ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: TRANSPORT z.24 Nr kol.1268

Andrzej WILK
Bogusław ŁAZARZ

WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH PRZEKŁADNI WALCOWEJ O ZĘBACH SKOŚNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM ZUŻYCIA ZĘBÓW

Streszczenie. W opracowaniu przedstawiono modyfikację dotychczasowego przestrzennego modelu tarczowego przekładni o zębach skośnych przez wprowadzenie do niego zależnego podłoża sprężystego uwzględniającego naprężenia styczne działające pomiędzy tarczami. Otrzymane wyniki obliczeń komputerowych z wykorzystaniem rozpatrywanego modelu potwierdziły jego przydatność do analizy zjawisk dynamicznych towarzyszących procesowi zużywania się zębów kół oraz możliwość wykorzystania tego modelu w procesie diagnozowania przekładni.

THE EVALUATION OF THE DYNAMIC LOAD OF A HELICAL SPUR GEAR WITH REGARD TO TOOTHED WEAR

Summary. Presented modification of the space disc model of a helical spur gear was accomplished by introducing elastic base into the model. This base takes into account tangential streses acting between discs. Computation results with the employment of the model confirmed its usefulness to analyze dynamic phenomena accompanying the process of tooth wearing. Moreower the results show that the model can be successfully used in gear diagnosis

1. WPROWADZENIE

Dotychczas analizę teoretyczną zjawisk dynamicznych towarzyszących zużywaniu się zębów prowadzono na podstawie uproszczonego modelu przestrzennego przekładni walcowej o zębach skośnych. Model ten składa się z kilkunastu tarcz odpowiednio względem siebie obwodowo przemieszczonych. Nie uwzględnia on oddziaływania tarcz pomiędzy sobą, zakładając niezależność podłoża.

W opracowaniu postawiono tezę, że modyfikacja modelu tarczowego przez wprowadzenie podłoża zależnego wpływa na zmianę sztywności sumarycznej zazębienia i rozkład obciążeń dynamicznych w strefie przyporu zazębienia skośnego. Do potwierdzenia tej tezy zostały wykorzystane metody symulacji komputerowej.

2. WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH PRZEKŁADNI O ZĘBACH SKOŚNYCH PRZY ZAŁOŻENIU PODŁOŻA NIEZALEŻNEGO

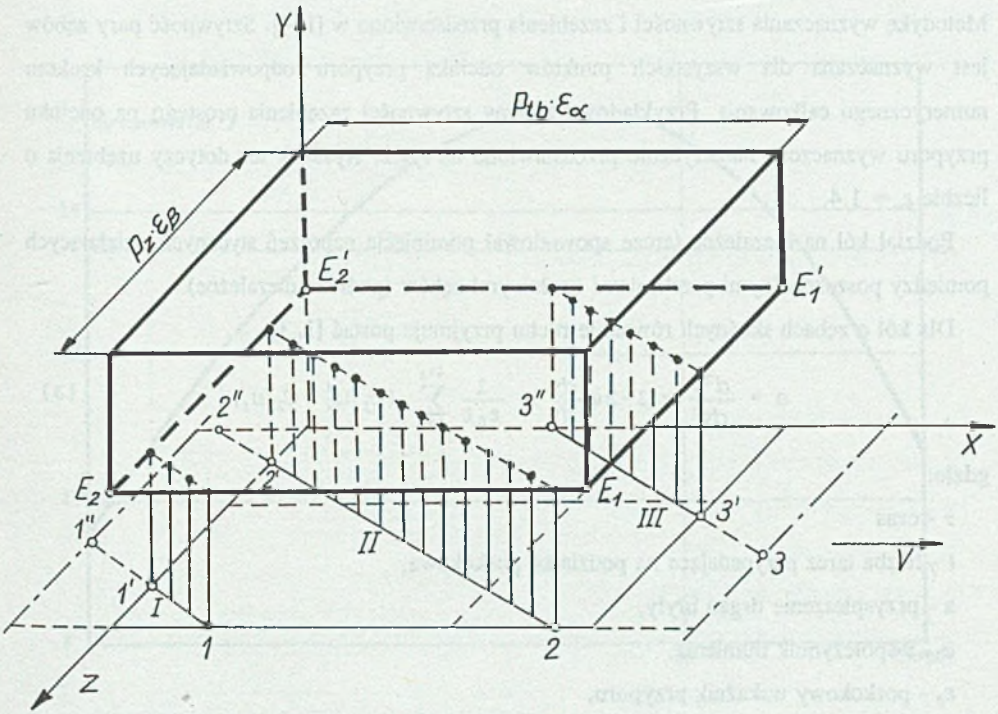
W badaniach zjawisk dynamicznych symulację zużywania się zębów i analizę zjawisk towarzyszących temu procesowi prowadzono przy użyciu modelu dynamicznego przekładni o zębach skośnych, umożliwiającego sukcesywną zmianę zarysu zębów według dowolnie przyjętej hipotezy zużycia. Zęby śrubowe zastąpiono pakietem bardzo wąskich zębów prostych przesuniętych w fazie zazębienia. Model dynamiczny przekładni o zębach skośnych przedstawiono na rys.1.

Sztywność zazębienia na odcinku przyporu jest sumą sztywności wąskich tarcz wchodzących w skład pakietu. Sztywność zazębienia pojedynczych tarcz na odcinku przyporu wyznaczono podobnie jak w przypadku zębów prostych na podstawie [L.4] z zależności:

$$c = \frac{Qd_{t1}}{w} = \frac{E}{w''}, \tag{1}$$

gdzie:

C - sztywność zazębienia na odcinku przyporu,
Q - nominalne obciążenie kół,
d_{t1} - średnica toczna zębnika,
E - moduł sprężystości materiału kół,
w - ugięcie zębów rzeczywiste,
w' - ugięcie zębów bezwymiarowe.



Rys.1. Przestrzenny model przekładni walcowej o zębach skośnych
Fig.1. Space model of helical spur gear spur wheels

Bezwymiarowe ugięcie zębów na odcinku przyporu wyznaczono z zależności:

$$w' = w_1' + w_2' + w_H', \tag{2}$$

gdzie:

w_1' - bezwymiarowe ugięcie zęba zębnika,

w_2' - bezwymiarowe ugięcie zęba koła,

w_H' - spłaszczenie powierzchni zębów bezwymiarowe.

