ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: TRANSPORT z. 10 Nr kol. 988

Jerzy DRYNDOS
Ludwik MÜLLER

# BADANIA NUMERYCZNE NAD MOŻLIWOŚCIĄ ZMNIEJSZENIA NIERÓWNOMIERNOŚCI ROZKŁADU OBCIĄŻENIA NA SZEROKOŚCI KOŁA ZĘBATEGO PRZEZ ZASTOSOWANIE MIMOŚRODOWEGO OSADZENIA ŁOŻYSK

## 1. Wprowadzenie

Wszystkie metody obliczeń wytrzymałościowych kół zębatych uwzględniają nierównomierność rozkładu obciążenia na szerokości koła (L. 1-10). Nowoczesne technologie wykonywania kół zębatych umożliwiają wprowadzenie modyfikacji linii zęba w celu usunięcia niekorzystnych skutków odkształceń sprężystych, wywołujących nierównomierny rozkład obciążenia. Jednakże podstawowym wymogiem zastosowania modyfikacji jest bardzo dokładne wykonanie przekładni, tj. zarówno kół zębatych, jak też wałów, łożysk itd. W wielu praktycznych przypadkach, szczególnie w przekładniach dużych mocy i rozmiarów, występują bardzo duże trudności w uzyskaniu wymaganej dla modyfikacji dokładności wykonania.

W pracy przedstawiono niektóre wyniki obliczeń komputerowych rozkładu obciążenia względnie maksymalnych wartości współczynnika nierównomierności rozkładu w przypadku zastosowania mimośrodowego osadzania łożysk. Pełny program obliczeń udostępniany będzie zainteresowanym po ukończeniu przewodu doktorskiego.

## 2. Zasada działania mimośrodu

W uproszczeniu problem nierównomierności rozkładu obciążenia można zilustrować na przykładzie przedstawionym na rys. 1 (L. 7). Na skutek sprężystych odkształceń wałów i zębnika jednostkowe obciąże zębów

$$p = \frac{dP}{dx} \tag{1}$$

nie jest wielkością stałą na całej szerokości koła, lecz zmienia się w zależności od:

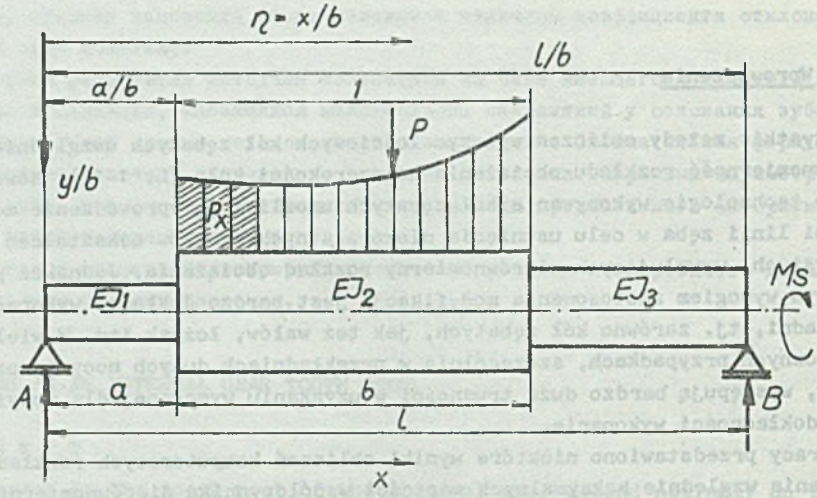
$df_{s1}$ - przyrostu odkształcenia skrętnego zębnika,
$df_{s2}$ - przyrostu odkształcenia skrętnego koła,

$df_{g1}$ - przyrostu odkształcenia giętkiego zębnika,
$df_{g2}$ - przyrostu odkształcenia giętkiego koła współpracującego,
$\gamma$ - kąta zawartego pomiędzy zębami w stanie nieobciążonym,

co można zapisać w postaci uproszczonego równania:

$$-dp = \frac{-d^2p}{dx^2} = c(df_{s1} + df_{s2} + df_{g1} + df_{g2} + \gamma\, dx), \qquad (2)$$

gdzie c - sztywność zazębienia zależna od parametrów zazębienia (L. 6).




Rys. 1. Szkic zębnika do analitycznych obliczeń rozkładu obciążenia, u dołu: współrzędne liniowe, u góry: współrzędne bezwymiarowe, moment skręcający od strony prawej

Fig. 1. Leafed pinion sketch for analytic calculations of load distrubution. bottom: linear co-ordinates, top: nondimensional co-ordinates, torque from the right side

Kąt $\gamma$ zależy od dokładności wykonania wyrażającej się odchyłką kierunku zęba, nierównoległości osi i ich wichrowatości. Nierównoległość osi i ich wichrowatość może być dodatkowo sterowana za pomocą mimośrodów umożliwiających przemieszczenie środka łożyska względem obudowy przekładni. Przez odpowiedni dobór mimośrodowości osadzenia łożysk można skompensować nie tylko nierównoległość i wichrowatość osi, ale także:

a) liniową część odchyłki kierunku zęba,
b) liniową część sumy przyrostów odkształceń wywołanych skręceniem i zginaniem wałów i kół.

Łatwo bowiem zauważyć, że przez odpowiedni dobór wartości kąta $\gamma$ w równaniu (2) można zmniejszyć prawą stronę równania, a tym samym zmiany jednostkowego obciążenia zębów.

