się odbieraka wzdłuż sieci jest stała.



Na podstawie powyższych założeń wyprowadzono równanie opisujące trajektorię punktu styku odbieraka z siecią (rys. 1):

$$Mv^2 \frac{d^2y}{dx^2} + b_0 v \frac{dy}{dx} + k_s(x)y = F_{st} \quad (3)$$

Rys. 1. Model matematyczny Fujii-Shibata

gdzie:

- b_0 - współczynnik tarcia lepkiego w odbieraku prądu,
- $k_s(x)$ - sztywność sieci trakcyjnej w kierunku pionowym.

Zakładając sinusoidalny rozkład sztywności wzdłuż przęsła, można napisać:

$$k_s(x) = \bar{k}_s \left(1 + \epsilon_k \cos \frac{2\pi}{L} x \right) \quad (4)$$

gdzie średnia sztywność i współczynnik nierównomierności sztywności równe są odpowiednio:

$$\bar{k}_s = 0.5(k_{\max} + k_{\min}), \quad (5)$$

$$\varepsilon_k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\max} + k_{\min}}. \quad (6)$$

Po podstawianiu wyrażenia (4) do równania (3) postać równania opisującego trajektorię punktu styku będzie następująca:

$$MV^2 \frac{d^2y}{dx^2} + b_0 V \frac{dy}{dx} + \bar{k}_s (1 + \varepsilon_k \cos \frac{2\pi}{L} x) y = F_{st}. \quad (7)$$

2.4. Model Płaksa [5]

Przyjęto następujące założenia:

- masa zastępcza sieci trakcyjnej jest stała na długości prześła i równa wartości średniej (\bar{m}_s),
- odbierak prądu reprezentowany jest przez masę zastępczą M ,
- sztywność sieci trakcyjnej $k_s(x)$ jest funkcją okresową,
- sieć posiada zwis wstępny, którego rozkład wzdłuż prześła jest sinusoidalny.

Ogólne równanie różniczkowe trajektorii punktu styku przedstawiono w następującej postaci:

$$M \frac{d^2(y - 0.5 f \cos \omega t)}{dt^2} + \bar{m}_s \frac{d^2y}{dt^2} + k_s(t) y = F_{st}, \quad (8)$$

gdzie:

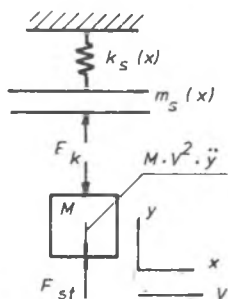
- f - wartość maksymalne zwisu wstępnego sieci trakcyjnej,
- F_{st} - siła statyczna odbieraka prądu.

3. MODELE KLASY K2

Na przestrzeni lat 1934-1979 ukazały się publikacje następujących autorów: Niethammera (1934), Suberkruba (1959), Kumezawy (1962), Pascucciego (1967), Fidrycha (1971-1979), Frajfelda (1972-1978), Djanikova (1979), Grajnera (1979).

Koncepcje Niethammera i Suberkruba omówione zostały w pracy [5].

3.1. Model Kumezawy [4, 5, 11]



Rys. 2. Model matematyczny Kumezawy

Przyjęto następujące założenia:

- odbierak prądu reprezentowany jest przez masę zastępczą M ;
- masa zastępcza sieci trakcyjnej posiada sinusoidalny rozkład wzdłuż przęsła zawieszenia;
- sztywność sieci trakcyjnej posiada sinusoidalny rozkład wzdłuż przęsła zawieszenia;
- prędkość przemieszczenia odbieraka wzdłuż sieci jest stała;
- w rozważaniach może być uwzględnione tarcie lepkie.

Przedstawiony na rys. 2 model opisano układem równań:

$$\left. \begin{aligned} m_s(x) \cdot v^2 \cdot \ddot{y} &= F_k - k_s(x) \cdot y \\ M \cdot v^2 \cdot \ddot{y} &= F_{st} - F_k \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gdzie:

$m_s(x)$ - masa zastępcza sieci trakcyjnej,

F_k - siła stykowa między ślizgaczem odbieraka prądu a drutem jezdycznym sieci trakcyjnej.

Eliminując z równań (9) nieznaną siłę F_k , otrzymano następujące równanie trajektorii punktu styku:

$$\left[M + m_s(x) \right] \cdot v^2 \cdot \ddot{y} + k_s(x) \cdot y = F_{st} \quad (10)$$

Masę sieci oraz jej sztywność opisano następującymi wzorami:

$$m_s(x) = \bar{m}_s \left(1 + \varepsilon_m \cos \frac{2\pi}{L} x \right), \quad (11a)$$

$$k_s(x) = \bar{k}_s \left(1 + \varepsilon_k \cos \frac{2\pi}{L} x \right). \quad (11b)$$

gdzie:

\bar{m}_s - wartość średnia masy zastępczej w przęsła zawieszenia;

ε_m - współczynnik nierównomierności masy:

$$\varepsilon_m = \frac{m_{s \max} - m_{s \min}}{m_{s \max} + m_{s \min}}, \quad (12)$$

$m_{s \max}$, $m_{s \min}$ - wartość maksymalna i minimalna masy zastępczej.