Metodykę wyznaczania sztywności i zazębienia przedstawiono w [L.4]. Sztywność pary zębów jest wyznaczana dla wszystkich punktów odcinka przyporu odpowiadających krokom numerycznego całkowania. Przykładowe zmiany sztywności zazębienia prostego na odcinku przyporu wyznaczone numerycznie przedstawiono na rys.2. Rysunek ten dotyczy uzębienia o liczbie $\varepsilon_\alpha = 1.4$.

Podział kół na niezależne tarcze spowodował pominięcie naprężeń stycznych działających pomiędzy poszczególnymi przekrojami czołowymi zębów (podłoże niezależne).

Dla kół o zębach skośnych równanie ruchu przyjmuje postać [L.3]:

$$a = \frac{d^2y}{d\tau^2} = 1 - 2\varphi\frac{dy}{d\tau} - \frac{1}{\varepsilon_\beta t}\sum_{i=1}^{t\varepsilon_\beta}(c_{1i}u_i' + c_{2i}u_i), \tag{3}$$

gdzie:

τ - czas

t - liczba tarcz przypadająca na podziałkę poskokową,

a - przyspieszenie drgań bryły,

φ - współczynnik tłumienia,

ε_β - poskokowy wskaźnik przyporu,

c_{1i} - sztywność pierwszej pary zębów w tarczy i,

c_{2i} - sztywność drugiej pary zębów w tarczy i,

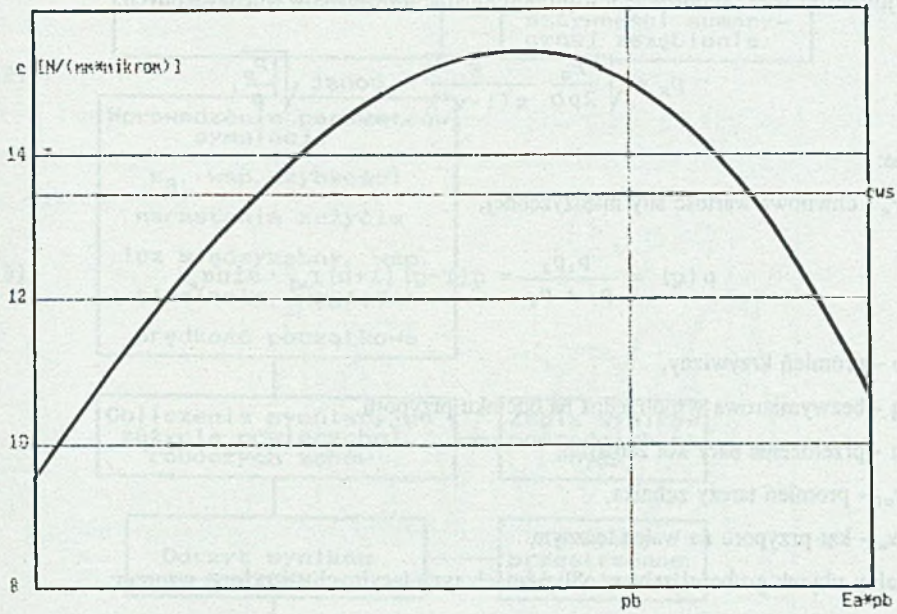
u_i' - ugięcie pierwszej pary zębów i,

u_i'' - ugięcie drugiej pary zębów i,

przy czym ugięcia wylicza się znając przemieszczenie bryły oraz zużycie powierzchni zębów ($g_{1,2i}$) w omawianej tarczy, stąd:

$$u_i' = y - g_{1i}$$
$$u_i'' = y - g_{2i} \qquad (4)$$

Jest to równanie różniczkowe II stopnia o parametrach nieliniowych uwzględniające luz międzyzębny. Równanie to może być rozwiązane metodami przybliżonymi, np. Rungego - Kutta - Gilla.



Rys.2. Wykres sztywności zazębienia pary zębów prostych na odcinku przyporu - ϵ_α = 1.4
Fig.2. Rigidity diagram of spur pair on the contact line - ϵ_α = 1.4

Badania symulacyjne wpływu zużycia powierzchni zębów na zjawiska dynamiczne przekładni wymagały przyjęcia hipotezy dotyczącej rodzaju zużycia. Obecnie jednak brak jest danych empirycznych, aby można jednoznacznie opisać zarys zęba w funkcji czasu eksploatacji

przekładni. Dlatego badania prowadzono dla kilku prawdopodobnych rodzajów zużycia i poszukiwano wspólnych wniosków. Zakładano mianowicie, że zużycie powierzchni roboczych zębów zmienia się:

- proporcjonalnie do nacisków powierzchniowych,
- proporcjonalnie do głębokości zalegania maksymalnych naprężeń stycznych,
- proporcjonalnie do wartości chwilowej przyrostu temperatury na powierzchni.

Podane poniżej wyniki obliczeń symulacyjnych otrzymano przy pierwszym założeniu. Natomiast przedstawione w opracowaniu wnioski z badań mają charakter ogólny i znalazły potwierdzenie również dla pozostałych rodzajów zużycia powierzchni zębów. Zgodne z pierwszym założeniem przyjmowano więc, że zużycie jest proporcjonalne do nacisków międzyzębnych:

$$p_H = \sqrt{\frac{P_n}{2\rho b}\,\frac{E}{\pi(1-v^2)}} = const\sqrt{\frac{P_n}{\rho}}, \tag{5}$$

gdzie:

P_n - chwilowa wartość siły międzyzębnej,

$$\rho(q) = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} = q(1-q)(1+u)\,r_{w1}\cdot\sin\alpha_w \tag{6}$$

