

Wiesław SZAFRAŃSKI

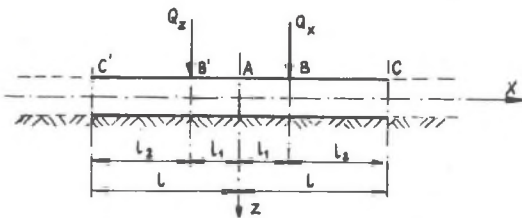
Instytut Transportu

Politechnika Warszawska

WYZNACZANIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH W SZYNI KOLEJOWEJ  
OBCIĄŻONEJ POJAZDEM

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono metodę wyznaczania sił wewnętrznych w szynie obciążonej składem wagonów. Przyjęto tzw. podstawowy schemat obciążenia. Odpowiednie zestawienie schematów podstawowych przedstawia schemat rzeczywisty. Wartości szukanych parametrów otrzymuje się stosując zasadę superpozycji w odniesieniu do wartości obliczonych dla schematu podstawowego.

Praca ma na celu określenie sił wewnętrznych w szynie oraz odkształceń szyny w zależności od jej typu i schematu obciążeń pojazdem. W tym celu rozpatrzono szynę jako belkę spoczywającą na jednorodnym sprężystym podłożu, spełniającym założenia Winklera 1. Jako podstawowy schemat przyjmuje się belkę obciążoną dwiema siłami (od dwóch kół jednego wózka) odległymi od siebie o odcinek  $2 l_1$  odpowiadający rozstawowi osi. Belkę taką traktuje się jako nieskończenie długą. Można jednak również rozpatry-



Rys. 1. Belka na sprężystym podłożu  
Fig. 1. The beam on the elastic base

wać jej skończony odcinek pod warunkiem, że na jego końcach będą jednocześnie określone warunki brzegowe. W przekrojach położonych na prawo od punktu C (rys. 1) belki nieskończonej 1, zarówno przemieszczenia jak i siły wewnętrzne będą pomijalnie małe, jeżeli odległość  $l_2$  między punktami B i C spełniać będzie następującą zależność:

$$l_2 > 5 \sqrt[4]{\frac{4 E J}{K}}, \quad (1)$$

gdzie:

E - moduł Younga materiału szyny,

$I$  - moment bezwładności przekroju poprzecznego szyny,  
 $K$  - współczynnik sprężystości podłoża.

Jeżeli więc przyjąć długość odcinków  $l_2$  zgodnie z warunkiem (1), to rozwiązanie belki  $CC'$  jest praktycznie jednoznaczne z rozwiązaniem belki nieskończenie długiej. Taki sposób rozwiązania przyjęto ze względu na istnienie programu na EMC Odra 1305 [2] dostosowanego do dowolnie obciążonych belek o skończonej długości. Wyniki obliczeń dla schematu przedstawionego na rys. 1, są uniwersalne do określenia przemieszczeń i sił wewnętrznych w szynie obciążonej dowolnie ustawionymi wózkami wagonów, z możliwością także zróżnicowania obciążeń przypadających na poszczególne wózki. Zachowane muszą być jedynie: rodzaj podłoża, typ nawierzchni oraz rozstaw  $2 l_1$  osi poszczególnych wózków. Rozwiązania takie uzyskuje się na drodze superpozycji. Ze względu na brak obciążeń ciągłych, przemieszczenia na wybranym odcinku belki opisuje jednorodne równanie różniczkowe:

$$E J \frac{d^4 z(x)}{dx^4} + K z(x) = 0 \quad (2)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4 E J}} \quad (3)$$

oraz zastępując odciętą  $x$  przez bezwymiarową odciętą  $\xi$ , gdzie:

$$\xi = \beta x \quad (4)$$

równanie (2) przybierze postać:

$$\frac{d^4 z}{d\xi^4} + 4\beta^4 z = 0 \quad (5)$$

Całka ogólna tego równania jest następująca:

$$z(\xi) = C_1 e^{\xi} \cos \xi + C_2 e^{\xi} \sin \xi + C_3 e^{-\xi} \cos \xi + C_4 e^{-\xi} \sin \xi \quad (6)$$

Po zróżniczkowaniu (6) otrzymuje się równanie kątów obrotu  $\alpha$  przekrojów poprzecznych belki, tzn.

