ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: TRANSPORT z. 2 Nr kol. 791

Roman KONIECZNY

Instytut Transportu Kolejowego
Politechniki Śląskiej

ZESTAWIENIE MODELI MATEMATYCZNYCH WSPÓŁPRACY DYNAMICZNEJ ODBIERAKA PRĄDU Z SIECIĄ TRAKCYJNĄ

C z ę ś ć II

PODZIAŁ MODELI WEDŁUG TYPÓW
OCENA PORÓWNAWCZA POSZCZEGÓLNYCH TYPÓW MODELI
ZMODYFIKOWANE MODELE ST1+OP2 i ST3+OP2

Streszczenie. W artykule przedstawiono podział modeli matematycznych współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną według typów. Dokonano oceny porównawczej poszczególnych typów modeli oraz zaprezentowano zmodyfikowane modele matematyczne ST1+OP2 i ST3+OP2.

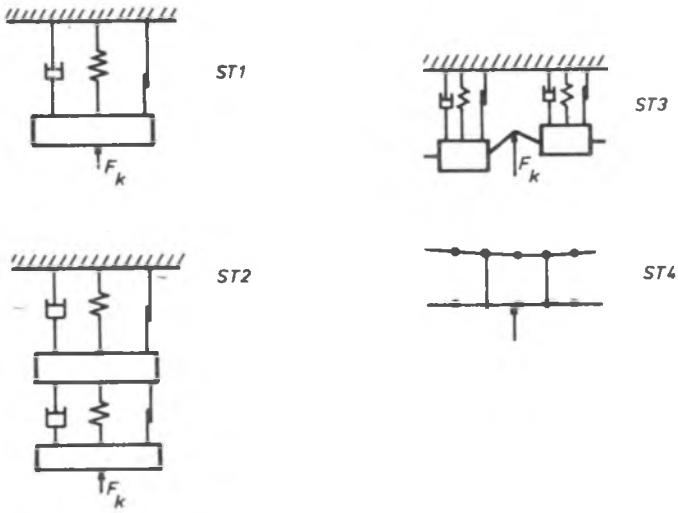
1. WPROWADZENIE

W części I artykułu przedstawiono podział modeli matematycznych według klas. Podział ten ze względu na jedną tylko cechę modelu - sposób odwzorowania masy sieci trakcyjnej - nie jest adekwatny z punktu widzenia złożoności symulacji komputerowej. Mając to na uwadze, w pracy [5] dokonano innego podziału modeli matematycznych współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Z przedstawionych w części I artykułu modeli wyodrębniono cechy wspólne i podzielono je na dwa zasadnicze typy: ST (sieć trakcyjna) i OP (odbierak prądu), numerując według stopnia złożoności.

2. PODZIAŁ MODELI WEDŁUG TYPÓW

Podstawowe typy modeli matematycznych odwzorowujących sieć trakcyjną według [5] są następujące (rys. 1):

ST1 - sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ z 1 stopniem swobody. Masa zastępcza sieci zawieszona jest na sprężynie - reprezentującej sztywność sieci, równolegle włączony jest tłumik hydrauliczny - reprezentujący tarcie lepkie w sieci, uwzględnione jest tarcie suche. Parametry: masa, sztywność, współczynnik tarcia lepkiego oraz siła



Rys. 1. Podstawowe typy modeli sieci trakcyjnej

tarcia suchego zależne są od czasu lub od drogi (np. model Fidrycha rys. 3 i 4 cz. I),

ST2 - sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ z 2 stopniami swobody. Różnica w stosunku do modelu ST1 polega na rozdzielaniu parametrów sieci na dwa podukłady: T - linę nośną, N - drut jezdny (np. model Frajfelda rys. 5 cz. I),

ST3 - sieć trakcyjna odwzorowana jest jako ciąg segmentów. Każdy segment jest modelem typu ST1 o stałych parametrach. Segmenty połączone są ze sobą nieważką nicią o naciągu N (np. model Morriss rys. 6 cz. I),

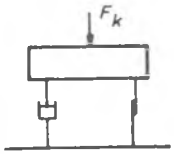
ST4 - sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ n mas skupionych. Uwzględniona jest sztywność giętna przewodów. Odwzorowane są wszystkie podukłady sieci: T - lina nośna, N - drut jezdny, Y - linka usztywniająca (np. model Scotta i Rothmana rys. 8 cz. I).

W grupie modeli sieci trakcyjnej należy uwzględnić jeszcze (według przyjętej w [5] konwencji) typ ST5, w którym sieć odwzorowana jest w postaci drgającej struny lub belki na podłożu sprężystym.

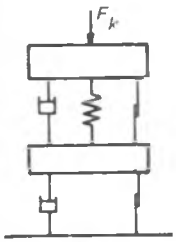
Podstawowe typy modeli matematycznych odwzorowujących odbierak prądu według [5] są następujące (rys. 2):

OP1 - odbierak prądu odwzorowany jest jako układ z 1 stopniem swobody (np. model Fidrycha rys. 4 cz. I),

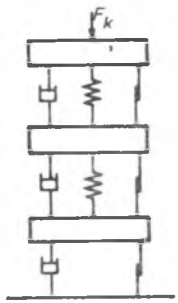
OP2 - odbierak prądu odwzorowany jest jako układ z 2 stopniami swobody (np. model Fidrycha rys. 3 cz. I),



OP1



OP2



OP3

Rys. 2. Podstawowe typy modeli odbieraka prądu

OP3 - odbierak prądu odwzorowany jest jako układ z 3 stopniami swobody (model przeznaczony do odwzorowania odbieraków piętrowych).

Modele odbieraka prądu są układami o stałych parametrach.

Z przedstawionych powyżej podstawowych typów modeli matematycznych sieci trakcyjnej i odbieraka prądu można uzyskać 12 modeli współpracy tych układów. Modele typu OP1 i OP2 są odwróceniem modeli ST1 i ST2. Model typu ST1 uogólnia modele klasy K1 i K2. Przykładowo: model Kumezawy jest modelem współpracy typu ST1+OP1, w którym masa zastępcza i sztywność sieci trakcyjnej posiadają sinusoidalny rozkład wzdłuż przęsła zawieszania, odbierak prądu reprezentowany jest przez masę zastępczą i siłę statyczną, a siły tarcia suchego nie są uwzględniane. Model Fidrycha z rys. 3 cz. I jest modelem współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną typu ST1+OP2.

