ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z.99 Nr kol. 1057

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"
POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
Beskid Śląski, 1990

Elżbieta Jarzębowska
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Zakład Mechaniki, Politechnika Warszawska

ZAGADNIENIA DRGAŃ I STATECZNOŚCI NIESWOBODNEGO UKŁADU MECHANICZNEGO O ZMIENNEJ MASIE

Streszczenie. W pracy rozpatrywane są zagadnienia drgań i badania stateczności nieswobodnego układu mechanicznego o zmiennej masie. Badanym układem jest szpula z odwijającym się cienkim przewodem. Dla zadanej prędkości odwijania przewodu wprowadzono pełne nieliniowe równania ruchu układu o zmiennej masie oraz przedstawiono równania zlinearyzowane. Przedstawiono rozwiązania równań ruchu układu w postaci wykresów przebiegów czasowych z uwzględnieniem wpływu zmiany masy na drgania układu. Zbadano stateczność w sensie Lapunova rozwiązań równań ruchu.

Zagadnienia drgań i stateczności układów mechanicznych powstają na przykład przy badaniu procesu nawijania i odwijania przewodów w przemyśle radiotechnicznym lub nici w przemyśle tekstylnym (rys.1).
Z punktu widzenia ekonomiczności procesu technologicznego pożądana jest jak największa prędkość ruchu przewodu, jednakże ze względów technicznych dla każdego typu przewodu i rozmiarów jego swobodnej części pomiędzy wejściem a wyjściem występuje wymagana prędkość graniczna.
Dodatkowo należy mieć na uwadze fakt, że rozważane układy są układami o

zmiennej masie, dla których zmiana masy może wywołać niepożądane drgania, wzrost reakcji dynamicznych, utratę stateczności układu. W przedstawionych zagadnieniach główną rolę odgrywa zagadnienie drgań, stateczności i zachowania kształtu przewijającej się nici lub przewodu, co stanowi temat niniejszej pracy. Praca ta jest prwną kontynuacją tematyki przedstawionej na VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki [2], gdzie rozpatrywano zagadnienie ruchu programowego szpuli.

Reasumując, w pracy rozważamy zagadnienie drgań i stateczności szpuli z odwijającym się przewodem, zakładając stałą znaną prędkość odwijania się cienkiego przewodu.

Układ o zmiennej masie, jakim jest szpula z odwijającym się przewodem, badany jest metodami mechaniki analitycznej układów o zmiennej masie i konfiguracji [1] oraz metodami teorii stateczności.

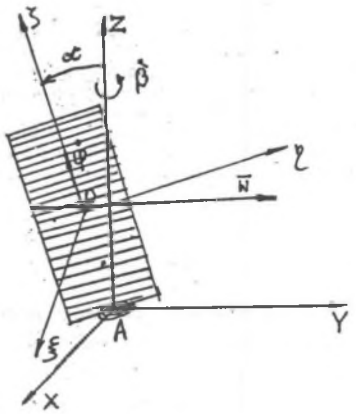
W niniejszej pracy przedstawiono:

1) Dynamiczne równania ruchu układu o zmiennej masie (pełne nieliniowe równania ruchu) i równania zlinearyzowane.

2) Badanie stateczności ruchu układu o zmiennej masie.

Obracającą się szpulę z odwijającym się przewodem modelujemy jako sztywny walec o zmiennej masie, podparty sprężyście w punkcie A (rys.1). W A umieszczony jest początek nieruchomego układu (X,Y,Z), względem którego opisany jest ruch szpuli.

α, β, ϕ oznaczają współrzędne uogólnione.



Rys.1

Do wprowadzenia równań ruchu układu korzystamy z metod mechaniki analitycznej układów nieswobodnych o zmiennej masie lub konfiguracji opartej na uogólnionych równaniach typu Mangerona-Deleanu [1] o postaci:

$$\frac{1}{p}\left[\frac{\partial T^{(p)}}{\partial q_\sigma^{(p)}} - (p+1)\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right] = Q_\sigma + P_\sigma \qquad \begin{matrix}\sigma = 1,\dots,n\\ p = 1,\dots,n\,.\end{matrix} \tag{1}$$

Korzystając z (1) wyprowadzono pełne nieliniowe równania ruchu szpuli z odwijającym się przewodem. Mają one postać:

$$\begin{aligned}
&A\ddot{\beta} + A\dot{\alpha}^2 \sin\beta\cos\beta - C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\phi})\,\dot{\alpha}\cos\beta + \\
&+ ka^2 \sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha - Gl\sin\beta\cos\alpha = 0 \\
&A\ddot{\alpha}\cos\beta - 2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta + C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\phi})\dot{\beta} + \\
&+ ka^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta - Gl\sin\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$C(\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\phi}) = 0\,,$$

gdzie: A, C – momenty bezwładności szpuli z przewodem,

$2l$ – wysokość szpuli,

$r = r(t)$ – promień szpuli.

W równaniach tych wielkości C nie są stałe, lecz zależą jawnie lub niejawnie od czasu.

Zbadano stateczność w sensie Lapunova rozwiązania zerowego równań (2): $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0$.

