ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: TRANSPORT z.9 Nr kol. 952

Tadeusz BURCZYŃSKI
Bogna MRÓWCZYŃSKA

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE WYTRZYMAŁOŚCIOWEJ ZĘBÓW KÓŁ ZĘBATYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych w numerycznej analizie wytrzymałości zębów. Rozważano taką klasę zębów, które mogą być modelowane jako dwuwymiarowe zadania brzegowe liniowej teorii sprężystości. Brzegowe równania całkowe wyprowadzono z zasady wzajemności Bettiego. Podano sposób dyskretyzacji tych równań poprzez podział zarysu zęba na elementy brzegowe. Sformułowano globalne i lokalne kryteria adaptacyjne, które umożliwiają generację optymalnej siatki elementów brzegowych na podstawie oszacowania błędów istniejącego rozwiązania numerycznego. Przedstawiono algorytm numeryczny metody i scharakteryzowano możliwości opracowanego programu komputerowego służącego do obliczeń przemieszczeń i naprężeń w zębach. Przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych naprężeń stycznych w podstawie zęba dla wybranych modeli numerycznych zęba. Wyniki obliczeń porównano z wartościami naprężeń wyznaczonymi metodą elementów skończonych i metodą odwzorowań wiernokątnych.

1. Wprowadzenie

Jedną z najprostszych metod obliczeniowych pozwalających na określenie naprężeń w podstawie zęba koła zębatego jest metoda łamanych przekrojów [12]. Metoda ta przy pomocy elementarnych sposobów znanych z wytrzymałości materiałów daje jakościowo dobry obraz stanu naprężenia w podstawie zęba, uwzględniając naprężenia wywołane mementem gnącym, siłą ścinającą i siłą ściskającą. Jednakże wyniki obliczeń nie są wystarczająco dokładne z uwagi na zbyt uproszczony model obliczeniowy zęba. Jedną z najbardziej rozpowszechnionych i zaakceptowanych metod służących do określania naprężeń w podstawie zęba jest metoda odwzorowań wiernokątnych (MOW). Metoda ta oparta jest na odwzrowaniach wiernokątnych pozwalających wykorzystać znane rozwiązania dla półprzestrzeni sprężystej. Zastosowanie MOW do obliczeń naprężeń w kołach zębatych podał po raz pierwszy Neuber [15]. Metoda ta została rozwinięta i przystosowana do obliczeń numerycznych przez Müllera [13]. Jedną z głównych zalet MOW jest fakt, że otrzymuje się zadowalające wartości naprężeń w podstawie zęba przy założeniu kilku punktów na zarysie stopy zęba. Zaleta ta okupiona jest koniecznością rozwiązywania układu nieliniowych równań algebraicznych, co stwarza problemy natury numerycznej. Do głównych wad MOW należy jednak brak uniwersalności.

Za pomocą MOW nie można bowiem obliczać naprężeń dla zębów niesymetrycznych oraz nie może być ona zastosowana do obliczeń kół wewnętrznie uzębionych, ponieważ w metodzie tej zakłada się, że utwierdzenie zęba znajduje się w nieskończoności.

Zastosowanie uniwersalnych metod numerycznych mechaniki, takich jak metoda elementów skończonych (MES) lub metoda elementów brzegowych (MEB), pozwala przeprowadzić całościową analizę wytrzymałościową (w zakresie analizy przemieszczeń, odkształceń i naprężeń) zębów o dowolnej geometrii kół wewnętrznie i zewnętrznie uzębionych. Aby otrzymać wystarczająco dokładne wartości naprężeń, stosując MES lub MEB należy przeprowadzić odpowiednią dyskretyzację zarysu i obszaru zęba (w przypadku MES) lub tylko zarysu (w przypadku MEB).

Zastosowanie MES do określenia naprężeń w podstawie zęba przedstawili Kondo i Takada [9]. Przyjęli oni do obliczeń 230 8-węzłowych czworokątnych elementów skończonych połączonych w 761 węzłach. Do mankamentów MES należy zaliczyć konieczność rozwiązywania dużego układu liniowych równań algebraicznych (np. w przypadku omawianej pracy [9] należało rozwiązać układ 1522 równań algebraicznych). Przy dużej liczbie elementów skończonych kłopotliwe jest także przygotowanie odpowiednich danych liczbowych dotyczących zarówno geometrii zarysu, jak i wnętrza zęba.

Jak wiadomo, maksymalne naprężenia w podstawie zęba występują na zarysie (brzegu) zęba. Z tego powodu bardzo wygodną i efektywną metodą numeryczną analizy stanu naprężenia w podstawie zęba jest MEB. Główną zaletą MEB jest to, że dyskretyzacji podlega wyłącznie brzeg zęba. Dzięki temu wyraźnie zmniejszona jest ilość wprowadzanych danych dotyczących geometrii zęba i układ po dyskertyzacji ma znacznie mniejszą liczbę stopni swobody niż przy zastosowaniu MES. Umożliwia to zastosowanie komputerów osobistych do obliczeń wytrzymałościowych zębów.

Przykładowe zastosowanie MEB do analizy stanu naprężenia w zębach przedstawił Lachat [10], rozważając elementy brzegowe o różnych funkcjach kształtu. W celu zwiększenia dokładności obliczeń zastosował on kryterium globalne i lokalne, które umożliwiły automatyczną generację siatki elementów brzegowych.

W niniejszej pracy podjęto próbę zbudowania modelu numerycznego zęba za pomocą MEB stosując liniowe funkcje kształtu. W szczególności wyprowadzono brzegowe równania całkowe dla sprężystego modelu zęba oraz pokazano sposób dysktretyzacji zarysu zęba elementami brzegowmi. Oryginalnym elementem pracy jest zaproponowanie adaptacyjnego ujęcia MEB, które umożliwia przeprowadzenie dyskretyzacji na podstawie oszacowania błędu istniejącego rozwiązania numerycznego. W tym celu zastosowano dwa kryteria, według których określono wskaźniki adaptacji. Przedstawiono algorytm numeryczny oraz omówiono program komputerowy służący do analizy stanu naprężenia i przemieszczenia zębów. Pokazano przykłady numeryczne analizy.

Cel, jaki przyświecał prezentowanym obliczeniom, polegał na przebadaniu wpływu głębokości zamocowania zęba oraz porównaniu otrzymanych maksymalnych naprężeń w podstawie zęba z odpowiednimi naprężeniami obliczonymi za pomocą MOW [13] i MES.

Nacisk, jaki położono na opracowanie wygodnej i efektywnej techniki numerycznej MEB w zagadnieniu analizy wytrzymałościowej, wynika z faktu, że stanowi to podstawowy i nieodłączny element optymalizacji i analizy wrażliwości kształtu i w decydujący sposób wpływa na ich realizację numeryczną.

