

И.Т. ТУРАНОВ

ДИНАМИКА ТЯГОВЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ ТЕПЛОВЗОВ

Резюме. В статье рассмотрены динамическая модель, вывод и решение уравнения крутильных колебаний вала тягового электродвигателя тепловоза, представляющего собой круглый сплошной вал с кусочно-постоянной жесткостью, описанного неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами с учетом действия внешних нагрузок, задаваемых посредством регулярных и сингулярных обобщенных функций.

Статья предназначена для специалистов, занимающихся вопросами расчета на динамическую прочность и проектирования валов роторного типа.

Практика эксплуатации тяговых электродвигателей тепловозов (ТЭД) показывает, что часто происходят скручивания вала на участке между якорем и шестерней привода, создающие угрозу безопасности движения поездов. Одной из причин этого является возбуждение в нем крутильных колебаний, возникающих вследствие действия крутящих моментов от магнитных сил и в основном моментов сопротивлений привода, которые представляют достаточную опасность, ограничивающую долговечность вала ТЭД.

В работе [1] изучены свободные крутильные колебания валов ТЭД как колебательных систем с сосредоточенными массами (двух-массовой системы якорь - шестерня) и установлены предельные значения крутовых частот свободных крутильных колебаний якоря с учетом и без учета наличия зазоров в зубчатом зацеплении, которые могут быть образованы вследствие неточностей сборки, изготовления и в основном износа зубьев. Однако не рассмотрена задача вынужденных крутильных колебаний вала с учетом характера действия внешних нагрузок и конструктивных особенностей якоря ТЭД.

В работе [2] изучены закономерности изгибно-крутильных и осевых колебаний валов ТЭД тепловозов с разработкой на базе этих

исследований уточненной методики расчета таких валов на динамическую прочность с учетом условий эксплуатации и конструктивных особенностей электродвигателя. При этом предполагалось, что на якорь электродвигателя действует крутящий момент от магнитных сил равномерно-распределенного характера без учета снижения магнитных сил по краям якоря. Однако допущена неточность при написании граничного условия задачи крутильных колебаний, выразившаяся в приравнении произведения жесткости на кручения вала на первую производную угла закручивания по его длине к произведению жесткости на кручения зубьев шестерни на угол ее поворота. Неточность выражается в стремлении определить два неизвестных, а именно угол закручивания по длине вала и угол закручивания шестерни из одного граничного условия, поскольку в работе отсутствует предположение известности угла закручивания шестерни. Кроме того, принятые граничные условия задачи не позволяют определять углы поворотов на концевых участках, поскольку является неизвестный угол закручивания (и его первой производной) в начале координат (при $Z = 0$). Так же в [2] не учтено вращение вала якоря как жесткого тела ($J_{\text{я}} \approx 2,7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$), одинакового для всех сечений.

В связи с этим целесообразно исследовать процесс возникновения крутильных колебаний вала тягового электродвигателя тепловоза с целью разработки уточненной методики расчета на динамическую прочность.

Составление дифференциальных уравнений крутильных колебаний вала ТЭД как колебательных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами не представляет особого затруднения, но решения этих уравнений имеют свои трудности, обусловленные наличием в их правой части членов, учитывающих особенности внешних нагрузок.

1. Основные допущения. расчетная схема и вывод уравнений крутильных колебаний вала тягового электродвигателя тепловоза

В связи с особенностью конструктивного исполнения вала тягового электродвигателя (жестким креплением составных элементов - в основном сердечника якоря, нажимных шайб, обмоток, коллекторных пластин к валу) за расчетную динамическую схему примем схему круглого сплошного вала с кусочно-постоянной жесткостью, имеющего на консоли постоянное по значению сосредоточенную массу шестерни с моментами инерции масс $J_{ш}$ ($J_{ш} \approx 0,012 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$) и нагруженного сосредоточенным моментом сопротивления $T_{ш}(t)$, а на длине участка со ступенчатым изменением диаметра в отличии [2] - внешней нагрузкой (от магнитных сил), закон изменения которой носит трапециoidalный характер. Такой характер внешних нагрузок объясняется ослаблением магнитных сил по краям якоря, что соответствует реальному нагружению вала.

Обычно при динамических расчетах для получения качественных зависимостей все виды трения при малых колебаниях заменяются эквивалентным вязким трением [3]. Вместе с тем при расчете значений максимальных динамических нагрузок в дорезонансной зоне с целью получения их наибольших значений можно считать, что в системе отсутствует сопротивление колебаниям, пропорциональное скорости деформации. Возможность применения такого допущения обоснована результатами исследований С.Н.Кожевникова [4, 5], Е.С.Криворотова [6] и других [7].

На расчетной динамической модели (рис. 1) для вывода уравнений крутильных колебаний вала ТЭД приняты обозначения: $J_{ш}$ - момент инерции масс шестерни; $G_i J_{pi}$ ($i=1,2$) - жесткости различных участков вала при кручении; i_{2j} ($j=1,2$) - интенсивность момента инерции масс различных участков вала относительно его оси; $T_{ш}(t)$ - крутящий момент шестерни привода, создающей сопротивление вращению якоря ТЭД; $T_i(t) = R_i(t) f r$ - моменты сил трения в опорах ТЭД ($R_i(t)$ - радиальная нагрузка на опору;

f - коэффициент трения качения в опоре; r - радиус цапфы) и $M(z, t)$ - интенсивность крутящего момента магнитных сил в отклики [2] носящей трапециoidalный характер на участке вала $a \leq z \leq d$.