ρ - promień krzywizny,

q - bezwymiarowa współrzędna na odcinku przyporu,

u - przełożenie pary kół zębatych,

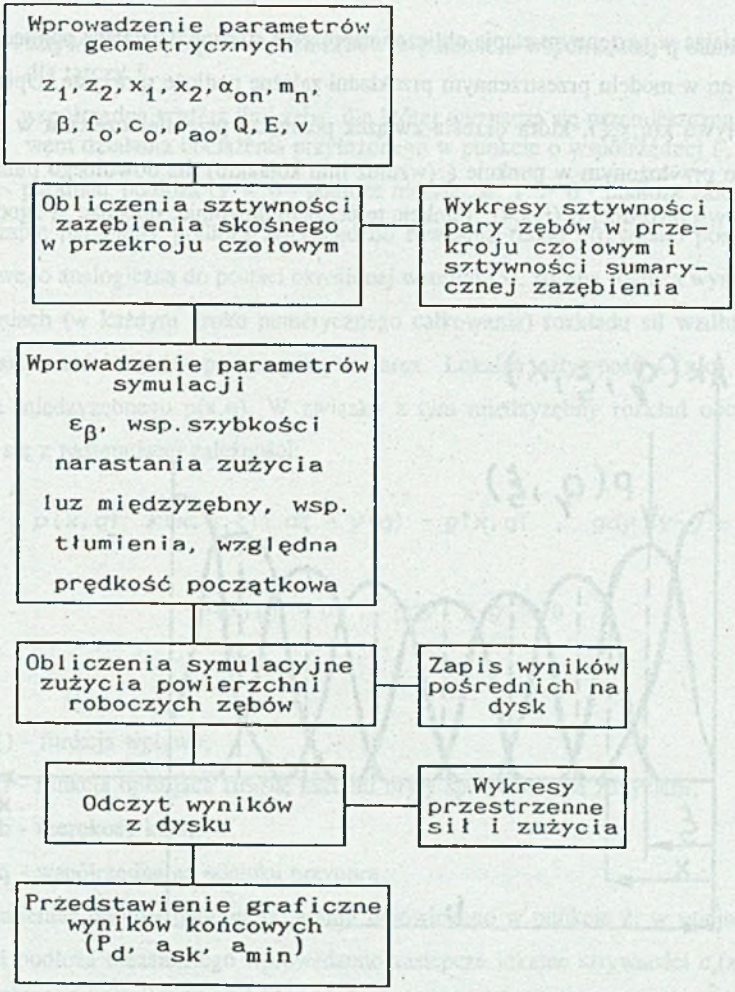
r_{w1} - promień tarczy zębnika,

α_w - kąt przyporu na walcu tocznym.

Lokalny ubytek grubości zęba w obliczeniach symulacyjnych wyrażono wzorem:

$$g = 0.0025\sqrt{\frac{P}{\rho}} \tag{7}$$

Schemat blokowy algorytmu obliczeń dla rozpatrywanego przypadku przedstawiono na rys.3.

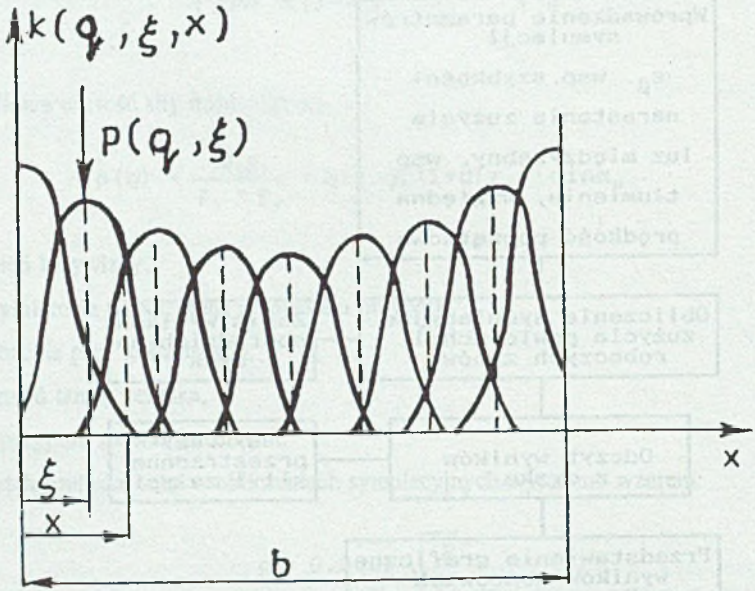


Rys.3. Schemat blokowy algorytmu wyznaczania obciążeń dynamicznych przekładni o zębach skośnych przy założeniu podłoża niezależnego

Fig.3. The block scheme of the evaluation algorithm of dynamic load in the helical spur gear with the assumption of independent base

3. WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH W PRZEKŁADNI O ZĘBACH SKOŚNYCH DLA MODELU TARCZOWEGO PRZY ZAŁOŻENIU PODŁOŻA ZALEŻNEGO

Uwzględniając w następnym etapie obliczeń naprężenia styczne działające pomiędzy tarczami wprowadzono w modelu przestrzennym przekładni zależne podłoże sprężyste. Opisano je tzw. funkcją wpływu $k(q,x,\xi)$, która określa związek pomiędzy przemieszczeniem w punkcie x a obciążeniem przyłożonym w punkcie ξ (wzdłuż linii kontaktu) dla dowolnego punktu odcinka przyporu o współrzędnej q (rys.4). Funkcję tę przyjęto dowolnie, opisując ją zgodnie z [L.5] równaniem:



Rys.4. Funkcja wpływu $k(q,x,\xi)$ opisująca charakter podłoża modelującego współpracujące powierzchnie boczne tarcz

Fig.4. The relation of influences describing the base modeling laterd disc surfaces the character of $k(q,x\xi)$

$$k(q,x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{c(q,\xi)} e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2}{\chi}\right]} & , \; gdy \; c(q,\xi) \neq 0 \\ 0 & , \; gdy \; c(q,\xi) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

gdzie:

c(q, ξ) - sztywność współpracujących zębów w punkcie o współrzędnej q odcinka przyporu dla tarczy ξ,

x - współrzędna wzdłuż linii zęba, dla której wyznacza się przemieszczenie pod wpływem działania obciążenia przyłożonego w punkcie o współrzędnej ξ,

χ - parametr podłoża ($\chi = 0$ - podłoże niezależne, $\chi > 0$ - podłoże zależne).

Wprowadzając parametry podłoża zależnego do równania ruchu otrzymano postać równania różniczkowego analogiczną do postaci określonej wzorem (3). Istotna różnica występuje jednak w obliczeniach (w każdym kroku numerycznego całkowania) rozkładu sił wzdłuż linii styku zębów i sztywności zębów poszczególnych tarcz. Lokalna sztywność C(x,q) jest funkcją obciążenia międzyzębnego p(x,q). W związku z tym międzyzębny rozkład obciążeń p(x,q) wyznacza się z następującej zależności:

$$\int_0^b p(x,q) \; k(x,q,\xi) \; d\xi = y(q) - g(x,q) \quad , \; gdy \; y-g \geq 0 \tag{9}$$

$$p(x,q) = 0 \quad , \; gdy \; y-g < 0$$

gdzie:

k(x,q,ξ) - funkcja wpływu,

g(x,q) - funkcja opisująca zmianę kształtu bryły spowodowaną zużyciem,

b - szerokość koła,

q - współrzędna na odcinku przyporu.