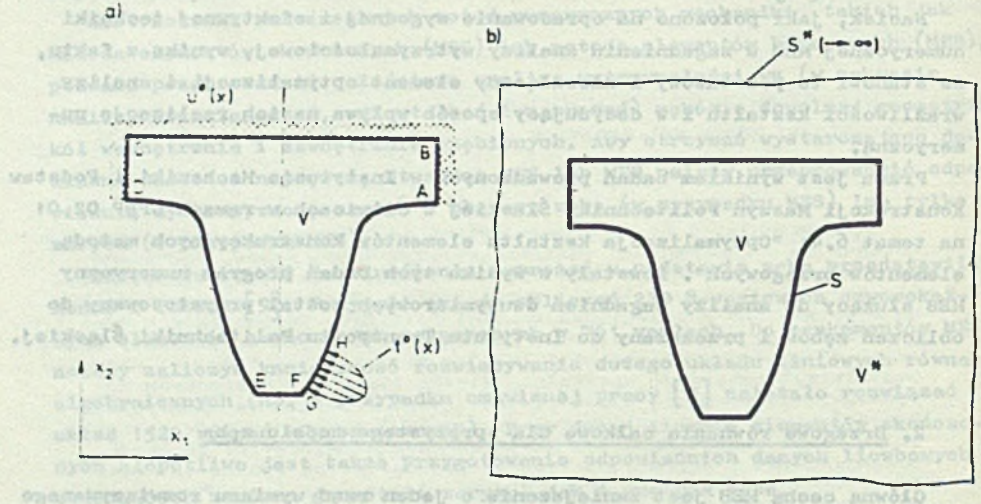
Praca jest wynikiem badań prowadzonych w Instytucie Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej w Gliwicach w ramach CPBP 02.01 na temat 6.4: "Optymalizacja kształtu elementów konstrukcyjnych metodą elementów brzegowych". Powstały w wyniku tych badań program numeryczny MEB służący do analizy zagadnień dwuwymiarowych został przystosowany do obliczeń zębów i przekazany do Instytutu Transportu Politechniki Śląskiej.

2. Brzegowe równania całkowe dla sprężystego modelu zęba

Główną cechą MEB jest zmniejszenie o jeden rząd wymiaru rozwiązywanego zadania brzegowego. Jeśli rozważane zagadnienie jest przestrzenne, to redukuje się ono do zagadnienia dwuwymiarowego określonego na powierzchni ograniczającej ciało, natomiast w przypadku zagadnień płaskich problem brzegowy sprowadza się do zagadnienia jednowymiarowego i wymaga dyskretyzacji tylko linii brzegowej, ograniczającej element konstrukcyjny (por. [3, 4]). Rozważana będzie taka klasa zębów, które mogą być modelowane jako zadania płaskie liniowej teorii sprężystości. Przyjmuje się, że ząb zajmuje obszar V ograniczony brzegiem S w dwuwymiarowej przestrzeni Euklidesa (rys. 1a). Punkty obszaru V i brzegu S oznaczane przez $x = (x_j)$ i $y = (y_j)$, $j \in [1, 2]$. Zakłada się, że brzeg S składa się z dwóch części S_1 i S_2. Na brzegu S_1 (krzyw ABCD) dane są przemieszczenia $u^\circ(x) = (u_j^\circ(x))$ $x \in S_1$. Jeśli brzeg jest utwierdzony, to $u^\circ(x) = 0$. Na brzegu S_2 (krzywa DEFGHA) dane są siły $t^\circ(x) = (t_j^\circ(x))$, $x \in S_2$. Zwykle brzeg S_2 składa się z brzegu swobodnego S_o (krzywe DEFG i HA), na którym dane są siły zerowe ($t^\circ = 0$) oraz brzegu obciążonego S_t (krzywa GH), na którym $t \neq 0$. W przypadku ogólnym w obszarze V mogą działać siły masowe $b(x) = (b_j(x))$, $x \in V$. Rozpatrywane jest także zadanie pomocnicze dla pewnego obszaru V^* z brzegiem S^* o tych samych własnościach sprężystych, co ząb. Ząb zawarty jest w obszarze V^*, tzn. $V \subset V^*$. Obszar V^* może być nieograniczonym ośrodkiem sprężystym (rys. 1.b).

Twierdzenie Bettiego dla zagadnienia wyjściowego i pomocniczego ma postać:

$$\int_V (B_j u_j - b_j U_j) dV - \int_S (T_j u_j - t_j U_j) dS = 0. \tag{1}$$



Rys. 1a. Rys. 1b.

Fig. 1a. Formulation of boundary conditions for tooth

Fig. 1b. Formulation of auxiliary problem for tooth

Dużymi literami U_j, T_j, B_j oznaczono odpowiednio przemieszczenia, siły brzegowe i siły masowe odnoszące się do układu pomocniczego. Jeśli w punkcie $y \in V^*$ nieograniczonej przestrzeni sprężystej działa jednostkowa siła skupiona

$$B_i = \delta(y-x)e_i, \tag{2}$$

gdzie:

$\delta(y-x)$ jest dystrybucją Diraca, y wskazuje punkt źródłowy, $x \in V^*$ jest punktem bieżącym pola, a e_i jest wektorem jednostkowym działającym w i-tym kierunku, to przemieszczenia i siły wyrazić można następującymi zależnościami:

$$U_j = U_{ij}(y,x)\, e_i,$$
$$T_j = T_{ij}(y,x)\, e_i, \tag{3}$$

gdzie:

$U_{ij}(y,x)$ i $T_{ij}(y,x)$ przedstawiają sobą przemieszczenia i siły w j-tym kierunku w punkcie x wywołane jednostkową siłą skupioną działającą w punkcie y w e_i-tym kierunku.

Tensory U_{ij} i T_{ij} wyrażają się następującymi wzorami:

$$U_{ij}(y,x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G}\left\{(3-4\nu)\ln(r)\,\delta_{ij} - r_{,i}\,r_{,j}\right\} \tag{4}$$

$$T_{ij}(y,x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left\{\left[(1-2\nu)\,\delta_{ij} + 2r_{,i}\,r_{,j}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)\,(r_{,i}\,n_j - r_{,j}\,n_i)\right\} \tag{5}$$

gdzie $r(y,x)$ jest odległością między punktami y i x

$$r(y,x) = (r_i\,r_i)^{1/2}, \qquad r_i = x_i - y_i, \tag{6}$$

natomiast wyrażenie $r_{,i}$ określone jest następująco

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = r_i/r. \tag{7}$$

Przez G i ν oznaczono odpowiednio moduł sprężystości poprzecznej i liczbę Poissona. Przez $n = (n_j)$ oznaczono jednostkowy wektor normalny do brzegu S. Wzory (4) i (5) obowiązują dla płaskiego stanu odkształcenia. W przypadku płaskiego stanu naprężenia ν należy zastąpić przez $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$.

Wstawiając (2) i (3) do twierdzenia Bettiego otrzymuje się wzór Somigliany:

$$u_i(y) = \int_S \left[U_{ij}(y,x)t_j(x) - T_{ij}(y,x)u_j(x)\right] dS(x) + \int_V U_{ij}(y,x)b_j(x)dV(x) \quad y \in V \tag{8}$$

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że siły masowe są zerowe.