3. OCENA PORÓWNAWCZA POSZCZEGÓLNYCH TYPÓW MODELI

W celu sprawdzenia, w jakim stopniu wyniki uzyskane przy użyciu modeli prostych różnią się od rezultatów uzyskanych przy wykorzystaniu modeli bardziej złożonych, wykonano w pracy [5] wstępne obliczenia porównawcze, których plan podano w tabeli 1. Jako płaszczyznę odniesienia przyjęto wyniki uzyskane przy użyciu jednego z najbardziej rozbudowanych modeli matematycznych współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną (ST4+OP2), zaprezentowane przez Fishera w pracy [2]. W obliczeniach przyjęto następujące założenia:

- rozpatrywana jest współpraca i odbieraka prądu z siecią trakcyjną na odcinku 3 przęseł zawieszania,
- w momencie wejścia odbieraka na rozpatrywany odcinek, sieć znajduje się w stanie niewzbudzonym (zerowe warunki początkowe),
- w obliczeniach nie są uwzględniane następujące parametry: tarcie lepkie i sucha w sieci trakcyjnej, tarcie suche w odbieraku prądu, zwis wstępny oraz profil sieci, czynniki dodatkowe oraz składowa aerodynamiczna.

Do obliczeń przyjęto wartości parametrów sieci trakcyjnej i odbieraka prądu według [2] (tabela 2 i rys. 3). Obliczenia zrealizowano na maszynie cyfrowej IBM 370/145 w języku symulacyjnym CSMP/360. Wyniki obliczeń zestawiono na rys. 4 oraz w tabeli 3. (Narzędzia i techniki symulacyjne zostały omówione w części III artykułu).

Tabela 1

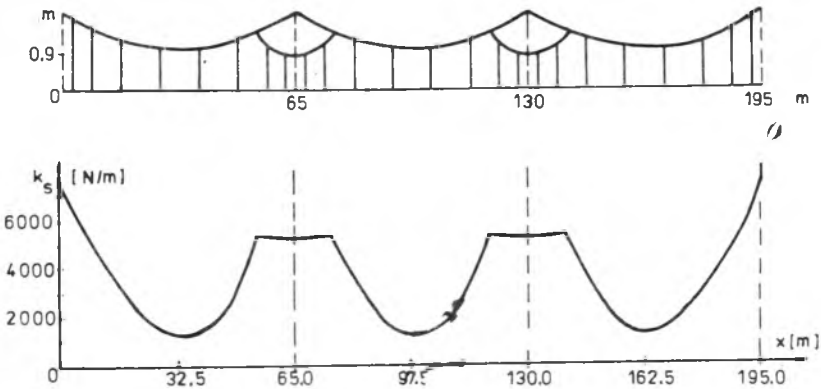
Modele matematyczne wytypowane do obliczeń porównawczych

Lp.	Nazwa modelu	Klasa modelu	Typ modelu współpracy	Równania podstawowe
1	Niblera	K1	ST1 + OP1	1 cz. I
2	Fujii-Shibata	K1	ST1 + OP1	3 cz. I
3	Kumazawy	K2	ST1 + OP1	10 cz. I
4	Grejnerta	K2	ST1 + OP1	21 cz. I
5	Fidrycha	K2	ST1 + OP2	16 cz. I
6	Fishera	K3	ST4 + OP2	33 cz. I

Tabela 2

Parametry odbierака prądu i sieci trakcyjnej [2]
do obliczeń porównawczych na wytypowanych modelach matematycznych

Lp.	Nazwa	Oznaczenie	Jednostka	Wartość
	O d b i e r a k p r ą d u			
1	Masa ślizgacza	m_{sl}	kg	9
2	Masa ram	m_r	kg	17
3	Sztywność odprężynowania ślizgacza	k_{sl}	N/m	7000
4	Współczynnik tarcia lepkiego odprężynowania ślizgacza	b_{sl}	Ns/m	130
5	Współczynnik tarcia lepkiego układu ramowego	b_r	Ns/m	30
6	Siła statyczna	F_{st}	N	90
*	(Tarcie suche oraz składową aerodynamiczną pominięto)			
	S i e ć t r a k c y j n a			
7	Długość przęsła zawieszenia	L	m	65
8	Naciąg drutu jezdnego	N	N	10000
9	Naciąg liny nośnej	T	N	10000
10	Naciąg linki Y	Y	N	2000
11	Masa jednostkowa drutu jezdnego	j_N	kg/m	0.89
12	Masa jednostkowa liny nośnej	j_T	kg/m	0.45
13	Masa jednostkowa linki Y	j_Y	kg/m	0.30
14	Masa wieszaka	m_w	kg	0.55
15	Długość linki Y	dY	m	1/3L
*	(Tarcie suche i lepkie pominięto)			
16	Lokalizacja wieszaków: 1/24L, 1/8L, 5/12L, 7/12L, 3/4L, 7/8L, 23/24L			
*	(Na rys. 3 podano schemat montażowy sieci trakcyjnej oraz charakterystykę sztywności - wyznaczaną w oparciu o wzory przybliżone w literaturze [3, 6, 11])			



Rys. 3. Schemat montażowy oraz charakterystyka sztywności sieci trakcyjnej do obliczeń porównawczych na wytypowanych modelach matematycznych

a) schemat montażowy sieci trakcyjnej, b) charakterystyka sztywności sieci trakcyjnej

Tabela 3

Zestawienie wyników uzyskanych na wytypowanych modelach matematycznych dla prędkości V = 144 km/h