Współczynniki \bar{k}_s i $\bar{\varepsilon}_k$ opisane są wzorami (5) i (6). W równaniu (10) można również uwzględnić człon zawierający tłumienie.

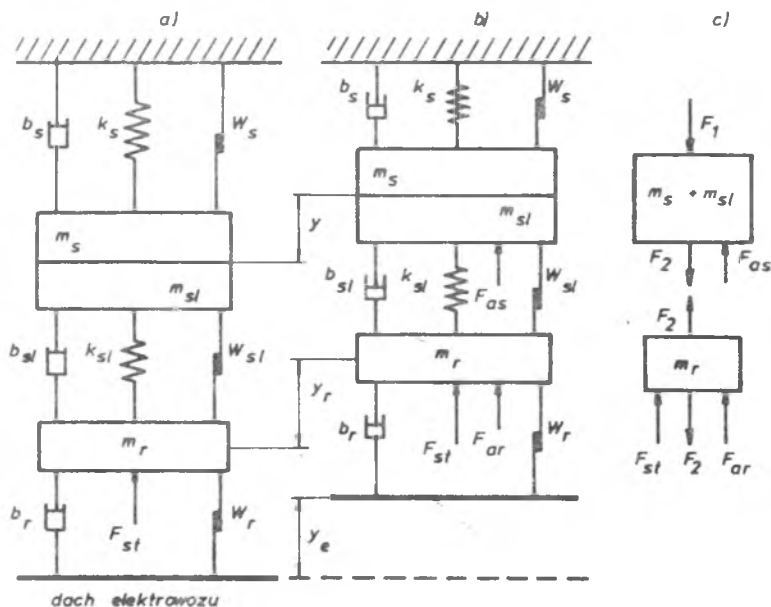
3.2. Model Pascucciego [4, 5, 11]

W modelu przyjęto takie same założenia, jak w modelu Kunezawy oraz przyjęto, że częstość drgań własnych sieci trakcyjnej ω_s jest stała w dowolnym punkcie przebiegu, a masę zastępczą sieci można opisać następującą zależnością:

$$m_s(x) = \frac{k_s(x)}{\omega_s^2}. \quad (13)$$

Równanie opisujące ten model podano m.in. w literaturze [4, 5, 11].

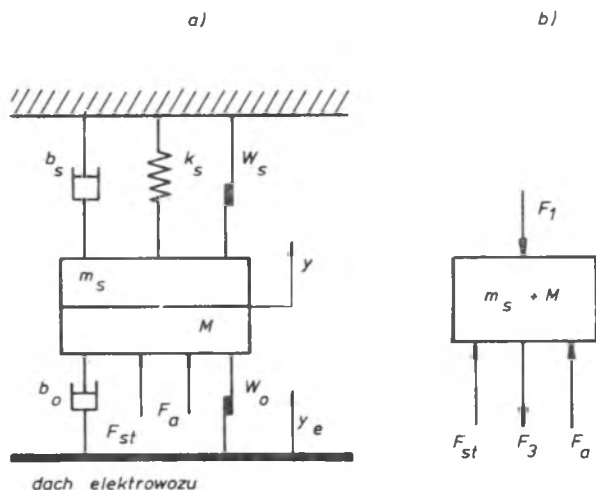
3.3. Model Fidrycha [5, 6]



Rys. 3. Schemat zastępczy współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną (z dwoma stopniami swobody)

a - stan statyczny, b - stan dynamiczny

Na rys. 3a,b oraz 4a przedstawiono modele matematyczne współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną jako układy drgające z dwoma i z jednym stopniem swobody.



Rys. 4. Schemat zastępczy współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną (z jednym stopniem swobody)

Przyjęto następujące oznaczenia:

- F_{st} - siła docisku statycznego sprężyn podnoszących, sprowadzona do górnych przegubów ramion odbieraka (stała co do wartości i kierunku działania);
- F_1 - siły działające na poszczególne masy skupione: od strony sieci trakcyjnej (F_1), dla elementów usytuowanych pomiędzy ślizgaczem a ramionami odbieraka (F_2) oraz elementów znajdujących się między górnymi przegubami a dachem elektrowozu (F_3);
- F_{aa} - siła naporu powietrza podnosząca ślizgacz;
- F_{ar} - siła naporu powietrza odchylająca ramiona odbieraka;
- m_s, m_{s1}, m_r - masy: zastępcza sieci trakcyjnej, ślizgacza, ramion odbieraka;
- k_s, k_{s1} - sztywności: sieci trakcyjnej, odprężynowania ślizgacza;
- b_s, b_{s1}, b_r - współczynniki tłumienia lepkiego: sieci trakcyjnej, odprężynowania ślizgacza, układu ramion;
- W_s, W_{s1}, W_r - siły tarcia suchego: w sieci trakcyjnej, odprężynowania ślizgacza, układu ramowego.