Предположим, что сосредоточенные крутящие моменты шестерни привода и моменты трения в опорах изменяются по закону

$$T(t) = T_0 + \sum_{n=1}^m T_n \sin n\omega t, \quad (I)$$

где T_0 и T_n - постоянные и переменные составляющие крутящих моментов;

$n = 1, 2, \dots, m$ - номера гармоник;

ω - круговая частота возмущающих сил.

Примем, что на якорь действует крутящий момент магнитных сил с интенсивностью $M(z, t)$, распределенный по трапециoidalному закону на участке от $z = a$ до $z = d$ (см. рис. 1). Пусть на единицу длины загруженного участка приходится нагрузка $M(1 - \alpha_0 \omega)$

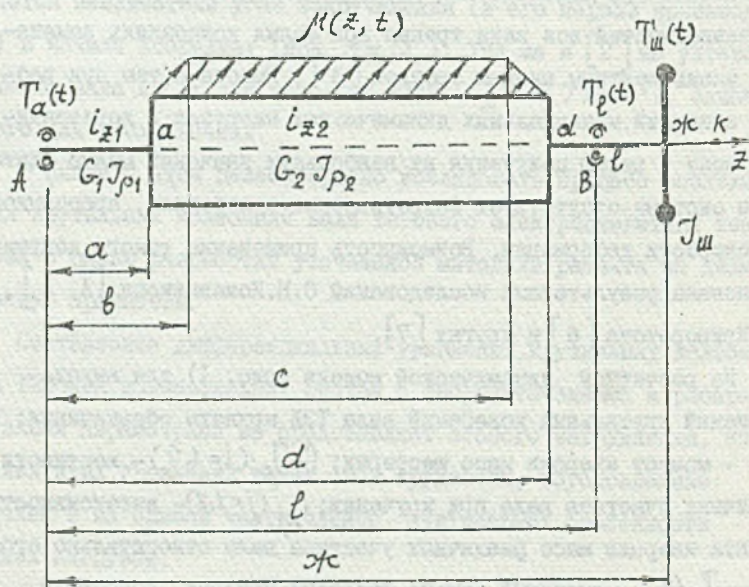


Рис. 1. Расчетная динамическая модель вала тягового электродвигателя тепловоза

Rys. 1. Model dynamiczny wału napędowego silnika lokomotywy elektrycznej

(μ и α_0 — постоянные для данного диапазона скоростей, определяемые по тяговой характеристике тепловоза [2]). В таком случае интенсивность нагрузки $\mu(z)$ будет разрывной функцией z [8]:

$$\mu(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < a \text{ и } z > d; \\ \mu(1 - \alpha_0 \omega) & \text{при } a < z < d. \end{cases}$$

Чтобы представить $\mu(z)$ одним аналитическим выражением, годным при любом значении координаты z в интервале $0 \leq z \leq \pi$, воспользуемся запаздывающей единичной функцией Хевисайда $\sigma_0(z - z_0)$ [$z_0 \in \{a, b, c, d\}$]:

$$\begin{aligned} \mu(z) = \mu(1 - \alpha_0 \omega) & \left[\frac{z - a}{b - a} (\sigma_0(z - a) - \right. \\ & - \sigma_0(z - b)) + (\sigma_0(z - b) - \sigma_0(z - c)) - \\ & \left. - \frac{z - c}{d - c} (\sigma_0(z - c) - \sigma_0(z - d)) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где μ — значения интенсивности внешней нагрузки, принимаемой постоянной в интервале $a \leq z \leq d$.

Поскольку к валу якоря в опоре В (в точке $z = l$) приложен момент трения $T_f(t)$ интенсивность нагрузки $q(z, t)$ окончательно можно представить одним аналитическим выражением, годным при любом значении координаты z в интервале $0 \leq z \leq \pi$, в виде

$$q(z, t) = -T_f(t) \sigma_1(z - l) + \mu(z, t), \quad (3)$$

где $\sigma_1(z - l)$ — импульсная функция первого порядка.

На основании принятой динамической модели и основных допущений можно записать выражение [9]:

кинетической энергии вала

$$T' = \frac{1}{2} \int_0^l i_z \left(\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} \right)^2 dz; \quad (4)$$

потенциальной энергии кручения вала

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \left(\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz; \quad (5)$$

потенциальной энергии вала ТЭД от действия интенсивности внешних нагрузок

$$\Pi_2 = - \int_0^l q(z, t) \theta(z, t) dz, \quad (6)$$

где $\theta(z, t)$ - угол поворота сечения z вала в момент времени t .

Для составления уравнений крутильных колебаний вала ТЭД используем вариационный принцип Остроградского - Гамильтона [9, 10], сущность которого сводится к необходимому условию $\delta S = 0$ экстремума интеграла

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi_1 - \Pi_2) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[i_z \left(\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} \right)^2 - G J_p \left(\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \right)^2 + 2 q(z, t) \theta(z, t) \right] dt dz. \quad (7)$$

Уравнение крутильных колебаний вала получим используя уравнение Эйлера по отысканию экстремума функционала [9, 10].