Odpowiednikiem wzoru Somigliany dla naprężeń jest wyrażenie:

$$\sigma_{ij}(y) = \int_S \left[D_{ijk}(y,x)t_k(x) - S_{ijk}(y,x)u_k(x)\right] dS(x) \quad y \in V \tag{9}$$

gdzie:

$D_{ijk} = \sigma\left[U_{ij}\right]$ oraz $S_{ijk} = \sigma\left[T_{ij}\right]$ (por. [3, 4]).

Wzory (8) i (9) pozwalają wyznaczyć przemieszczenia i naprężenia wewnątrz zęba V, jeśli znany jest rozkład przemieszczeń i sił brzegowych. Z warunków brzegowych znane są tylko przemieszczenia $u^\circ(x)$ na brzegu S_1 i siły $t^\circ(x)$ na brzegu S_2. Aby można było obliczyć nieznane przemieszczenia na brzegu S_2 i siły na brzegu S_1 należy wzór Somigliany (8)

przekształcić do brzegowego równania całkowego. W tym celu punkt y powinien zdążać do brzegu S. W rezultacie otrzymuje się układ dwóch osobliwych równań całkowych określonych na brzegu S. Układ ten można przedstawić w postaci wektorowej:

$$c(y)\, u(y) = \int_S \left[U(y,x)\, t(x) - T(y,x)\, u(x)\right] dS(x) \qquad y \in S, \tag{10}$$

gdzie:

$U(y,x) = \left[U_{ij}(y,x)\right]$, $T(y,x) = \left[T_{ij}(y,x)\right]$ natomiast $c(y) = \left[c_{ij}(y)\right]$ zależy od geometrii brzegu S w punkcie y. Dla brzegu gładkiego $\left[c_{ij}(y)\right] = \delta_{ij}/2$.

Wektorowe brzegowe równanie całkowe (10) stanowi podstawę numerycznego rozwiązania za pomocą dyskretyzacji elementami brzegowymi.

3. Dyskretyzacja zarysu zęba elementami brzegowymi

Dyskretyzacja równania całkowego (10) prowadzi do układu równań algebraicznych względem nieznanych wartości węzłowych przemieszczeń i sił brzegowych. W tym celu dyskretyzacji podlega zarówno geometria brzegu zęba, jak i przemieszczenia i siły na tym brzegu.

Współrzędne kartezjańskie x_k, $k \in [1, 2]$ bieżącego punktu brzegowego wyrażone są przez współrzędne węzłowe x_k^m i funkcje kształtu $N^m(\xi)$. W lokalnym układzie współrzędnych ξ, $\xi \in [-1,1]$ otrzymuje się

$$x_k^e(\xi) = N^m(\xi) x_k^{em} \qquad m = 1,2,\ldots M, \tag{11}$$

gdzie: M odpowiada wprowadzonej klasie aproksymacji.

Funkcje kształtu dla elementów liniowych mają postać:

$$N^1(\xi) = (1 - \xi)/2, \qquad N^2(\xi) + (1 + \xi)/2. \tag{12}$$

Brzegowe wartości przemieszczeń u_j i sił t_j są aprksymowane przy pomocy wartości węzłowych u_j^m i t_j^m oraz odpowiednich funkcji kształtu $N^m(\xi)$

$$u_j^e(\xi) = N^m(\xi)\, u_j^{em}, \qquad t_j^e(\xi) = N^m(\xi)\, t_j^{em}. \tag{13}$$

W celu przekształcenia brzegowego równania całkowego (10) do liniowego układu równań algebraicznych należy brzeg S podzielić na elementy brzegowe S^e $e \in [1,E]$, gdzie E jest liczbą elementów brzegowych. Wówczas całkę brzegową można przekształcić w sumę całek po elementach brzegowych:

$$\int_S [\ldots]\, dS(x) = \sum_{e=1}^{E} \int_{S^e} [\ldots]\, dS^e. \tag{14}$$

Wstawiając (13) do (10) i uwzględniając (14) otrzymuje się dyskretną postać brzegowego równania całkowego:

$$c(y)u(y) = \sum_{e=1}^{E} \sum_{m=1}^{M} \Big\{ t^{em} \int_{S^e} U\big[y, x(\xi)\big]\, N^m(\xi)\, \big|J(\xi)\big|\, dS^e(\xi) - \\ - u^{em} \int_{S^e} T\big[y, x(\xi)\big]\, N^m(\xi)\, \big|J(\xi)\big|\, dS^e(\xi) \Big\}. \tag{15}$$

W zależności powyższej uwzględniono, że

$$dS(x) = \big|J(\xi)\big|\, dS(\xi). \tag{16}$$

Równanie (15) powinno być spełnione dla wszystkich punktów źródłowych y leżących w węzłach brzegowych. Jeśli liczba wszystkich węzłów wynosi W, to otrzymuje się układ (2 W) równań algebraicznych, który można zapisać w postaci macierzowej

$$[H]\{u\} = [G]\{t\}, \tag{17}$$

gdzie:

$\{u\}$ jest macierzą kolumnową węzłowych wartości przemieszczeń u^{em},

$\{t\}$ jest macierzą kolumnową węzłowych wartości sił t^{em},

$[H]$ jest macierzą kwadratową zależną od całek brzegowych z rozwiązań podstawowych T, funkcji kształtu N, jakobianu $|J|$ oraz stałych c,

$[G]$ jest macierzą kwadratową zależną od całek brzegowych z rozwiązań podstawowych U, funkcji kształtu N oraz jakobianu $|J|$.

Macierzowe równanie (17) można przekształcić do postaci:

$$[K]\{X\} = [L]\{Y\}, \tag{18}$$

gdzie:

$\{X\}$ jest macierzą kolumnową nieznanych wartości przemieszczeń i sił węzłowych,

$\{Y\}$ jest macierzą kolumnową zadanych wartości przemieszczeń i sił węzłowych,

$[K]$ i $[L]$ są pełnymi i niesymetrycznymi macierzami kwadratowymi, których wyrazy zależą od macierzy $[H]$ i $[G]$.

Układ liniowych równań algebraicznych (18) rozwiązywany jest metodą Gaussa.

Znając rozkład wszystkich przemieszczeń i sił brzegowych można z zależności (8) i (9) obliczyć przemieszczenia i naprężenia w dowolnym punkcie y obszaru V. Dyskretna postać zależności (8) i (9) przedstawia się następująco:

$$\{u(y)\} = [\hat{G}(y)]\{t\} - [\hat{H}(y)]\{u\}, \tag{19}$$

$$\{\sigma(y)\} = [\hat{D}(y)]\{t\} - [\hat{S}(y)]\{u\}. \tag{20}$$

Macierze $[\hat{G}(y)]$, $[\hat{H}(y)]$, $[\hat{D}(y)]$ oraz $[\hat{S}(y)]$ zależą odpowiednio od całek brzegowych z jąder U_{ij}, T_{ij}, D_{ijk}, S_{ijk}, funkcji kształtu N i jakobianu $|J|$ i są obliczane dla ustalonego punktu $y \in V$, w którym szukane są przemieszczenia i naprężenia. W wielu zastosowaniach interesująca jest znajomość składowych stanu naprężenia nie tylko wewnątrz ciała, ale także na brzegu. W analizie wytrzymałościowej zębów okazuje się, że największe naprężenia występują na brzegu w podstawie zęba. MEB pozwala na stosunkowo dokładne określenie naprężeń na brzegu, co ma istotne znaczenie nie tylko w analizie wytrzymałościowej, ale jest bardzo cenne w optymalizacji i analizie wrażliwości kształtu.