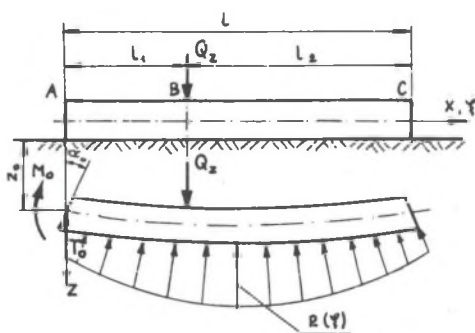
$$\begin{aligned} \alpha(\xi) = \frac{dz}{dx} = \beta \frac{dz}{d\xi} = \beta & \left[ C_1 e^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) + \right. \\ & + C_2 e^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) - C_3 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + \\ & \left. + C_4 e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

Siły wewnętrzne są proporcjonalne do kolejnych pochodnych funkcji ugięcia (6), czyli:

$$M_{gz}(\xi) = -E J \frac{d^2 z}{dx^2} = -\beta^2 E J \frac{d^2 z}{d\xi^2} = 2 E J \beta^2 (C_1 e^{\xi} \sin \xi + C_2 e^{\xi} \cos \xi - C_3 e^{-\xi} \sin \xi + C_4 e^{-\xi} \cos \xi) \quad (8)$$

$$T_z(\xi) = -E J \frac{d^3 z}{dx^3} = -\beta^3 E J \frac{d^3 z}{d\xi^3} = 2 E J \beta^3 [C_1 e^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) - C_2 e^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - C_3 e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) + C_4 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)] \quad (9)$$

Bezpośrednie korzystanie z takiego rozwiązania jest zwykle kłopotliwe z powodu konieczności wyznaczenia (z warunków brzegowych) dużej liczby stałych całkowania  $C_i$  (gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Jest ich czterokrotnie więcej niż liczba odcinków belki, na których zachowana jest ciągłość funkcji przemieszczeń i sił wewnętrznych.



Rys. 2. Niejednostajny rozkład reakcji podłoża pod ugiętą belką

Fig. 2. Non-uniform distribution of the base reaction under the deflected beam

Stała sztywność giętna całej belki, jednorodne podłożie oraz nieskomplikowane obciążenia i warunki brzegowe pozwalają rozwiązanie uprościć przez zastosowanie metody parametrów początkowych [1]. W metodzie tej zakłada się, że równania (6-9) stanowią rozwiązanie dla odcinka belki przylegającego do początku układu. Oblizone z tych równań wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych dla  $\xi = 0$  są równe odpowiednim parametrom początkowym (rys. 2), czyli:

$$\begin{aligned} z(0) &= z_0 \\ \alpha(0) &= \alpha_0 \\ M_{gz}(0) &= M_0 \\ T_z(0) &= T_0 \end{aligned} \quad (10)$$

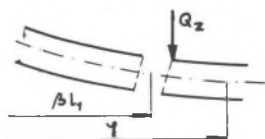
Wyznaczone z równań (10) stałe całkowania  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  wstawia się do równań (6-9). Otrzymuje się stąd dla odcinka  $0 \leq \xi \leq \beta l_1$  równania

składowych przemieszczeń i sił wewnętrznych, zależnie od nieznanymi tymczasem parametrów początkowych  $z_0$ ,  $\alpha_0$  i  $T_0$ . Ostateczną postać funkcji ugięcia dla odcinka  $0 \leq \xi \leq \beta l_1$  (tzn. dla  $0 \leq x \leq l_1$ ), po pominięciu omówionych przekształceń można zapisać w postaci:

$$z(\xi) = z_0 Y_1(\xi) + \alpha_0 \frac{1}{\beta} Y_2(\xi) - M_0 \frac{4\beta^2}{K} Y_3(\xi) - T_0 \frac{4\beta}{K} Y_4(\xi) \quad (11)$$

gdzie funkcje Kryłowa  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ ,  $Y_4$  mają postać:

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} (\operatorname{sh} \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \end{aligned} \quad (12)$$



$$\begin{aligned} \Delta Z &= 0 \\ \Delta \alpha &= 0 \\ \Delta M &= 0 \\ \Delta T &= -Q_z \end{aligned}$$

Rys. 3. Przyrost siły poprzecznej w następnym odcinku belki

Fig. 3. The transverse force increment in the next segment of the beam

Przechodząc w prawo do następnego odcinka belki  $\xi \geq \beta l_1$ , uwzględnia się w funkcji ugięcia bezpośredni wpływ obciążenia siłą  $Q_z$  (rys. 3). Wpływ ten zapisuje się podobnie jak wpływ parametru  $T_0$  (patrz wzór 11), lecz przy odciętej  $\xi - \beta l_1$ . Zgodnie z rys. 3 następuje tu przyrost siły poprzecznej  $\Delta T = -Q_z$ , a wzór (11) przy  $\xi > \beta l_1$  rozszerza się o składnik

$$Q_z \frac{4\beta}{K} Y_4(\xi - \beta l_1)$$

Kąty obrotu przekrojów belki oraz momenty zginające i siły poprzeczne są proporcjonalne do odpowiednich pochodnych funkcji ugięcia. Po wyznaczeniu pochodnych odpowiednich funkcji Kryłowa (12) ostateczne wzory są następujące:

$$\begin{aligned} z(\xi) &= z_0 Y_1(\xi) + \alpha_0 \frac{1}{\beta} Y_2(\xi) - M_0 \frac{4\beta^2}{K} Y_3(\xi) - T_0 - \frac{4\beta}{K} Y_4(\xi) \Big|_{AB} + \\ &+ Q_z \frac{4\beta}{K} Y_4(\xi - \beta l_1) \Big|_{BC} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= -z_0 4\beta Y_4(\xi) + \alpha_0 Y_1(\xi) - M_0 \frac{4\beta^3}{K} Y_2(\xi) - T_0 \frac{4\beta^2}{K} Y_3(\xi) \Big|_{AB} + \\ &+ Q_z \frac{4\beta^2}{K} Y_3(\xi - \beta l_1) \Big|_{BC} \end{aligned} \quad (14)$$

$$M_{gz}(\xi) = z_0 \frac{K}{\beta^2} Y_3(\xi) + \alpha_0 \frac{K}{\beta^3} Y_4(\xi) + M_0 Y_1(\xi) + T_0 \frac{1}{\beta} Y_2(\xi) \Big|_{AB} + \\ - Q_z \frac{1}{\beta} Y_2(\xi - \beta l_1) \Big|_{BC} \quad (15)$$

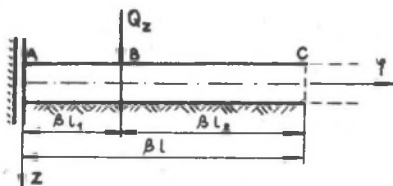
$$T_z = z_0 \frac{K}{\beta} Y_2(\xi) + \alpha_0 \frac{K}{\beta^2} Y_3(\xi) - M_0 4\beta Y_4(\xi) + T_0 Y_1(\xi) \Big|_{AB} + \\ - Q_z Y_1(\xi - \beta l_1) \Big|_{BC} \quad (16)$$

Każde z równań (13-16) od początku do pionowej kreski z indeksem AB odpowiada odcinkowi AB belki ( $0 \leq \xi \leq \beta l_1$ ). Natomiast całość każdego równania dotyczy odcinka BC belki ( $\beta l_1 \leq \xi \leq l$ ).

Reakcja podłoża, zgodnie z założeniem Winklera, jest proporcjonalna do ugięcia belki

$$R_z(\xi) + Kz(\xi) \quad (17)$$

Wyprowadzenie wzorów zawęza się do przypadku występującego w dalszym rozwijaniu (2 odcinki belki, obciążenie jedną siłą skupioną). Ze względu na symetrię przyjętego schematu statycznego belki oraz symetrię obciążenia (rys. 1), można rozwiązanie przeprowadzić jedynie dla prawej połowy belki.



Rys. 4. Schemat zastępczy prawej połowy belki na sprężystym podłożu

Fig. 4. The substitutional scheme of the right half of the beam on the elastic base

W przekroju A leżącym na osi symetrii zerowe są wartości kąta obrotu  $\alpha(0)$  i siły poprzecznej  $T(0)$ . W związku z tym na schemacie zastępczym prawej połowy belki w przekroju początkowym A wprowadzono podporę płaską uniemożliwiającą jego obrót oraz dającą swobodę pionowego przemieszczania (rys. 4).

