ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: TRANSPORT z.17 Nr kol. 1111

Jacek MAĆKOWSKI
Instytut Transportu
Romuald SZOPA
Instytut Matematyki

PRZEGLĄD METOD WYGŁADZANIA ZAREJESTROWANYCH SKOKOWO WARTOŚCI CIŚNIENIA SPALANIA

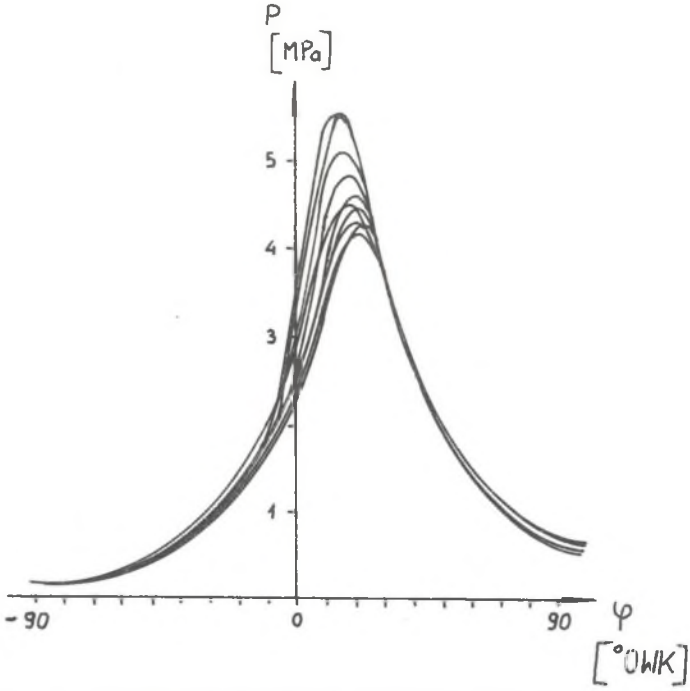
Streszczenie. Ponieważ razem z rozwojem matematycznego modelowania procesu spalania wyłonił się problem zapisu przebiegu ciśnienia indykowanego funkcją ciągłą, w pracy przedstawiono zagadnienia związane z wygładzaniem zarejestrowanych dyskretnie wartości ciśnienia spalania. Po krótkim przedstawieniu metod najprostszych szerzej omówiono takie metody służące do aproksymacji wykresu indykatorowego jak wielomiany różnych stopni oraz funkcje trygonometryczne i sklejane. We wszystkich wypadkach wykorzystano aproksymację średniokwadratową. W ostatnim rozdziale przedstawiono kryteria służące do oceny dokładności ich odwzorowania. Jako miary jakości dopasowania wykorzystano średni błąd aproksymacji, współczynnik zbieżności empirycznej i teoretycznej oraz maksymalne odchylenie funkcji aproksymującej od wartości mierzonych.

1. WSTĘP

Konieczność skracania długotrwałych i kosztownych badań stanowiskowych wymaga ciągłego rozwoju metod matematycznej symulacji badanych procesów. Jednym z przykładów wykorzystania takiej symulacji może być dynamiczny w ostatnich latach rozwój modeli opisujących proces spalania przebiegający w silniku spalinowym. O dokładności otrzymanych w ten sposób wyników decyduje w znacznym stopniu prawidłowość formułowania fenomenologicznych podmodeli oraz matematyczy ich zapis.

Jednym z modeli służących do wyznaczania parametrów termodynamicznych czynnika roboczego jest tzw. model diagnostyczny, wykorzystujący w swoich rozważaniach przebieg eksperymentalnie zarejestrowanego ciśnienia spalania. Niestety, szereg przypadkowych zjawisk oddziałujących na siebie szczególnie w okresie formułowania jądra płomienia powoduje, że otrzymane doświadczalnie wykresy indykatorowe, będące podstawą oceny, znacznie różnią się do siebie.

Przykładowo, na rys. 1 przedstawiono 10 kolejno otrzymanych i nałożonych na siebie przebiegów ciśnienia spalania zaczerpniętych z pracy [9].