Lp.	Nazwa modelu	Przedział x [m]	y_{max} [cm]	x_{max} [m]	$\bar{y}$ [cm]	ε_{sr} [cm]
1	2	3	4	5	6	7
1	Fishera	0-65	10.5	42	7.28	-
		65-130	9.5	107	8.18	-
		130-195	9.5	172	6.41	-
		0-195	10.5	42	7.29	-
2	Niblera	0-65	9.0	44	3.15	5.16
		65-130	15.4	108	3.17	14.18
		130-195	22.4	173	3.67	16.54
		0-195	22.4	173	3.33	12.93
3	Fujii-Shibata	0-65	8.0	39	3.52	4.25
		65-130	7.8	104	3.38	5.08
		130-195	7.8	169	3.42	3.37
		0-195	8.0	39	3.44	4.29
4	Kumazawy	0-65	7.7	42	3.25	4.62
		65-130	8.2	107	3.25	5.47
		130-195	8.3	172	3.42	3.30
		0-195	8.3	172	3.31	4.55
5	Grajnerta	0-65	7.6	42	3.21	4.64
		65-130	8.2	107	3.28	5.43
		130-195	8.3	172	3.36	3.34
		0-195	8.3	172	3.28	4.55

cd. tabeli 3

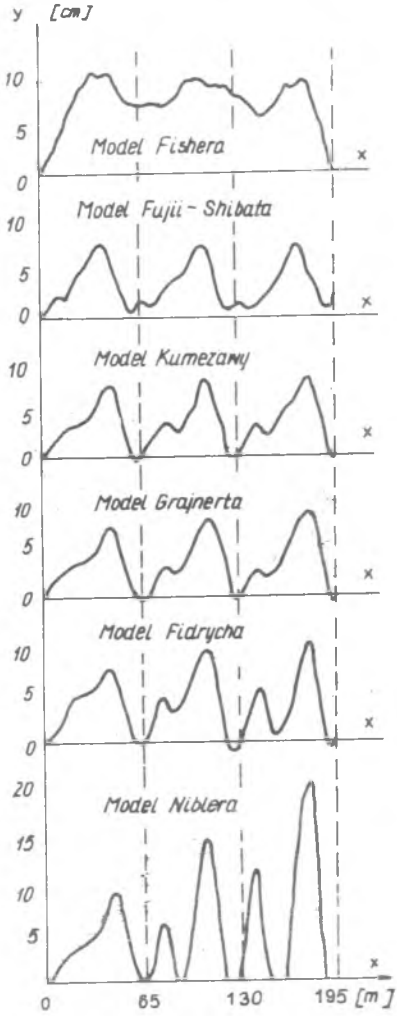
1	2	3	4	5	6	7
6	Fidrycha	0-65 65-130 130-195	7.3 9.4 10.2	41 107 173	3.37 3.25 4.08	4.63 5.91 3.34
		0-195	10.2	173	3.57	4.74

Oznaczenia:

y_{max} - maksymalne przemieszczenie pionowe punktu styku;

x_{max} - położenie maksimum; y - wartość średnia y;

ε_{sr} - błąd średniokwadratowy (odchylenie od modelu Fishera)



Rys. 4. Trajektorie punktu styku odbieraka prądu z siecią trakcyjną obliczone przy użyciu wytypowanych modeli matematycznych dla prędkości V = 144 km/h

Wartości średnie przebiegów (tabela 3) oraz błąd średniokwadratowy, rozumiany jako odchylenie od modelu Fishera, obliczono dzieląc każde przęsło zawieszania na odcinki 5-metrowe.

Dokonując oceny uzyskanych rezultatów można stwierdzić:

- różnice ilościowe wyników uzyskanych na modelach klasy K1 i K2 w stosunku do modelu K3 (różne wartości średnie przebiegów, duże błędy średniokwadratowe);
- nieznaczne różnice w wartościach maksymalnych poszczególnych przebiegów (z wyjątkiem modelu Niblera przęsła 2 i 3);
- jednakową lokalizację ekstremów trajektorii punktu styku.

Wyniki uzyskane na modelu Niblera różnią się najbardziej od pozostałych przebiegów. Spowodowane jest to nieuwzględnieniem tarcia lepkiego w odbieraku prądu, wskutek czego następuje rozwijanie drgań w przęsłach 2 i 3. Pozostałe modele (Fujii-Shibata, Kumezawy, Grajnerta i Fidrycha) nie różnią się wynikami w sposób zasadniczy.

Podstawową przyczyną różnic ilościowych w wynikach uzyskanych na modelach klasy K1, K2 i K3 jest sposób odwzorowania masy sieci trakcyjnej, która jest parametrem rozłożonym przestrzennie. Różnice te nie przesądzają jednak o przewadze modelu Fishera nad modelami klasy K1 i K2, ponieważ brak jest informacji na temat korelacji tego modelu z wynikami badań poligonowych. Często bowiem wyniki uzyskane na prostym modelu matematycznym są zadowalająco zbieżne z wynikami pomiarów poligonowych. W przeprowadzonych obliczeniach porównawczych analizowano tylko przemieszczenie pionowe punktu styku odbieraka prądu z siecią trakcyjną, ponieważ pozostałe zmienne wyjściowe rozpatrywanych modeli matematycznych (np. siła stykowa) obliczane są na maszynie cyfrowej z taką samą dokładnością.

W celu sprawdzenia powtarzalności przebiegów wykonano obliczania uzupełniające, wydłużając rozpatrywany odcinek sieci trakcyjnej do 30 przęseł. Obliczenia wykonano na modelu Fidrycha, w którym przyjęto sinusoidalny rozkład sztywności sieci wzdłuż przęsła zawieszania. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że w badanym układzie występuje powtarzalność przebiegów już od 3 przęsła począwszy. Wniosek ten ma ważne znaczenie dla techniki modelowania współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, ponieważ liczba rozpatrywanych przęseł wiąże się ściśle z ilością równań różniczkowych opisujących modele klasy K3 oraz przede wszystkim - czasem obliczeń maszynowych.