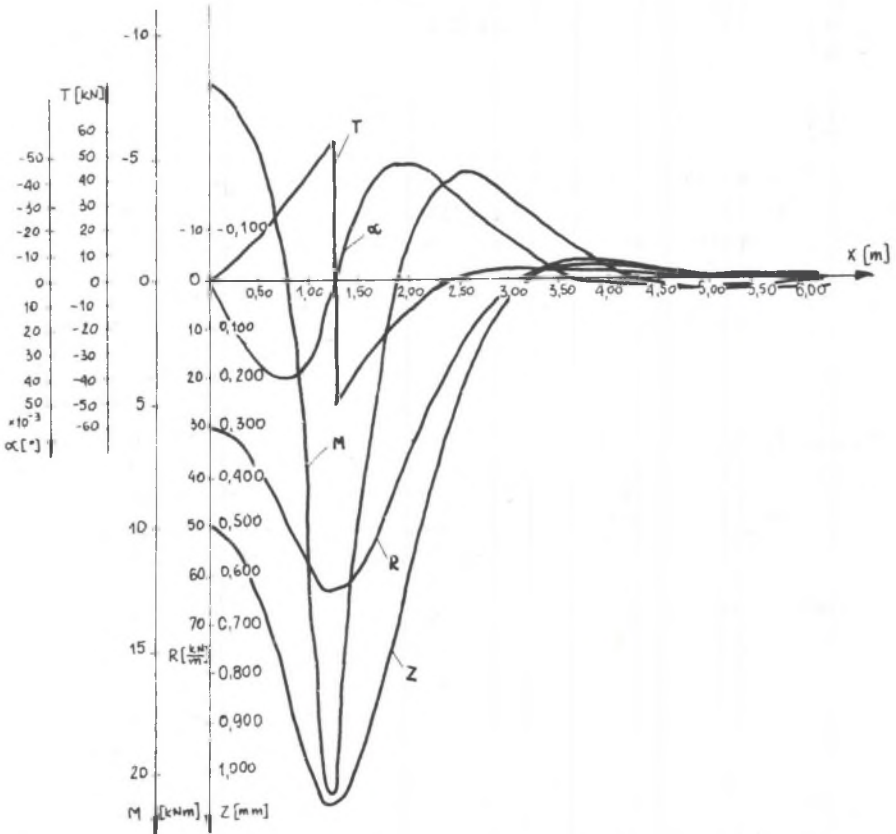
Dla wyznaczenia ze wzorów (13-16) w dowolnie wybranych przekrojach belki wartości składowych przemieszczeń i sił wewnętrznych, niezbędna jest znajomość czterech parametrów początkowych  $z_0, \alpha_0, M_0, T_0$ . Z warunków podparcia belki w przekroju A wynika, że  $\alpha_0 = 0$  oraz  $T_0 = 0$ . Pozostałe niezerowe parametry  $z_0$  i  $M_0$  wyznaczyć można z warunków brzegowych na prawym końcu belki. Zakładając, że spełniona będzie zależność (1) bliskie zera są tam zarówno ugięcie i kąt, jak też moment i siła poprzeczna.

Można zatem spośród czterech możliwych wybrać dwa warunki brzegowe, np.  $z(\beta 1) = 0$  i  $\alpha(\beta 1) = 0$ , co odpowiadałoby pełnemu utwierdzeniu. Obliczenia przeprowadzono w dwóch wariantach:

1. Wózek wagonu osobowego typu 112 Ah o rozstawie osi wózka  $2 l_1 = 2,5$  m (patrz rys. 1 i 4). Przyjęto też:  $l_2 = 5$  m,  $l = 6,25$  m, tzn. 25 odcinków po 0,25 m.

2. Wózek wagonu towarowego typu 412 W o rozstawie osi wózka  $2 l_1 = 1,0$  m. Przyjęto też:  $l_2 = 4,5$  m,  $l = 5,4$  m, tzn. 30 odcinków po 0,18 m. Ponadto w obu wariantach przyjęto:

- szynę typu UIC 60, dla której  $I = 3055 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,
- podkłady drewniane,
- współczynnik sprężystego osiągania belki  $K = 6 \text{ kN/cm}^2$
- obciążenie od jednego koła [3]  $Q_2 = 108 \text{ kN}$ .



Rys. 5. Wyniki obliczeń dotyczące schematu zastępczego prawej połowy belki obciążonej wózkiem wagonu typu 112 Ah

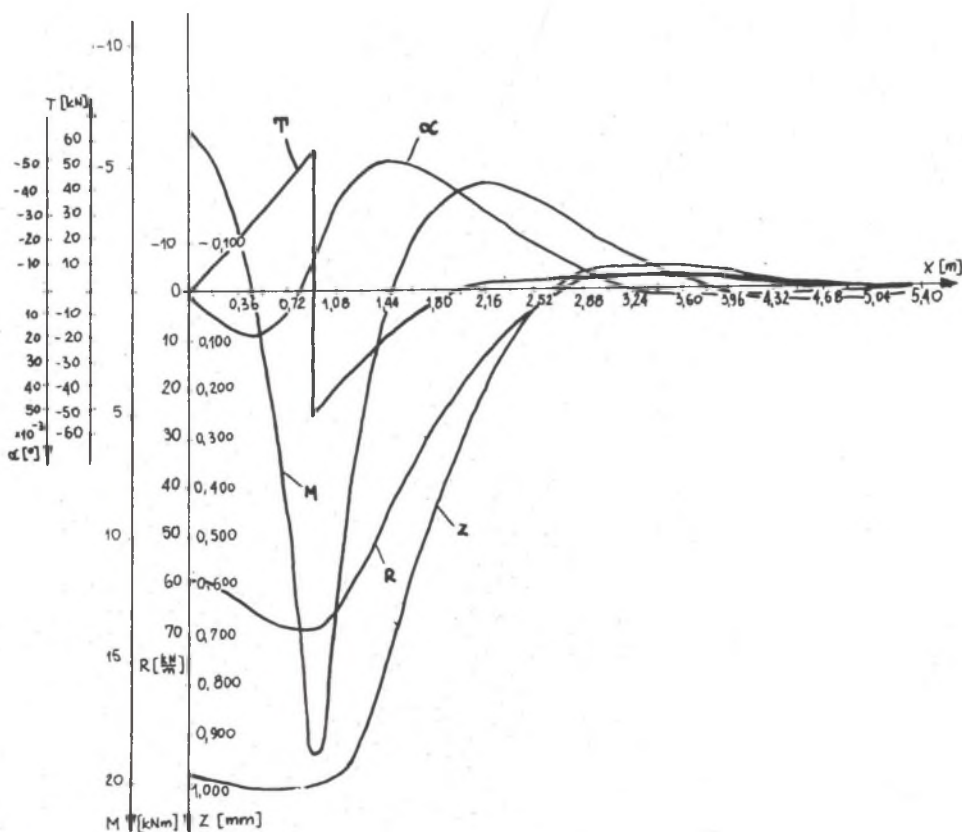
Fig. 5. The results of the calculations concerning the substitutional scheme of the right half of the beam loaded by the lorry car type 112 Ah