W praktyce można dokonać wyboru optymalnej mimośrodowości łożysk przez obserwację śladu przylegania zębów. Zadaniem opracowanego programu obliczeniowego jest zbadanie w każdym konkretnym przypadku projektowanej (lub remontowanej) przekładni wpływu wprowadzenia mimośrodowości osadzenia łożysk na wyrównanie rozkładu obciążenia i wyznaczenie maksymalnej resztkowej wartości współczynnika nierównomierności rozkładu obciążenia dla celów obliczeń wytrzymałościowych.

## 3. Model przekładni

W pracy przyjęto następujące założenia obliczeniowe:

1) przekładnia zawiera wyłącznie walcowe koła zębate,
2) odkształcenia wałów i kół spowodowane są wyłącznie ich zginaniem i skręcaniem,
3) sztywność wałów może być zmienna stosownie do zmian średnic,
4) odkształceniu ulegają wszystkie wały w sposób istotny,
5) oprócz obciążeń działających na analizowanym odcinku mogą jeszcze występować dodatkowe obciążenia (momenty skupione, obciążenia rozłożone),
6) obciążenie zęba w rozpatrywanym miejscu jest proporcjonalne do jego ugięcia i sztywności w danym punkcie,
7) ząb może być zastąpiony pakietem bardzo wąskich zębów o całkowitej szerokości równej szerokości zazębienia, przy czym sztywność każdego elementu pakietu może być inna,
8) podatność każdej z podpór może być inna, ale znana w rozpatrywanej płaszczyźnie,
9) podpory są przegubowe,
10) rozpatrywane są tylko te odchyłki wykonawcze zazębienia i wałów, które w stanie nieobciążonym wywołują jedynie zmianę kąta pochylenia współpracujących zębów,
11) długość linii kontaktu zębów może być mniejsza od całkowitej szerokości kół.

## 4. Ograniczenia programu obliczeniowego

W stosunku do wyżej podanych cech modelu przekładni przyjęto ze względów obliczeniowych następujące ograniczenia:

1) w każdym kroku obliczeniowym analizowane są wyłącznie dwa wały przekładni wielostopniowej, pozostałe traktowane są jako nieskończenie sztywne,

2) sumaryczna ilość odcinków obciążonych obu wałów nie może być większa od 4, przy czym:
   a) odcinki, na których zęby się kontaktują, traktowane są jako jeden odcinek,
   b) w przypadku kół daszkowych każda bieżnia zębata traktowana jest jak oddzielny odcinek,
3) przekładnia musi mieć dwie podpory, przy czym, jeżeli długość wału jest większa od odległości podpór, to przynajmniej jeden odcinek znajdujący się poza podporami musi być wolny od innych obciążeń niż moment skręcający,
4) średnice wałów mogą zmieniać się tylko skokowo,
5) sumaryczna ilość odcinków obliczeniowych wału nie może być większa od 10; granicami odcinków są miejsca:
   a) zmieny średnicy,
   b) przyłożenia obciążenia,
   c) podparcia wału,
   d) przyłożenia skupionego momentu skręcającego.
6) jedynym ograniczeniem liczby skupionych momentów są warunki podane w punkcie 2 i 5,
7) ugięcia podpór (łożysk) są funkcją obciążenia, określoną wielomianem 2 stopnia,
8) sztywność zazębienia może być opisana najwyżej wielomianem trzeciego stopnia.

Pomimo tych ograniczeń program obejmuje najszerszy zakres przypadków spotykanych w praktyce w stosunku do znanych opisów literaturowych.

## 5. Przykłady obliczeń

Dla zilustrowania korzyści wynikających z zastosowania mimośrodowego osadzenia łożysk przeprowadzono stosowne obliczenia, których wyniki przedstawiono na rysunkach. Przyjęto na nich następujące oznaczenia zgodne z ryb. 1:

$l/b$ - względna odległość pomiędzy podporami,

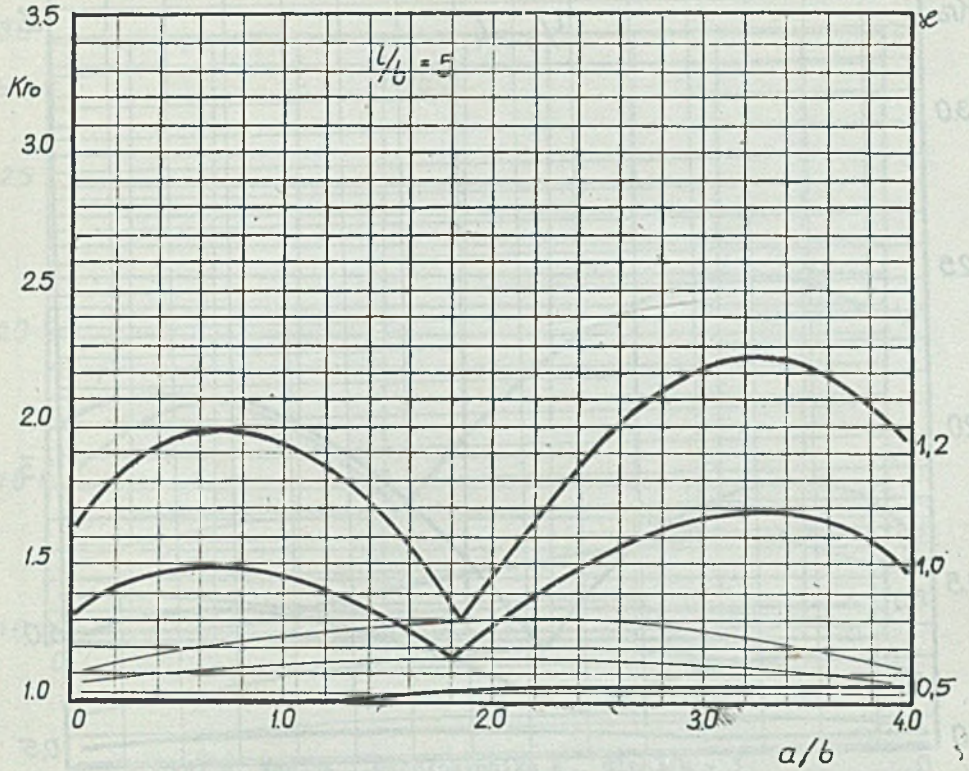
$a/b$ - względna odległość od podpory,

$\varkappa = b:d$ - względna szerokość zębnika,

$K_{ro} = \frac{p_{max}}{p_m}$ - współczynnik koncentracji obciążenia wywołanej odkształceniami wałów,

$p_{max}$ - maksymalna wartość lokalnego obciążenia zęba,

$p_m$ - średnia wartość obciążenia zęba, wynikająca z wielkości siły międzyzębnej i szerokości zębnika.

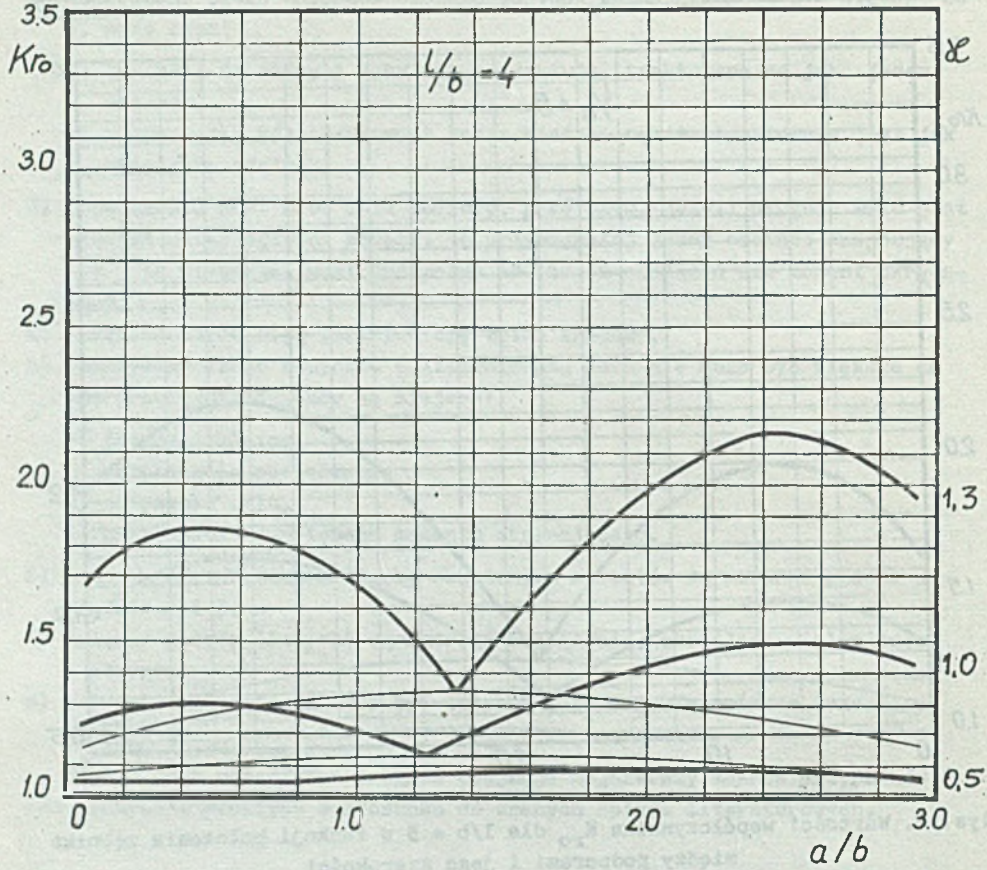



Rys. 2. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla l/b = 5 w funkcji położenia zębnika między podporami i jego szerokości

Fig. 2. Values of the coefficient $K_{ro}$ for l/b = 5 as a function of a leafed pinion position between bearings and its width