Zgodnie z twierdzeniem Lapunova o stateczności wybieramy funkcję $V(t,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$ w postaci:

$$\begin{aligned}
V = {} & \frac{1}{2} A(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta) + \frac{1}{2} Ch^2 + Gl\cos\beta\cos\alpha + \\
& + \frac{1}{2} ka^2(1 - \cos^2\beta\cos^2\alpha)\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie: $h = \alpha\sin\beta + \phi$,

V jest funkcją klasy $C^{(1)}$, dodatnio określoną dla $t > 0$ dla dowolnych α i β oraz α i β z przedziału $\langle 0, \Pi/2 \rangle$. Przedział zmienności α, β nie może być przekroczony ze względu na przyjęty model fizyczny układu. Badamy teraz pochodną zupełną względem czasu funkcji V dla rozwiązań układu (2). Mamy:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\dot{A}(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta)\ \frac{1}{2}\dot{C}h^2 + A\dot{\beta}\ddot{\beta} + A\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\cos^2\beta +$$
$$- A\dot{\alpha}^2\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta - Gl\,\dot{\beta}\sin\beta\cos\alpha - Gl\,\dot{\alpha}\cos\beta\sin\alpha \tag{4}$$
$$+ ka^2\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta\cos^2\alpha + ka^2\dot{\alpha}\cos^2\beta\sin\alpha\cos\alpha .$$

Podstawiając do (4) $\ddot{\alpha}$ i $\ddot{\beta}$ z (2) i redukując składniki podobne otrzymujemy;

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\dot{A}(\dot{\beta} + \dot{\alpha}\cos^2\beta) + \frac{1}{2}\dot{C}h^2 < 0. \tag{5}$$

Ponieważ przy odwijaniu momenty bezwładności A i C są monotonicznie malejącymi funkcjami czasu, zatem A i C < 0. Wobec tego pochodna funkcji Lapunova jest określona ujemnie w rozważanym obszarze. Wobec tego rozwiązanie zerowe α, β, α, $\beta=0$ równania (2) jest stateczne w sensie Lapunova.

Na mocy (3) nie można jednak wnioskować o stateczności asymptotycznej rozwiązania zerowego, ponieważ na mocy twierdzenia Lapunova o stateczności asymptotycznej do tego celu musiałby być jeszcze spełniony warunek:

$$V(t,\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}) \to 0 \text{ przy } |\alpha| + |\beta| + |\dot{\alpha}| + |\dot{\beta}| \to 0$$

jednostajnie względem czasu t. W rozważanym przypadku warunek ten nie zachodzi.

Gdybyśmy chcieli badać stateczność w sensie Lapunova rozwiązania zerowego równań nieliniowych (2) przy założeniu, że momenty bezwładności są stałe i równe A_o, C_o, to należy badania takie przeprowadzić za pomocą funkcji Lapunova w postaci (3), w której podstawiamy A_o i C_o. Funkcja V byłaby nadal określona dodatnio we wskazanym poprzednio obszarze, natomiast jej pochodna dla rozwiązań równań (2) byłaby, na mocy (5), równa zeru, to znaczy;

$$\frac{dV}{dt} = 0, \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} A = A_o = \text{const}, \\ C = C_o = \text{const}. \end{matrix} \tag{6}$$

Równanie to wyraża zasadę zachowania energii dla rozważanej szpuli. Uzyskane rezultaty dowodzą, na mocy twierdzenia Lapunova, że rozwiązanie zerowe dla rozważanego układu jest stateczne w sensie Lapunova.
Zauważmy, że gdyby do badania stateczności rozwiązania zerowego zastosować tak zwaną metodę pierwszego przybliżenia i przyjąc równania zlinearyzowane ze stałymi A_o i C_o

$$\begin{aligned} A_o\ddot{\beta} - C_o h\dot{\alpha} + \varkappa\beta &= 0, \\ A_o\ddot{\alpha} + C_o h\dot{\beta} + \varkappa\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

jako równanie pierwszego przybliżenia, to nie moglibyśmy nic powiedzieć o stateczności rozwiązania, gdyż rozwiązania równania (7) są czysto urojone, co świadczy o tym, że występuje tak zwany przypadek krytyczny. Dlatego też w celu zbadania stateczności rozwiązania zerowego pełnych równań nieliniowych trzeba posłużyć się metodą funkcji Lapunova.

LITERATURA

[1] Jarzębowska E.: Zasady wariacyjne i równania ruchu mechaniki analitycznej układów nieswobodnych o zmiennej masie - praca doktorska, Politechnika Warszawska 1988

[2] Jarzębowska E.: Wybrane zagadnienia drgań układu mechanicznego o zmiennej masie - VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, Kraków, 1987.

[3] Mangeron ., Deleanu S.: Sur une classe d'equations de la mecanique analytique ou sens de Tzenoff - Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Science, 15, 1962, ss. 1-9.

[4] Nowosielov V.S.: Analitičeskaja mechanika sistem s peremiennymi massami, Izd.L.U.,1969.

ПРОБЛЕМЫ КОЛЕБАНИЙ И СТАБИЛЬНОСТИ НЕСВОБОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Резюме

В работе рассматривается проблемы колебаний и стабильности несвободной механической системы с переменной массой. Система представлена как катушка с обмоткой из тонкой проволоки. Для заданной скорости размотки проволоки выведены полные нелинейные уравнения движения системы с переменной массой, а также представлены линейные уравнения. Решения уравнений движения системы представлены в форме временных графиков, учитывающих влияние изменений массы на колебания системы. Исследовалась стабильность по Ляпунову решений уравнения движения.

VIBRATION AND STABILITY PROBLEMS FOR CONSTRAINT VARIABLE MASS MECHANICAL SYSTEMS

Summary

In this paper some problems connected with vibrations and stability of constraint variable mass mechanical systems have been presented.
A spool with unwindling thin wire is a model of a variable mass system. For the given of a wire unwindling, comming from the need of some industrial processes, nonlinear motion equations of a variable mass system have been derived.
Linearization of these equations has been also presented.
The method of analytical mechanics for constraint variable mass and configuration systems has been applied for derivation of motion equations. Solutions of nonlinear equations have been presented as time courses with regard to influence mass changes upon a system vibrations.
Stability of motion equations solutions has been investigated.