Dwie masy ($m_s + m_{s1}$) i (m_r) zawieszono na sprężynach o sztywności k_s i k_{s1} . Jeżeli założymy, że masy te mogą się przemieszczać tylko pionowo i przemieszczenia (y) i (y_r) mierzone są od położenia równowagi (ślizgacz przylega do drutu jezdny przy sile stykowej równej zero), to te dwie współrzędne w pełni określają położenie ww. elementów. Wielkość y_0 określa pionowe przemieszczenie dachu elektrowozu w miejscu usytuowania odbieraka prądu.

Zakładając, że $y > y_r$ i oznaczając przemieszczenie dodatnie jako kierunku od dołu do góry, uwzględniając siły pochodzenia aerodynamicznego, na podstawie zasady d'Alemberta można zapisać następujący układ równań różniczkowych (rys. 3c):

$$\left. \begin{aligned} (m_0 + m_{s1})\ddot{y} &= -F_1 - F_2 + F_{ss} \\ m_r\ddot{y}_r &= F_2 - F_3 + F_{st} + F_{at} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Siły F_1, F_2, F_3 mogą być wyrażone za pomocą składowych sił restytucyjnych (sprężystość) i dysypacyjnych (tłumienie) w sposób następujący:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= k_0 y + b_0 \dot{y} + W_0 \operatorname{sign}(\dot{y}) \\ F_2 &= k_{s1}(y - y_r) + b_{s1}(\dot{y} - \dot{y}_r) + W_{s1} \operatorname{sign}(\dot{y} - \dot{y}_r) \\ F_3 &= b_r(\dot{y}_r - \dot{y}_0) + W_r \operatorname{sign}(\dot{y}_r - \dot{y}_0) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

gdzie:

sign - funkcja znaku.

Dokonując podstawienia sił (15) do równań (14) otrzymano układ równań różniczkowych w następującej postaci ogólnej:

$$\left. \begin{aligned} (m_0 + m_{s1})\ddot{y} + k_0 y + b_0 \dot{y} + W_0 \operatorname{sign}(\dot{y}) + k_{s1}(y - y_r) + \\ + b_{s1}(\dot{y} - \dot{y}_r) + W_{s1} \operatorname{sign}(\dot{y} - \dot{y}_r) &= F_{ss} \\ m_r\ddot{y}_r - k_{s1}(y - y_r) - b_{s1}(\dot{y} - \dot{y}_r) - W_{s1} \operatorname{sign}(\dot{y} - \dot{y}_r) + \\ + b_r(\dot{y}_r - \dot{y}_0) + W_r \operatorname{sign}(\dot{y}_r - \dot{y}_0) &= F_{st} + F_{at} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Układ równań (16) jest układem równań różniczkowych zwyczajnych, 2 rzędu, nieliniowych, niejednorodnych, o zmiennych współczynnikach (m_0, k_0, W_0, b_0).

Analogicznie dla układu z jednym stopniem swobody (rys. 4b) można napisać następujące równanie:

$$(m_0 + M)\ddot{y} + k_0 y + b_0 \dot{y} + W_0 \operatorname{sign}(\dot{y}) + W_0 \operatorname{sign}(\dot{y} - \dot{y}_0) + b_0(\dot{y} - \dot{y}_0) = F_{st} + F_a \quad (17)$$

gdzie:

M - masa zastępcza odbieraka prądu,

W_0 - siła tarcia suchego w odbieraku prądu,

b_0 - współczynnik tarcia lepkiego w odbieraku prądu,

F_a - składowa aerodynamiczna.

Równania różniczkowe (16) i (17) uzależnione są od czasu, tzn.

$$\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt} \quad i \quad \ddot{y}_1 = \frac{d^2 y_1}{dt^2}.$$

W przypadku uzależnienia równań od drogi, pochodne przyjmą następującą postać:

$$\frac{dy_1}{dt} = v \frac{dy_1}{dx} \quad i \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \quad (18)$$

gdzie:

v - prędkość przemieszczania się odbieraka wzdłuż sieci.

3.4. Model Frajfelda [9, 10]

Model ten bazuje na schematach zastępczych podanych na rys. 3 i 4. Przyjęto postać zapisu wygodną do rozwiązania przy użyciu komputera w formie układu równań różniczkowych liniowych, 2 rzędu, niejednorodnych, o zmiennych współczynnikach.

Dla układu z dwoma stopniami swobody postać równań jest następująca:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + A_1 \dot{y} + A_2 \dot{y}_r + A_3 y + A_4 y_r &= A_5 \\ \ddot{y}_r + B_1 \dot{y}_r + B_2 \dot{y} + B_3 y_r + B_4 y &= B_5 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Dla układu z jednym stopniem swobody:

$$\ddot{y} + D_1 \dot{y} + D_2 y = D_3 \quad (20)$$

Wzory określające współczynniki A_1, B_1, D_1 podano w literaturze [9].

3.5. Model Grajnera [11]

Model ten bazuje na schemacie zastępczym podanym na rys. 4. Różnica polega na pominięciu tarcia lepkiego w sieci trakcyjnej, a uwzględnianiu z kolei profilowania i zwisu wstępnego sieci.