В соответствии с этим уравнение крутильных колебаний вала ТЭД с кусочно-постоянной жесткостью при действии на него сосредоточенной и распределенной нагрузок запишем одним аналитическим выражением при помощи регулярных и сингулярных обобщенных функций в виде

$$i(z) \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial t^2} - G J_p(z) \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial z^2} = q(z, t). \quad (8)$$

Здесь $i(z)$ и $G J_p(z)$ - кусочно-постоянные интенсивности моментов инерции масс различных участков и жесткость при кручении, определяемые по выражениям

$$i(\bar{z}) = i_{\bar{z}_1} [1 + \alpha (\sigma_0(\bar{z} - \alpha) - \sigma_0(\bar{z} - d))];$$

$$GJ_p(\bar{z}) = GJ_{p1} [1 + \beta (\sigma_0(\bar{z} - \alpha) - \sigma_0(\bar{z} - d))],$$

где $\alpha = \frac{i_{z2} - i_{z1}}{i_{z1}}$ и $\beta = \frac{GJ_{p2} - GJ_{p1}}{GJ_{p1}}$ — коэффициенты, учитывающие изменения соответственно интенсивности моментов инерции масс и геометрических характеристик отдельных участков.

Действие моментов сопротивлений (в виде момента полезного сопротивления колесной пары тепловоза, приложенной к шестерни привода ($T_{ш}(t)$), и моментов трения в опорах ($T_{\alpha}(t)$ и $T_{\beta}(t)$)) вызывает изменение скорости вращения вала и закручивание его сечений друг относительно друга. Поэтому, чтобы разделить эти составляющие движения, представим угол поворота вала в виде суммы [12]

$$\theta(\bar{z}, t) = \varphi(t) + \beta(\bar{z}, t), \quad (9)$$

где $\varphi(t)$ — угол поворота вала как жесткого тела, одинаковых для всех сечений;

$\beta(\bar{z}, t)$ — угол закручивания сечений.

Подставив (9) в (8) и учитывая уравнения вращения вала как жесткого тела в виде

$$J_{я} \ddot{\varphi}(t) = T_{ш}(t),$$

где $J_{я}$ — момент инерции массы якоря тягового электродвигателя, окончательно получим уравнение крутильных колебаний вала тягового электродвигателя в виде

$$\begin{aligned} i(\bar{z}) \frac{\partial^2 \beta(\bar{z}, t)}{\partial t^2} - GJ_p(\bar{z}) \frac{\partial^2 \beta(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}^2} = \\ = -i(\bar{z}) \frac{T_{ш}(t)}{J_{я}} + q(\bar{z}, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, крутильные колебания вала тягового электродвигателя тепловоза, представляющего собой круглый сплошной вал с кусочно-постоянной жесткостью, описывается неоднородным

дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами с учетом действия внешних нагрузок, задаваемых посредством регулярных и сингулярных обобщенных функций.

2. Решение уравнений крутильных колебаний вала тягового электродвигателя

Рассматривая вынужденные колебания вала тягового электродвигателя, решение уравнений крутильных колебаний будем отыскивать в форме, соответствующей характеру изменения внешних нагрузок

$$\beta(z, t) = \beta_0(z) + \sum_{n=1}^m \beta_n(z) \sin n\omega t, \quad (II)$$

где $\beta_0(z)$ — угол закручивания сечений вала от постоянных составляющих внешних нагрузок;

$\beta_n(z)$ — угол закручивания сечений вала от "n" гармоник внешних нагрузок, определяющий форму колебаний.

Согласно принятой динамической модели граничные условия задачи имеют следующий вид

$$G J_p \left. \frac{\partial \beta(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = -T_a(t); \quad (I2)$$

$$G J_p \left. \frac{\partial \beta(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = -T_w(t) + J_w \frac{\partial^2 \beta(z, t)}{\partial t^2} \quad (I3)$$

Условия (I2) и (I3) не позволяют определять углы поворотов на концевых участках. Для решения такой задачи воспользуемся методом двух расчетов, предложенным В.Л.Бидерманом [I4]. Сущность метода состоит в том, что сначала задают произвольно амплитуду колебаний левого конца вала (например, можно принять $\beta(0) = 0$), после чего находят амплитудные значения угла закручивания $\beta^a(z)$ и крутящего момента T^a на правом

конце вала (например, в точке \bar{z}_k), расположенным правее правого свободного конца.

При этом в правой части уравнений колебаний вала на участке при $\bar{z} = d \dots k$ необходимо учитывать действие момента сопротивления $T_{ш}(t)$ и инерционность массы $J_{ш}$ на правом свободном конце вала. Момент сопротивления на конце вала при $\bar{z} = \bar{z}_k$ в действительности равен нулю. Однако в данном случае это условие не удовлетворяется. Таким образом, получают частное решение данной задачи. Затем задают отличное от нуля значение амплитуды момента сопротивления $T_{\alpha}(t)$ на левом конце вала (например, $\beta(0) = 1$) и вычисляют значения $\beta^{\beta}(\bar{z})$ и T^{β} на правом конце. Таким путем получают второе решение задачи. Окончательное решение принимают в виде

$$\beta_i = \beta_i^{\alpha} + C \beta_i^{\beta}; \quad (14)$$

$$T_{i,i+1} = T_{i,i+1}^{\alpha} + C T_{i,i+1}^{\beta}, \quad (15)$$

где i - любое произвольно рассматриваемое сечение вала;

C - некоторая постоянная.

Постоянную C определяют так, чтобы решение удовлетворяло граничному сечению на правом конце системы, например, при $\bar{z} = \bar{z}_k$. Поскольку этот конец свободен, то принимают

$$C = - \frac{T^{\alpha}}{T^{\beta}}. \quad (16)$$

В дальнейшем в правой части уравнения колебаний вала при $\bar{z} = d \dots k$ учитываем действие момента сопротивления $T_{ш}(t)$ и инерционность массы $J_{ш}$.