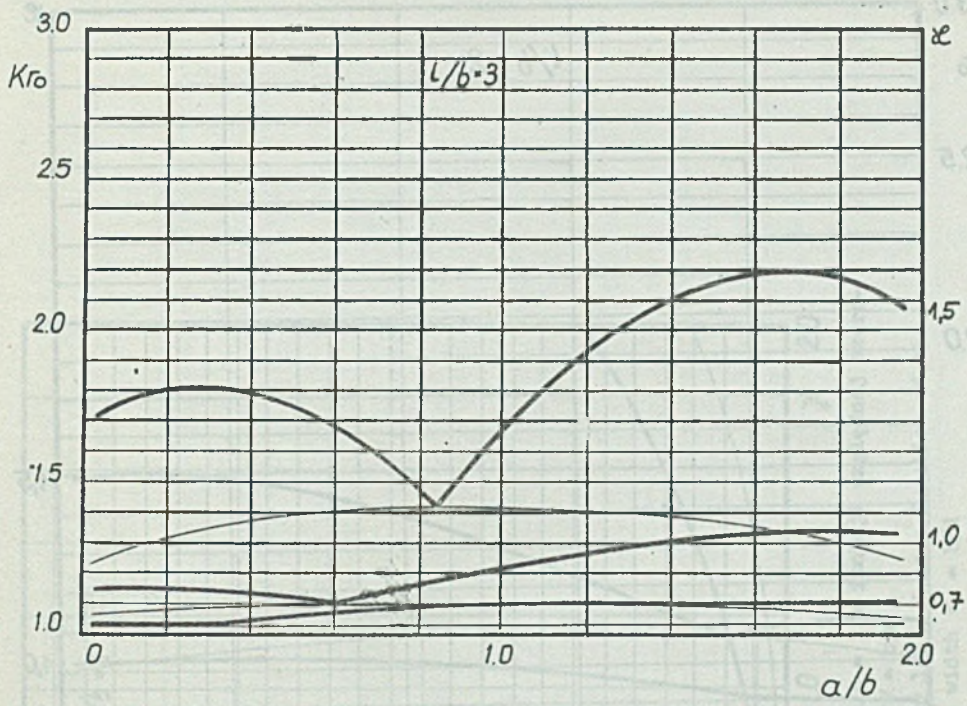
Wszystkie rysunki wykonano przy założeniu braku odchyłek wykonawczych, tj. założeniu, że jedyną przyczyną nierównomierności rozkładu są sprężyste odkształcenia wału zębnika. Przyjęto więc: brak istotnych odkształceń koła współpracującego, stałą średnicę wału zębnika, odkształcenia gięte wału i odkształcenia skrętne zębnika. Oczywiście zaproponowany program obliczeniowy umożliwia uwzględnienie wielu innych wpływów, co wymaga ograniczenia rozważań do konkretnej przekładni, inaczej bowiem liczba potrzebnych wykresów jest bardzo duża.

Na rys. 2 przedstawiono wartości współczynnika $K_{ro}$ dla przekładni o względnej odległości pomiędzy podporami l/b = 5 w funkcji położenia zębnika między podporami wyrażonej stosunkiem a/b.




Rys. 3. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla l/b = 4
Fig. 3. Values of the coefficient $K_{ro}$ for l/b = 4

W przypadku gdy zębnik usytuowany jest przy lewej podporze (a/b = 0) a moment skręcający przyłożony jest od prawej stropy, skutki zginania są w pewnym stopniu równoważone przez odkształcenia skrętne. Gdy natomiast zębnik znajduje się przy prawej podporze (a/b = 4), to, jak łatwo sobie wyobrazić, lewa strona zębnika uchyla się od pracy zarówno wskutek skręcania zębnika, jak też ugięcia wałka. Odsuwanie zębnika od podpór zwiększa na ogół zukosowanie zębnika. Gdyby zębnik nie ulegał skręceniu lub gdyby skręcenie zębnika skorygowano odpowiednio dobraną modyfikacją linii zęba, to najkorzystniejsze położenie wypadałoby na środku między podporami, gdyż wtedy występuje symetria odkształceń. Przy jednoczesnym wystąpieniu odkształceń skrętnych korzystniej jest odsunąć nieco zębnik w stronę wolnej podpory, aby przynajmniej sześciowo zrównoważyć skutki skręcania przez