Rys. 1. Przykładowe przebiegi ciśnienia spalania

Fig. 1. Exemplary characteristics of firing pressure

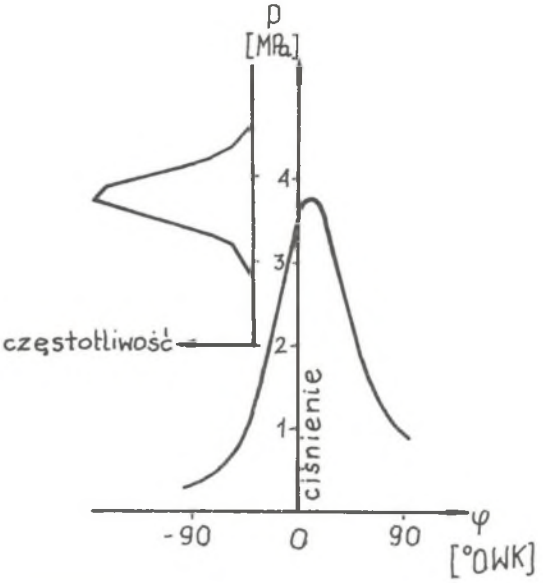
Niepowtarzalność kolejnych obiegów powoduje konieczność wyboru reprezentatywnego obiegu pracy. Dokonuje się tego na ogół metodami statystycznymi. Przebieg postępowania jest wówczas następujący. Wartości maksymalnego ciśnienia spalania z zagęszczonych wykresów indykatorowych traktuje się jako zmienne losowe, a następnie przeprowadza się test zgodności dla stwierdzenia czy wynik próby podlega rozkładowi normalnemu. Następnie przy danym poziomie istotności oblicza się przedział ufności dla średniej, z którego następnie wybiera się obieg (rys. 2) odpowiadający badanym stanom silnika [10].

Dla określenia przebiegu reprezentatywnego przy danym stopniu niepowtarzalności należało uwzględnić próbę o liczebności 50 przebiegów [10].

Obecnie dzięki rozwojowi maszyn liczących coraz częściej uśrednia się metodami statystycznymi wszystkie dyskretnie zarejestrowane chwilowe wartości ciśnienia. Niestety, błędy pomiarowe oraz konieczność uśrednienia w czasie wielu wykresów indykatorowych powoduje, że dyskretna forma zapisu wyników

przebiegu ciśnienia, jaka obecnie wprowadzana jest do pamięci komputera, obarczana jest błędami bardzo komplikującymi dalsze wyniki. Na przykład przebieg prędkości wydzielania się ciepła, otrzymany z nie wygładzonego przebiegu ciśnienia, przedstawiono na rys. 3 [2]. Widać z niego, jak istotnie na wynik końcowy wpływa brak wygładzenia.

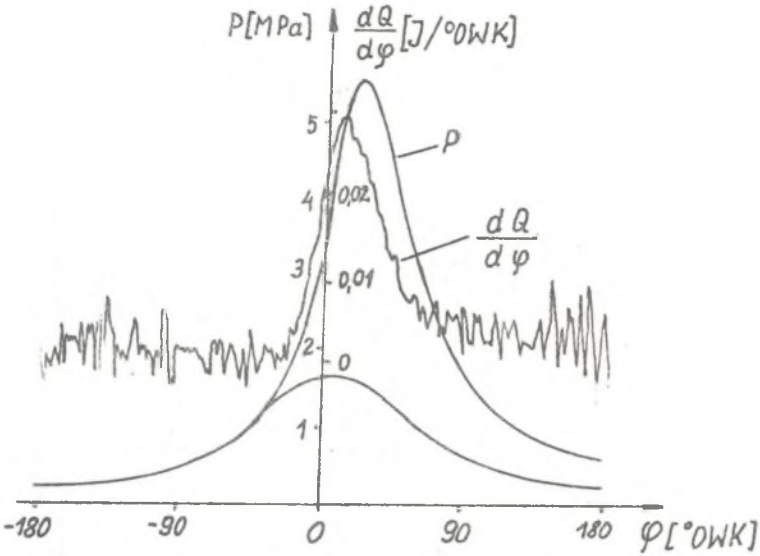
Dlatego zachodzi konieczność analitycznego wygładzenia otrzymanych z badań uśrednionych wyników funkcją, która w sposób ciągły wygładzi zarejestrowany dyskretny zbiór wyników. Dodatkową zaletą takiej funkcji jest możliwość określenia wartości ciśnienia w dowolnym położeniu kąta obrotu wału korbowego, a co się z tym wiąże - możliwość prowadzenia obliczeń z dowolnym krokiem.