Dla przyjętych danych, długość odcinków  $l_2$  w obu wariantach spełnia warunek (1), gdyż

$$l_2 > 5 \sqrt[4]{\frac{4EI}{K}} = 5 \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 30,55 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^4}} = 4,04 \approx 4 \text{ m}$$

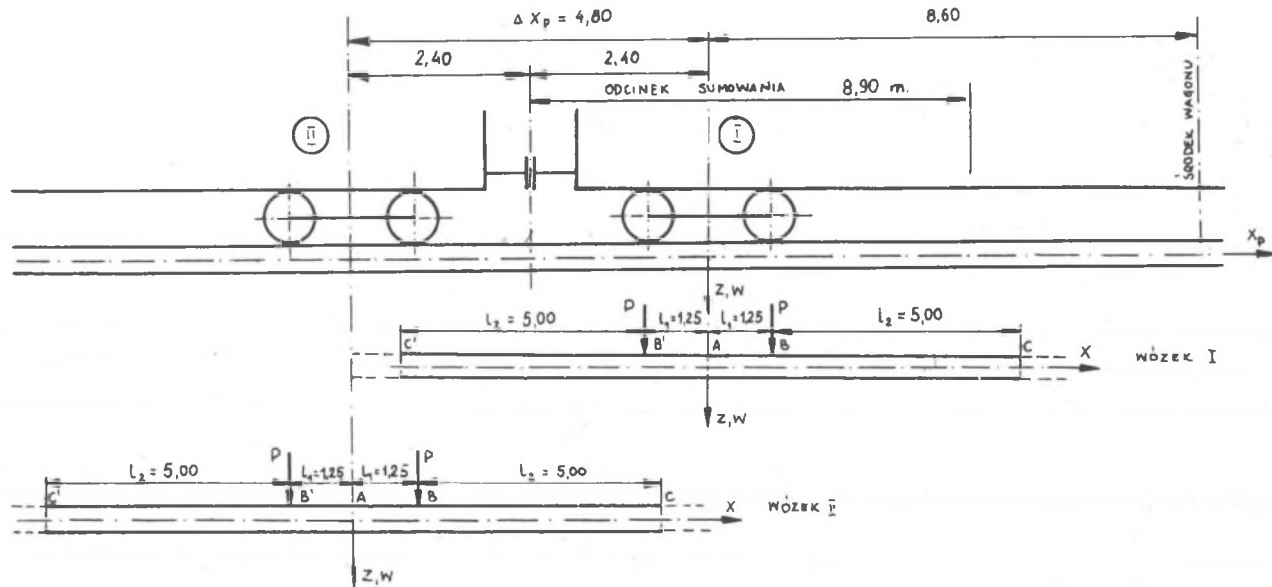
Do obliczeń wykorzystano program na EMC Odra 1305 [2].

Wyciągi z wydruków przedstawione są w postaci wykresów. Otrzymane wyniki są dla poszczególnych przekrojów wartościami: przemieszczeń  $z$ , kąta ugięcia  $\alpha$ , reakcji podłoża  $R$ , momentu zginającego  $M$  oraz siły po-



Rys. 6. Wyniki obliczeń dotyczące schematu zastępczego prawej połowy belki obciążonej wózkami wagonu 412 W

Fig. 6. The results of the calculations concerning the substitutational scheme of the right half of the beam loaded by the larry car 412 W



Rys. 7. Schemat dodawania wpływów obciążeń szyny wózkami sąsiadującymi ze sobą wagonów  
 Fig. 7. The scheme of the addition of the influences of the rail load by the contiguous cars type 112 Ah