W celu określenia naprężeń na brzegu wygodnie jest wprowadzić, w punkcie, w którym szukane jest naprężenie, lokalny kartezjański układ współrzędnych $\bar{x}_k$, $k \in [1,2]$, taki że oś $\bar{x}_1$ jest styczna do brzegu. Przemieszczenia w tym układzie można wyrazić zależnością

$$\bar{u}_j^e = N^m \bar{u}_j^{em}, \tag{21}$$

natomiast składowa tensora odkształceń równa pochodnej przemieszczenia względem współrzędnej stycznej $\bar{\varepsilon}_{11}^e = \partial \bar{u}_1^e / \partial \bar{x}_1$ może być wyznaczona dokładnie. Teraz składowe stanu naprężenia na brzegu dadzą się wyrazić

$$\bar{\sigma}_{12}^e = \bar{t}_1^e, \qquad \bar{\sigma}_{22}^e = \bar{t}_2^e, \tag{22}$$

$$\bar{\sigma}_{11}^e = (\nu \bar{\sigma}_{22}^e + 2G\, \bar{\varepsilon}_{11}^e)/(1-\nu). \tag{22}$$

Znając składowe stanu naprężenia w układzie lokalnym $\bar{x}_k$ można wyrazić je w układzie globalnym x_k poprzez kosinusy kierunkowe między oboma układami.

4. Adaptacyjne ujęcie metody elementów brzegowych

Stosując MEB lub MES uzyskuje się przybliżone rozwiązanie zadania brzegowego dla ciała o dowolnej geometrii. Pojawia się jednak problem oceny tego rozwiązania i oszacowania błędu, jakim jest ono obarczone. Problem

ten może być istotny w wielu zagadnieniach, w tym m.in. w zadaniach z dużymi gradientami naprężeń lub w zadaniach optymalizacji kształtu. Z taką klasą problemów spotykamy się przy analizie wytrzymałościowej zębów i optymalizacji postaci geometrycznej podstawy zębów.

Spiętrzenie naprężeń w dolnej części stopy zębá prowadzi, przy zastosowaniu regularnej siatki elementów brzegowych, do rozwiązań mało dokładnych. W zadaniach optymalizacji kształtu rozwiązanie numeryczne jest szczególnie czułe na przyjęty sposób dyskretyzacji brzegu, który podlega kształtowaniu. W związku z tym problem oszacowania błędu rozwiązania numerycznego i zmodyfikowania istniejącego schematu aproksymacyjnego (jeśli błąd jest większy od dopuszczalnego) jest istotnym zagadnieniem w numerycznych obliczeniach zębów.

Opisany wyżej problem, zwany w literaturze przedmiotu adaptacyjnym ujęciem metody numerycznej, skupia w ostatnich latach uwagę wielu badaczy. Przy formułowaniu adaptacyjnej metody numerycznej należy określić sposób oszacowania błędu istniejącego rozwiązania numerycznego (tzw. oszacowanie a-posteriori) oraz określić technikę adaptacyjną, której zastosowanie pozwoli na ulepszenie istniejącego schematu dyskretyzacji. W literaturze przedmiotu wyróżnia się trzy techniki adaptacyjne (por. praca przeglądowa [8]):

- metodę lokalnego zagęszczenia siatki (metoda h),
- metodę lokalnego zwiększenia stopnia aproksymacji (metoda p),
- metodę relokacji węzłów siatki (metoda r).

W przeciwieństwie do adaptacyjnej metody elementów skończonych (AMES), która rozwinęła się głównie w ostatnich kilku latach (por. [8]) adaptacyjna metoda elementów brzegowych (AMEB) jest obecnie w trakcie powstawania. W pracy [16] przedstawiono h-AMEB opartą na asymptotycznie oszacowanym błędzie. Technika ta zastosowana dla lokalnego kryterium umożliwia określenie liczby elementów brzegowych koniecznych dla danej dokładności. Technika p-AMEB została przedstawiona w pracach [1, 2, 17], gdzie zastosowano hierarchiczne funkcje kształtu. Umożliwia to zwiększenie lokalnego stopnia aproksymacji bez konieczności modyfikacji istniejących macierzy [K] i [L].

Poniżej zostanie przedstawiona technika h-AMEB bardzo przydatna w dyskretyzacji zębów, oparta na kryterium globalnym i lokalnym (por. [10, 14]).

Prawidłowo przeprowadzona dyskretyzacja zęba elementami brzegowymi powinna zapewnić jego globalną równowagę, tzn. wartość całki brzegowej

$$|\mathbf{T}| = \left| \int_S t(x)\,dS(x) \right| \tag{23}$$

powinna być bliska zeru. Jeśli błąd w spełnieniu warunków równowagi jest większy od założonego W_{tdop}, to należy przeprowadzić globalną modyfikację siatki elementów brzegowych przez podział każdego elementu na dwa nowe elementy.

Względny błąd (wskaźnik) spełnienia warunków równowagi można obliczyć z warunku:

$$W_t = \frac{|T|}{|T^o|} \times 100\%, \tag{24}$$

gdzie:

$|T^o| = \left| \int_{S_t} t(x)dS(x) \right|$ jest wartością bezwzględną wypadkowej sił czynnych działających na ząb.

Po osiągnięciu równowagi globalnej należy zastosować lokalne kryterium modyfikacji siatki. Kryterium to może polegać na zapewnieniu ciągłości naprężeń stycznych na brzegu swobodnym (por. [10, 14]).

W niniejszej pracy przyjęto inne zmodyfikowane kryterium lokalne, według którego prawidłowo przeprowadzona dyskretyzacja brzegu swobodnego S powinna zapewnić zerowanie się naprężeń normalnych na S_o. Obliczenia numeryczne wskazują, że w tych miejscach, gdzie są duże gradienty naprężeń stycznych (występują one na brzegu podstawy zęba - por. rozdz. 6), pozostają resztkowe (residualne) naprężenia normalne wynikłe z numerycznej dyskretyzacji S_o.

Względny błąd (wskaźnik) dla kryterium lokalnego został sformułowany następująco:

$$W^{(i)} = \frac{|\sigma_{rn}^{(i)}|}{|\sigma_t^{(i)}|} \times 100\%, \tag{25}$$

gdzie: $|\sigma_{rn}^{(i)}|$ jest residualną wartością bezwzględną naprężenia normalnego obliczoną w i-tym węźle na brzegu S_o, natomiast $|\sigma_t^{(i)}|$ jest wartością bezwzględną naprężenia stycznego obliczoną w i-tym węźle na S_o.

Jeśli wartość wskaźnika $W_\sigma^{(i)}$ jest większa od dopuszczalnej wartości $W_{\sigma dop}^{(i)}$, to każdy przyległy do rozpatrywanego węzła element brzegowy dzielony jest na dwa nowe elementy. Liczba takich podziałów jest ograniczona, aby uniknąć niestabilności przy numerycznym całkowaniu.