Rys. 2. Reprezentatywny przebieg ciśnienia spalania z zaznaczeniem sposobu postępowania

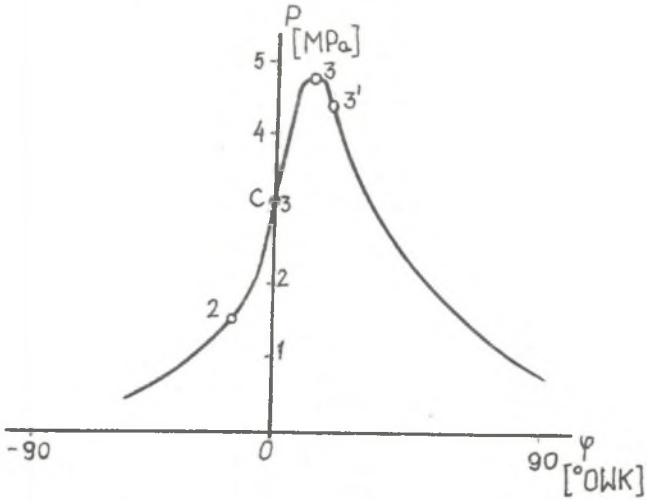
Fig. 2. Representative firing pressure characteristic with the sequence of operation given

Problem zapisu indykatorowego przebiegu ciśnienia w postaci funkcji ciągłej pojawił się się razem z rozwojem matematycznego modelowania procesu spalania. Już w 1971 roku G.Schwarzbauer i D.Gruden [12] zaproponowali, aby zarejestrowany na oscylografie wykres indykatorowy (rys.4) opisać w następujący sposób:



Rys. 3. Przebieg prędkości wydzielania się ciepła na tle rozwiniętego wykresu indykatorowego

Fig. 3. Characteristic of heat emission velocity at the background of a developed indicator diagram



Rys. 4. Proponowana przez G.Schwarzbauera i D.Grudena symulacja funkcjami ciągłymi

Fig. 4. Simulation with continuous functions suggested by G.Schwarzbauer and D.Gruden

1) Od punktu rozpoczynającego właściwe spalanie (punkt 2 na rys. 4) do punktu C, odpowiadającego GMP, przebieg ciśnienia na wykresie $p\varphi$ należy zastąpić parabolą trzeciego stopnia, która ma wierzchołek w punkcie C, a której oś symetrii przebiega równolegle do osi φ. Na odcinku tym, np. dla określenia pracy, obowiązywałoby następujące wyrażenie:

$$L_{2C} = -\frac{p_C + 3p_z}{4}(V_2 - V_C).$$

2) Przebieg ciśnienia od punktu C do punktu 3 odpowiadającego maksymalnemu ciśnieniu spalania należy zastąpić łukiem elipsy o osiach symetrii równoległych do osi głównych. Praca dla tego odcinka wyrażałaby się wzorem:

$$L_{C3} = \frac{\Pi p_3 + 0,86\, p_C}{4}(V_3 - V_c).$$

3) Natomiast od punktu 3 do punktu 3' (maksymalna temperatura spalania) przebieg ciśnienia należy przybliżyć parabolą drugiego stopnia, której oś symetrii jest równoległa do osi rzędnych wykresu $p\varphi$. Dlatego też praca na tym odcinku wynosiłaby:

$$L_{33'} = \frac{p_{3'} + 2p_3}{3}(V_{3'} - V_3).$$

Jak widać, proces zastępowania zarejestrowanego rzeczywistego przebiegu zmian ciśnienia pewną zastępczą funkcją ciągłą odbył się na zasadzie podobieństwa wykresu analizowanej funkcji do znanych funkcji. Dążono przy tym, aby funkcje te miały stosunkowo prostą postać. W omawianym przypadku były to łuki parabol drugiego i trzeciego stopnia oraz łuk kryzwej eliptycznej. Często używanymi wzorami są również hiperbole, funkcje wymierne czy też eksponenty postaci $y = ae^{bx} + c$.
Po wyborze postaci wzoru należało określić wartości liczbowe występujących w nim parametrów tak, aby przybliżenie wyników eksperymentalnych było jak najlepsze.

Jak wiadomo, innym sposobem znalezienia odpowiedniej funkcji opisującej w sposób ciągły dyskretny zbiór wartości jest interpolacja. Polega ona na wyznaczaniu takiej funkcji, która w danym zbiorze argumentów przyjmuje

dokładnie zmierzone wartości liczbowe. Funkcji interpolującej poszukuje się najczęściej jako funkcji pewnej określonej postaci. Najczęściej są to wielomiany algebraiczne. Przy dużej ilości punktów wielomiany te są wysokiego stopnia; np. A.Maślanka w swojej pracy [8] proponuje wielomian dziewiątego stopnia. Niestety, powoduje to tzw. "falowanie funkcji", a w efekcie niedokładne przedstawienie prawdziwego przebiegu zmian ciśnienia w cylindrze.