Подставив (II) в (IO), после несложных математических преобразований, получим следующие дифференциальные уравнения амплитудных функций от постоянных и переменных составляющих внешних нагрузок

$$\beta_0''(z) = \frac{1}{G J_p(z)} \left\{ i(z) \frac{T_{\omega}^0}{J_{\alpha}} + \right. \\ \left. + T_{\ell}^0 \sigma_1(z-\ell) - \mu(1-\alpha_0 \omega) \cdot \right. \\ \left[\frac{z-a}{b-a} (\sigma_0(z-a) - \sigma_0(z-b)) + \right. \\ \left. + (\sigma_0(z-b) - \sigma_0(z-c)) - \frac{z-c}{d-c} (\sigma_0(z-c) - \right. \\ \left. - \sigma_0(z-d)) \right] + (T_{\omega}^0 - J_{\omega} \frac{T_{\omega}^0}{J_{\alpha}}) \sigma_1(z-\kappa); \quad (17)$$

$$\beta_n''(z) + \alpha^2(z) \beta_n(z) = \\ = \frac{1}{G J_p(z)} \left[i(z) \frac{T_{\omega}^n}{J_{\alpha}} + T_{\ell}^n \sigma_1(z-\ell) - \right. \\ \left. - (T_{\omega}^n - J_{\omega} \frac{T_{\omega}^n}{J_{\alpha}} + J_{\omega} (n\omega)^2 \beta_n(z)) \cdot \right. \\ \left. \cdot \sigma_1(z-\kappa) \right], \quad (18)$$

где $\alpha(z) = n\omega \left(\frac{i(z)}{G J_p(z)} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Уравнения (17) и (18), имеющие кусочно-постоянные коэффициенты, будем решать способом припасовывания: запишем решение для каждого участка, внутри которого коэффициенты постоянны, а затем будем припасовывать одно решение к другому с использованием условий сопряжения отдельных участков [8].

При этом условия сопряжения участков (одинаковость углов поворотов и крутящих моментов в точках сопряжений при $z = a$ и $z = d$ будут иметь вид

$$\beta_2(z, t) \Big|_{z=a} = \beta_1(z, t) \Big|_{z=a}; \quad (19)$$

$$G_2 J_{p2} \frac{\partial \beta_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=a} = G_1 J_{p1} \frac{\partial \beta_1(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=a}; \quad (20)$$

$$\beta_3(z, t) \Big|_{z=d} = \beta_2(z, t) \Big|_{z=d}; \quad (21)$$

$$G_1 J_{p1} \frac{\partial \beta_3(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=d} = G_2 J_{p2} \frac{\partial \beta_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=d} \quad (22)$$

Исходя из этого уравнения амплитудных функций от постоянных и переменных составляющих нагрузок (17) и (18) представим в виде

для участка вала при $0 \leq z \leq a$

$$\beta_{01}''(z) = \frac{i_{z1}}{G_1 J_{p1}} \cdot \frac{T_w^0}{J_g}; \quad (23)$$

$$\beta_{n1}''(z) + \alpha \beta_{n1}(z) = \frac{i_{z1}}{G_1 J_{p1}} \cdot \frac{T_w^n}{J_g}, \quad (24)$$

где $\alpha = n\omega \left(\frac{i_{z1}}{G_1 J_{p1}} \right)^{\frac{1}{2}};$

для участка вала при $a \leq z \leq d$

$$\beta_{02}''(z) = \frac{1}{G_2 J_{p2}} \left[i_{z2} \frac{T_{ш}^0}{J_{я}} - \right. \\ \left. - \mu(1 - \alpha_0 \omega) \left[\frac{z-a}{b-a} (\sigma_0(z-a) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_0(z-b)) + (\sigma_0(z-b) - \sigma_0(z-c)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{z-c}{d-c} (\sigma_0(z-c) - \sigma_0(z-d)) \right] \right]; \quad (25)$$

$$\beta_{n2}''(z) + \gamma \beta_{n2}(z) = \frac{i_{z2}}{G_2 J_{p2}} \cdot \frac{T_{ш}^n}{J_{я}}, \quad (26)$$

где $\gamma = n\omega \left(\frac{i_{z2}}{G_2 J_{p2}} \right)^{\frac{1}{2}}$;

для участка вала при $d \leq z \leq k$

$$\beta_{03}''(z) = \frac{1}{G_1 J_{p1}} \left[i_{z1} \frac{T_{ш}^0}{J_{я}} + T_{\ell}^0 \sigma_1(z-\ell) + \right. \\ \left. + \left(T_{ш}^0 - J_{ш} \frac{T_{ш}^0}{J_{я}} \right) \sigma_1(z-\kappa) \right]; \quad (27)$$

$$\beta_{n3}''(z) + \alpha^2 \beta_{n3}(z) = \\ = \frac{1}{G_1 J_{p1}} \left[\frac{i_{z1}}{J_{я}} \frac{T_{ш}^n}{J_{я}} + T_{\ell}^n \sigma_1(z-\ell) + \right. \\ \left. + \left(T_{ш}^n - J_{ш} \frac{T_{ш}^n}{J_{я}} + J_{ш} (n\omega)^2 \beta_{n3}(z) \right) \sigma_1(z-\kappa) \right] \quad (28)$$

Для решения полученных дифференциальных уравнений колебаний (23)...(28) используем метод операционного исчисления с применением преобразования Лапласа [15, ..., 17].