Przed dokonaniem wyboru konkretnego typu modelu do obliczeń symulacyjnych należy zwrócić uwagę na następujące aspekty:

- zaletą modeli prostych (typu ST1+OP1) jest łatwość zaprogramowania na dowolnej maszynie cyfrowej, analogowej, względnie kalkulatorze programowanym; krótki czas obliczeń, możliwość poszukiwania rozwiązań analitycznych; wadą natomiast - mniejsza dokładność odwzorowania współpracy odbieraka prądu z siecią;

- do obliczeń na modelu typu ST4 niepotrzebna jest znajomość charakterystyk sztywności oraz masy zastępczej sieci;
- w modelach klasy K1 i K2 charakterystykę sztywności sieci trakcyjnej można wyznaczyć w oparciu o wzory teoretyczne podane np. w literaturze [3, 6, 11], względnie pomierzyć na rzeczywistej sieci; modele te jednak nie nadają się do odwzorowania zjawisk falowych w sieci trakcyjnej, jak również współpracy kilku odbierasków z siecią trakcyjną;
- model typu ST2 (Frajfelda) mimo swej zalety - rozdzielenia parametrów sieci na dwa podukłady: linę nośną i drut jezdny - nie może być przydatny do obliczeń symulacyjnych ze względu na brak teoretycznych opracowań, jak również danych pomiarowych, odnośnie do wartości rozdzielonych parametrów;
- model Fishera nie uwzględnia tarcia suchego w sieci trakcyjnej oraz w odbieraku prądu, nie uwzględnia ponadto składowej aerodynamicznej oraz drgań lokomotywy;
- modele wielomasowe typu ST3 i ST4 są trudniejsze do zaprogramowania, z uwagi na znaczną liczbę równań różniczkowych zwyczajnych, którymi są opisane;
- w przypadku konieczności ograniczenia liczby równań różniczkowych opisujących model typu ST4 lub ST3 można dokonać połączenia pierwszej masy skupionej z ostatnią (jest to jedna z możliwości sztucznego wydłużania strefy odwzorowania sieci trakcyjnej, poprzez utworzenie układu "karuzelowego"; możliwość ta nie została do tej pory wykorzystana przez autorów prezentowanych publikacji).

Przedstawione powyżej aspekty pozwalają sprecyzować wymagania dla optymalnego modelu współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. O ile uwzględnienie tarcia suchego, składowej aerodynamicznej oraz drgań lokomotywy w modelu Fishera nie jest istotnym utrudnieniem, jak również co do liczby równań różniczkowych nie ma specjalnych ograniczeń (przy założeniu, że jest do dyspozycji komputer o odpowiedniej mocy obliczeniowej), trudności w oprogramowaniu modelu można uniknąć poprzez opracowanie problemowo zorientowanych procedur, podprogramów, względnie makroinstrukcji - o tyle ograniczeniem podstawowym i nie do uniknięcia jest czas obliczeń. Zagadnienia to jest szczególnie ważne w przypadku wykonywania symulacji wielokrotnych.

Dla zilustrowania tego zagadnienia należy odnotować, że w modelu Fishera [2] drut jezdny podzielono na odcinki o długości 48/L, linę nośną oraz linkę typu Y na odcinki 24/L - co daje dla 3 przęseł zawieszenia układ 232 równań różniczkowych zwyczajnych 2 rzędu o stałych współczynnikach (plus 2 równania związane z odbierakiem prądu); do obliczeń przyjęto krok całkowania 10^{-4}s, co odpowiada dla prędkości V = 144 km/h odcinkowi 0,4 cm. Przykładowo: dla modelu Fidrycha przy zastosowaniu metody Rungego-Kutty IV rzędu ze zmiennym krokiem całkowania, dla dokładności standardowej w języku CSMP równej 2 . 10^{-4} (maksymalny dopuszczalny błąd dla

każdego integratora) i dla przedziału wydruku wyników równego 1 m, wyjściowy krok całkowania wyniósł 6,25 cm (przy minimalnym dopuszczalnym 1 . 95 . 10^{-3} cm), czas zajętości procesora IBM 370/145 wyniósł 30,06 s.

Ażeby rozstrzygnąć kwestię czasu trwania przebiegu symulacyjnego dla rozważanego przypadku, wykonano test szybkości obliczeń na maszynie cyfrowej IBM 370/145 dla modelu Kumazawy posługując się kilkoma metodami całkowania numerycznego dostępnymi w języku CSMP. Wyniki testu zestawiono w tabeli 4.

Tabela 4

Wyniki testu szybkości obliczeń na modelu Kumazawy przy użyciu standardowych metod całkowania (CSMP)

Lp.	Nazwa metody	Krok całkowania [m]	Czas obliczeń [s]
1	Milne'a V rzędu	0.1875...1.5	18.50
2	Rungego-Kutty IV rz.	0.1875...3.0	18.85
3	Rungego-Kutty IV rz.	0.04	48.44
4	Simpsona	0.04	40.29
5	Trapezów	0.04	33.59
6	Adamsa II rzędu	0.04	26.80
7	Prostokątów	0.04	26.67

Na podstawie przeprowadzonego testu stwierdzono, że najszybsze wyniki daje metoda Milne'a (zmiennokrokowa). Ponieważ czas trwania przebiegu symulacyjnego na maszynie cyfrowej jest proporcjonalny do ilości zamodelowanych równań różniczkowych, dlatego na podstawie obliczeń szacunkowych można założyć, że na ww. maszynie wyznaczenie trajektorii punktu styku odbieraka prądu z siecią trakcyjną na odcinku 3 przęseł zawieszenia - przy użyciu modelu Fishera - zajęłoby minimum ok. 90 minut. Dla dłuższych serii obliczeniowych (np. optymalizacja parametryczna) czas ten jest nie do przyjęcia.

Model typu ST4, mimo dużej dokładności odwzorowania sieci trakcyjnej, nie może być szerzej stosowany ze względu na długi czas obliczań maszynowych. Bez względu na rodzaj zastosowanej procedury rozwiązania układu równań różniczkowych czas ten jest zawsze podstawowym ograniczeniem.

Dokonując podsumowania rozważań w niniejszym rozdziale, należy stwierdzić, że optymalny model matematyczny współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną powinien charakteryzować się następującymi cechami:

- powinien posiadać wyniki zbieżne z modelem klasy K3 (np. ST4+OP2),
- powinien uwzględniać zjawiska falowe w sieci trakcyjnej, a także umożliwiać ocenę współpracy kilku odbieraków z siecią trakcyjną,

- powinien uwzględniać tarcie suche, zwis wstępny, profil sieci, składową aerodynamiczną oraz czynniki dodatkowe wyspecyfikowane szczegółowo w artykule [6],
- powinien być łatwy do zaprogramowania oraz dawać relatywnie krótkie czasy realizacji podstawowego przebiegu symulacyjnego,
- dokładność wyników uzyskanych na modelu powinna być tego samego rzędu co pomiarów poligonowych.