Ogólniejszą od interpolacji metodą zastępowania dyskretnego zbioru wartości funkcją ciągłą jest aproksymacja (interpolacja jest szczególnym przypadkiem aproksymacji). Polega ona na zastępowaniu funkcji określonej w dyskretnym zbiorze punktów przez inną funkcję, która niekoniecznie przechodzi przez podane punkty. Żądamy natomiast, by wartości funkcji aproksymującej w podanych punktach dostatecznie mało różniły się od znanych (zmierzonych) wartości w pewnym określonym sensie, tzn. żeby miara odchylenia obu tych funkcji była dostatecznie mała.

Wygładzenie otrzymanych w czasie badań wyników można dokonać za pomocą wielu rodzajów funkcji. Jednak znając wartości funkcji, którą chcemy aproksymować, a co za tym idzie, jej przypuszczalny kształt, należy wybierać takie, które najlepiej ją opiszą.

W pracy zdecydowano otrzymane wyniki zastąpić wielomianami różnych stopni ze względu na prostotę ich postaci. Zbadano również możliwość aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, a także funkcjami sklejanymi, które ostatnio znajdują uniwersalne zastosowanie w technice.

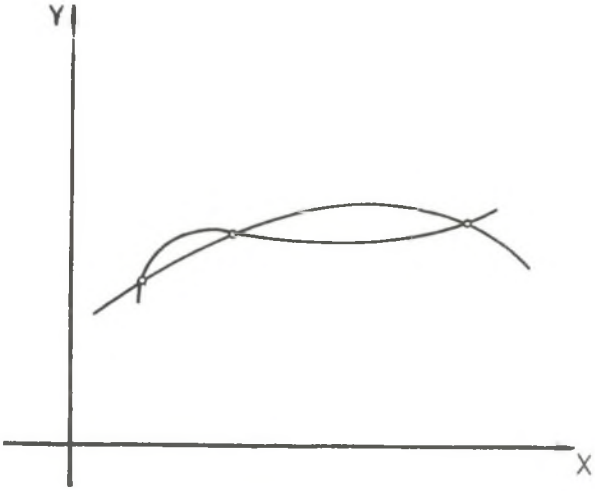
2. APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA

Jak wcześniej zaznaczono, w wyniku eksperymentalnie zarejestrownego pomiaru ciśnienia spalania otrzymano zbiór punktów reprezentujących uśredniony w funkcji kąta obrotu wału korbowego przebieg ciśnienia indykatorowego. W celu określenia przebiegu ciśnienia w całym przedziale, do którego należą punkty pomiarowe, zachodzi konieczność wyznaczenia opisującej ten przebieg funkcji. Jeśli zakłada się, że szukana funkcja ma w określonym dyskretnym zbiorze punktów przyjąć z góry zadane wartości, to proces wyznaczania takiej funkcji, jak już wspomniano, nazywa się interpolacją. Matematycznie oznacza to, że jeśli w przedziale $\langle a, b\rangle$ danych jest $n+1$ różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ zwanych węzłami interpolacji oraz wartości pewnej funkcji $y = f(x)$ w tych punktach tzn. $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$,

to interpolacja polega na wyznaczeniu takiej funkcji $F(x)$, która w węzłach interpolacji przyjmuje te same wartości co funkcja $f(x)$, tzn.:

$$F(x_i) = y_i \qquad \text{dla} \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

Zadanie to posiada nieskończenie wiele rozwiązań, czego ilustracją jest rys.5. Przy dodatkowych założeniach o postaci funkcji $F(x)$ (np. wielomian algebraiczny, trygonometryczny) zagadnienie to ma jednoznaczne rozwiązanie.



Rys. 5. Wieloznaczność rozwiązania zagadnienia interpolacji

Fig. 5. Ambiguousness of the interpolation problem solution

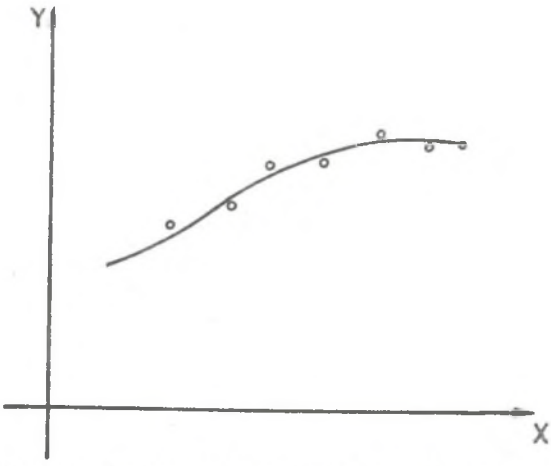
Intuicyjnie wydaje się, że dysponując większą ilością zmierzonych wartości funkcji można będzie dokładniej opisać matematyczną zależność między nimi. Okazuje się jednak, że przy zwiększeniu liczby węzłów żądanie spełnienia warunku interpolacyjnego, tzn. $F(x_i) = f(x_i)$, powoduje pogorszenie wyników interpolacji. Sprawia to fakt, że duża liczba węzłów wymaga skonstruowania np. wielomianu algebraicznego odpowiednio wysokiego stopnia.