Примем, что преобразования по Лапласу функции координаты z в уравнениях (23)...(28) имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_{01}(z) &\doteq A(\rho); & \beta_{n1}(z) &\doteq B(\rho); \\ \beta_{02}(z) &\doteq C(\rho); & \beta_{n2}(z) &\doteq D(\rho); \\ \beta_{03}(z) &\doteq E(\rho); & \beta_{n3}(z) &\doteq F(\rho); \\ \beta_{01}''(z) &\doteq \rho^2 A(\rho) - \rho \beta_{01}'(0) - \beta_{01}'(0); \\ \beta_{n1}''(z) &\doteq \rho^2 B(\rho) - \rho \beta_{n1}'(0) - \beta_{n1}'(0); \\ &\dots & & \dots \\ \beta_{n3}''(z) &\doteq \rho^2 F(\rho) - \rho \beta_{n3}'(z_0) - \beta_{n3}'(z_0); \\ \sigma_0(z) &\doteq \frac{1}{\rho}; & z &\doteq \frac{1}{\rho^2}; & \sigma_1(z-z_0) &\doteq e^{-\rho z_0}; \\ \sigma_0(z-z_0) &\doteq \rho e^{-\rho z_0} [z_0 \in \{a, b, c, d, \infty\}]; \\ (z-a) \sigma_0(z-a) &\doteq \int_a^{\infty} (z-a) e^{-\rho z} dz, \end{aligned} \quad (29)$$

где ρ - комплексный параметр с положительной вещественной частью.

Обозначив $\xi = z - a$, $d\xi = dz$, $z = \xi + a$, получим

$$(z-a) \sigma_0(z-a) \doteq e^{-\rho a} \int_a^{\infty} \xi e^{-\rho \xi} d\xi = e^{-\rho a} \cdot \frac{1}{\rho^2} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (z-a) \sigma_0(z-b) &\doteq \int_b^{\infty} (z-a) e^{-\rho z} dz = \\ &= \int_b^{\infty} (z-b) e^{-\rho z} dz + \int_b^{\infty} (b-a) e^{-\rho z} dz = \\ &= e^{-\rho b} \cdot \frac{1}{\rho^2} + (b-a) \left(-\frac{1}{\rho}\right) e^{-\rho z} \Big|_b^{\infty} = \\ &= e^{-\rho b} \frac{1}{\rho^2} + (b-a) \frac{1}{\rho} e^{-\rho b} = \frac{(b-a) + \rho}{\rho^2} e^{-\rho b} \end{aligned} \quad (31)$$

В связи с этим изображающие уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям колебаний (23)...(28), после выполнения элементарных математических выкладок, имеют следующий вид

для участка вала при $0 \leq z \leq \alpha$

$$A(\rho) = \frac{1}{\rho} \beta_{01}(0) + \frac{1}{\rho^2} \beta'_{01}(0) + \frac{i z_1}{G_1 J_{\rho 1}} \cdot \frac{T_{ш}^0}{J_{Я}} \cdot \frac{1}{\rho^3}; \quad (32)$$

$$B(\rho) = \beta_{n1}(0) \frac{\rho}{\rho^2 + \alpha^2} + \beta'_{n1}(0) \frac{1}{\rho^2 + \alpha^2} + \frac{i z_1}{G_1 J_{\rho 1}} \cdot \frac{T_{ш}^n}{J_{Я}} \cdot \frac{1}{\rho(\rho^2 + \alpha^2)} \quad (33)$$

для участка вала при $\alpha \leq z \leq d$

$$C(\rho) = \frac{1}{\rho} \beta_{02}(z_0) + \frac{1}{\rho^2} \beta'_{02}(z_0) + \frac{1}{G_2 J_{\rho 2}} \left\{ \frac{i z_1 T_{ш}^0}{J_{Я}} \cdot \frac{1}{\rho^3} - \mu(1 - \alpha_0 \omega) \cdot \left[\frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{-\rho a}}{\rho^2} - \frac{(b-a) + \rho}{\rho^2} e^{-\rho b} \right) + \left(\frac{e^{-\rho b}}{\rho} - \frac{e^{-\rho c}}{\rho} \right) - \frac{1}{d-c} \left(\frac{e^{-\rho c}}{\rho^2} - \frac{(d-c) + \rho}{\rho^2} e^{-\rho d} \right) \right] \frac{1}{\rho^2} \right\}; \quad (34)$$

$$D(\rho) = \beta_{n_2}(z_0) \frac{\rho}{\rho^2 + \gamma^2} + \beta'_{n_2}(z_0) \frac{1}{\rho^2 + \gamma^2} + \\ + \frac{i_{z_2}}{G_2 J_{\rho_2}} \cdot \frac{T_{\omega}^n}{J_{\gamma}} \cdot \frac{1}{\rho(\rho^2 + \gamma^2)}; \quad (35)$$