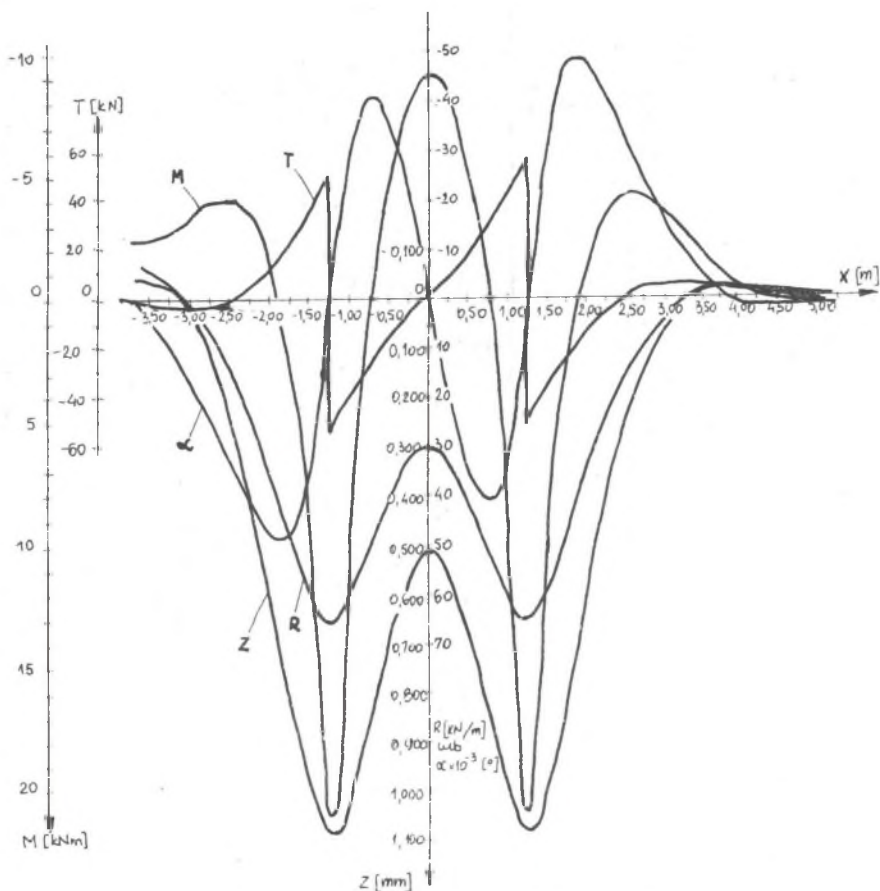


przecznicy T w szynie. Wartości te dotyczą schematów podstawowych (rys. 4):

- przy  $l_1 = 1,25$  m (rozstaw osi wózka wagonu 112 Ah),
- przy  $l_1 = 0,9$  m (rozstaw osi wózka wagonu 412 W).

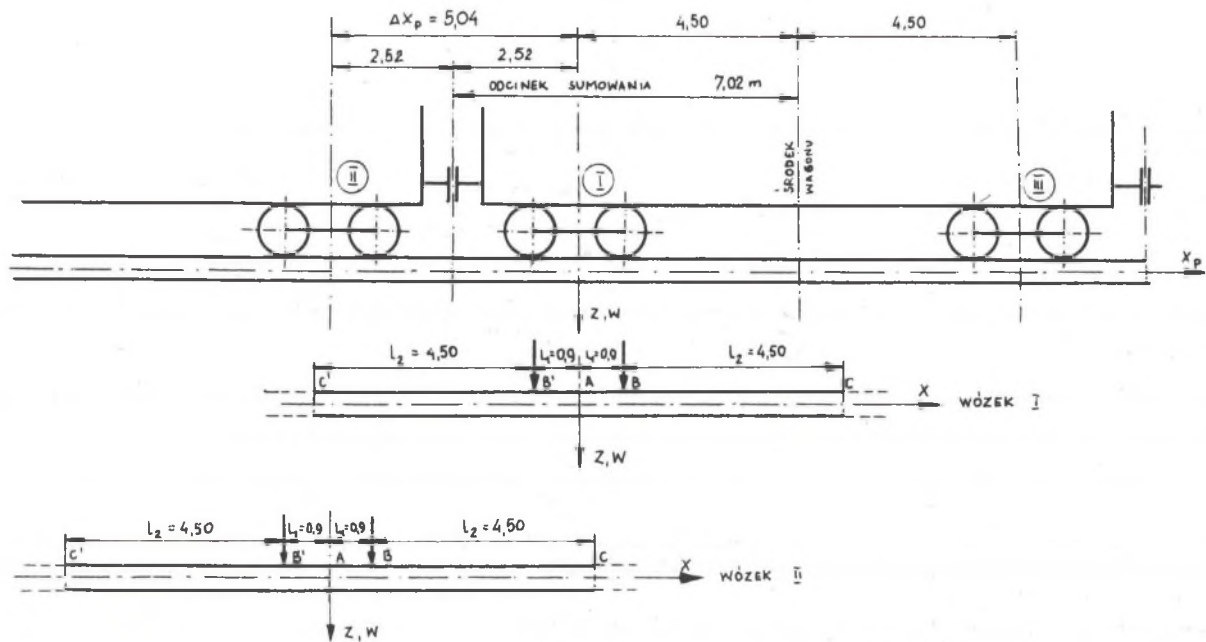
Zmienność ich przedstawiają wykresy (rys. 5 dla wagonu 112 Ah oraz rys. 6 dla wagonu 412 W).