Bardzo często wartości funkcji interpolowanej y_i nie są znane dokładnie, bowiem obarczone są pewnymi błędami. O ich maksymalnej wielkości w każdym punkcie x_i mamy na ogół informację a priori, np. błąd przyrządu pomiarowego. W takim przypadku nie ma sensu konstruowanie funkcji interpolującej mającej dokładnie te same wartości w węzłach siatki, tzn. spełniającej warunek $F(x_i) = y_i$ dla $i = 0,1,\ldots,n$. Można więc żądać, aby konstruowana

krzywa przechodziła w miarę "blisko" zadanych punktów (wyników pomiarów), a jej przebieg w otoczeniu tych punktów był dostatecznie "płynny".

Reasumując stwierdzić należy, że żądanie spełnienia przez funkcję interpolującą $F(x)$ warunku $F(x_i) = f(x_i)$ prowadzi najczęściej przy dużej ilości punktów pomiarowych do otrzymania wielomianu wysokiego stopnia, który w związku z tym ma mało "gładki" przebieg. W powiązaniu z błędami pomiarowymi może to być przyczyną mało dokładnego przebiegu funkcji interpolującej $F(x)$.

Zagadnieniem ogólniejszym od interpolacji jest problem wyznaczania funkcji, od której nie wymagamy, by przyjmowała te same wartości w węzłach co wartości dane (zmierzone), ale przebiegała wystarczająco blisko tych wartości, a także by jej przebieg był w ich otoczeniu dostatecznie płynny. Wyznaczanie takiej funkcji nosi nazwę aproksymacji.
Gdy zbiór węzłów jest zbiorem punktów, aproksymację nazywamy punktową. Ideę aproksymacji ilustruje rys. 6.



Rys. 6. Graficzna interpretacja aproksymacji

Fig. 6. Graphic image interpretation of the approximation

2.1. Aproksymacja średniokwadratowa wielomianowa

Rodzaje aproksymacji wynikające ze sposobu przyjętych miar odchylenia funkcji aproksymującej od funkcji aproksymowanej oraz typu funkcji aproksymującej.

Jeśli w dyskretnym zbiorze punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ szukamy takiej funkcji $F(x)$, dla której suma

$$\sum_{i=0}^{n} \left[F(x_i) - y_i\right]^2$$

osiągałaby minimum, to aproksymację nazywamy średniokwadratową. Najczęściej funkcję $F(x)$ poszukujemy w klasie wielomianów określonego stopnia "m".

Przypuśćmy, że otrzymane z komputera uśrednione dyskretne wartości przebiegu ciśnienia $y_o, y_1, \ldots, y_n$, zmierzone odpowiednio dla kątów $x_o, x_1, \ldots, x_n$, chcemy aproksymować wielomianem stopnia m, tzn.:

$$F(x) = a_o + a_i\, x + \ldots + a_m\, x^m.$$

Wówczas szukamy minimum funkcji $S(a_o, a_1, \ldots, a_m)$ postać:

$$S(a_o, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (a_o + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_i^{\,m} - y_i)^2.$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych otrzymujemy $m + 1$ równań liniowych:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^{n} (a_o + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_i^{\,m} - y_i)\, x_i^{\,j} = 0$$

$$j = 0, 1, \ldots, m$$

z $m + 1$ niewiadomymi $a_o a_1, \ldots, a_m$ (współczynniki szukanego wielomianu). Rozwiązując ten układ równań, np. metoda Gaussa, otrzymamy współczynniki wielomianu stopnia co najwyżej m, który minimalizuje funkcję S.

