

XIII MIĘDZYNARODOWE KOŁOKWIUM

"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"

13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON

"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"

25-28.04.1989 ZAKOPANE

Валентин ОНИЩЕНКО

Кафедра "Детали машин" Донецкого политехнического института, СССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИЗНОСА РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Резюме. Рассмотрены вопросы аппроксимации изношенных профилей зубьев эвольвентных зубчатых колес, решена обратная задача теории зацепления применительно к контакту изношенных профилей, разработана математическая модель изнашивания профилей зубьев и оценки их долговечности с помощью электронно-вычислительных машин.

Износ зубьев зубчатых колес при наиболее часто встречающемся режиме граничного трения зависит, в основном, от значений контактных напряжений, коэффициента трения, геометрических (радиусы кривизны профилей) и кинематических (скорость скольжения, удельные скольжения) параметров контакта, которые, в свою очередь, изменяются по мере износа профилей [1]. Поэтому более надежная оценка износостойкости зубчатых передач возможна только с учетом кинетики износа рабочих поверхностей зубьев. Ввиду сложности этого процесса при разработке математической модели был принят ряд упрощений. В качестве объекта изнашивания были приняты цилиндрические зубчатые колеса с прямыми зубьями, рабочие профили которых описываются непрерывной, минимум дважды дифференцируемой функцией. При этом предполагается, что: зацепляющиеся колеса вращаются относительно неподвижных геометрических осей, под нагрузкой профили не деформируются, в зоне двухпарного зацепления нагрузка между парами зубьев распределяется линейно, нагрузка по длине зуба распределяется равномерно.

Алгоритм математической модели процесса износа рабочих поверхностей зубьев включает в себя следующие основные блоки:

- подбор функции, аппроксимирующей профиль зуба (как исходный, так и изношенный);
- нахождение координат точки контакта зубьев в функции угла поворота ведущего зубчатого колеса;
- определение геометрических, кинематических и нагрузочных параметров контакта зубьев;
- вычисление интенсивности изнашивания профиля в контактной точке в зависимости от найденных параметров контакта;
- корректировка профилей зубьев в контактных точках с учетом установленной интенсивности изнашивания.

В связи с большим объемом вычислений моделирование процесса износа зубьев производится на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ). Первый цикл расчетов включает в себя оценку степени изменения исходного профиля, далее цикл повторяется до достижения предельного (по условиям эксплуатации) значения износа профиля. Достоверность разработанной модели проверяется экспериментально.

Исследуемые профили зубьев можно представить в прямоугольной системе координат, ось абсцисс которой проходит через ось симметрии зуба с неизношенными профилями, а ось ординат через начальную точку эвольвенты на основной окружности (рис.1). Относительно центра вращения колеса эта система координат фиксируется с помощью следующих соотношений:

$$x_B = R_B \cos \delta_0; \quad y_B = R_B \sin \delta_0; \quad R_B = 0,5mZ \cos \alpha_B;$$

$$\delta_0 = \frac{\pi}{2Z} + \left(\frac{2x_c}{Z} + 1\right) \cdot \operatorname{tg} \alpha_B - \alpha_B;$$

где  $R_B$  - радиус основной окружности;

$m$  - модуль зацепления;

$Z$  - число зубьев;

$\alpha_B$  - угол исходного контура (по СТ СЭВ 308-76  $\alpha_B = 20^\circ$ );

$x_c$  - коэффициент смещения исходного контура.

Число точек профиля не должно быть меньше отношения длины рабочего участка профиля к ширине герцовой полоски контакта.