для участка вала при $d \leq z \leq k$

$$E(\rho) = \frac{1}{\rho} \beta_{03}(z_0) + \frac{1}{\rho^2} \beta'_{03}(z_0) + \\ + \frac{1}{G_1 J_{\rho_1}} \left[\frac{i_{z_1} T_{\omega}^n}{J_{\gamma}} \cdot \frac{1}{\rho^3} + T_{\ell}^0 \frac{e^{-\rho \ell}}{\rho^2} + \right. \\ \left. + \left(T_{\omega}^0 - J_{\omega} \frac{T_{\omega}^0}{J_{\gamma}} \right) \frac{e^{-\rho \kappa}}{\rho^2} \right]; \quad (36)$$

$$F(\rho) = \beta_{n_3}(0) \frac{\rho}{\rho^2 + \alpha^2} + \beta'_{n_3}(0) \frac{1}{\rho^2 + \alpha^2} + \\ + \frac{1}{G_1 J_{\rho_1}} \left[\frac{i_{z_1} T_{\omega}^n}{J_{\gamma}} \cdot \frac{1}{\rho(\rho^2 + \alpha^2)} + T_{\ell}^n \frac{e^{-\rho \ell}}{\rho^2 + \alpha^2} + \right. \\ \left. + \left(T_{\omega}^n - J_{\omega} \frac{T_{\omega}^n}{J_{\gamma}} + J_{\omega} (n\omega)^2 \beta_{n_3}(z) \right) \cdot \frac{e^{-\rho \kappa}}{\rho^2 + \alpha^2} \right]; \quad (37)$$

Используя обозначения, принятые в [15, ..., 17] на основе правила интегрирования оригинала, теоремы смещения и др., запишем соответствие полученных изображений

$$\frac{1}{\rho^{n+1}} \doteq \frac{z^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots); \\ \frac{1}{\rho^2} e^{-\rho z_0} \doteq (z - z_0) \delta_0(z - z_0);$$

$$\frac{P}{\rho^2 + m^2} \doteq \cos m\bar{z}; \quad \frac{m}{\rho^2 + m^2} \doteq \sin m\bar{z};$$

$$\frac{m}{\rho^2 + m^2} e^{-\rho\bar{z}_0} \doteq \sin m(\bar{z} - \bar{z}_0);$$

$$M(\rho) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho^2 + m^2} \doteq \frac{2}{m^2} \sin^2 m \frac{\bar{z}}{2},$$

где $m \in \{\alpha, \gamma\}$; $\bar{z}_0 \in \{a, b, c, d, \kappa\}$.

Учитывая вышеизложенное, можно записать оригинал изображающих уравнений (32)...(37) в виде

для участка вала при $0 \leq \bar{z} \leq \alpha$

$$\beta_{01}(\bar{z}) = \beta_{01}(0) + \beta'_{01}(0)\bar{z} + \frac{i z_1}{2G_1 J_{p1}} \cdot \frac{T_{ш}^0}{J_{\alpha}} \bar{z}^2; \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\pi_1}(\bar{z}) = & \beta_{\pi_1}(0) \cos \alpha \bar{z} + \frac{1}{\alpha} \beta'_{\pi_1}(0) \sin \alpha \bar{z} + \\ & + \frac{2 T_{ш}^n}{(n\omega)^2 J_{\alpha}} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \bar{z}; \end{aligned} \quad (39)$$

для участка вала при $\alpha \leq \bar{z} \leq d$

$$\begin{aligned} \beta_{02}(\bar{z}) = & \beta_{02}(\alpha) + \beta'_{02}(\alpha)\bar{z} + \frac{1}{G_2 J_{p2}} \left[\frac{i z_2 T_{ш}^0}{2 J_{\alpha}} \bar{z}^2 - \right. \\ & - \mu(1 - \alpha_0 \omega) \left\{ \frac{1}{b - \alpha} \left[\frac{(\bar{z} - \alpha)^3}{6} \zeta_0(\bar{z} - \alpha) - \right. \right. \\ & - \left. \left. \left(\frac{(\bar{z} - b)^3}{6} + \frac{(\bar{z} - b)^2}{2} (b - \alpha) \right) \zeta_0(\bar{z} - b) \right] + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[(\bar{z} - b)^2 \zeta_0(\bar{z} - b) - (\bar{z} - c)^2 \zeta_0(\bar{z} - c) \right] - \\ & - \frac{1}{d - c} \left[\frac{1}{6} (\bar{z} - c)^3 \zeta_0(\bar{z} - c) - \left(\frac{1}{6} (\bar{z} - d)^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (\bar{z} - d)^2 (d - c) \right) \zeta_0(\bar{z} - d) \right] \left. \right\}; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\beta_{n2}(z) = \beta_{n2}(a) \cos \gamma z + \frac{1}{\gamma} \beta'_{n2}(a) \sin \gamma z + \quad (41)$$

$$+ \frac{2 T_{\omega}^n}{(n\omega)^2 J_{\alpha}} \sin^2 \gamma \frac{z}{2};$$

для участка вала при $a \leq z \leq k$

$$\beta_{03}(z) = \beta_{03}(a) + \beta'_{03}(a) z +$$

$$+ \frac{1}{G_1 J_{\rho 1}} \left[\frac{i_{z1} T_{\omega}^0}{2 J_{\alpha}} z^2 + T_{\ell}^0 (z-l) \sigma_0(z-l) + \right. \quad (42)$$

$$\left. + (T_{\omega}^0 - J_{\omega} \frac{T_{\omega}^0}{J_{\alpha}}) (z-k) \sigma_0(z-k) \right];$$

$$\beta_{n3}(z) = \beta_{n3}(d) \cos \alpha z + \frac{1}{\alpha} \beta'_{n3}(d) \sin \alpha z +$$

$$+ \frac{1}{G_1 J_{\rho 1}} \left[\frac{2 i_{z1} T_{\omega}^n}{\alpha^2 J_{\alpha}} \sin^2 \frac{\alpha}{2} z + \frac{1}{\alpha} T_{\ell}^n \sin(z-l) \cdot \right.$$

$$\cdot \sigma_0(z-l) + \frac{1}{\alpha} (T_{\omega}^n - J_{\omega} \frac{T_{\omega}^n}{J_{\alpha}} + \quad (43)$$

$$\left. + J_{\omega} (n\omega)^2 \beta_{n3}(k) \right] \sin(z-k) \sigma_0(z-k),$$