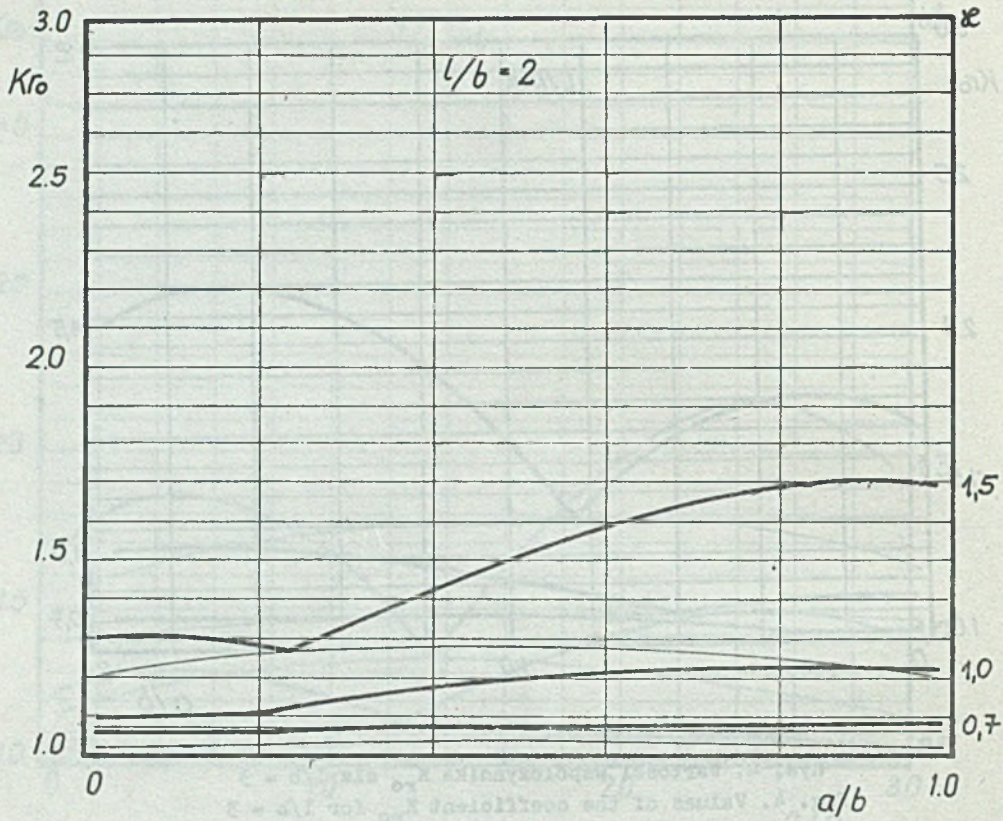

Rys. 4. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla l/b = 3
Fig. 4. Values of the coefficient $K_{ro}$ for l/b = 3

zakosowanie osi zębnika. Z tego powodu minimum wartości współczynnika $K_{ro}$ na rys. 2 leży poniżej wartości a/b = 2.

Linią pełną przedstawiono wartości współczynnika $K_{ro}$ przy równoległym położeniu osi wałów, natomiast linią przerywaną wartości tegoż współczynnika przy optymalnym zakosowaniu za pomocą mimośrodów. Jak widać na rysunku, przebieg tej linii zasadniczo różni się od przypadku przebiegu dla osi równoległych. Wartości współczynnika $K_{ro}$ są znacznie niższe, przy czym występuje tylko jedna wartość maksymalna w okolicy a/b = 2, gdzie poprzednio występowała wartość minimalna. W tym miejscu bowiem ze względu na symetrię odkształcenia giętnego głównym powodem nierównomierności rozkładu są odkształcenia skrętne.

W miarę zmniejszania wartości współczynnika = b/d wartości współczynnika nierównomierności rozkładu $K_{ro}$ maleją, przy czym zawsze zastosowanie mimośrodowego osadzenia łożysk jest korzystne.

Rysunek 3 przedstawia analogiczne zależności przy l/b = 4, rys. 4 dotyczy przypadku l/b = 3, rys. 5 - przypadku l/b = 2.

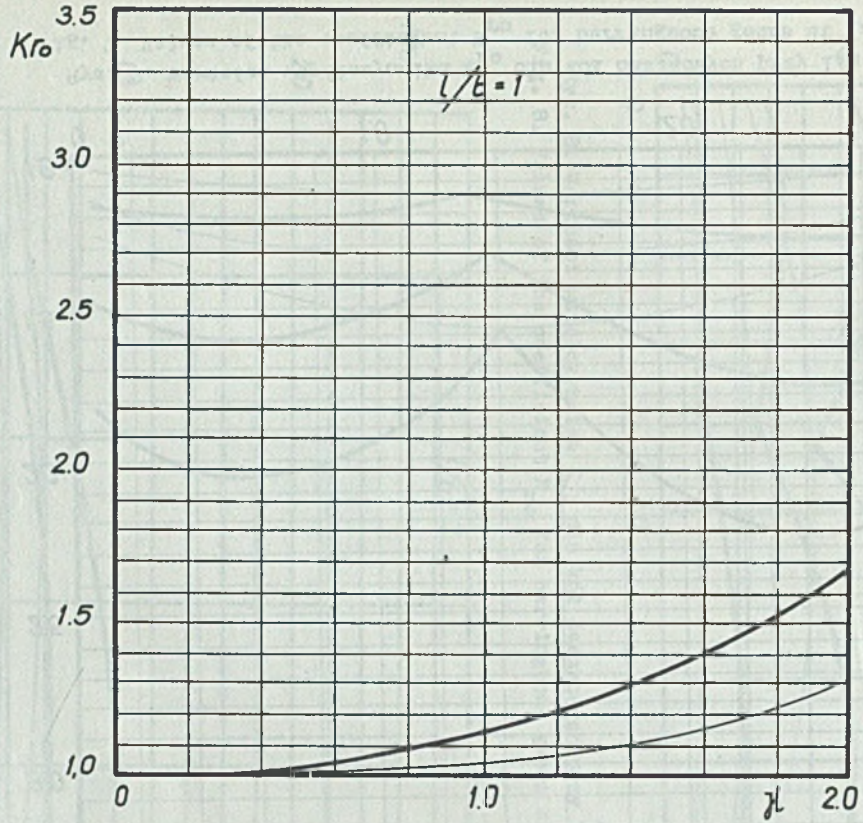



Rys. 5. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla l/b = 2
Fig. 5. Values of the coefficient $K_{ro}$ for l/b = 2

Rysunek 6 przedstawia wartości $K_{ro}$ dla l/b = 1 w funkcji $\varkappa$ = b/d; także w tym przypadku zastosowanie mimośrodowego osadzenia łożysk wpływa korzystnie na rozkład obciążenia szczególnie przy dużych wartościach b/d.