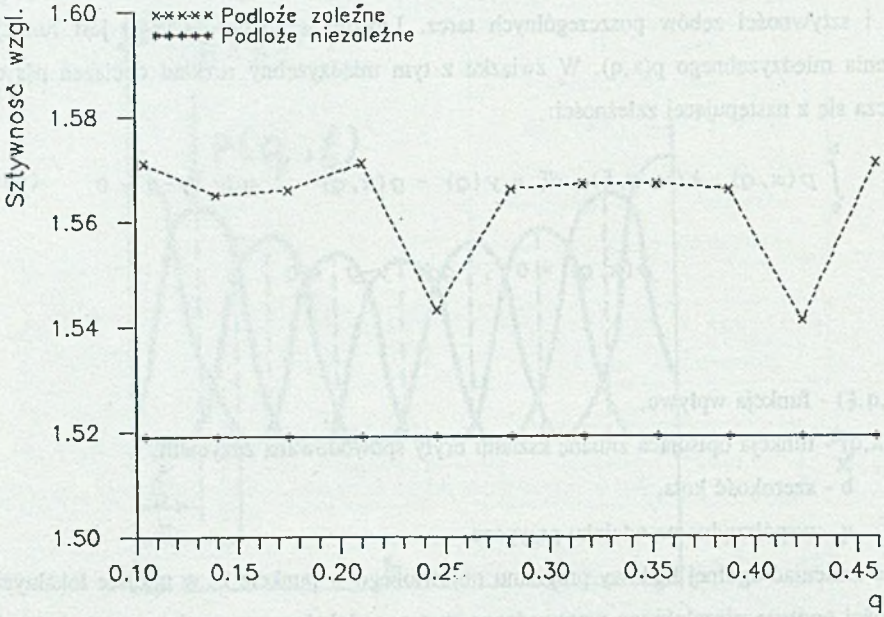
Aby nie zmieniać ogólnej budowy programu omówionego w punkcie 2, w miejsce lokalnych sztywności podłoża niezależnego wprowadzono zastępcze lokalne sztywności $c_z(x,q)$, których wartości oblicza się następująco:

$$c_z(x,q) = \frac{p(x,q)}{y(q) - g(x,q)}, \tag{10}$$

przy czym p(x,q) wyznaczane jest z zależności (8). Równanie 9 rozwiązano metodą numeryczną drogą kolejnych przybliżeń wg [2].

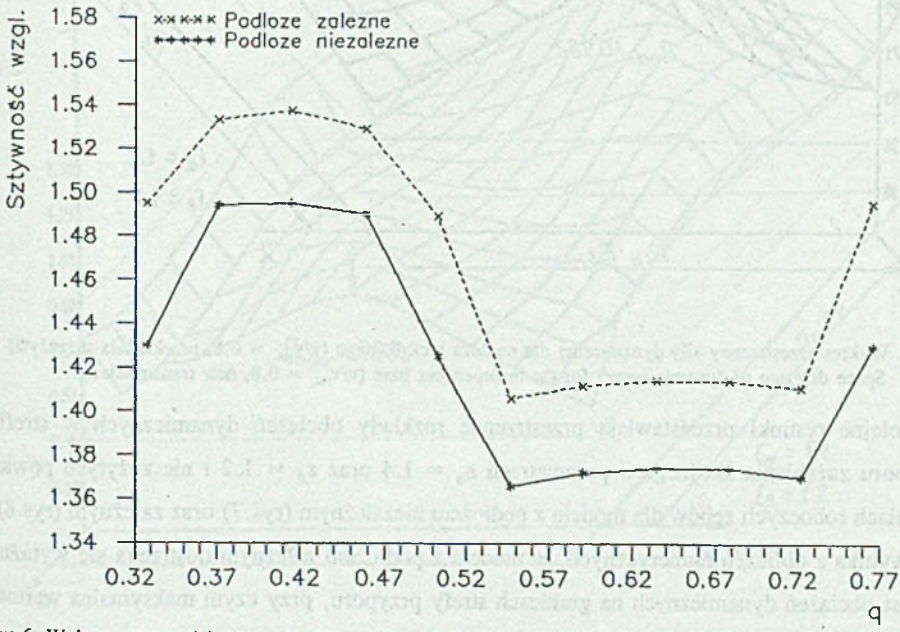
4. OMÓWIENIE WYNIKÓW OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Obliczenia symulacyjne prowadzono dla różnych skojarzeń cech geometrycznych zazębienia skośnego. Wybrane wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w postaci graficznej.

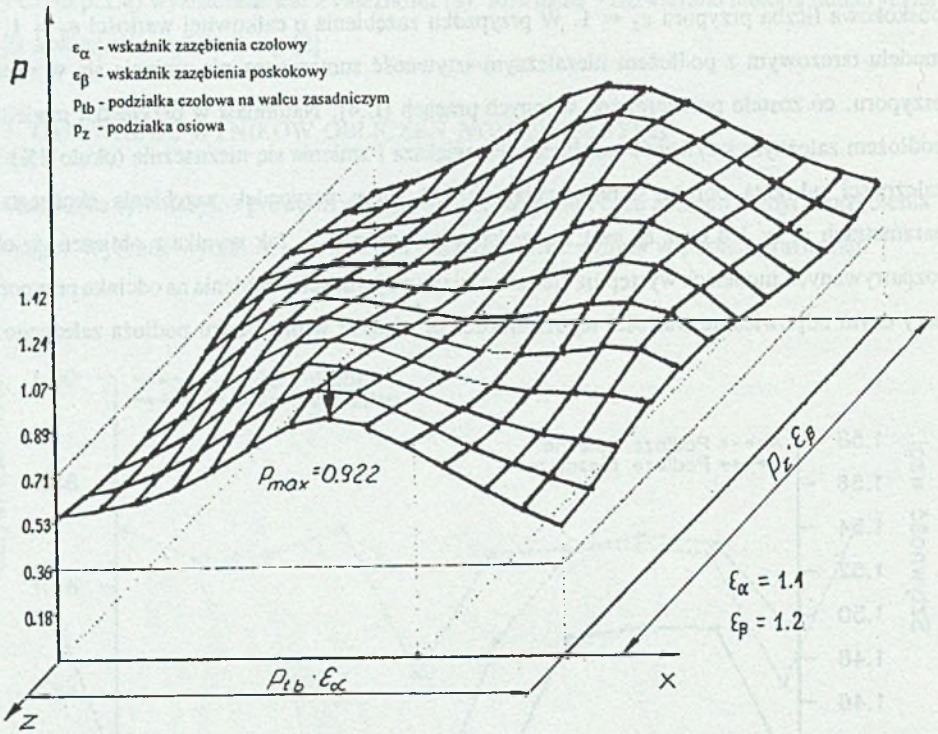


Rys.5. Wykres sztywności sumarycznej zazębienia w funkcji położenia kół (ε_α = 1.5, ε_β = 1.0)
Fig.5. Total rigidity diagram of mesh in the wheel position function (ε_α = 1.5, ε_β = 1.0)