Zastosowanie przedstawionej techniki h-MEB do analizy zębów wskazuje na dużą efektywność procesu adaptacji w problemach z dużymi gradientami naprężeń.

5. Algorytm numeryczny metody i program komputerowy analizy wytrzymałościowej

MEB przedstawiona w rozdziałach 2, 3 i 4 może być w prosty sposób zalgorytmizowana. Tok postępowania można przedstawić następująco:

1. Wczytaj dane.
2. Przeprowadź dyskretyzację brzegu zęba elementami brzegowymi.
3. Aproksymuj na każdym elemencie przemieszczenia i siły przy pomocy funkcji kształtu i wartości węzłowych.
4. Wyznacz elementy macierzy $[G]$ i $[H]$ obliczając całki brzegowe za pomocą kwadratur Gaussa.
5. Uwzględnij zadane warunki brzegowe i transformuj macierze $[G]$ i $[H]$ do macierzy $[K]$ i $[L]$.
6. Oblicz nieznane wartości węzłowe przemieszczeń i sił rozwiązując układ równań algebraicznych metodą Gaussa.
7. Sprawdź warunek globalnej równowagi $W_t \leq W_{tdop}$. Jeśli jest spełniony, przejdź do punktu następnego, jeśli nie, skocz do punktu 2.
8. Oblicz naprężenia na brzegu.
9. Sprawdź warunek lokalny dla residualnych naprężeń normalnych $W_\sigma^{(i)}$ $W_{\sigma dop}^{(i)}$. Jeśli jest spełniony, to przejdź do punktu następnego, jeśli nie, skocz do punktu 2.
10. Oblicz przemieszczenia i naprężenia w zadanych punktach wewnętrznych.
11. Wydrukuj wyniki.

Powstały według powyższego algorytmu program komputerowy został napisany w języku algorytmicznym Fortran 77 i uruchomiony na komputerze IBM PC/XT.

Do programu należy przygotować następujące dane:

- własności sprężyste tworzywa, z którego wykonany jest ząb (moduł Younga i liczba Poissona),
- należy zdecydować, czy zadanie będzie traktowane jako płaski stan odkształcenia czy naprężenia,
- początkową liczbę węzłów brzegowych oraz ich współrzędne,
- liczbę punktów wewnętrznych i ich współrzędne (jeśli użytkownika programu nie interesują przemieszczenia i naprężenia wewnątrz zęba, to punkt ten jest pomijany),
- warunki brzegowe (w węzłach na brzegu S_1 należy zadać przemieszczenia, a w węzłach na brzegu S_t należy zadać siły),
- wskaźniki procesu adaptacji siatki elementów brzegowych.

W wyniku obliczeń otrzymuje się składowe sił na brzegu oraz składowe przemieszczeń i stanu naprężenia na brzegu i w punktach wewnętrznych, w tym naprężenia redukowane obliczone według hipotezy Hubera i naprężenia główne.

6. Numeryczne przykłady analizy wytrzymałościowej zęba

Zastosowanie MEB do efektywnych i dokładnych obliczeń wytrzymałościowych zębów wymaga wcześniejszego przyjęcia modelu fizycznego i matematycznego zęba. Model fizyczny obejmuje nie tylko własności fizyczne tworzywa, z którego wykonany jest ząb, ale także sposób obciążenia i podparcia. Te ostatnie czynniki decydują ostatecznie o prawidłowym sformułowaniu zadania brzegowego, które należy rozwiązać za pomocą MEB.

W literaturze przedmiotu [12] najczęściej rozpatruje się wyodrębniony z koła zębatego pojedynczy ząb obciążony siłą skupioną w górnej części zarysu. Wpływ sąsiednich zębów jest najczęściej pomijany. Głębokość zamocowania wyodrębnionej części zęba zależy od rodzaju koła zębatego i może być także uwarunkowana przyjętą metodą obliczeniową (por. [13]). Celem niniejszej pracy nie jest modelowanie fizyczne zęba, dlatego sprawa ta nie będzie dalej rozpatrywana.

Rozważono symetryczny ząb prosty koła zewnętrznie uzębionego. Obliczenia wykonano dla zęba stalowego o następujących parametrach:

- liczba zębów w kole $z=30$,
- współczynnik przesunięcia zarysu $x=0$,
- zębatka o kącie zarysu $\alpha_{on}=20^{o}$,
- wysokość głowy zęba $h_{ao}=1,25$,
- promień zaokrąglenia głowy zęba $p_{ao}=0,38$.

Wszystkie wymiary odniesiono do modułu, tak że uzyskano geometrię zarysu zęba w wielkościach bezwymiarowych. Ząb obciążono jednostkową siłą skupioną, tzn. $|T^{o}|=1$.

Przyjęty model fizyczny zęba jest taki sam, jak w pracy [13], gdzie naprężenia w podstawie zęba obliczone są metodą odwzrowań wiernokątnych. Model matematyczny wynika z wcześniej omówionego zadania brzegowego liniowej teorii sprężystości, sformułowanego za pomocą metody brzegowych równań całkowych.

Obliczenia przeprowadzono w celu przebadania wpływu głębokości zamocowania zęba (brzeg S_1) na wartości naprężeń oraz określenia najlepszej siatki elementów brzegowych, tak aby zapewnić żądaną dokładność, sformułowaną za pomocą kryteriów adaptacyjnych przedstawionych w rozdz. 4. Wyniki obliczeń maksymalnych naprężeń stycznych w podstawie zęba porównano z odpowiednimi naprężeniami obliczonymi za pomocą MES i MOW.

W celu wykonania tak postawionego zadania przeprowadzono wiele obliczeń testowych. Obliczenia numeryczne obejmowały pełną analizę wytrzymałościową, tzn. określenie składowych stanu przemieszczenia i naprężenia, redukowane oraz naprężenia główne.

Naprężenia główne σ_1 i σ_2 przyjmują na brzegu podstawy zęba wartości ekstremalne. Po stronie, gdzie przyłożono siłę naprężenia, główne σ_1

są normalne do brzegu. Po stronie przeciwnej naprężenia główne σ_2 są styczne do brzegu i mają znak ujemny, a naprężenia σ_1 są normalne. Kierunek normalny do brzegu swobodnego S_o jest oczywiście drugim kierunkiem głównym i odpowiadają mu naprężenia zerowe.

Zwykle za podstawę obliczeń wytrzymałościowych przyjmuje się naprężenia po rozciąganej stronie zęba, gdyż tam najczęściej rozpoczyna się inicjacja pęknięcia zmęczeniowego, chociaż jak pokazują obliczenia, po ściskanej stronie zęba bezwzględne wartości naprężeń stycznych są większe niż po stronie rozciąganej (por. rys. 2, 3 i 4).

Za naprężenia kryterialne przyjmuje się więc dalej maksymalne rozciągające naprężenia główne $\sigma_1=\sigma_{max}$.

Dla numerycznych modeli zęba (Z178p), (Z158P), (Z118P) i (Z98P) przyjęto następujące wskaźniki adaptacyjne $W_{tdop}=0,3\%$ i $W_{\sigma dop}=0,75\%$.