Do obliczeń na maszynie analogowej przyjęto układ z jednym stopniem swobody, opisany równaniem:

$$(m_s + M)\ddot{y} + \dot{m}_s \dot{y} + b_r \dot{y} + k_s (y - q) + W_r f(\dot{y}) = F_{st} \quad (21)$$

gdzie:

- q - przyrost wysokości zawieszenia sieci trakcyjnej, mierzony od poziomu zawieszenia sieci w środku przęsła,
 $f(\dot{y})$ - funkcja opisująca zmiany tarcia suchego w układzie ramowym odbieraka prądu.

Zaproponowany model wyróżnia się określeniem siły bezwładności spowodowanej zmienną masą zastępczą sieci trakcyjnej. W modelach ze zmienną masą siłę bezwładności sieci przyjęto jako iloczyn zmiennej masy i przyspieszenia pionowego punktu styku. Zgodnie z definicją Newtona - siła bezwładności jest pochodną wektora pędu (np. [2]). Wobec tego w modelach dyskretnych, w których przyjęto, że masa zastępcza sieci jest zmienna w czasie i wędruje wraz z odbierakiem prądu, siła bezwładności powinna być opisana następująco:

$$F_B = \frac{d}{dt} \left[m_s(t) \frac{dy}{dt} \right] = \frac{d^2 y}{dt^2} m_s(t) + \frac{dy}{dt} \frac{dm_s}{dt} = \ddot{y} m_s(t) + \dot{y} \dot{m}_s \quad (22)$$

W modelach dyskretnych pojedynczych tylko model Grajnera uwzględniła pochodną masy zastępczej sieci względem czasu. Jak wykazały obliczenia [13] poprawka ta ma pewien wpływ na dokładność odwzorowania współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną przy użyciu modeli o zmiennej masie zastępczej sieci.

3.6. Model Djanikova [3]

Model ten odróżnia się od innych wprowadzeniem pomiędzy masę sieci i masę ślizgacza fikcyjnej sztywności oraz tłumienia, włączonych do modelu w momencie utraty styku między ślizgaczem odbieraka a drutem jazdym. Wartości tych parametrów oszacowano, przyjmując: sztywność równą 10^6 N/m oraz współczynnik tarcia lepkiego 5 Ns/m.

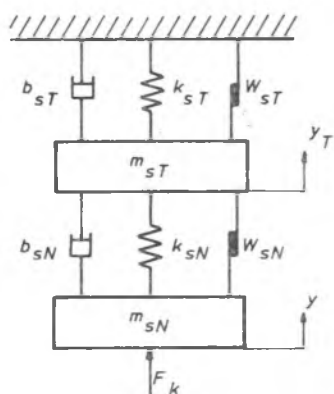
Zasadniczy schemat zastępczy przyjęto taki sam, jak na rys. 3, a obliczenia wykonano na dwóch maszynach analogowych MEDA-42TA.

4. MODELE KLASY K3

W latach 1966-1978 opublikowali swe prace następujący autorzy: Morris (1966), Levy, Bain, Leclerc (1968), Scott, Rothman (1974), Beljaev (1976), Fisher (1977), Frajfeld (1978), Sakaguchi (1978).

W rozdziale tym zwrócono przede wszystkim uwagę na sposób modelowania sieci trakcyjnej przez poszczególnych autorów, gdyż modele matematyczne odbieraków prądu nie różnią się niczym istotnym od modelu pokazanego na rys. 3.

4.1. Model Frajfelda [9]



Rys. 5. Dwumasowy model sieci trakcyjnej według Frajfelda

Na rys. 5 przedstawiono model matematyczny sieci trakcyjnej z dwoma stopniami swobody. Różnica w stosunku do modelu z rys. 3 i 4 polega na rozdzieleniu parametrów sieci trakcyjnej na dwa podukłady: drut jezdny (N) i linię nośną (T).

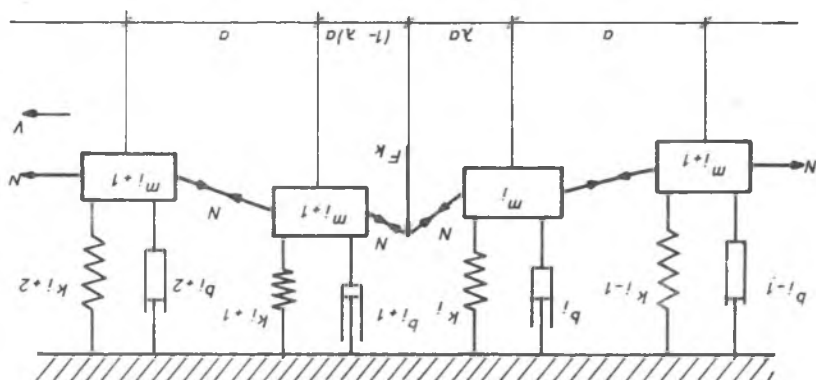
Równania opisujące ten model podano w literaturze [9].