Rys. 5, 6 przedstawiają zmiany sztywności sumarycznej zazębienia skośnego w funkcji kąta obrotu kół. Zakres zmiany tego kąta odpowiada podziałce kół. Rys. 5 dotyczy zazębienia o następujących cechach geometrycznych: liczba przyporu w przekroju czołowym $\varepsilon_\alpha = 1.5$, poskokowa liczba przyporu $\varepsilon_\beta = 1$. W przypadku zazębienia o całkowitej wartości $\varepsilon_\beta = 1$, w modelu tarczowym z podłożem niezależnym sztywność sumaryczna nie zmienia się w strefie przyporu, co zostało potwierdzone w innych pracach [L.4]. Natomiast w przypadku modelu z podłożem zależnym sztywność zazębienia jest większa i zmienia się nieznacznie (około 2%) w zależności od kąta obrotu współpracujących kół. Inny przypadek zazębienia skośnego o parametrach $\varepsilon_\alpha = 1.4$ oraz $\varepsilon_\beta = 1.2$ przedstawiono na rys. 6. Jak wynika z obliczeń, w obu rozpatrywanych modelach występują znaczne zmiany sztywności zazębienia na odcinku przyporu, przy czym odpowiednie wartości tej sztywności są większe w przypadku podłoża zależnego.



Rys.6. Wykres sztywności sumarycznej zazębienia w funkcji położenia kół ($\varepsilon_\alpha = 1.4$, $\varepsilon_\beta = 1.2$)
Fig.6. Total rigidity diagram of mesh in the wheel position function ($\varepsilon_\alpha = 1.4$, $\varepsilon_\beta = 1.2$)

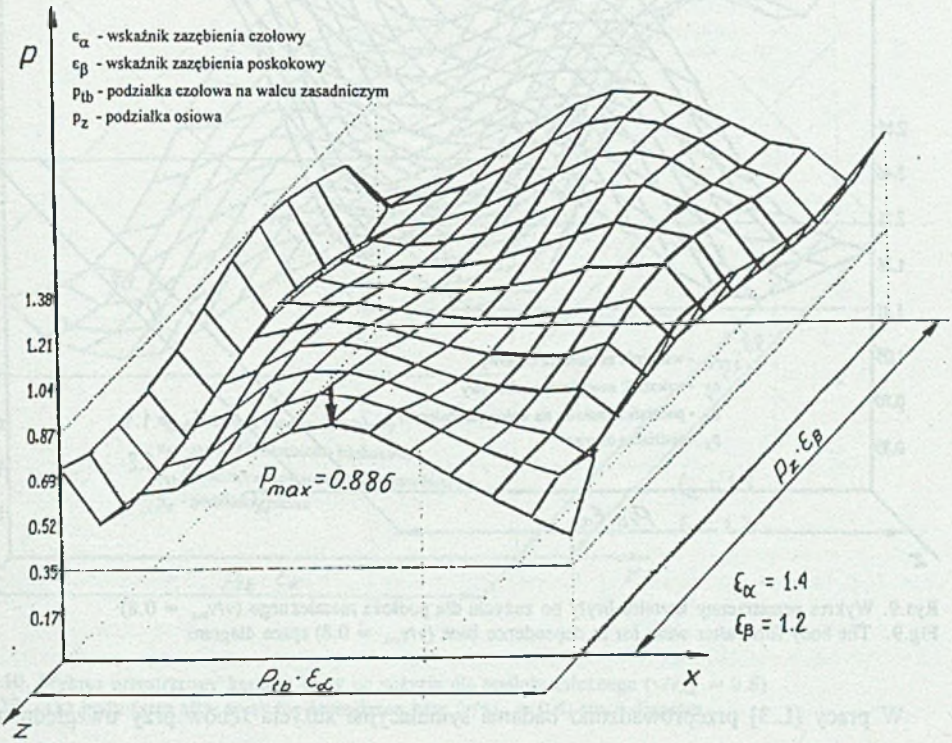


Rys.7. Wykres przestrzenny siły dynamicznej dla podłoża niezależnego ($v/v_{rez.}$ = 0.8, przekładnia niezużyta)
Fig.7. Space diagram of dynamic power for the in dependent base ($v/v_{rez.}$ = 0.8, new transmission)

Kolejne rysunki przedstawiają przestrzenne rozkłady obciążeń dynamicznych w strefie przyporu zazębienia skośnego o parametrach ε_α = 1.4 oraz ε_β = 1.2 i nie zużytych powierzchniach roboczych zębów dla modelu z podłożem niezależnym (rys.7) oraz zależnym (rys.8). Jak wynika z obliczeń numerycznych, w modelu z podłożem zależnym dostrzega się wyraźny wzrost obciążeń dynamicznych na granicach strefy przyporu, przy czym maksymalna wartość tego obciążenia jest nieznacznie mniejsza niż w przypadku podłoża zależnego i występuje w tym samym punkcie strefy przyporu. Wzrost obciążenia dynamicznego w pobliżu

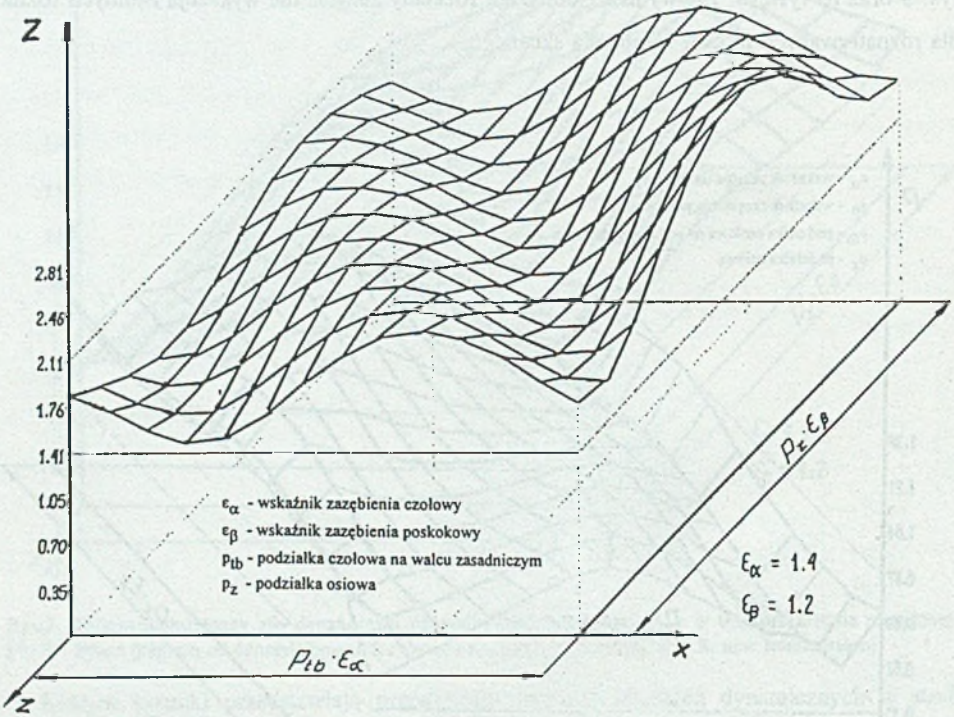
granicy strefy przyporu w przypadku podłoża zależnego spowodowany jest wzrostem sztywności zazębienia w tym miejscu wskutek uwzględnienia sztywności sąsiednich stref zębów nie znajdujących się aktualnie w przyporze.