Для аппроксимации профиля зуба со сравнительно равномерным износом можно использовать приближение функции многочленом по методу наименьших квадратов. В случае же неравномерного износа профиля целесообразно применять аппроксимирующие сплайн-функции. При этом показатель степени полинома или сплайна должен быть не менее

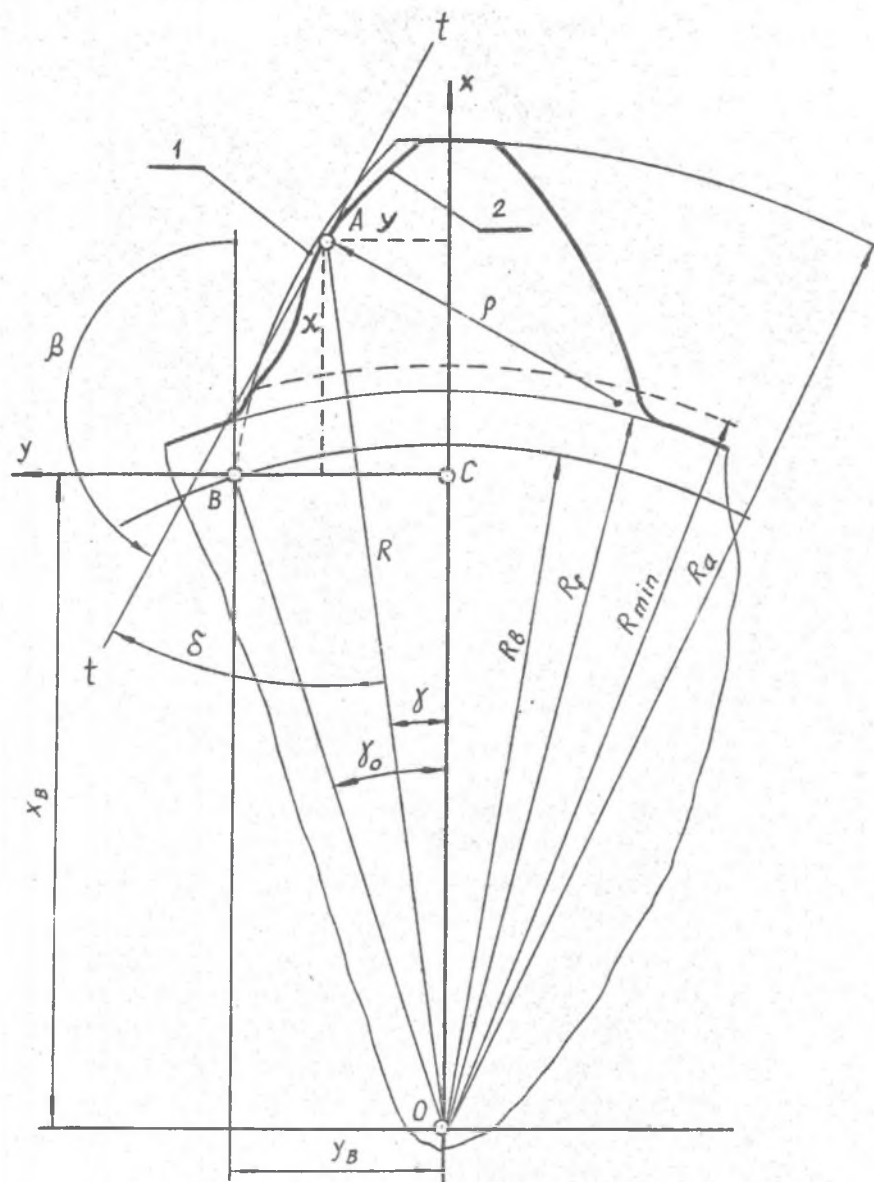


Рис.1. Способ представления профиля зуба в прямоугольной системе координат: 1-исходный, 2-изношенный профили.

трех, максимальное значение этого показателя может быть определено из условия, чтобы разность между действительными координатами профиля и координатами аппроксимирующей его функции не превышала погрешности измерения действительных координат.