4. ZMODYFIKOWANE MODELE MATEMATYCZNE TYPU ST1+OP2 i ST3+OP2

Kierując się uwagami przedstawionymi w rozdziale 3, w pracy [5] do symulacji współpracy i odbierska prądu z siecią trakcyjną zaproponowano zmodyfikowany model ST1+OP2, a do symulacji współpracy kilku odbierników z siecią zmodyfikowany model ST3+OP2 (rys. 5). Modyfikacja modelu ST1+OP2 polegała na uwzględnieniu zmian wysokości zawieszenia sieci, czynników dodatkowych (jak drgania lokomotywy, wiatr itp.), a także możliwości uwzględnienia odchyłek parametrów od wartości nominalnych (zmienna losowa). Modyfikacja modelu ST3+OP2 polegała przede wszystkim na przyjęciu zmienności parametrów poszczególnych segmentów.

4.1. Zmodyfikowany model ST1+OP2

Koncepcja modelu oparta jest na schemacie współpracy odbierska prądu z siecią trakcyjną, zaprezentowanym w p. 3.3 cz. I - rys. 3. Ze względu na małe znaczenia drgań poziomych, rozpatrywane są tylko drgania w płaszczyźnie pionowej. Sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ o 1 stopniu swobody (model ST1), odbierak prądu natomiast jako układ z 2 stopniami swobody (model OP2). Pozostałe założenia wyjściowe są następujące:

- masa zastępcza sieci trakcyjnej jest stała wzdłuż przęsła zawieszenia [9],
- sztywność sieci trakcyjnej, współczynnik tarcia lepkiego oraz siła tarcia suchego są zmienne wzdłuż przęsła zawieszenia,
- uwzględnione są siły składowe pochodzenia aerodynamicznego,
- uwzględnione są drgania pudła lokomotywy,
- uwzględniony jest zwis wstępny oraz profilowanie sieci,
- symulacja współpracy odbierska prądu z siecią trakcyjną przeprowadzana jest od początku pierwszego przęsła,
- w momencie rozpoczęcia symulacji sieć i odbierak znajdują się w stanie niewzbudzonym (zerowe warunki początkowe),
- liczba rozpatrywanych przęseł uzależniona jest od powtarzalności przebiegów; minimalna liczba rozpatrywanych przęseł wynosi 3, maksymalna - 20; odcinek pierwszych 2 przęseł traktowany jest jako strefa wstępnego rozwijania się drgań układu,
- odbierak przemieszcza się wzdłuż sieci ze stałą prędkością;

- w modelu mogą być uwzględnione czynniki dodatkowe (np. siła elektrodynamiczna, działanie wiatru itp.),
- w modelu mogą być uwzględniona odchyłki o określonej tolerancji od wartości nominalnych parametrów układu (zmienne losowe).

Układ równań różniczkowych opisujący zmodyfikowany model matematyczny typu ST1+OP2 współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną jest następujący:

$$\left.\begin{aligned}
&(m_s + m_{sl})v^2\ddot{y} + b_s v_{\dot{y}} + k_s y^* + W_{sf}(\dot{y}) + \\
&+ k_{sl}(y^* - y_r^*) + b_{sl}v(\dot{y} - \dot{y}_r) + W_{sl}f(\dot{y} - \dot{y}_r) = F_{as}^* \\
&m_r v^2\ddot{y}_r - k_{sl}(y^* - y_r^*) - b_{sl}v(\dot{y} - \dot{y}_r) - W_{sl}f(\dot{y} - \dot{y}_r) + \\
&+ b_r v(\dot{y}_r - \dot{y}_e) + W_r f(\dot{y}_r - \dot{y}_e) = F_{st} + F_{ar} + Fe
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Zmodyfikowane wielkości y^*, y_r^*, F_{as}^* wyrażone są następującymi wzorami:

$$\left.\begin{aligned}
y^* &= y - \Delta y + y_{dod} \\
y_r^* &= y_r - y \\
F_{as}^* &= F_{as} + F_{dod}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

gdzie:

Δy - zmiana wysokości zawieszania drutu jezdnego, mierzona od poziomu na początku rozpatrywanego odcinka sieci trakcyjnej (wielkość ta uzależniona jest od zwisu wstępnego oraz od pfofilu sieci),

y_{dod} - składnik uwzględniający wpływ czynników dodatkowych (np. chwilowe przemieszczenie sieci trakcyjnej spowodowane wiatrem bocznym),

F_{dod} - składnik uwzględniający wpływ czynników dodatkowych (np. siła elektrodynamicznego oddziaływania torów prądowych w drutach jezdnych i w ślizgaczu odbieraka),

F_a - siła oddziaływania pudła lokomotywy na układ ramowy odbieraka prądu,

pozostałe oznaczenia jak w p. 3.3 cz. I.

Odchyłki parametrów mogą być uwzględnione w następujący sposób:

$$P = P_N + \Theta, \quad (3)$$

gdzie:

P_N - wartość nominalna parametru P,

$\textcircled{\sim}$ - odchylenie od wartości nominalnej, generowane jako zmienna losowa w odpowiednim zakresie tolerancji.

Siła styków między ślizgaczem odbieraka prądu a drutem jezdnym sieci trakcyjnej opisana jest następującym równaniem:

$$F_k = m_s V^2 \ddot{y} + b_s V_{\dot{y}} + k_s y^* + W_s f(\dot{y}) \tag{4}$$

gdzie:

$f(\dot{y})$ - oznacza funkcję określającą znak siły tarcia suchego w układzie.