Załóżmy, że pomiaru dokonano w $n + 1$ w punktach $x_o, x_1, \ldots, x_n$, otrzymując odpowiednio wartości $y_o, y_1, \ldots, y_n$. Wyniki te chcemy aproksymować wielomianem stopnia drugiego, tzn. $F(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$, gdzie a_o, a_1 oraz a_2 nieznane współczynniki tej funkcji kwadratowej. W celu ich wyznaczenia należy znaleźć minimum funkcji $S(a_o, a_1, a_2)$ o postaci:

$$S(a_o, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n} \left[a_o + a_1 x_1 + \ldots + a_2 x_i^{\,2} - y_i\right]^2.$$

Funkcja ta osiągnie minimum w punktach, w których zerują się pochodne cząstkowe funkcji S względem zmiennych a_o, a_1 i a_2.
Punkty te wyznaczamy z następującego układu równań:

$$\sum_{i=0}^{n} (a_o + a_1 x_i + \ldots + a_2 x_i^2 - y_i) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_o + a_1 x_i + \ldots + a_2 x_i^2 - y_i)\, x_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_o + a_1 x_i + \ldots + a_2 x_i^2 - y_i)\, x_i^2 = 0.$$

Po wykonaniu działań i uproszczeniach otrzymamy następujący układ trzech równań z trzema wiewiadomymi a_o, a_1, a_2:

$$na_o + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_1^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_o \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_1^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$

$$a_o \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i.$$

Jest to układ równań liniowych, który można rozwiązać wprost lub też dowolną metodą numeryczną, np. wspomnianą już metodą Gaussa. Wyznaczone z tego układu równań współczynniki a_o, a_1, a_2 są współczynnikami wielomianu stopnia drugiego, który najlepiej w sensie średniokwadratowym aproksymuje otrzymane w wyniku pomiarów dyskretne wartości $y_o, y_1, \ldots, y_n$.

2.2. Aproksymacja trygonometryczna

Często, szczególnie gdy funkcja aproksymowana f(x) jest okresowa, korzystniej jest ją aproksymować wielomianami trygonometrycznymi a nie algebraicznymi. Wielomian trygonometryczny ma postać:

$$F(x) = \frac{1}{2} A_o + \sum_{j=1}^{m} (A_j \cos j \frac{2\Pi x}{T} + B_j \sin j \frac{2\Pi x}{T}), \tag{1}$$

gdzie: T - długość przedziału, w którym funkcja F(x) jest określona, tzn. $x \in \langle 0, T \rangle$; A_o, A_j, B_j, dla $j = 1,2,\ldots,m$ - współczynniki Fouriera funkcji f(x) względem ortogonalnego układu funkcji bazowych 1, sinx, cosx, sin2x, cos2x, ...

Niech będzie danych n + 1 wartości funkcji f(x), tzn. $f(x_i) = y_i$ dla $x_i = \frac{iT}{n}$, przy czym $i = 0,1,\ldots,n$. Oznacza to, że węzły są równoległe oraz $x_i \in \langle 0, T \rangle$. Funkcję f(x) (wyniki n + 1 pomiarów) chcemy przybliżyć w przedziale $\langle 0, T \rangle$ wielomianiem trygonometrycznym F(x) określonym wzorem (1). W tym przypadku tak jak poprzednio należy zminimalizować sumę kwadratów odchyleń

$$\sum_{i=0}^{n} \left[F(x_i) - y_i\right]^2.$$

Wymóg ten jest spełniony wtedy, gdy współczynniki A_o, A_j oraz B_j określone są wzorami:

$$A_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k \cos j \frac{2\Pi k}{n+1}, \tag{2}$$

$$B_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k \sin j \frac{2\Pi k}{n+1}. \tag{3}$$

Wzory powyższe [4] wynikają z warunku koniecznego ekstremum funkcji wielu zmiennych, której argumentami są współczynniki A_j i B_j. Warunek ten narzuca związek między ilością wyrazów szeregu Fouriera (1) a ilością punktów, w których funkcja f(x) jest określona. Zachodzi mianowicie dla wzorów (2) i (3) zastrzeżenie:

$$0 \le j \le \frac{1}{2}(n+1), \tag{4}$$

gdzie: n + 1 - ilość punktów pomiarowych, j - indeks współczynników Fouriera.

2.3. Aproksymacja funkcjami sklejanymi

Jak wcześniej wspomniano, obecnie coraz częściej do aproksymacji i wygładzania funkcji, której wartości znane są w dyskretnym zbiorze argumentów, stosuje się funkcje sklejane.

Przez pojęcie funkcji sklejanej rozumie się określoną w pewnym przedziale D funkcję kawałkami wielomianową, tzn. funkcję, dla której istnieje rozbicie D na podprzedziały, w których funkcja ta jest wielomianem danego stopnia m, najczęściej różnym w każdym z podprzedziałów. Oprócz tego funkcja ta jest na ogół funkcją ciągłą w przedziale D wraz z pochodnymi do rzędu m-1 włącznie.