Otrzymane w wyniku symulacji komputerowej rozkłady zużycia powierzchni roboczych zębów w strefie przyporu dla modelu z podłożem niezależnym przedstawiono odpowiednio na rys. 9 oraz na rys. 10. Jak wynika z obliczeń, rozkłady zużycia nie wykazują istotnych różnic dla rozpatrywanych modeli zazębienia skośnego.



Rys.8. Wykres przestrzenny siły dynamicznej dla podłoża zależnego ($v/v_{rez.} = 0.8$, przekładnia niezużyta)
Fig.8. Space diagram of dynamic power for the dependent base ($v/v_{rez.} = 0.8$, new transmission)

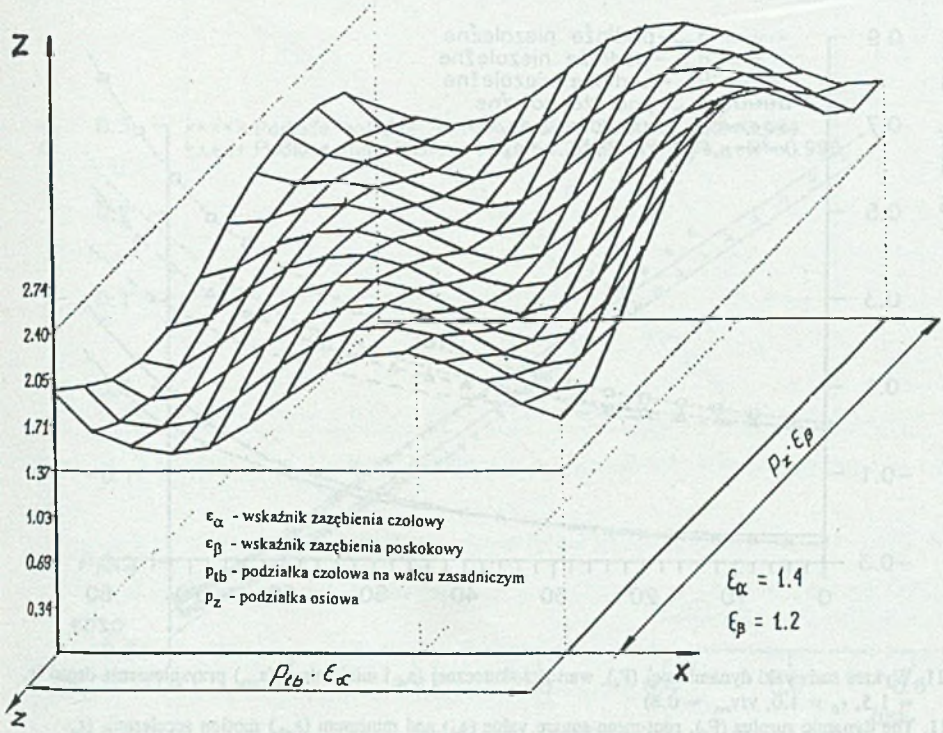
Dla celów diagnostycznych interesujący jest charakter zmian parametrów dynamicznych przekładni, takich jak: nadwyżka dynamiczna P_d, skuteczna wartość przyspieszenia drgań względnych kół a_{sk} oraz ekstremalna wartość tego przyspieszenia $|a_{min}|$ towarzyszących rosnącemu zużyciu powierzchni roboczych zębów.



Rys.9. Wykres przestrzenny kształtu bryły po zużyciu dla podłoża niezależnego ($v/v_{rez.} = 0.8$)
Fig.9. The body form after wear for in dependence base ($v/v_{rez.} = 0.8$) space diagram

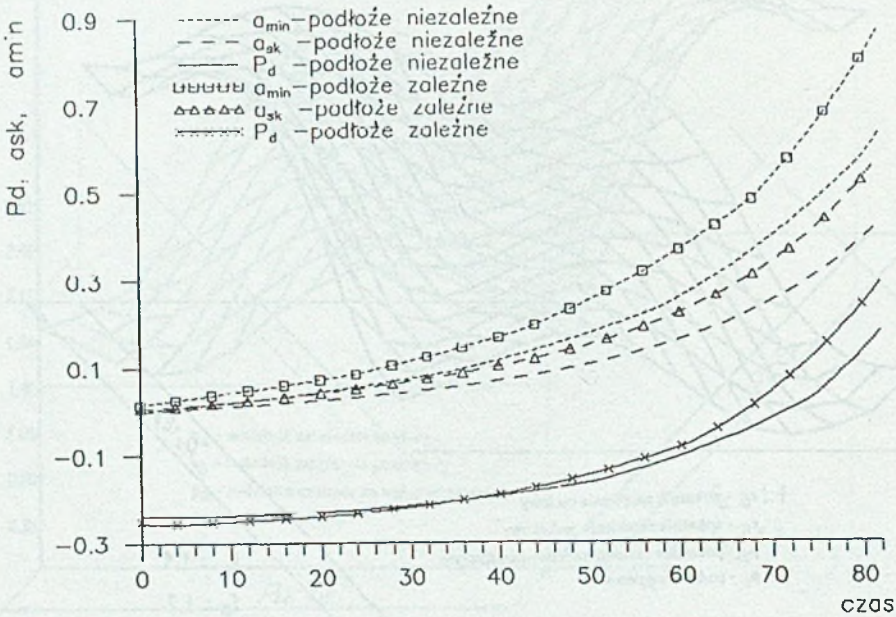
W pracy [L.3] przeprowadzono badania symulacyjne zużycia zębów przy uwzględnieniu modelu tarczowego z podłożem niezależnym oraz ustalono optymalne symptomy stanu dynamicznego przekładni i ich graniczne wartości. Symptomami tymi są rozpatrywane parametry

dynamiczne. Sformułowano także ogólną metodę diagnozowania przekładni zębatych uwzględniającą liniową zależność pomiędzy nadwyżką dynamiczną i wartością skuteczną przyspieszenia drgań kół.