Charakterystyki parametrów zmodyfikowanego modelu matematycznego ST1-OP2 zalecane w pracy [5] do obliczeń symulacyjnych są następujące:

1) Masa zastępcza sieci trakcyjnej:
można wykorzystać wzór Niblera [1, 9]:

$$m_s(x) = \overline{m}_s = \frac{m_j \cdot L}{\pi} \quad [kg] \tag{5}$$

lub Frajfelda [3, 9]:

$$m_s = 10 \cdot n \cdot j_N + 22 \quad [kg], \tag{6}$$

gdzie:

m_j - masa jednostkowa sieci trakcyjnej $\left[\frac{kg}{m}\right]$,
n - liczba drutów jezdnych,
j_N - masa jednostkowa drutu jezdnego $\left[\frac{kg}{m}\right]$,
L - długość przęsła zawieszenia [m].

2) Sztywność sieci trakcyjnej - wzór 11b cz. I.

3) Siła tarcia suchego w sieci trakcyjnej:

$$W_s(x) = \overline{W}_s\left(1 + \varepsilon_w \cos \frac{2\pi}{L} x\right) \tag{7}$$

gdzie:

ε_w - współczynnik nierównomierności rozkładu siły tarcia suchego wzdłuż przęsła zawieszenia,
$\overline{W}_s$ - wartość średnia siły tarcia suchego.

4) Charakterystyka zmian współczynnika tarcia lepkiego w sieci trakcyjnej:

$$b_s(x) = \overline{b}_s\left(1 - \varepsilon_b \cos \frac{2\pi}{L} x\right) \tag{8}$$

gdzie:

ε_b - współczynnik nierównomierności rozkładu tarcia lepkiego wzdłuż przęsła zawieszenia,

$\bar{b}_s$ - wartość średnia współczynnika tarcia lepkiego.

5) Funkcje określające znak siły tarcia suchego mogą być odwzorowane w dwóch zasadniczych wariantach:

$$f = \mathrm{sign}(\dot{y}) \quad \text{lub} \quad f = \mathrm{th}(r.\dot{y}) \tag{9}$$

Według [12] stała r powinna wynosić 10 s/m.

6) Składowe aerodynamiczne:

$$F_a = k_a v^2, \quad F_{as} = \eta_{as} F_a, \quad F_{ar} = \eta_{ar} F_a \tag{10}$$

gdzie:

k_a - współczynnik oporu aerodynamicznego odbieraka prądu,

η_{as}, η_{ar} - współczynniki określające udział poszczególnych składowych w całkowitej sile aerodynamicznej (F_a) działającej na odbierak.

7) Siła oddziaływania pudła lokomotywy na układ ramowy odbieraka prądu [12]:

$$F_e = k_e y_{em} \omega_e^2 \cos(\omega_e \frac{x}{v}) \tag{11}$$

gdzie:

k_e - współczynnik konstrukcyjny zależny od typu odbieraka,

e_{em} - amplituda drgań pudła lokomotywy,

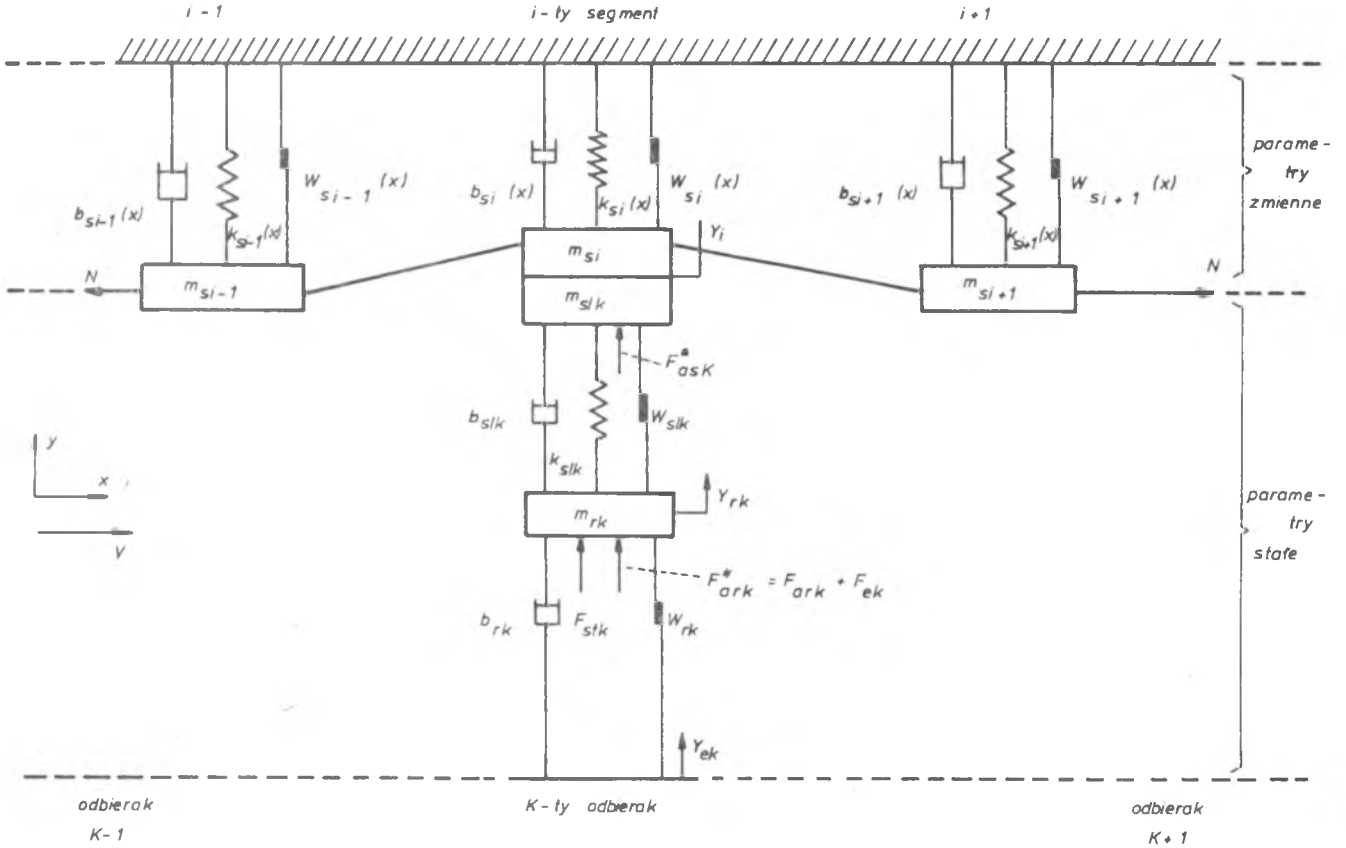
ω_e - częstość drgań pudła lokomotywy.