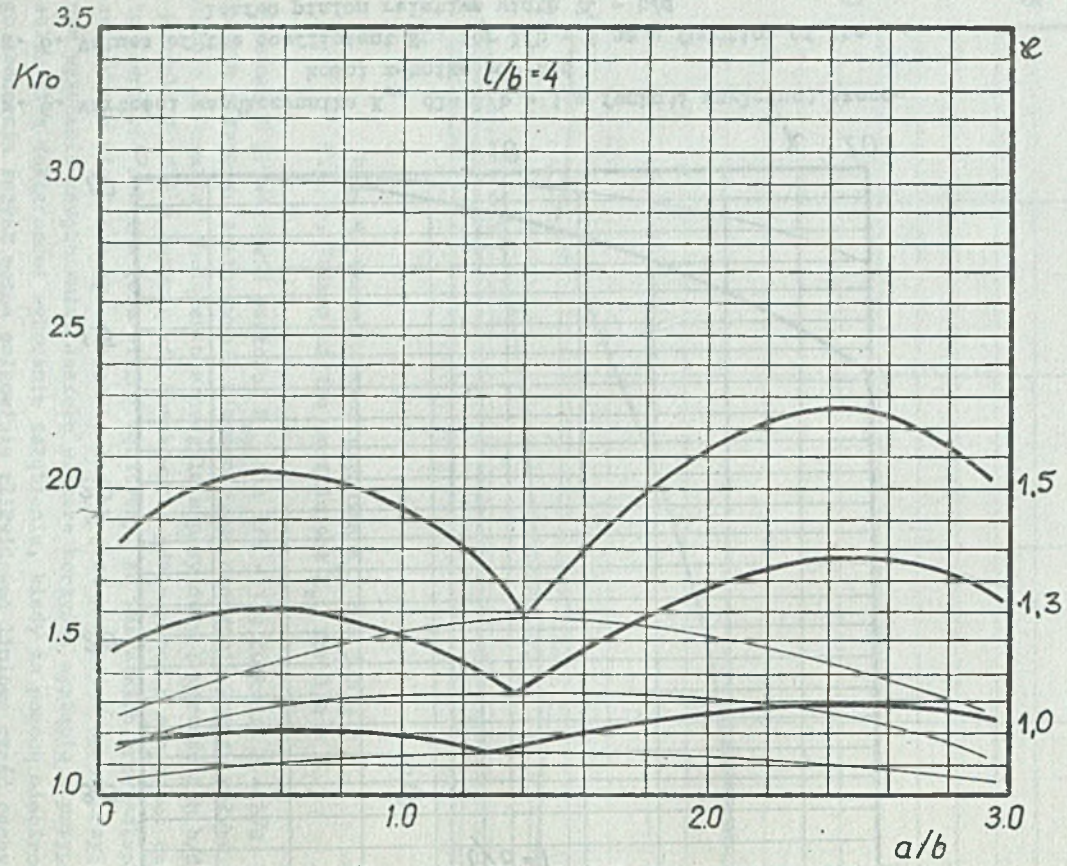
Rysunki 7, 8 i 9 dotyczą kół daszkowych, gdzie przez b oznaczono całkowitą szerokość zębnika (obu bieżni zębatych). We wszystkich przypadkach zastosowanie mimośrodowego osadzenia łożysk jest korzystne nawet przy idealnym wykonaniu zazębnienia. Jeszcze większe korzyści wystąpią w przypadku niskich klas dokładności wykonania zazębienia, kiedy za pomocą mimośrodowego osadzenia łożysk można całkowicie zlikwidować liniową część odchyłki wykonawczej.

Na rys. 10 przedstawiono wartości współczynnika nierównomierności rozkładu obciążenia $K_{ro}$ w szczególnym przypadku sytuacji przedstawionej na rys. 2 dla $\varkappa$ = b/d = 1,2, przy złożeniu stałej wartości modyfikacji linii zęba uwzględniającej wyłącznie skręcanie zębnika. W tym przypadku zakoso-