После установления вида аппроксимирующей функции ( $y = f(x)$ ) координаты произвольной точки профиля в прямоугольной и полярной системах координат, положение касательной к профилю в данной точке, а также значение радиуса кривизны профиля в этой точке определяются из следующих соотношений:

$$y = f(x) \quad (1) \quad \beta = \arctg f'(x) \quad (4)$$

$$R = \sqrt{y^2 + (x_B + x)^2} \quad (2) \quad \delta = \gamma + (\pi - \beta) \quad (5)$$

$$R_{min} \leq R \leq R_a$$

$$\gamma = \arctg \frac{y}{x_B + x} \quad (3) \quad \rho = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{1.5}}{f''(x)} \quad (6)$$

где:  $R_a$  - радиус окружности вершин;

$R_{min}$  - минимально возможная граница износа профиля;

$$R_{min} = \sqrt{(a_\omega \sin \alpha_\omega - \sqrt{R_{ac}^2 - R_{bc}^2})^2 + R_b^2} \quad (7)$$

$a_\omega$  - межосевое расстояние;

$\alpha_\omega$  - угол зацепления;

$R_{ac}, R_{bc}$  - радиусы окружности вершин и основной окружности сопряженного зубчатого колеса.

Схема определения координат точки контакта представлена на рис.2. Два профиля I и 2, описанные аппроксимирующими функциями  $y_1 = f_1(x_1)$  и  $y_2 = f_2(y_2)$ , вращаются вокруг неподвижных центров  $O_1$  и  $O_2$ , зафиксированных в неподвижной системе координат  $XO_1Y$ . Положение ведущего звена - профиля I - задается в этой системе углом  $\varphi_1$ , отсчитываемом от положительного направления оси  $O_1X$  в направлении угловой скорости  $\omega_1$ . Для заданного угла  $\varphi_1$  координаты точки контакта K определяются в следующем порядке.\*

\*Методика определения координат точки контакта для профилей описанных в полярных системах координат приведена в работе [2].