Pozostałe charakterystyki parametrów modelu są funkcjami stałymi (z wyjątkiem zmian wysokości zawieszenia sieci, która najwygodniej odwzorować w postaci tabelarycznej).

4.2. Zmodyfikowany model ST3+OP2

Koncepcja modelu oparta jest na schemacie współpracy odbieraka z siecią zaprezentowanym w p. 4.2 cz. I. Ze względu na małe znaczenie drgań poziomych, rozpatrywane są tylko drgania w płaszczyźnie pionowej. Sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ o n-stopniach swobody (model ST3), odbierak prądu natomiast jako układ o 2 stopniach swobody (model OP2). Pozostałe założenia wyjściowe są następujące:

- odcinek sieci trakcyjnej (strefa odwzorowania) podzielony jest na n segmentów,



Rys. 5. Zmodyfikowany model matematyczny typu ST3+OP2

- każdy segment jest modelem ST1, tj. składa się z masy zawieszonej na sprężynie oraz uwzględnia tarcie lepkie i suche,
- odległości między segmentami są jednakowe,
- masy połączone są nieważką nicią o naciągu N,
- masy są stałe i jednakowe dla wszystkich segmentów,
- pozostałe parametry segmentów: sztywność sprężyny, współczynnik tarcia lepkiego oraz siła tarcia suchego - są zmienne,
- ilość rozpatrywanych przęseł (strefa symulacji) uzależniona jest od liczby współpracujących z siecią odbieraków prądu,
- liczba rozpatrywanych odbieraków nie jest ograniczona,
- odbieraki przemieszczają się wzdłuż sieci trakcyjnej ze stałą prędkością,
- w momencie rozpoczęcia symulacji sieć trakcyjna oraz odbieraki prądu znajdują się w stanie niewzbudzonym (zerowe warunki początkowe),
- uwzględnione są składowe pochodzenia aerodynamicznego,
- uwzględnione są drgania pudła lokomotywy,
- uwzględniony jest zwis wstępny oraz profilowanie sieci,
- w modelu mogą być uwzględnione czynniki dodatkowe (np. działanie wiatru),
- w modelu mogą być uwzględnione odchyłki o określonej tolerancji od wartości nominalnych parametrów układu (zmienne losowe).

Na rys. 5 pokazano schemat zastępczy zmodyfikowanego modelu matematycznego typu ST3+OP2 współpracy dynamicznej kilku odbieraków prądu z siecią trakcyjną. Podstawowe równania opisujące ten model są następujące [5]:

a) dla segmentu współpracującego z odbierakiem prądu:

$$\left.\begin{aligned}
&(m_{si} + m_{slK})v^2\ddot{y}_i + b_{si}v\dot{y}_i + k_{si}y_i^* + W_{si}f(\dot{y}_i) + \\
&+ \frac{N}{a}(2y_i^* - y_{i-1}^* - y_{i+1}^*) + k_{slK}(y_i^* - y_{rK}^*) + \\
&+ b_{slK}v(\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) + W_{slK}f(\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) = F_{asK}^* \\
&m_{rK}v^2\ddot{y}_{rK} - k_{slK}(y_i^* - y_{rK}^*) - b_{slK}v(\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) - \\
&- W_{slK}f(\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) + b_{rK}v(\dot{y}_{rK} - y_{eK}) + \\
&+ W_{rK}f(\dot{y}_{rK} - \dot{y}_{eK}) = F_{stK} + F_{arK} + F_{eK}
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

b) dla segmentu niewspółpracującego z odbierakiem prądu:

$$m_{si}v^2\ddot{y}_i + b_{si}v\dot{y}_i + k_{si}y_i^* + W_{si}f(\dot{y}_i) =$$

$$= \frac{N}{a}(y_{i-1}^* + y_{i+1}^* - 2y_i^*), \tag{13}$$

gdzie:

N - sumaryczny naciąg drutów jezdnych,

a - odległość między segmentami.

Siła stykowa między i-tym segmentem a K-tym odbierakiem opisana jest następującym równaniem:

$$F_{kK} = m_{si}v^2\ddot{y}_i + b_{si}v\dot{y}_i + k_{si}y_i^* + W_{si}f(\dot{y}_i) +$$

$$+ \frac{N}{a}(2y_i^* - y_{i-1}^* - y_{i+1}^*) \tag{14}$$

Układ równań (12) różni się od układu (1), opisującego model ST1+OP2, jedynie składnikiem $\frac{N}{a}(2y_i^* - y_{i-1}^* - y_{i+1}^*)$ uwzględniającym oddziaływanie segmentów sąsiednich. Wielkości oznaczone gwiazdką uwzględniać mogą: zwis wstępny, profilowanie sieci, czynniki dodatkowe - analogicznie jak w modelu ST1+OP2. Równania (12) i (13) są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, 2 rzędu, nieliniowymi, niejednorodnymi, o zmiennych współczynnikach. Sumaryczna liczba równań różniczkowych do rozwiązania, opisujących model ST3+OP2, wynosi: n + R, gdzie n - oznacza liczbę segmentów odwzorowujących odcinek sieci trakcyjnej; R - oznacza liczbę odbieraków prądu współpracujących z siecią w strefie odwzorowania. Zasadniczą różnicą pomiędzy zmodyfikowanym modelem ST3+OP2 a modelem Morrisa (p. 4.2) jest przyjęcie w modelu sieci trakcyjnej ST3 zmienności parametrów: k_{si}, b_{si} oraz W_{si}. Zmiany te mogą być opisane funkcjami okresowymi, analogicznie jak w modelu ST1+OP2, z uwzględnieniem współczynników korekcyjnych [5] i odpowiednio synchronizowane dla poszczególnych segmentów. Modyfikacja powyższa ułatwia oprogramowanie modelu wielomasowego ST3+OP2 oraz skraca czas obliczeń maszynowych. Strefa symulacji w modelu Morrisa równa jest strefie odwzorowania. Przyjęcie zmienności parametrów (k_{si}, b_{si}, W_{si}) oraz usytuowanie modelu odbieraka (OP2) bezpośrednio pod segmentem umożliwia w modelu ST3+OP2 dowolne wydłużanie strefy symulacji przy niezmienionej liczbie równań opisujących model. Jest to istotna przewaga zmodyfikowanego modelu ST3+OP2 w stosunku do modelu Morrisa lub Fishera. (Należy zwrócić uwagę, że pojęcie "strefa odwzorowania" w modelu ST1+OP2 nie występuje, ponieważ sieć trakcyjna zredukowana jest do jednego tylko segmentu o zmiennych parametrach). Model ST3+OP2 umożliwia również badanie rozchodzenia się drgań w sieci trakcyjnej. Wprowadzanie "wskaźnika obecności" odbieraka w układach równań (12) umożliwia ponadto - wyłączanie i wyłączanie dowolnego odbieraka w trakcie symulacji współpracy z siecią trakcyjną.