Rys.10. Wykres przestrzenny kształtu bryły po zużyciu dla podłoża zależnego ($v/v_{rez.} = 0.8$)
Fig.10. The body form after wear for dependence base ($v/v_{rez.} = 0.8$) space diagram

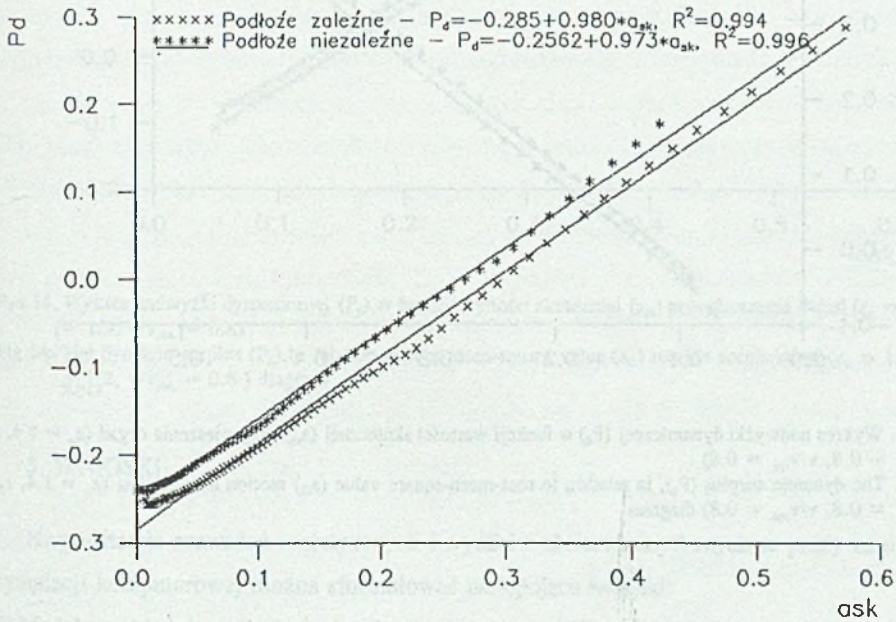
Dla sprawdzenia poprawności tej metody diagnozowania przeprowadzono symulację komputerową zużywania się zębów dla dwóch różnych modeli dynamicznych: dotychczasowego z podłożem niezależnym i modelu z podłożem zależnym. Porównanie wyników obliczeń symulacyjnych dla różnych cech geometrycznych uzębienia przedstawiono na kolejnych rysunkach, a mianowicie: na rys. 11, 12 dla przypadku, gdy $\varepsilon_\alpha = 1.5$ oraz $\varepsilon_\beta = 1.0$, na rys. 13 dla przypadku, $\varepsilon_\alpha = 1.4$ oraz $\varepsilon_\beta = 0.8$, na rys. 14 dla przypadku, gdy $\varepsilon_\alpha = 1.4$ oraz $\varepsilon_\beta = 1.2$.



Rys.11. Wykres nadwyżki dynamicznej (P_d), wartości skutecznej (a_{sk} i minimalnej (a_{min}) przyspieszenia drgań ($\varepsilon_\alpha = 1.5$, $\varepsilon_\beta = 1.0$, $v/v_{rez.} = 0.8$)

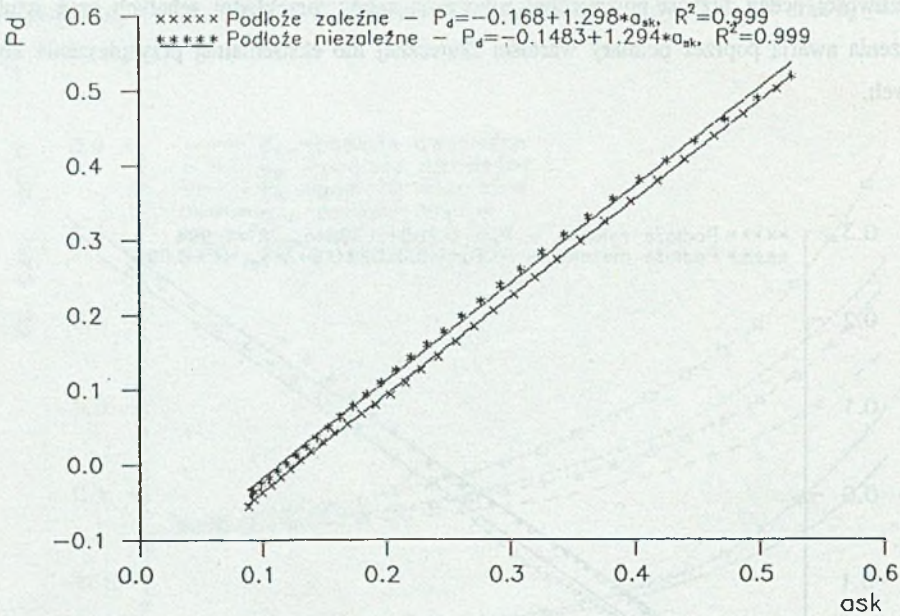
Fig.11. The dynamic surplus (P_d), root-mean-square value (a_{sk}) and minimum (a_{min}) motion acceleratin ($\varepsilon_\alpha = 1.5$, $\varepsilon_\beta = 1.0$, $v/v_{rez.} = 0.8$) diagram

Jak wynika z obliczeń, maksymalne obciążenia dynamiczne dla przypadku modelu z podłożem zależnym są nieco mniejsze od odpowiednich wartości uzyskanych dla modelu z podłożem niezależnym. Również w przypadku modelu z podłożem zależnym stwierdza się liniową zależność pomiędzy nadwyżką dynamiczną a wartością skuteczną przyspieszenia drgań, charakteryzującą się dużą wartością współczynnika korelacji R^2. Potwierdza to słuszność hipotezy o możliwości oceny zużycia powierzchni roboczych zębów przekładni zębatych oraz stanu zagrożenia awarią poprzez pomiary wartości skutecznej lub ekstremalnej przyspieszenia kół zębatych.