4.2. Model Morrisa [4, 11]

Przyjęto następujące założenia:

- sieć trakcyjna podzielona jest na segmenty;
- każdy segment składa się z masy zawieszanej na sprężynie oraz tłumika;
- masy połączone są nieważką nicią o naciągu N ;

- sztywność odsprężynowania poszczególnych mas jest różna, zależnie od charakterystyki sztywności sieci na długości przebiegu;
- model odbieraka jest układem o dwóch stopniach swobody.



Rys. 6. Model matematyczny sieci trakcyjnej według Morrisa

Na rys. 6 przedstawiono segmentowy model sieci trakcyjnej. W opisie modelu przyjęto następujące oznaczenia:

- 1 - numer segmentu sieci,
- $n, n+1$ - numery segmentów, między którymi znajduje się odbierak,
- m_i, k_i, b_i - odpowiednio: masa, sztywność i współczynnik tarcia lepkiego i -tego segmentu,

N - naciąg drutu jezdnego,

F_k - siła stykowa między ślizgaczem odbieraka a drutem jezdny,

a - odległość między segmentami,

λ - odległość względna odbieraka od segmentu n ,

y_1 - przemieszczenie pionowe masy m_1 od położenia początkowego,

y - przemieszczenie pionowe drutu jezdnego w punkcie styku.

Przemieszczenia dowolnej masy m_1 w kierunku pionowym są opisane następującymi równaniami:

dla $i \neq n \wedge i \neq n+1$:

$$m_1 \ddot{y}_1 = -b_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 + \frac{N}{a}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_1) \quad (23)$$

dla $i = n$:

$$m_1 \ddot{y}_1 = -b_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 - \frac{N}{a}(y_1 - y_{i-1}) + \frac{N}{\lambda a}(y - y_1) \quad (24)$$

dla $i = n+1$:

$$m_1 \ddot{y}_1 = -b_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 - \frac{N}{(1-\lambda)a}(y_1 - y) + \frac{N}{a}(y_{i+1} - y_1) \quad (25)$$

Siła stykowa określona jest zależnością:

$$F_k = \frac{N}{\lambda a}(y - y_n) - \frac{N}{(1-\lambda)a}(y_{n+1} - y). \quad (26)$$

Po przekształceniu (26) względem y i po podstawieniu do równań (23-25), równanie ruchu i -tego segmentu przyjmie następującą postać ogólną:

$$m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = \frac{N}{a}(y_{i-1} - 2y_1 + y_{i+1} + q_w \frac{aF_k}{N}), \quad (27)$$

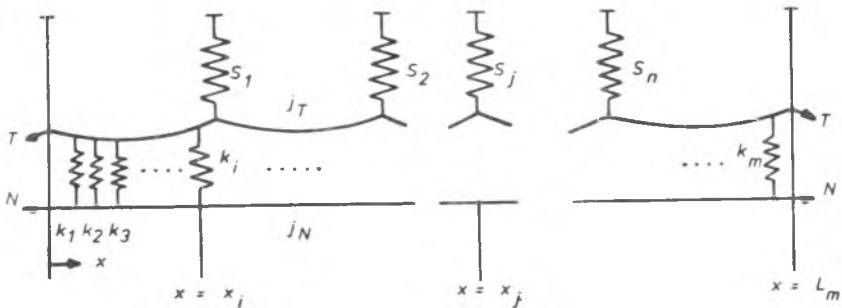
gdzie:

q_w - jest wskaźnikiem położenia odbieraka między segmentami.

$$\begin{aligned} q_w &= 0 & \text{dla } i \neq n \wedge i \neq n+1 \\ q_w &= 1 - \lambda & \text{dla } i = n \\ q_w &= \lambda & \text{dla } i = n+1 \end{aligned} \quad (28)$$

W modelu Morrisa liczba równań typu (27) równa jest liczbie segmentów, na jakie podzielony został odcinek sieci trakcyjnej.

4.3. Model Levy-Bain-Leclercs [16]



Rys. 7. Model matematyczny sieci trakcyjnej według Levy-Bain-Leclercs

Na rys. 7 przedstawiono model matematyczny sieci trakcyjnej według [16]. Parametry uwzględnione w modelu oznaczono następująco:

- T - naciąg liny nośnej,
- N - naciąg drutu jezdnego,
- j_T - masa jednostkowa liny nośnej,
- j_N - masa jednostkowa drutu jezdnego,
- k_i - sztywność i -tego wieszaka,
- S_j - sztywność elementu podwieszenia sieci,
- L_m - całkowita długość rozpatrywanych m przęseł zawieszenia.

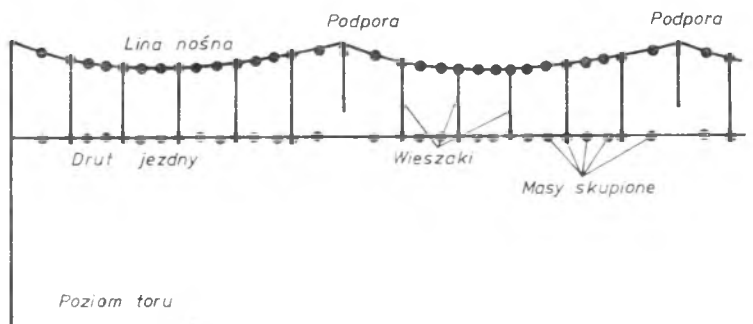
W oparciu o równania Lagrange'a wyprowadzono równania drgań liny nośnej i drutu jezdnego pod wpływem oddziaływania jednego lub więcej odbieraków prądu.