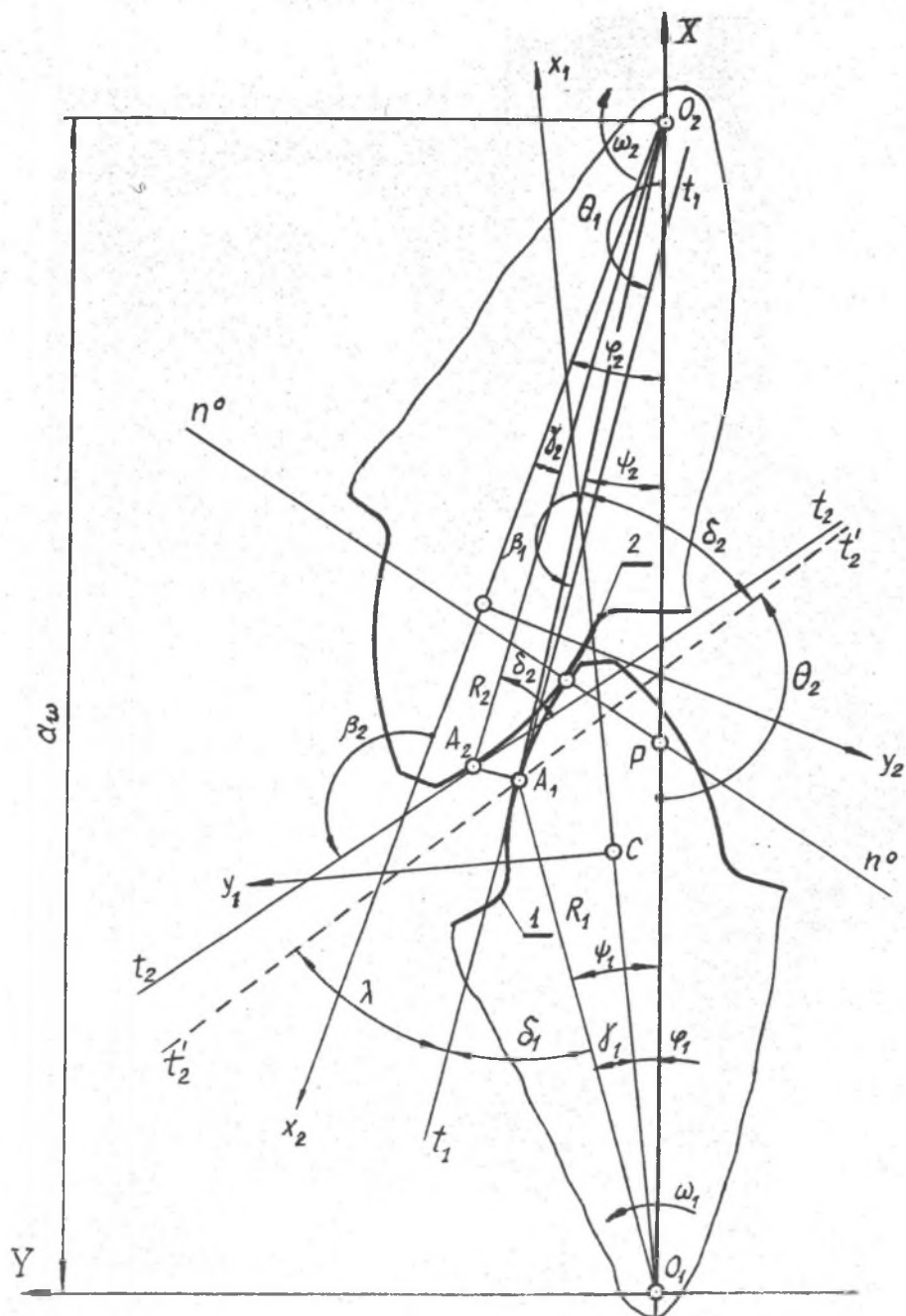


Рис.2. Схема определения координат точки контакта профилей.

На профиле I выделяется некоторая точка  $A_I$  ( $x_1$ ;  $y_1$  или  $R_1$ ;  $\delta_2$ ), радиус-вектор которой  $R_1$  составляет с осью  $O_I X$  угол:

$$\psi_1 = \varphi_1 + \delta_1. \quad (8)$$

Через эту точку проводится касательная  $t_1-t_1$ , положение которой определяется углами  $\beta_1$  и  $t_1$  (см.рис.1). С неподвижной осью  $O_I X$  эта касательная составляет угол:

$$\theta_1 = \psi_1 + (\pi - \delta_1). \quad (9)$$

Из центра  $O_2$  в точку  $A_I$  проводится радиус

$$R_2 = \sqrt{(a_w - R_1 \cos \psi_1)^2 + (R_1 \sin \psi_1)^2}, \quad (10)$$

который составляет с осью  $O_I X$  угол

$$\psi_2 = \arctg(R_1 \sin \psi_1 / (a_w - R_1 \cos \psi_1)). \quad (11)$$

Радиус  $R_2$  поворачивается вокруг центра  $O_2$  до совмещения с профилем 2 в точке  $A_2$ , через которую также проводится касательная  $t_2-t_2$ , положение которой определяется соответствующими углами  $\beta_2$  и  $\delta_2$ . Затем радиус-вектор  $R_2$  возвращается в исходное положение вместе с касательной  $t_2-t_2$ , которая в этом положении (обозначенная как  $t_2'-t_2'$ ) составит с осью  $O_I X$  угол:

$$\theta_2 = \pi - (\psi_2 + \delta_2). \quad (12)$$

Угол  $\lambda$  между касательными  $t_1-t_1$  и  $t_2'-t_2'$  будет равен:

$$\lambda = \theta_1 - \theta_2. \quad (13)$$

Значения координат точки  $A_I$ , при которых этот угол будет равен нулю и определяют координаты точки контакта К.