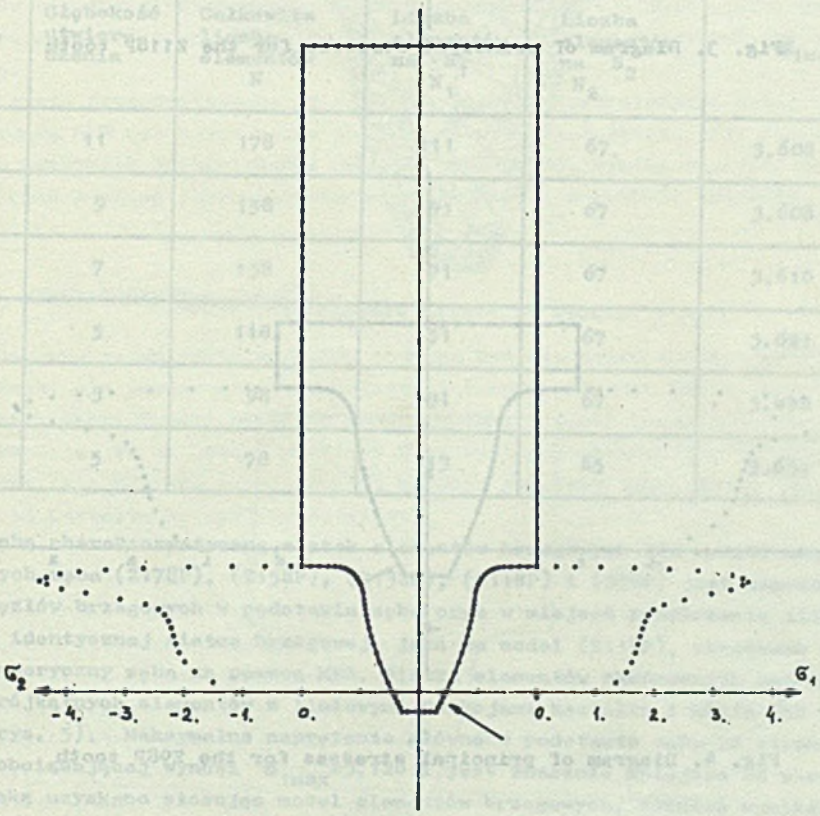


Fig. 2. Diagram of principal stresses for the Z178P tooth

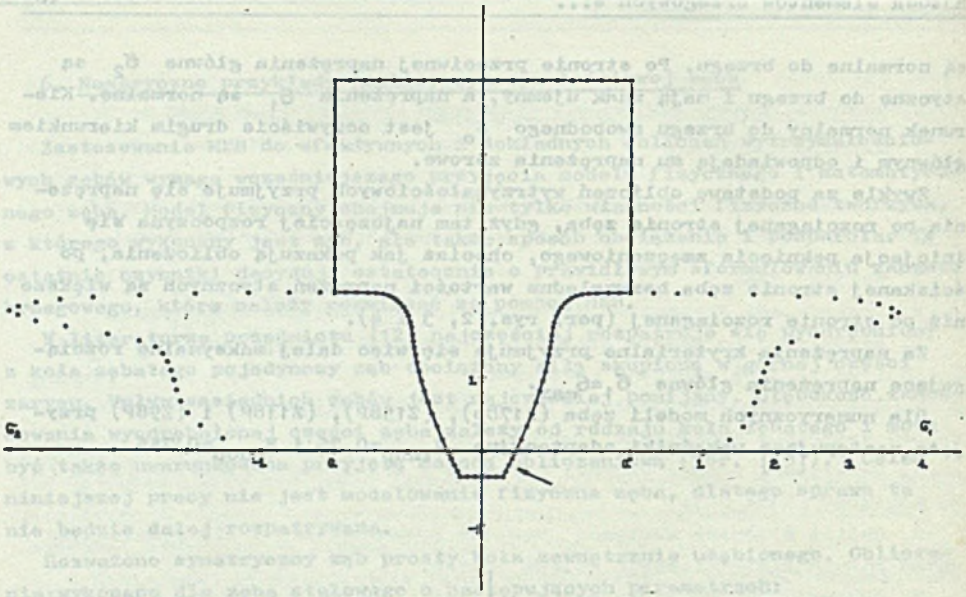


Fig. 3. Diagram of principal stresses for the Z118P tooth

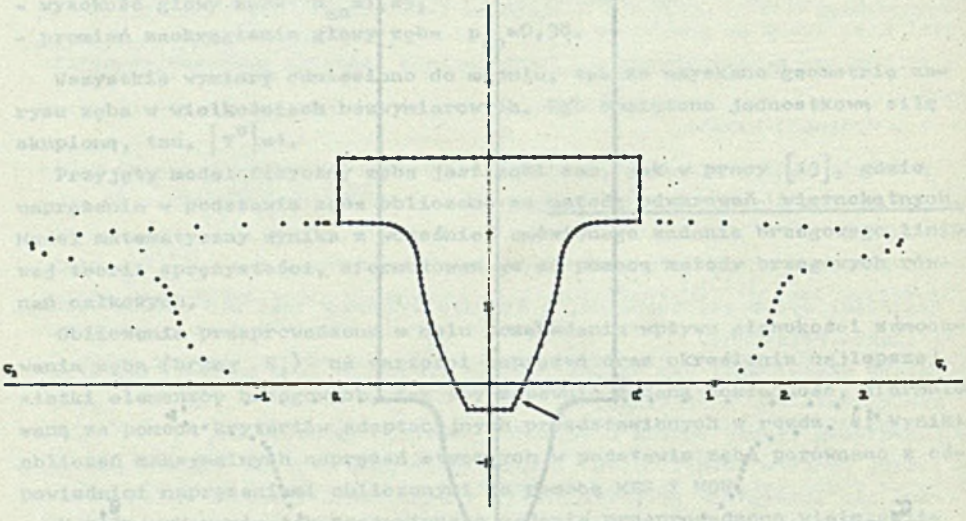


Fig. 4. Diagram of principal stresses for the Z98P tooth

W pierwszej kolejności badano wpływ głębokości zamocowania zęba. Wraz ze zmniejszeniem głębokości utwierdzenia liczba elementów brzegowych na brzegu S_1, równa N_1, malała, a liczba elementów na brzegu S_2, równa N_2, była stała i wynosiła $N_2=67$. Wyniki obliczeń maksymalnych brzegowych naprężeń głównych po stronie rozciąganej zęba przedstawiono w tablicy 1 (poz. 1-5). Rozkład brzegowych naprężeń głównych po obu stronach zęba dla pozycji 1 (Z128P), 4 (Z118P) i 5 (Z98P) przedstawiono na rys. 2, 3 i 4.

Analiza uzyskanych wyników wskazuje, że maksymalne naprężenia główne σ_1 występują dla przypadku, gdy głębokość utwierdzenia równa jest 5 jednostkom. Odnosi się to do numerycznego modelu zęba Z118P (rys. 3), dla którego $\sigma_{1max}=3.621$.