Rozwiązania ww. równań poszukiwano metodą bilansu harmonicznych. Przy użyciu komputera GE-635 badano a.ś.n. wpływ następujących czynników na jakość współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną: tłumienia lepkiego w odbieraku, masy odbieraka, sztywności odepnązynomia ślizgacza, sztywności elementów podwieszenia sieci, sztywności wieszaków, naciągów przewodów, mas przewodów, tłumienia sieci, sił aerodynamicznych i ograniczników drgań.

4.4. Model Scotta - Rothmana [20]

Przyjęto następujące założenia:

- sieć trakcyjna jest układem dwóch nieważkich strun (lina nośna i drut jezdny) sprzężonych wieszakami,
- na strunach umieszczone są masy skupione, odwzorowujące ciągle rozłożenie masy sieci trakcyjnej,
- model odbieraka jest układem o dwóch stopniach swobody, w którym przemieszczenia mas względem siebie są ograniczone.



Rys. 8. Model matematyczny sieci trakcyjnej według Scotta i Rothmana

Na rys. 8 przedstawiono przyjęty schemat zastępczy sieci trakcyjnej. Równanie określające przyspieszenie pionowe i -tej masy skupionej na następującą postać:

$$\ddot{y}_i = -g + N \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_{i-1} - y_i}{x_i - x_{i-1}} \right) / m_i \quad (29)$$

gdzie:

- N - naciąg drutu jezdny (lub liny nośnej),
- m_i - i -ta masa skupiona,
- g - przyspieszenie grawitacyjne,
- y_i - przemieszczenie pionowe masy m_i ,
- x_i - położenie masy m_i wzdłuż toru.

Obliczenia wykonano przy użyciu komputera dla sieci prostej i wielokrotnej. Wykazały one dużą zbieżność z wynikami uzyskanymi drogą eksperymentów na modelu fizycznym.

4.5. Model Sekaguchiego [19]

Koncepcja tego modelu jest identyczna jak przedstawiona w podrozdziale 4.4. Masę sieci trakcyjnej odwzorowano szeregiem mas skupionych, wieszaki przedstawiono jako pozbawione masy sztywne pręty (masy ich dołączono do mas sąsiednich), połączenia między masami są giętkie i nieważkie, model odbiera się jest układem jednomasowym.

Odnutować tutaj należy sposób wykonania pomiarów poligonowych oraz obliczeń komputerowych. Odcinek doświadczalny podzielony został na trzy sekcje:

- sekcja przyspieszenia (0-190 km/h) o długości 240 m,
- sekcja jazdy wybiegiem o długości 70 m,
- sekcja hamowania o długości 105 m.

Stwierdzono dużą zbieżność wyników pomiarów poligonowych i obliczeń symulacyjnych.

4.6. Model Beljaeva [1]

W pracy [1] w rozdziale 1 zostały zaprezentowane szczegółowe schematy zastępcze sieci trakcyjnej i odbieraka prądu, uwzględniające wszystkie elementy konstrukcyjne obu ww. układów. Model sieci trakcyjnej Beljaeva uwzględnia tarcie suche i lepkie oraz sztywność giętą przewodów.

4.7. Model Fishera [8]

W latach 1971-1974 zespół pracowników firmy AEG - Telefunken opracował model matematyczny, a na jego podstawie program komputerowy - symulujący współpracę odbieraka prądu z siecią trakcyjną.

Przyjęto następujące założenia:

- rozpatrywany może być dowolny rodzaj sieci trakcyjnej (zarówno prosta, jak i wielokrotna),
- rozpatrywana może być współpraca jednego lub więcej odbieraków z siecią,
- rozpatrywane są drgania sieci i odbieraka w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś toru,
- przewody sieci trakcyjnej odwzorowane są szeregiem mas skupionych (jak w modelu Scotta-Rothmana),
- może być uwzględniona sztywność giętą przewodów,
- lina nośna oraz końce przewodów zamocowane są na sztywno do konstrukcji wsporczej,
- naciągi przewodów są stałe,
- wieżaki odwzorowane są w postaci sprężyn o bardzo dużej sztywności,
- może być uwzględnione tłumienie lepkie drgań sieci,
- model odbieraka jest układem o dwóch stopniach swobody,
- można uwzględnić w obliczeniach odbierak o większej ilości mas (np. model trzymasowy), a także odbierak "aktywny" (zapewniający stałą wartość siły stykowej dla dowolnej prędkości jazdy).