Masa odcinka sieci przypadającego na jeden segment może być określona wzorem:

$$m_{si} = m_j \cdot a, \tag{15}$$

gdzie:

m_j - sumaryczna masa sieci trakcyjnej na jednostkę długości,
a - odległość między segmentami.

Oznaczenia występujące w równaniach (12), (13) i (14) są identyczne jak w p. 3.3. Indeksem "i" oznaczono segmenty sieci, indeksem "K" odbieraki prądu.

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona ocena porównawcza poszczególnych typów modeli matematycznych współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną daje tylko ogólny pogląd na stopień złożoności tego zagadnienia. Jak wykazano w pracy [5] zmodyfikowane modele matematyczne typu ST1+OP2 i ST3+OP2 stanowią efektywne narzędzie symulacji współpracy układu: odbierak - sieć. Charakterystykę modelu ST3+OP2 omówiono szerzej w publikacjach [7, 8].

Zaprezentowany podział modeli matematycznych według klas (cz. I) lub według typów (cz. II) jest oczywiście podziałem umownym. Inne spojrzenie na temat klasyfikacji modeli współpracy odbieraka z siecią oraz ich stosowalności zawierają prace [4] i [10].

W artykule tym nie omówiono modeli klasy K4 (typ ST5), ponieważ modele te nie posiadają praktycznego znaczenia. Odwzorowanie sieci trakcyjnej w postaci drgającej struny lub belki jest zbyt daleko idącym uproszczeniem, a poza tym na maszynach krajowych brak jest efektywnych metod rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych - opisujących te modele.

W części III artykułu omówiono zagadnienie komputerowej realizacji modelu matematycznego współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną oraz przedstawiono możliwości zastosowań wybranych typów modeli matematycznych.

LITERATURA

[1] Fidrych Z.: Sposoby określenia masy zastępczej sieci trakcyjnej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka 52/1977.

[2] Fisher W.: Kettenwerk und Stromabnehmer bei hohen Zuggeschwindigkeiten. ZEV Glasers Annalen nr 5/1977.

[3] Frajfeld A.W.: Projektirowanje kontaktnoj seti, Wyd. "Transport", Moskwa 1978.

[4] Kobielski A.: Wyznaczenie wpływu parametrów mechanicznych układu odbierak prądu - sieć trakcyjna na jego własności dynamiczne metodami symulacji komputerowej. Praca doktorska, Politechnika Krakowska 1982.

[5] Konieczny R.: Ocena jakości współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną przy użyciu symulacji komputerowej. Praca doktorska, Politechnika Śląska 1981.

[6] Konieczny R.: Charakterystyka parametrów sieci trakcyjnej i odbieraka prądu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Transport nr 1/1983.

[7] Konieczny R.: Zmodyfikowany model matematyczny ST3+OP2 współpracy kilku odbieraków prądu z siecią trakcyjną. Zeszyty Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 86/1983.

[8] Konieczny R.: Niektóre aspekty związane ze stosowaniem zmodyfikowanego modelu matematycznego ST3+OP2 do symulacji współpracy kilku odbieraków prądu z siecią trakcyjną, (jw. poz. 7).

[9] Konieczny R.: Zagadnienie odwzorowania masy zastępczej sieci trakcyjnej w obliczeniach symulacyjnych współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 87/1983.

[10] Roman Z.: Współpraca dynamiczna odbieraka prądu z siecią trakcyjną i jej wpływ na warunki odbioru prądu przez silnie obciążony zestyk ślizgowy. Prace COB i RTK, zeszyt 75/76 Warszawa 1980 (praca habilitacyjna).

[11] Siemiński T.: Elastyczność statyczna sieci trakcyjnej. Przegląd Kolejowy Elektrotechniczny nr 11/1970.

[12] Vologin V.A., Żeleznov D.F., Frajfeld A.V., Engels G.G.: K vyboru optimalnych parametrov tokopriemnikov - Vestnik VNIIŻTr. nr 8/1973.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Przemysław Pazdro

СОПОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОПРИЁМНИКА И КОНТАКТНОЙ ПОДВЕСКИ

Ч а с т ь II

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ПО ТИПАМ
СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ОТДЕЛЬНЫХ ТИПОВ МОДЕЛЕЙ
МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ST1+OP2 и ST3+OP2

Р е з ю м е

В статье представлено классификацию математических моделей динамического взаимодействия токоприёмника и контактной подвески по типам. Проведено справнительную оценку отдельных типов моделей а также представлено модифицированные математические модели ST1+OP2 и ST3+OP2.

SPECIFICATION FOR MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMIC COLLABORATION OF A CURRENT COLLECTOR WITH OVERHEAD CONTACT SYSTEM

P a r t II

CLASSIFICATION ACCORDING TO MODEL TYPES
COMPARATIVE ESTIMATION OF INDIVIDUAL MODEL TYPES
MODIFIED MODELS ST1+OP2 AND ST3+OP2

S u m m a r y

In the article, a classification of mathematical models of dynamic collaboration of a current collector with overhead contact system according to model types, is presented. A comparative estimation of individual model types has been made and presented modified mathematical models ST1+OP2 and ST3+OP2.