Rozwiązania te służą do wyznaczenia podobnych wielkości w szynie pod obciążeniem składem wagonów. Stosuje się tu zasadę superpozycji. Przy obciążeniu szyny składem wagonów interesujący jest jedynie odcinek szyny zawarty między dwiema sąsiednimi osiami symetrii obciążenia. Sąsiednie osie symetrii przechodzą przez styki zderzaków wagonu oraz przez środki długości wagonu. Dla pozostałych odcinków powtarzają się. Rysunek 7 ilu-



Rys. 8. Wartości uzyskane w wyniku dodawania schematów zastępczych w przypadku wagonu typu 112 Ah

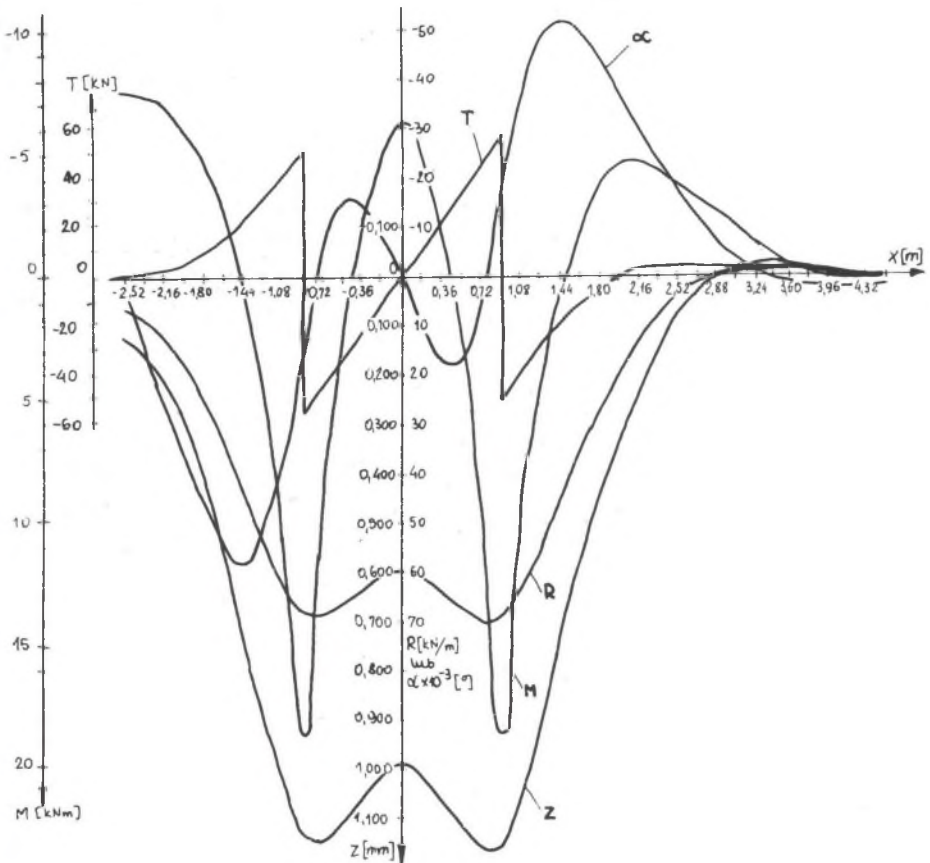
Fig. 8. The values obtained in effect of the addition of the substitutional schemes in the case of the cars type 112 Ah



Rys. 9. Schemat dodawania wpływów obciążeń szyny wózkami sąsiadującymi ze sobą wagonów typu 412 W  
 Fig. 9. The scheme of the addition of the influences of the rail load by the contiguous cars type 412 W

struje dodawanie wpływów obciążeń szyny wózkami I i II sąsiadujących ze sobą wagonów typu Ah na zaznaczony tam odcinek sumowania o długości 8,9 m (wartość wynikająca z konstrukcji wagonu). Na prawo od tego odcinka, pod środkową częścią wagonu można przyjąć, że szyna nie pracuje. Po przeprowadzeniu sumowania wyników otrzymanych na podstawie schematów podstawowych (rys. 4), otrzymano wartości przedstawione w postaci wykresów (rys.8).