Zakładając, że przemieszczenie mas względem siebie są niewielkie i pomijając wstępnie sztywność giętą przewodów, można napisać następujące równanie ruchu i-tej masy skupionej:

$$m_1 \ddot{y}_1 = y_{i-1} \frac{N}{L_{i-1}} - y_i \left(\frac{N}{L_{i-1}} + \frac{N}{L_i} \right) + y_{i+1} \frac{N}{L_i} - b_1 \dot{y}_1 - m_1 g, \quad (30)$$

gdzie:

- L_{i-1} i L_i - odległości do mas sąsiednich,
- N - naciąg przewodu (liny nośnej, jezdnego lub linki pomocniczej),
- y_1 - przemieszczenie pionowe masy m_1 ,
- b_1 - współczynnik tarcia lepkiego.

Masę m_1 można wyznaczyć z następującego wzoru:

$$m_1 = 0.5 \cdot j(L_{1-1} + L_1), \quad (31)$$

gdzie j oznacza masę jednostkową przewodu.

Uwzględniając sztywność giętą przewodów, należy zdyskretyzować równanie swobodnych drgań belki:

$$j \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \quad (32)$$

gdzie:

E - moduł sprężystości poprzecznej przewodu,

I - moment bezwładności przekroju przewodu.

Dyskretyzacja równania (32) polega na podzieleniu przewodu na jednakowe odcinki o długości h . Po zastąpieniu czwartej pochodnej cząstkowej wzorem przybliżonym, równanie ruchu i -tej masy przyjmie następującą postać:

$$m_1 \ddot{y}_i = \frac{N}{h}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{EI}{L^3}(-\frac{1}{6} y_{i-3} + 2y_{i-2} - \frac{13}{2} y_{i-1} + \frac{28}{3} y_i - \frac{13}{2} y_{i+1} + 2y_{i+2} - \frac{1}{6} y_{i+3}) - b_1 \dot{y}_i - m_1 g \quad (33)$$

Ruchy mas znajdujących się w pobliżu końca przewodu lub na jego końcu, względnie w punkcie połączenia linki pomocniczej Y z linię nośną, opisane są oddzielnymi równaniami.

Liczba równań typu (30) lub (33) równa jest liczbie mas skupionych - odwzorowujących odcinek sieci trakcyjnej.

5. MODELE KLASY K4

Na przestrzeni lat 1938-1978 opublikowali swe prace m.in. następujący autorzy: Markwardt (1938), Kowalev (1968), Kaładadze (1974), Kokeev (1975), Yoshizawa (1976), Oda i Ooura (1977), Frajfeld (1978).

Markwardt [5] rozpatruje sieć trakcyjną jako strunę drgającą w dwóch płaszczyznach, przyjmując jednocześnie założenia: masa zastępcza odbieraka jest równa zero, a jego ślizgacz oddziałuje na sieć stałą siłą. Również autorzy japońscy: Oda i Ooura [18] oraz Yoshizawa [22] przedstawiają sieć jako strunę, opisując jej drgania znanym równaniem struny.

5.1. Model Frajfelda [9]

W modelu rozpatrywana jest współpraca kilku odbieraków z siecią trakcyjną. W równaniach współpracy uwzględniona jest siła F_{v1} - pochodząca

od fali wywołanej przez i-ty odbierak. Celem zbadania wpływu siły F_{v1} na jakość współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, potraktowano sieć jako strunę drgającą.

Również prace Kovalova [5] i Kaładadze [17] podejmują tematykę zjawisk falowych w sieci trakcyjnej.

5.2. Model Kokoeva [12]

Przyjęto następujące założenia:

- sieć trakcyjna jest belką o masie jednostkowej równej masie jednostkowej drutu jezdnego,
- belka zastępcza jest rozciągana stałą siłą N równą naciągowi drutu jezdnego,
- belka zastępcza spoczywa na podłożu sprężystym o okresowo zmiennej sztywności,
- odbierak prądu jest układem o dwóch stopniach swobody.

Dla tak przyjętego modelu sieci, po rozpatrzeniu równowagi elementarnego odcinka drutu jezdnego, wyprowadzono następujące równanie drgań:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + j_N \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \frac{\partial y}{\partial t} + k_0 (1 - \varepsilon_k \cos \frac{2\pi x}{L}) y = F_k(t) \delta(x - v_k t), \quad (34)$$

gdzie:

- E - moduł sprężystości poprzecznej drutu jezdnego,
- I - moment bezwładności przekroju drutu jezdnego,
- N - naciąg drutu jezdnego,
- j_N - masa jednostkowa drutu jezdnego,
- b - współczynnik lepkości dynamicznej jednostki długości drutu jezdnego,
- k_0 - średnia sztywność jednostkowa podłoża odniesiona do jednostki powierzchni,
- δ - dystrybucja Diraca.

6. UWAGI KOŃCOWE

W rozdziałach 2-5 zaprezentowano ponad 20 modeli matematycznych odwzorowujących współpracę odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Listę twórców modeli matematycznych należy w tym miejscu uzupełnić m.in. o następujące nazwiska: Abbott, An, Andrews, Davies, Edwards, Gilbert, Pomakov, Sudarda, Tibilov, Titarenko, Vologin oraz Willets. Tak duża liczba modeli świadczy o ich ciągłej ewolucji, a także o różnicach poglądów poszczególnych autorów na temat odwzorowania układu: odbierak - sieć.