где $\beta_{n3}(k) = \beta_{n3}(d) \cos \alpha k + \frac{1}{\alpha} \beta'_{n3}(d) \sin \alpha k +$

$$+ \frac{1}{G_1 J_{\rho 1}} \left(\frac{2 i_{z1} T_{\omega}^n}{\alpha^2 J_{\alpha}} \sin^2 \frac{\alpha}{2} k + \frac{1}{\alpha} T_{\ell}^n \sin(k-l) \right).$$

Постоянные $\beta'_{01}(0)$ и $\beta'_{n1}(0)$, определяемые с использованием граничного условия (12), имеют следующий вид

$$\beta'_{01}(0) = - \frac{T_a^0}{G_1 J_{\rho 1}}; \quad \beta'_{n1}(0) = - \frac{T_a^n}{G_1 J_{\rho 1}}.$$

Значением постоянных $\beta_{01}(0)$ и $\beta_{n1}(0)$ согласно методу двух расчетов [14] задаемся.

Постоянные $\beta_{02}(\alpha)$ и $\beta'_{02}(\alpha)$, определенные с использованием граничных условий (19) и (20) на границах участков $0 \leq z \leq \alpha$ и $\alpha \leq z \leq d$, имеют вид

$$\beta_{02}(\alpha) = \beta_{01}(0) + \beta'_{01}(0) \alpha + \frac{i z_1}{2G_1 J_{\rho 1}} \cdot \frac{T_{ш}^0}{J_{\rho}} \alpha^2;$$

$$\beta'_{02}(\alpha) = \frac{1}{G_2 J_{\rho 2}} \left(-T_{\alpha}^0 + i z_1 \frac{T_{ш}^0}{J_{\rho}} \alpha \right).$$

Для определения постоянных $\beta_{n2}(\alpha)$ и $\beta'_{n2}(\alpha)$ составим систему уравнений с использованием условий (19) и (20), в результате чего, после элементарных математических выкладок, получим

$$\beta_{n2}(\alpha) = A_1 \cos \gamma \alpha - A_2 \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \alpha;$$

$$\beta'_{n2}(\alpha) = \gamma A_1 \sin \gamma \alpha + A_2 \frac{1}{\gamma} \cos \gamma \alpha,$$

где
$$A_1 = \beta_{n1}(0) \cos \alpha + \frac{1}{\alpha} \beta'_{n1}(0) \sin \alpha + \frac{2 T_{ш}^n}{(n\omega)^2 J_{\rho}} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \alpha - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \alpha \right);$$

$$A_2 = \frac{G_1 J_{\rho 1}}{G_2 J_{\rho 2}} \left(-\alpha \beta_{n1}(0) \sin \alpha + \beta'_{n1}(0) \cos \alpha + \frac{\alpha T_{ш}^n}{2(n\omega)^2 J_{\rho}} \sin \alpha \right) - \frac{\gamma T_{ш}^n}{2(n\omega)^2 J_{\rho}} \sin \gamma \alpha.$$

Постоянные $\beta_{03}(d)$ и $\beta'_{03}(d)$, определенные с использованием условий сопряжений (21) и (22) на границах участков $\alpha \leq z \leq d$ и $d \leq z \leq k$, имеют вид

$$\begin{aligned}
\beta_{03}(d) &= \beta_{02}(\alpha) + (\beta'_{03}(\alpha) - \beta'_{03}(d))d + \\
&+ \frac{T_w^0}{2J_A} \left(\frac{i_{z2}}{G_2 J_{p2}} - \frac{i_{z1}}{G_1 J_{p1}} \right) d^2 - \frac{1}{G_2 J_{p2}} \mu(1-\alpha_0\omega) \cdot \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{b-\alpha} \left[\frac{1}{6} (d-\alpha)^3 \zeta_0(z-\alpha) - \left(\frac{1}{6} (d-b)^3 + \right. \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{1}{2} (d-b)^2 (b-\alpha) \right) \zeta_0(z-b) \right] + \\
&\left. + \frac{1}{2} \left((d-b)^2 \zeta_0(z-b) - (d-c)^2 \zeta_0(z-c) \right) \right\}; \\
\beta'_{03}(d) &= \frac{G_2 J_{p2}}{G_1 J_{p1}} \left(\beta'_{02}(\alpha) + \frac{1}{G_2 J_{p2}} \left[\frac{i_{z2} T_w^0}{J_A} d - \right. \right. \\
&- \mu(1-\alpha_0\omega) \left\{ \frac{1}{b-\alpha} \left[\frac{1}{2} (d-\alpha)^2 \zeta_0(z-\alpha) - \right. \right. \\
&- \left. \left. \left(\frac{1}{2} (d-b)^2 + (d-b)(b-\alpha) \right) \zeta_0(z-b) \right] + \right. \\
&\left. \left. + (d-b) \zeta_0(z-b) - (d-c) \zeta_0(z-c) \right\} \right] - \frac{i_{z1} T_w^0}{G_1 J_{p1} J_A} d.
\end{aligned}$$