Od funkcji wygładzającej (aproksymującej) F żąda się, by minimalizowała ona określony w przestrzeni L^2 (a, b), tzn. w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale (a, b) funkcjonał postaci:

$$\phi(F) = \int_a^b [F']^2 \, dx + \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{F(x_i) - y_i}{\delta y_i} \right]^2,$$

gdzie:

y_i - wartości funkcji aproksymoawnej w punktach x_i, $i = 0,1,\ldots,n$,

δy_i - odchylenie standardowe rzędnej y_i.

Definicja funkcjonału Φ łączy interpolacyjny warunek wymuszający przebieg konstruowanej krzywej F(x) w pobliżu znanych punktów (x_i, y_i) (człon po prawej stronie równania zawierający znak sumy) z warunkiem minimalności "wygięcia" funkcji (człon po prawej stronie równania zawierający całkę). Można wykazać [3,11], że rozwiązaniem tego zadania wariacyjnego jest funkcja sklejana trzeciego stopnia.

Jeśli dany jest zbiór n+1 punktów x_i, gdzie: $i = 0,1,\ldots,n$ oraz $x_o<x_1\ldots<x_n$, a także wartości y_i pewnej funkcji w tych punktach, to w związku z powyższym stwierdzeniem funkcja wygładzająca F(x) utworzona jest z paraboli sześciennych dla każdego przedziału $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ $i = 0,1,\ldots,n-1$ o postaci:

$$F(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i wyznacza się minimalizując funkcjonał Φ. Ponieważ funkcję sklejaną wyznaczają jednocześnie jej wartości $(F_i) = F_i$ w węzłach x_i; $i = 0,1,\ldots,n$, więc minimalizacja funkcjonału Φ

sprowadza się do zadania polegającego na wyznaczeniu minimum funkcji n+1 zmiennych $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Ponieważ

$$F''(x) = 2c_i + 6d_i\ (x - x_i),$$

to szukamy minimum funkcjonału n+1 zmiennych $F_1, F_2, \ldots, F_n$ o postaci:

$$\Phi(F_o, F_1, \ldots, F_n) = \int_a^b \left[2c_i + 6d_i(x - x_i)\right]^2 dx + \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{F_i - y_i}{\delta y_i}\right]^2.$$

Punkt, w którym funkcjonał ten osiąga wartość najmniejszą, wyznaczamy tak jak uprzednio z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych, czyli z układu równań:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_i} = 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

2.4. Miary jakości dopasowania

Po wyznaczeniu funkcji aproksymującej dyskretny zbiór wartości pewnej funkcji powstaje pytanie, z jaką dokładnością funkcja ta przybliża funkcję aproksymowaną. Tę jakość dopasowania można kontrolować różnymi metodami. W pracy wykorzystano trzy sposoby.

W pierwszym przypadku miarą "odległości" funkcji aproksymującej F(x) od wartości zmierzonych jest średni błąd aproksymacji R określony wzorem:

$$R = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left[F(x_i) - y_i\right]^2}$$

gdzie:

x_i - węzły aproksymacji,

$F(x_i)$ - wartości funkcji aproksymującej w węzłach x_i,

y_i - wartości funkcjji aproksymowanej w węzłach (dane).

Funkcja aproksymująca F(x) tym lepiej oddaje właściwy przebieg funkcji aproksymowanej, im średni błąd aproksymacji jest mniejszy.

Ponieważ interpolacja wymaga od funkcji interpolującej $F(x)$ spełnienia w węzłach warunku $F(x_i) = y_i$ dla $i = 0,1,\ldots,n$, dlatego też z określenia średniego błędu aproksymacji R wynika, że w przypadku interpolowania wartości y_i zachodzi $R = 0$.

Drugim sposobem badania zgodności funkcji aproksymującej z otrzymanymi z badań wartościami jest wyznaczanie tzw. współczynnika zbieżności empirycznej i teoretycznej [4], pozwalającej stwierdzić, jak dalece krzywa aproksymacyjna zbliżona jest do punktów empirycznych. Współczczynnik zbieżności empirycznej i teoretycznej $\bar{R}^2$ określony jest wzorem:

$$\bar{R}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=0}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

gdzie:

$\hat{y}_i$ - wartości aproksymowane (zmierzone) w węzłach aproksymacji x_i ($i = 0,1,\ldots,n$),

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n+1}$ - wartość średnia zmiennych zależnych,

y_i - wartości badane wyznaczane za pomocą konkretnej funkcji aproksymującej w węzłach x_i.