W wykresach ugięcia oraz reakcji podłoża  $R$  dodatkowo uwzględniono niewielki wpływ ciężaru własnego toru. Przyjęto tu równomiernie rozłożone obciążenie o wartości  $q = 1,25 \text{ kN/m}$  stanowiące sumę ciężaru jednostkowego szyny ( $0,6 \text{ kN/m}$ ) i ciężarów połówek podkładów przypadających na 1 m szyny. Obciążenie takie powoduje jedynie reakcję podłoża  $r_q = q$  oraz równomierne obciążenie szyny  $z_q = \frac{r_q}{K} = 0,021 \text{ mm}$ , natomiast zerowe są wartości



Rys. 10. Wartości uzyskane w wyniku dodawania schematów zastępczych w przypadku wagonu typu 412 W

Fig. 10. The values obtained in effect of the addition of the substitutional schemes in the case of the car type 412 W

$\alpha$ ,  $M$  i  $T$ . W podobny sposób przeprowadzono sumowanie wyników uzyskanych z obciążenia wagonami 412 W (rys. 9). W tym przypadku odcinek sumowania ma długość 7,02 m i jest zawarty między stykiem zderzaków i osią symetrii wagonu. Można tu pominąć wpływ obciążenia wózkiem III mimo, że odległość osi symetrii wagonu (koniec rozpatrywanego odcinka) od najbliższego środka koła tego wózka wynosi 3,6 m i jest mniejsza od wartości 4 m obliczonej według wzoru (1). Wykresy  $z, \alpha$ ,  $R_z$ ,  $T_z$  i  $M_{Gz}$  dla obciążenia wagonami 412 W przedstawione są na rys. 10.

Wykresy przedstawione na rysunkach 8 i 10 dotyczą odcinków szyny w strefach wszystkich wózków oprócz skrajnego wózka w pociągu. Skrajnemu odcinkowi, ze względu na brak wpływu sąsiednich wózków, odpowiadają wykresy przedstawione na rys. 5 i 6, dotyczące schematu podstawowego, przy czym odłożone tam rzędne ugięcia  $z$  i reakcji podłoża  $R$  należy skorygować o podane wcześniej wartości  $z_q = 0,021$  mm oraz  $q = 1,25$  kN/m. Ze sporządzonych wykresów wynika, że przy uwzględnieniu wpływu obciążenia raz jednym wózkiem, a innym razem dwoma, największe wartości sił wewnętrznych w szynie niemal nie zmieniają się. Nieco inny jest jednak rozkład pozostałych rzędnych. Niewielkie odrywanie się toru od podłoża w środkowych strefach wagonów pod wpływem obciążeń pociągiem prawie w połowie zredukowane jest ciężarem własnym toru. Poza tym w tych strefach mniej precyzyjne rozwiązanie wynika z niespełnienia w rzeczywistości założenia Winklera uwzględniającego ujemną reakcję podłoża. W podobny sposób można wyznaczyć siły wewnętrzne w szynie  $M_{gy}(x)$  i  $T_y(x)$  jakie powstaną od obciążenia poprzecznego  $Q_y$ .

#### LITERATURA

- [1] Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W.: Wytrzymałość materiałów, Arkady, Warszawa 1974.
- [2] Praca zbiorowa: Laboratorium Wytrzymałości materiałów, Wyd. Inżynierii Lądowej PW.
- [3] Praca zbiorowa: Przystosowanie kolei do zwiększonych szybkości. WKiŁ, Warszawa 1969.

Recenzent: Doc. dr inż. Roman Bąk

Wpłynęło do Redakcji 4.05.1989 r.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ В ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ РЕЛСЕ  
ПОД НАГРУЗКОЙ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Р е з ю м е

В работе представляется метод определения внутренних сил в железнодорожном релсе нагруженном составом вагонов. Принята так называемая основная основная схема нагрузки. Соответствующие составление основных схем определяется как действительную схему. Исследуемые величины параметров получается с применением способа сложения действия сил по отношению к величинам рассчитанным для основной схемы.

DETERMINATION OF THE INTERNAL FORCES  
OF THE RAIL LOADED BY THE VEHICLE

S u m m a r y

There is a method of determination of the internal forces of the rail loaded by a draft of cars showed in this work. So called basic load-scheme was adopted. The real scheme is showed by the corresponding set of the basic schemes. The values of the sought parameters are obtained by applying the principle of the superposition in respect to the value calculated for the basic-scheme.