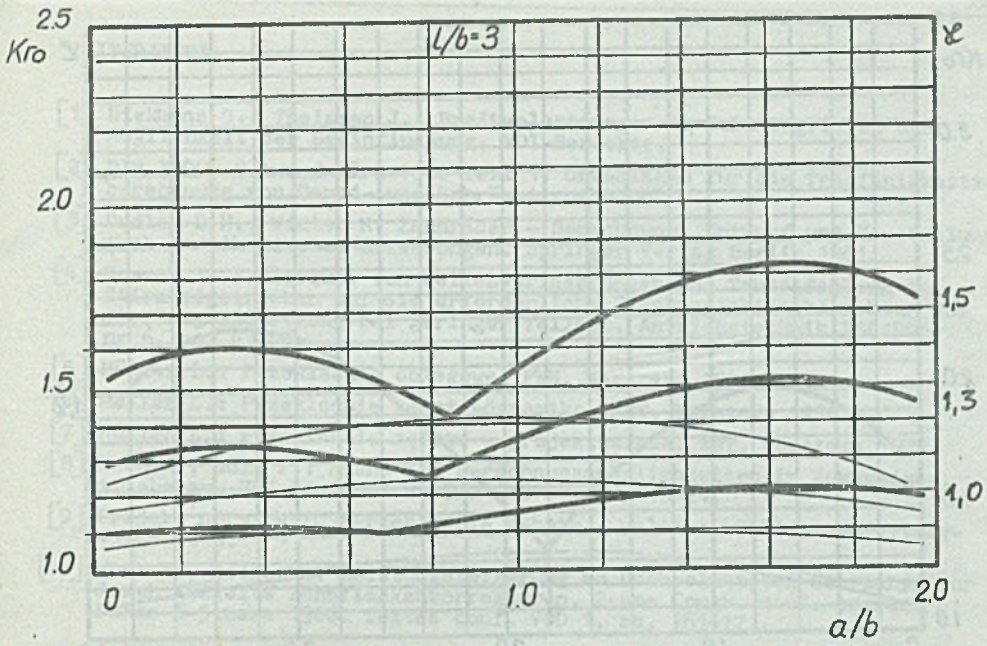

Rys. 6. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla l/b = 1 w funkcji względnej szerokości zębnika $\varkappa$ = b/d

Fig. 6. Values of the coefficient $K_{ro}$ for l/b = 1 as a function of the leafed pinion relative width $\varkappa$ = b/d



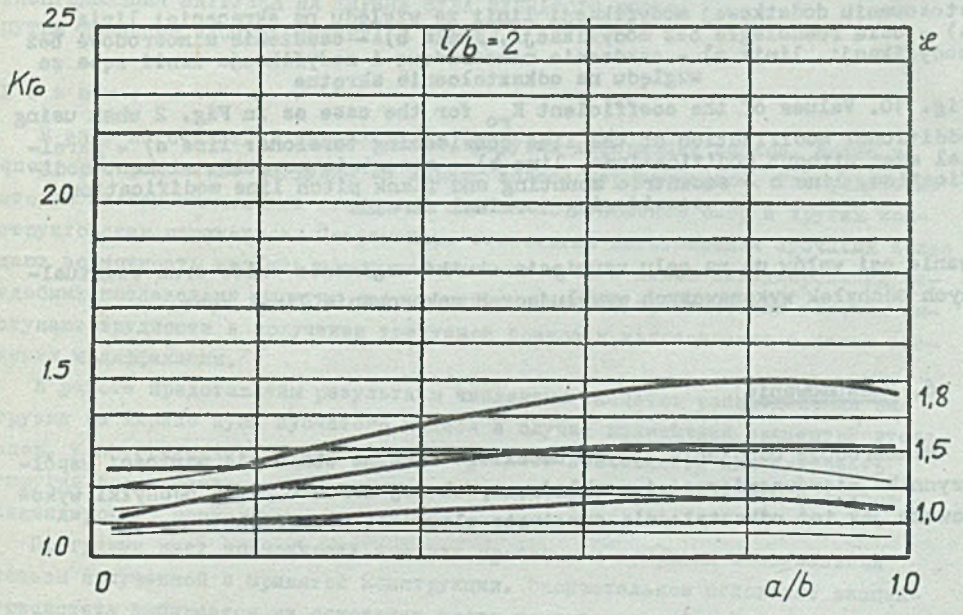

Rys. 7. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla kół daszkowych przy l/b = 4

Fig. 7. Values of the coefficient $K_{ro}$ for herringbone gears at l/b = 4



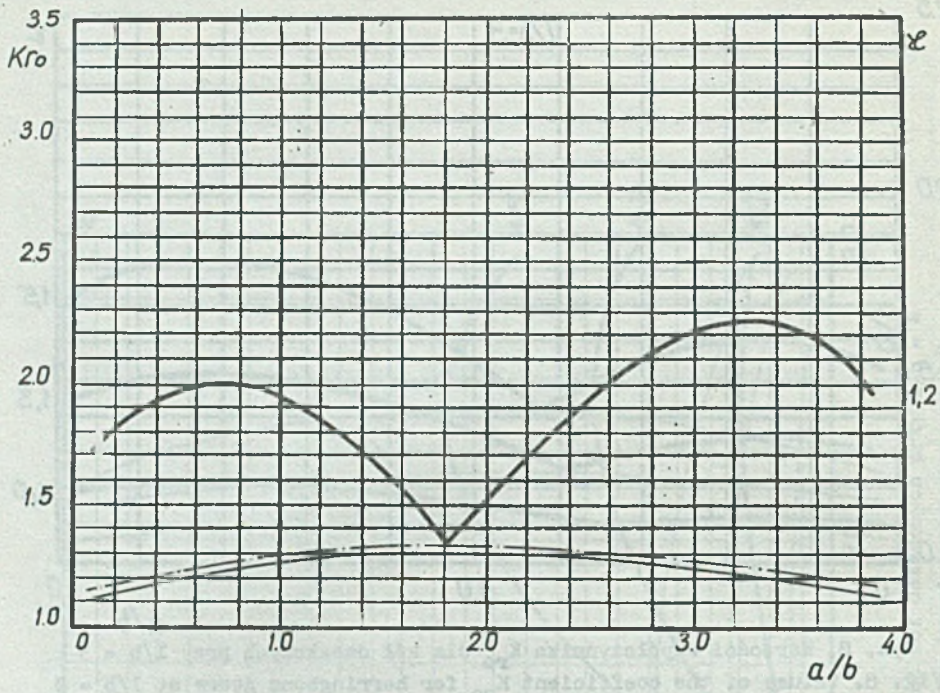

Rys. 8. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla kół daszkowych przy l/b = 3