Tablica 1

Wyniki obliczeń

Lp.	Głębokość utwierdzenia	Całkowita liczba elementów N	Liczba elementów na S_1 N_1	Liczba elementów na S_2 N_2	σ_{1max}
1	11	178	111	67	3.608
2	9	158	91	67	3.608
3	7	138	71	67	3.610
4	5	118	51	67	3.621
5	3	98	31	67	3.478
6	5	78	13	65	3.631

Cechą charakterystyczną siatek elementów brzegowych dla modeli numerycznych zęba (Z178P), (Z158P), (Z138P), (Z118P) i (Z98P) jest zagęszczenie węzłów brzegowych w podstawie zęba oraz w miejscu przyłożenia siły.

Na identycznej siatce brzegowej, jaką ma model (Z118P), zbudowano model numeryczny zęba za pomocą MES. Siatka elementów skończonych posiadała 396 trójkątnych elementów z liniowymi funkcjami kształtu i miała 258 węzłów (rys. 5). Maksymalne naprężenie główne w podstawie zęba po stronie siły obciążającej wynosi $\sigma_{1max}=3.126$ i jest znacznie mniejsze od wartości, jaką uzyskano stosując model elementów brzegowych. Różnice wynikają m.in. z tego, że stosując trójkątne elementy skończone z liniowymi funkcjami kształtu, otrzymuje się naprężenia stałe wewnątrz elementu skończonego. Zwykle odnosi się je do środków ciężkości poszczególnych elementów.

Dla tego samego poziomu dyskretyzacji MBS daje zwykle mniej dokładne wyniki obliczeń niż MEB (por. [11]). Odnosi się to szczególnie do zagadnień, w których określa się naprężenia na brzegu ciała.

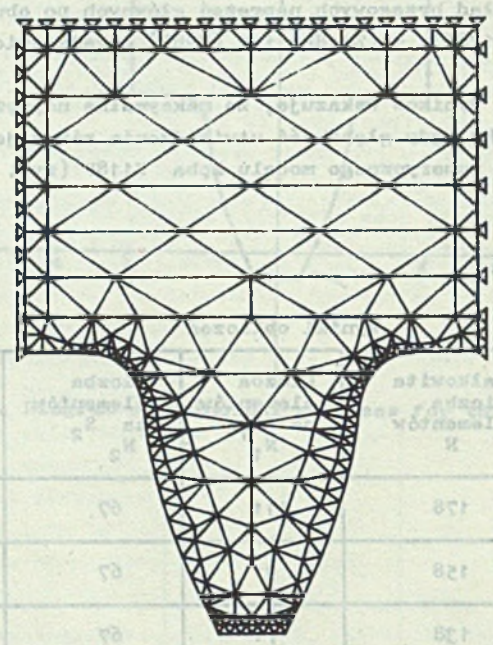


Fig. 5. Network of finite elements for tooth

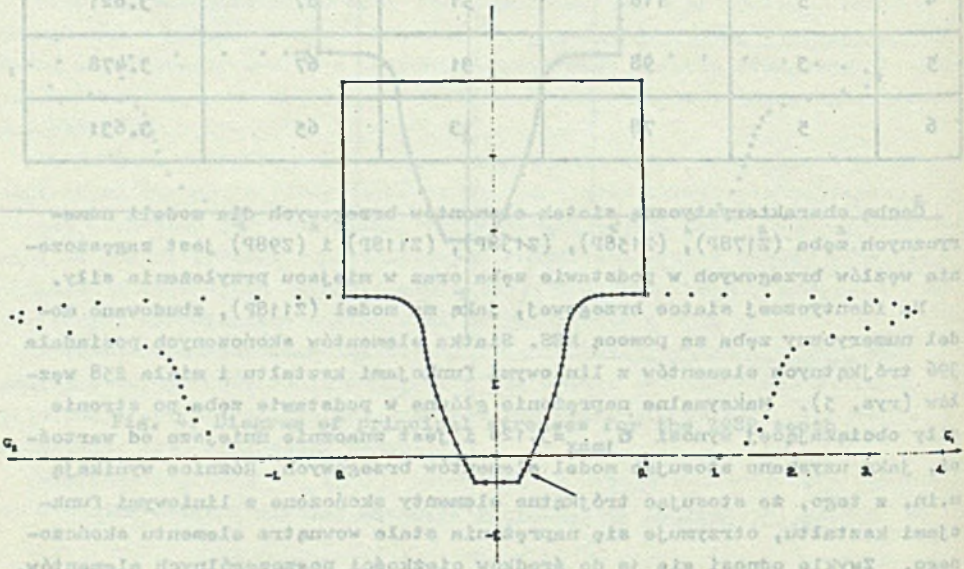


Fig. 6. Diagram of principial stresses for the Z78P

Model numeryczny (Z118P) zmodyfikowano w ten sposób, że rozrzedzono siatkę węzłów na brzegu utwierdzonym S_1 i na wierzchołku zęba. W rezultacie otrzymano model (Z78P), który ma 78 elementów brzegowych (rys. 6). W wyniku tego wskaźnik adaptacyjny dla kryterium globalnego zwiększył się nieznacznie do wartości W_t=0,45%, a wskaźnik dla kryterium lokalnego $W_\sigma^{(i)}$ praktycznie nie zmienił się. Obliczone dla tego modelu maksymalne naprężenie główne wynosiło σ_{1max}=3.631. Siatka elementów brzegowych (Z78P) jest bardzo zbliżona do siatki, jaką przedstawiono w pracach [10, 14].

W obliczeniach przeprowadzonych za pomocą MOW [13], opartych na więcej niż jednym punkcie odwzorowania, otrzymano, dla zęba o takich samych parametrach co analizowany w niniejszej pracy, bardzo zbliżone do siebie wartości naprężeń maksymalnych, a mianowicie 3,620, 3,629, 3,636 i 3,629, z tym że wartość naprężenia 3,629 była najlepiej uzasadniona.

Wyniki obliczeń naprężeń uzyskane za pomocą MEB są bardzo zbliżone do tych, jakie otrzymano stosując MOW. Świadczy to o tym, że prezentowana metoda elementów brzegowych w zaproponowanym ujęciu adaptacyjnym jest skuteczną i efektywną techniką numeryczną w analizie wytrzymałościowej zębów.

W sumie przeanalizowano 13 różnych sposobów dyskretyzacji brzegu zęba za pomocą MEB wykonując pełne obliczenia wytrzymałościowe oraz rozważono jeden przypadek dyskretyzacji zęba za pomocą MES. Wyniki obliczeń obejmujące całą analizę stereomechaniczną dostępne są u autorów artykułu.

7. Uwagi końcowe i wnioski

Końcowym celem obliczeń zębów powinna być nie tylko analiza wytrzymałościowa, ale także analiza wrażliwości i optymalizacja kształtu zarysu podstawy zęba. Wyniki obliczeń numerycznych, a także badania doświadczalne wskazują, że na brzegu podstawy zęba występuje koncentracja naprężeń. Istotną rolę odgrywa tutaj promień karbu u podstawy zęba, który zależny jest od kształtu krzywej przejściowej.

Analiza wrażliwości umożliwia znalezienie najlepszego kierunku zmian kształtu zarysu podstawy zęba (wywołanych np. deterministycznymi lub losowymi zmianami parametrów narzędzia lub koła zębatego), tak aby obniżyć wartości naprężeń występujących na brzegu.