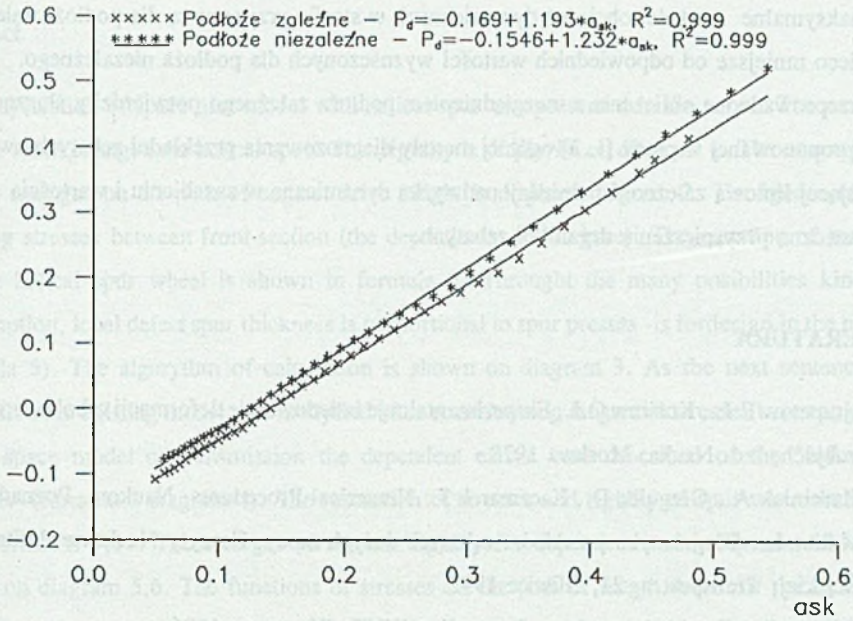
Rys.12. Wykres nadwyżki dynamicznej (P_d), w funkcji wartości skutecznej (a_{sk}) przyspieszenia drgań (ε_α = 1.5, ϵ_β = 1.0, $v/v_{rez.}$ = 0.8)

Fig.12. The dynamic surplus (P_d), in relation to root-mean-square value (a_{sk}) motion acceleration (ϵ_α = 1.5, ξ_β = 1.0, $v/v_{rez.}$ = 0.8) diagram



Rys.13. Wykres nadwyżki dynamicznej (P_d) w funkcji wartości skutecznej (a_{sk}) przyspieszenia drgań (ε_α = 1.4, ϵ_β = 0.8, $v/v_{rez.}$ = 0.8)

Fig.13. The dynamic surplus (P_d), in relation to root-mean-square value (a_{sk}) motion acceleration (ε_α = 1.4, ϵ_β = 0.8, $v/v_{rez.}$ = 0.8) diagram



Rys.14. Wykres nadwyżki dynamicznej (P_d),w funkcji wartości skutecznej (a_{sk}) przyspieszenia drgań (ε_a = 1.4, ξ_β = 1.2, $v/v_{rez.}$ = 0.8)

Fig.14. The dynamic surplus (P_d),in relation to root-mean-square value (a_{sk}) motion acceleration (ε_a = 1.4, ξ_β = 1.2, $v/v_{rez.}$ = 0.8) diagram

5. WNIOSKI

Na podstawie rozważań teoretycznych i wyników obliczeń uzyskanych w pracy za pomocą symulacji komputerowej można sformułować następujące wnioski:

1) Model przekładni o zębach skośnych uwzględniający podłoże zależne jest przydatny do analizy zjawisk dynamicznych towarzyszących zużywaniu się powierzchni roboczych zębów.

2) W przypadku modelu zazębienia skośnego z podłożem zależnym sumaryczna sztywność zazębienia przyjmuje wyższe wartości niż w modelu z podłożem niezależnym, natomiast maksymalne wartości obciążeń dynamicznych w strefie przyporu są dla podłoża zależnego nieco mniejsze od odpowiednich wartości wyznaczonych dla podłoża niezależnego.

3) Przeprowadzone obliczenia z uwzględnieniem podłoża zależnego potwierdziły słuszność zaproponowanej w pracy [L.3] ogólnej metody diagnozowania przekładni zębatych uwzględniającej liniową zależność pomiędzy nadwyżką dynamiczną w zazębieniu i wartością skuteczną przyspieszenia drgań kół zębatych.

LITERATURA

[1] Ajrapetow E.L., Kosirew O.I.: Eksperimentalnoje issledowanije deformacij w bokoobraznych zubjach, Izd. Nauka, Moskwa 1978.

[2] Marciniak A., Gregulec D., Kaczmarek J.: Numerical Procedures, Naukom, Poznań 1991.

[3] Müller L.: Diagnostyka przekładni zębatych dużych mocy, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Transport z. 21, Gliwice 1992.

[4] Müller L.: Przekładnie zębate. Dynamika, WNT, Warszawa 1986.

[5] Ryś J., Stachoń S.: Analiza dynamiczna walcowych przekładni zębatych o zębach skośnych, Archiwum Budowy Maszyn, Tom XXXIV, Kraków 1987.

Recenzent: Dr hab. inż. Zbigniew Dąbrowski

Wpłynęło do Redakcji 20.10.1994 r.

Abstract

Modyfication of space disc model with helical spur was presented in the paper. The narrow straight tooth changed the helical spur. This rigidity is displayed on diagram 1. The example of rigidity changes on the path of contact drive lenght is displaed diagram 2. The ignore of the shearing stresses between front-section (the dependence elastic base). The equation of motion for the helical spur wheel is shown in formula 3. Throught the many posibilities kind of consumption, local defect spur thickness is proportional to spur presses -is fordesign in the paper (formula 5). The algorythm of calculation is shown on diagram 3. As the next sentence of calculation the existing model was modyfied after considerating tangential stresses between discs to the space model of transmission the dependent elastic base described of the "influence function" (formula 8 diagram 4). The resolution of stresses and rigidity of spur was calculated from formulas 9,10. The changes of signum rigidity for dependent and independent base is shown on diagram 5,6. The functions of stresses on the path of length drive for the new and used spures is shown on diagram 7 and 8.

The resolution of wear of the worst areas for dependent and independent base models is shown on diagram 9 and 10.

The character of changes the dynamic parameters for increasing the area of wear is interesting for diagnosis (diagram 11).

The model with the dependent elasticity base to diagnostic effect and possibility of uses in diagnosis accepting those calculations.