Постоянные $\beta_{n3}(d)$ и $\beta'_{n3}(d)$ определяем, составляя систему уравнений с использованием граничных условий (21) и (22), в результате чего, после несложных математических преобразований, получим

$$\begin{aligned}
\beta_{n3}(d) &= A_3 \cos \alpha d - A_4 \frac{1}{\alpha} \sin \alpha d; \\
\beta'_{n3}(d) &= A_3 \alpha \sin \alpha d + A_4 \cos \alpha d,
\end{aligned}$$

где

$$A_3 = \beta_{n_2}(\alpha) \cos \gamma d + \frac{1}{\gamma} \beta'_{n_2}(\alpha) \sin \gamma d + \\ + \frac{2 T_{ш}^n}{(n\omega)^2 J_{я}} \left(\sin^2 \frac{\gamma}{2} d - \sin^2 \frac{\alpha}{2} d \right);$$

$$A_4 = \frac{G_2 J_{\rho_2}}{G_1 J_{\rho_1}} \left[-\gamma \beta_{n_2}(\alpha) \sin \gamma d + \right. \\ \left. + \beta'_{n_2}(\alpha) \cos \gamma d + \frac{\gamma T_{ш}^n}{(n\omega)^2 J_{я}} \sin \gamma d \right] - \\ - \frac{\alpha T_{ш}^n}{(n\omega)^2 J_{я}} \sin \alpha d.$$

Подставляя уравнения (38)...(43) в выражение (II), получим закономерности углов закручивания для любого сечения вала якоря тягового электродвигателя, а затем, взяв от них производную по координате z и умножив ее на жесткость вала при кручении $G J_{\rho}$, получим закономерности изменения упругих моментов, позволяющих вычислить динамические напряжения кручения в любом сечении вала.

Для выполнения расчетов на динамическую прочность вала ТЭД необходимо проведение экспериментальных исследований по определению геометрических ($G J_{\rho}$) и массовых ($J_{ш}, J_{я}$) характеристик расчетной схемы и изучению закономерностей нагружения вала якоря тягового электродвигателя моментами, необходимыми для приведения в движение и для преодоления сопротивлений вращению, динамической нагруженности опор и по преодолению их числовых значений.

Выводы

1. Составленная динамическая модель, представляющая собой круглый сплошной вал с кусочно-постоянной жесткостью, позволяет описать крутильные колебания вала тягового электродвигателя тепловоза неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами с учетом конструктивных особенностей и закономерностей внешних нагрузок, задаваемых посредством регулярных и сингулярных обобщенных функций.

2. Полученные аналитические зависимости позволяют разработать методику динамического расчета на прочность, а на их основе определять рациональные конструктивные параметры таких конструкций еще на стадии проектирования машин.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Конструкция и динамика тепловозов. Под ред. В.Н. Иванова, М.: Транспорт, 1974. - 336 с.
- [2] Киселев В.И. Исследование и разработка конструкций валов тяговых электродвигателей повышенной прочности для тепловозов. Автореф. дис. канд. техн. наук. Москва, 1976, 23 с.
- [3] Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Наука, 1977 - 444 с.
- [4] Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. - Киев: Изд. АН УССР, 1961, - 160 с.
- [5] Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. - Киев: Наукова думка, 1986. - 288 с.
- [6] Криворотов Е.С. Исследование переходных процессов при замыкании и размыкании однооборотных муфт в дифференциально-суммирующих приводах с программным управлением. - В кн.: Динамика машин. - М.: Наука, 1974. - 73-79.
- [7] Островерхов Н.Л., Русецкий И.К., Бойко Л.И. Динамическая нагруженность трансмиссии колесных машин. - Минск: Наука и техника, 1977. - 192 с.
- [8] Лазарин В.А., Кошаченко С.Н. Обобщенные функции в задачах механики. Киев: Наукова думка, 1974. - 191 с.
- [9] Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1965, - 560 с.
- [10] Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. - М.: Наука,
- [11] Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. - М. - Л. - ГИИТЛ, 1952. - 166 с.
- [12] Детнико ЭФ.М., Загородная Г.А., Фастовский В.М. Прочность и колебания электрических машин. - Л.: Энергия, 1969. - 440 с.

- [13] Туранов Х.Т. Колебания и нагруженность составных валов барабанного типа некоторых хлопковых машин. Ташкент: Фан, 1982. - 168 с.
- [14] Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высшая школа, 1980. - 408 с.
- [15] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. - 688 с.
- [16] Шахно К.У. Элементы теории комплексного переменного и операционного исчисления. - Минск: Вышэйшая школа, 1975. - 400 с.
- [17] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1968. - 720 с.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do Redakcji w styczniu 1990 r.

DYNAMIKA SILNIKÓW NAPĘDOWYCH LOKOMOTYW

S t r e s z c z e n i e

W artykule rozpatrywano model dynamiczny, wyprowadzenie i rozwiązanie równań drgań skrętnych wału napędowego silnika lokomotywy, przedstawiony jako wał ze zmienną sztywnością. Równanie różniczkowe drugiego rodzaju względniącące siły zewnętrzne przedstawione za pomocą funkcji uogólnionych daje możliwość przeprowadzenia analizy dynamicznej układu napędowego lokomotyw.

LOCOMOTIVE TRACTIVE MOTOR'S DYNAMIC

S u m m a r y

The paper presents the dynamic model of locomotive tractive electric motor. This model gives the opportunity to describe vibration of motor shaft, according to its construction characteristics and internal forces. Analytical dependences, described in the article helps in producing dynamic calculation methods of motors and estimating their construction featurer at the stage of designing.