Fig. 8. Values of the coefficient $K_{ro}$ for herringbone gears at l/b = 3




Rys. 9. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla kół daszkowych przy l/b = 2

Fig. 9. Values of the coefficient $K_{ro}$ for herringbone gears at l/b = 2




Rys. 10. Wartości współczynnika $K_{ro}$ dla przypadku jak na rys. 2 przy zastosowaniu dodatkowej modyfikacji linii ze względu na skręcanie; linia a) - osie równoległe bez modyfikacji, linia b) - osadzenie mimośrodowe bez modyfikacji, linia c) - osadzenie mimośrodowe i modyfikacja linii zęba ze względu na odkształcenia skrętne

Fig. 10. Values of the coefficient $K_{ro}$ for the case as in Fig. 2 when using additional modification of the line considering torsiona: line a) - parallel axes without modifications, line b) - eccentric mounting without modification, line c - eccentric mounting and flank pitch line modification considering torsinal strains

wanie osi wałów ma na celu usunięcie skutków zginania wałów oraz ewentualnych odchyłek wykonawczych wywołujących zakosowanie linii zęba.

## 6. Podsumowanie

Mimośrodowe osadzenie łożysk umożliwia znaczne obniżenie wartości współczynnika nierównomierności rozkładu, wywołanej zarówno przez odchyłki wykonawcze jak też odkształcenia sprężyste elementów przekładni.

LITERATURA

[1] Diekhans G., Theissen J.: Breitenlasttragen in Zahneingriffen und Moglichkeit der Beeinflussung. VDI-Berichte.

[2] DIN 3990, Entwurf März 1980 Teil 1: Grundlagen für die Tragfähigkeitsberechnung von Gerad- und Schrägstirnrädern.

[3] Dudley D.H., Winter H. Zahnräder - Berechnung, Entwurf und Herstellung nach amarikanischen Erfahrungen. Springer Verlag Berlin 1961.

[4] Hoesel Th.: Einfluss von Wellenverlagerungen und Taumelfehlern in Stirnradgetrieben auf die erforderliche Flankenrichtungkorrektur und die Tragbildprüfung bei geringer Teilast. Antriebstechnik 25(1986) nr 6, ss. 43-46.

[5] Müller L.: Przekładnie obiegowe. PWN, Warszawa 1983.

[6] Müller L.: Przekładnie zębate-dynamika. WNT, Warszawa 1986.

[7] Müller L.: Przekładnie zębate - projektowanie. WNT, Warszawa 1979.

[8] Weck M., Gold P.: Stand der Berechnungsmöglichkeiten in Zahnradgetriebebau. VDI-Berichte nr 332 (1979), ss. 13-24.

[9] Projekt normy RWPG "Przekładnie zębate - walcowe. Obliczenia wytrzymałościowe.

[10] Weck M., Salje H.: Leistungsteigerung an hochbelasteten Getrieben dur durch gezielte Zahnflankenkorrekturen. 2-eme Congr. mond. engren. Paris 3-5 mars 1986. Textes conf. VOD 1, ss. 161-171.

## ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТИ УМЕНЬШЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗКИ НА ШИРИНЕ ЗУБА ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА В ОПОРАХ

Р е з ю м е

В виду неточности в изготовлении, упругих деформаций валков, колес и опор, распределение нагрузки на ширине колеса неравномерное. Распределение это во многом зависит от положения колеса по отношению опор и других конструкторских параметров. Современные технологии изготовления зубчатых колес дают возможность вводить модификации линии зуба с целью ликвидирования неудобных последствий упругих деформаций. Во многих практических случаях выступают трудности в получении требуемой точности изготовления с целью введения модиффикации.

В работе представлены результаты численных расчетов распределения нагрузки на ширине зуба зубчатого колеса в случае применения эксцентриситета опор. Такое решение в значительной мере дает возможность ликвидировать упругие последствия, а что самое важное для редукторов больших размеров - ликвидировать последствия неточности изготовления.

Программа дает возможность анализа проблемы и вскрытия максимальной пользы полученной в принятой конструкции. Окончательное положение эксцентрисистета выбирается на основании следа прилегания зубьев во время проб монтажа редуктора.

NUMERICAL TESTS ON THE INFLUENCE OF STRUCTURAL CHANGES ON THE POSSIBILITY OF REDUCTION IN LOAD DISTRIBUTION UNEVENNESS ON A GEAR WHEEL WIDTH BY USING ECCENTRIC BEARING MOUNTING

S u m m a r y

In consequence of working tolerances and elastic strains in shafts, wheels and bearings the load distribution on the wheel width is uneven.

This distribution depends in great measure on the wheel position in relation to the bearings and on other structural parameters. Modern technologies of gear wheels production enables modification of the tooth profile in order to eliminate unfavourable effects of elastic strains.

In many practical cases it is difficult to achieve the quality of work required for the modification.

The results of numerical calculations of the load distribution on the gear wheel width in case of using eccentric bearings mounting have been presented in the paper.

Such a design enables in great measure elimination of the elastic strain effects but it also enables to eliminate the effects of working tolerances which is especially important in large size transmission gears.

The program enables the problem analysis and detection of maximum advantages achieved from the assumed design. The final position of eccentric is chosen on the basis of teeth abutting traces through the tests when assembling the transmission gear.