Таким образом, задача определения координат точки контакта сводится к решению трансцендентного уравнения вида:

$$(\beta_1 + \psi_1 - \delta_1) - (\beta_2 - \psi_2 - \delta_2) = 0, \quad (14)$$

решаемого численными методами на ЭВМ. По найденному корню уравнения ( $x_1$  или  $R_1$ ) вычисляются координаты точки К в неподвижной и в поворотных системах координат, а также положение профиля 2, определяемого углом:

$$\varphi_2 = \psi_2 + \delta_2 \quad (15)$$

Контактные напряжения вычисляются по формуле Герца по найденным значениям радиусов кривизны в точке контакта. Скорости движения точки контакта по профилям зубьев ведущего  $V_{кy_1}$  и ведомого  $V_{кy_2}$  колес определяются по формулам [2]:

$$V_{ky_1} = \frac{\omega_1 \rho_1 (1+u)(\rho_2 - l_k)}{u(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (16)$$

$$V_{ky_2} = \frac{\omega_1 \rho_2 (1+u)(\rho_2 - l_k)}{(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (17)$$

где:  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - радиусы кривизны профилей в точке их контакта;

$u = \frac{O_2 P}{O_1 P}$  - мгновенное значение передаточного числа (см. рис.2);

$l_k = PK$  - расстояние от точки контакта до мгновенного центра вращения P.

Остальные параметры зацепления вычисляются по общепринятым формулам теории зацепления.

Интенсивность изнашивания можно определить на основе зависимостей, полученных теоретически или экспериментально (например, [1] или [3]). При этом коэффициент пропорциональности, с помощью которого интенсивность изнашивания вводится в программу расчета, должен быть таким, чтобы за один цикл расчета износ профиля на порядок превышал погрешность аппроксимации профиля.

Применение предложенной методики моделирования износа рабочих профилей зубьев позволит оценить долговечность проектируемой зубчатой передачи и путем сравнения выбрать наиболее оптимальный вариант. Кроме того, разработанная модель износа зубьев может быть включена в системы автоматизированного проектирования редукторов приводов машин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов А.Л., Онищенко В.П., Модавский Л.А. О расчете на износ зубьев зубчатых колес угольных комбайнов. - В кн. Детали машин (республ. межведомственный научно-технич. сборник № 18). Киев: Техника, 1974, с. 59-64.
2. Онищенко В.П., Симонов А.Л., Матеко П.М. Моделирование зацепления изношенных профилей зубьев зубчатых колес на ЭЦМ и прогнозирование их долговечности. - В кн.: Теория и практика расчетов деталей машин на износ. Москва: "Наука", 1983, с.99-106.
3. Дроздов Ю.Н. К разработке методики расчета на изнашивание и моделирование трения. - В кн.: Износостойкость. Москва: "Наука", 1975, с. 120-136.

MODEL MATHEMATICAL OF WEAR PROCESS OF CONTACTS SURFACES OF  
TOOTHED WHEELS' TEETH

Summary

There regarded the questions of approximation of the wear profiles of gear wheels' teeth, it is decided the inverse problem of the engagement theory with respect to wear profiles' contacts, there worked out the mathematical model of the process of profiles teeth' wear and the estimation of their longevity with the help of the electronic computers.

MODEL MATEMATYCZNY PROCESU ZUŻYCIA POWIERZCHNI ROBOCZYCH  
ZĘBÓW KÓŁ ZĘBATYCH

Streszczenie

W pracy rozważono problemy aproksymacji zużytych profili zębów ewolwentowych kół zębatych, rozwiązane odwrotne zadanie teorii zazębienia zastosowano do zadania kontaktu używających się profili. opracowano model matematyczny zużycia profili zębów i oceny ich trwałości za pomocą elektronicznych maszyn cyfrowych.

Recenzent: doc. dr inż. Z. Jaskóła

Wpłynęło do Redakcji 20.XII.1988 r.