Funkcja aproksymująca tym lepiej oddaje rzeczywisty przebieg punktów empirycznych, im współczynnik zbieżności teoretycznej i empirycznej jest bliższy jedności.

Trzecim sposobem określenia jakości dopasowania jest wyznaczenie maksymalnego odchylenia funkcji aproksymującej od wartości zmierzonych (eksperymentalnych), tzn. wielkość określoną następująco:

$$\varepsilon = \max_{0<i<n} |F(x_i) - y_i|,$$

gdzie:

x_i - węzły aproksymacji,

$F(x_i)$ - wartości funkcji aproksymującej w węzłach,

y_i - wartości funkcji aproksymowanej w węzłach.

Im maksymalne odchylenie jest mniejsze, tym funkcja aproksymująca wierniej oddaje badany przebieg.

LITERATURA

[1] **Cupiał K., Domański J:** Problemy dyskretyzacji wykresów indykatorowych silników spalinowych AUTOPROGRES 86. II Konferencja Naukowo-Techniczna. Jadwisin, Styczeń 1986.

[2] **Cupiał K., Gruca M.:** Indykowanie doładowanego silnika biogazowego. II Konferencja nt.: Silniki gazowe. Częstochowa 1989.

[3] **Fortuna Z.:** Metody numeryczne. WNT, Warszawa 1982.

[4] **Korn G.:** Matematyka dla inżynierów. PWN, Warszawa 1983.

[5] **Kornacki R.:** Zestaw programów do obliczania obciążeń łożysk i naprężeń w wale korbowym. Sympozjum MOTORCOMPUT '89.

[6] **LEYKO J.:** Analiza przebiegu ciśnienia, mierzonego w cylindrze silnika o ZS z wtryskiem bezpośrednim. Sympozjum MOTORCOMPUT '89. Jadwisin, 24 - 26.04.1989.

[7] **Maćkowski J.:** Ocena dynamiki procesu spalania metodami wibroakustycznymi Praca doktorska. Kraków 1982 (niepublikowane).

[8] **Maślanka A.:** Program do przetwarzania i prezentacji graficznej wyników programów hamowniczych. Sympozjum MOTORCOMPUT '89.

[9] **Müller H.:** Die Auswertung des Verbrennungsablaufes im Ottomotor anhand der Flamenfotografie und des Druckverlaufes.

[10] **Nakamura H., Ohinouye T.:** Development of a New Combustion System (MCA-JET) in Gasoline Eugine SAE 780007.

[11] **Ralston A.:** Wstęp do analizy numerycznej.

[12] **Schwarzbauer G., Gruden D.:** Brennraumtemperatur und Wärmefreisetzung im Verbrennungsmotor MTZ 2/1971.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Środulski

Wpłynęło do Redakcji 12.05.1990 r.

SURVEY OF TEH METHODS OF SMOOTHING THE DISCRETELY RECORDED VALUES OF FIRING PRESSURE

S u m m a r y

Because of the fact that together with the development of the mathematical simulation of combustion process the question of recording the characteristic

of pressure indicated by a continuous function had emerged, some problems related to the smoothing the discretely recorded values of firing pressure have been presented in the work.

After a short description of the simplest methods, such methods of indicator diagram approximation as multinominals of different orders as well as trigonometric and spliced functions have been more specifically discussed. The quadratic mean-approximation has been used in every case. The criteria serving the evaluation of accuracy of their representation have been presented in the last chapter. The average error of approximation, empirical convergence coefficient adn maximum deviation of the approximating function from the measured values have been used as the quality measures.

ОБЗОР МЕТОДОВ СГЛАЖИВАНИЯ СКАЧКООБРАЗНО ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДАБЛЕНИЯ СГОРАНИЯ

Р е з ю м е

Вместе с развитием математического моделирования процесса сгорания появилась проблема представления хода давления с помощью непрерывной функции. В работе представлены вопросы связяные со сглаживанием дискретно зарегистрированных значений давления сгорания. После краткого представления самых простых методов, шире описаны такие методы аппроксимации индикаторного графика как многочлены разных степеней, тригонометрические функции и сплайн-функции. Во всех случаях используется средняя квадратическая аппроксимация. В последней части представлены критерии служащие оценке точности отображения. Мерами качества приспособления являются: средняя ошибка аппроксимации, коэффициенты эмпирической и теоретической сходимости, а также максимальное отклонение аппроксимирующей функции от измеряемых значений.