Określenie najlepszego kształtu zarysu podstawy zęba ze względu na minimalizację maksymalnych naprężeń, przy dodatkowych warunkach ograniczających nałożonych na postać geometryczną stopy zęba, jest problemem z zakresu optymalizacji kształtu.

Metoda elementów brzegowych jest dogodną i efektywną techniką numeryczną w problemach analizy wrażliwości i optymalizacji kształtu (por. [5-7, 14]). Badania nad zastosowaniem MEB do tych problemów są aktualnie prowadzone w ramach CPBP 02.01.

Podsumowując otrzymane w pracy rezultaty można stwierdzić, że zastosowanie MEB w obliczeniach zębów charakteryzuje się następującymi zaletami:

1. Możliwość analizy wytrzymałościowej zębów o dowolnej postaci geometrycznej (zęby symetryczne i asymetryczne, zazębienie przemieszczeń i naprężeń.

2. Dyskretyzacji podlega tylko zarys zęba, przez co prosta jest procedura przygotowywania danych do obliczeń.

3. Wprowadzenie adaptacyjnego ujęcia metody umożliwia obliczenia naprężeń z zadaną dokładnością.

4. Przy założonych w pracy wartościach wskaźników adaptacyjnych otrzymuje się wartości maksymalnych naprężeń zbliżonych do rezultatów otrzymanych za pomocą MOW.

5. Przy tym samym poziomie dyskretyzacji otrzymuje się dokładniejsze wyniki obliczeń niż przy zastosowaniu MES .

6. Możliwość prowadzenia obliczeń za pomocą komputerów osobistych (np. przy użyciu IBM PC).

7. Metoda może być przydatna w analizie wrażliwości i optymalizacji kształtu zarysu podstawy zęba.

Autorzy wyrażają podziękowanie prof.zw.dr hab.inż. L.Müllerowi za zainteresowanie problematyką zastosowania MEB w analizie zębów kół zębatych oraz za cenne uwagi odnoszące się do wyników obliczeń numerycznych i treści niniejszej pracy.

LITERATURA

[1] Alarcon E., Revester A., Molina J.: Hierarchical Boundary Elements. "Computer and Structures". 1985, nr 20, s. 151-156.

[2] Alarcon E., Revester A.: P-adaptive Boundary Elements. "Inter. J. for Numerical Methods in Engineering", 1986, nr 23, s. 801-829.

[3] Banerjee P.K., Butterfield R.: Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[5] Burczyński T., Adamczyk T.: The Boundary Element Formulation for Multiparameter Structural Shape Optimization. "Applied Mathematical Modeling" 1985, nr 9, s. 195-200.

[6] Burczyński T., Adamczyk T.: The Boundary Element Method for Shape Design Synthesis of Elastic Structures. "Boundary Elements VII, (ed. C.A.Brebbia and G.Maier) Vol. II, Springer-Verlag 1985.

[7] Burczyński T.: Boundary Element Method for Deterministic and Stochastic Shape Design Sensitivity Analysis. Advanced Boundary Element Methods. (Ed.T.A.Cruse). Springer-Verlag 1988.

[8] Demkowicz L.: Adaptacyjne metody elementów skończonych. Pol. Krakowska, Kraków 1986.

[9] Kondo K., Takada J.: On the Bending Stress of Spur Gear by FEM in Relation to Effect of Stressed Volume on the Strength. Proc. of the International Symposium on Gearing and Power Transmision, 1981.

[10] Lachat J.C.: A Futher Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics. Ph.D. Thesis, Univ. of Southampton, 1973.

[11] Mukher Jee S., Morjaria M.: On the Efficiency and Accuracy of the Boundary Element Method and the Finite Element Method. "International J. for Numerical Methods in Engineering" 1984, Vol. 20, s. 515-522.

[12] Müller L.: Przekładnie zębate-projektowanie. WNT, Warszawa 1979.

[13] Müller L.: Obliczanie naprężeń w podstawie zęba (metoda odwzorowań wiernokątnych). ZN Pol. Śl. s. Transport, nr 8.

[14] Mota Soares C.A., Leal R.P., Choi K.K.:Boundary Elements in Shape Optimal Design of Structural Components. NATO ASI Series, vol. F 27, Computer Aided Optimal Design, (ED. C.A. Mota Soares), Springer-Verlag, Berlin 1987, s. 605-631.

[15] Neuber H.: Spannungstheorie der Zahnrader. Teil 1.Z.f.Angew. Math. Mech. 44, 1984.

[16] Renois J.J., Huellen R.L.: Solution of Elasticity Problems by a Self-adaptive Mesh, Refinement Technique for Boundary Element Computation. "Inter. Journal for Numerical Methods in Engineering". 1986, nr 23, s.1509-1527.

[17] Reverter A., Gonzales A., Alarcon E.: Indicators and Estimators in P-adaptive Boundary Elements. Boundary Elements VII. (ed. C.A.Brebbia and G.Maier) Vol.II, Springer-Verlag, Berlin 1985.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Janusz Orkisz

Wpłynęło do Redakcji 28.05.1987 r.

МЕТОД КРАЙНИХ ЭЛЕМЕНТОВ В АНАЛИЗЕ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ ЗУБЧАТЫХ ЗУБЬЕВ КОЛЕС

Р е з ю м е

В работе представлено применение метода граничных элементов для нумерического анализа сопротивления зубьев. Рассмотрен такой класс зубьев, который может моделироваться как двухмерные краевы задачи линейной теории упругости. Краевые интегральные уравнения получены по принципу взаимности Бетти. Дан способ дискретизации этих уравнений путем деления профиля зуба на граничные элементы. Сформулированы глобальный и локальный адаптивные критерия, позволяющие генерировать оптимальную сетку краевых элементов на основе оценки существующего нумерического решения. Дан нумерический алгоритм метода охарактеризованы возможности разработанной компьютерной программы, применяемой для расчетов перемещений и напряжений в зубьях. Представлены результаты машинного расчета статических напряжений в основании зуба для выбранных компьютерных моделей зуба. Результаты расчетов сравнены с величинами напряжений, полученными по методу конечных элементов и по методу правоугольных отображений.

BOUNDARY ELEMENT METHOD IN A GEAR TOOTH STRENGTH ANALYSIS

S u m m a r y

An application of the boundary element method in numerical analysis of the tooth strength has been presented in the work. Such a class of teeth has been considered which can be modelled as two - dimensional boundary value problems of linear theory of elasticity. Boundary integral equations have been derived from Betti's reciprocal work theorem. A method of discretization of those equations by dividing tooth profile into the boundary elements has been given. Global and local adaptive criteria that make possible generation of optimal network of the boundary elements on the basis of estimation of the errors in existing numerical solution have been formulated. Numerical algorithm of the method has been presented and possibilities of the developed computer program serving calculation of displacements and stresses in the teeth have been characterized. Results of numerical calculations of tangent stresses at the tooth root have been presented for selected numerical models of a tooth. Calculation results have been compared to the stress values determined with finite element method and conformal mapping method.