Zestawienie modeli matematycznych współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną zawierają również prace [14] i [15]. W części II artykułu przed-

stawiono podział modeli według typów oraz ich ocenę porównawczą, w części III natomiast omówiono zagadnienie komputerowej realizacji modelu matematycznego oraz możliwości najważniejszych zastosowań.

LITERATURA

- [1] Beljajew I.A., Michejew V.P., Szijan V.A.: Tokosjem i tokopriemniki elektropodwiznogo sostawa. Wyd. "Transport", Moskwa 1976.
- [2] Cannon R.H. jr: Dynamika układów fizycznych. WNT, Warszawa 1973.
- [3] Djankov G.: Technicke poziadavky pre optimalizacie navrhu trolejoveho vedenia pre vysoke rychlosti. Praca doktorska, VSD Zilina 1979.
- [4] Ebeling H.: Stromabnahme bei hohen Geschwindigkeiten - Probleme der Fahrleitungen und Stromabnehmer. Elektrische Bahnen 1969, nr 2 i 3.
- [5] Fidrych Z.: Issledowanije wlijanja parametrov kontaktnoj podwieski na kaczestwo tokosjema pri vysokich skorostjach dwizenja. Praca doktorska, MIIT Moskwa 1971.
- [6] Fidrych Z.: Zabezpieczenie niezawodnego odbioru prądu przy wysokich szybkościach jazdy pociągów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 62, Gliwice 1979.
- [7] Fidrych Z., Konieczny R.: Adaptacja metody analityczno-graficznej wyznaczenia trajektorii punktu styku odbieraka prądu z siecią trakcyjną do postaci rozwiązywalnej przy pomocy ETO. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 68, Gliwice 1980.
- [8] Fisher W.: Kettenwerk und Stromabnehmer bei hohen Zuggeschwindigkeiten. ZEV Glasers Annalen nr 5/1977.
- [9] Frajeeld A.W.: Projektowanie kontaktnej sieci. Wyd. "Transport", Moskwa 1978.
- [10] Frajeeld A.W.: Primenienije EVM dle issledowenij tokosjema pri vysokich skorostjach dwizenja - Vestnik VNIIZTr. nr 1/1972.
- [11] Grajner J.: Drganie ruchomego układu dyskretnego współpracującego z układem ciągłym na przykładzie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska 1979.
- [12] Kokoew A.D.: Fiziczeskoje modelirovanje dinamiczeskogo wzaimodejstwija tokopriemnika i kontaktnoj podwieski - Vestnik VNIIZTr. nr 2/1975.
- [13] Konieczny R.: Zagadnienie odwzorowania mas zastępczej sieci trakcyjnej w obliczeniach symulacyjnych współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 87/1983.
- [14] Konieczny R.: Modele matematyczne współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Katowice 1981 (praca niepublikowana).
- [15] Konieczny R.: Ocena jakości współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną przy użyciu symulacji komputerowej. Praca doktorska, Politechnika Śląska 1981.
- [16] Levy S., Bain A.J., Leclerc E.J.: Railway Overhead Contact Systems, Catenary-Pantograph Dynamics for Power Collection at High Speeds. Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry nr 11/1968.
- [17] Markwardt K.G., Wlasow I.I.: Kontaktnaja set. Wyd. "Transport", Moskwa 1977.
- [18] Oda O., Ooura Y.: Vibrations of Catenary Overhead Wire. Quarterly Reports. Vol. 17 nr 3/1976.
- [19] Sakaguchi T.: Simulation of Overhead Contact Wire and Pantograph as a System. Japanese Railway Engineering nr 1/1978.

- [20] Scott P.R., Rothman M.: Computer Evaluation of Overhead Equipment for Electric Railroad Traction. IEEE Transactions on Industry Applications 1974/Sept./Oct. tom 1A-10 nr 5.
- [21] Szot Z., Chwieduk A.: Dostosowanie niektórych linii PKP do prędkości 120, 140 i 160 km/h. Problemy Kolejnictwa nr 85/1979.
- [22] Yoshizawa T.: A study on the Motion of Overhead Contact Wire at Crossing. Quarterly Reports nr 1/1977.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Przemysław Pazdro

СОПОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОПРИЁМНИКА И КОНТАКТНОЙ ПОДВЕСКИ

Часть I

ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ

Резюме

В статье сопоставлены основные классы математических моделей динамического взаимодействия токоприёмника и контактной подвески. Знание положительных качеств отдельных моделей необходимо для оценки качества взаимодействия токоприёмника и контактной подвески при пользовании симуляций на электронных вычислительных машинах.

SPECIFICATION FOR MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMIC COLLABORATION
OF A CURRENT COLLECTOR WITH OVERHEAD CONTACT SYSTEM

Part I

BASIC MODEL CLASSES

Summary

In the article, basic classes of mathematical models of dynamic collaboration of a current collector with overhead contact system, are specified. Knowledge of values of particular models is necessary for quality evaluation of the collaboration of a current collector with overhead contact system by computer simulation.