ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z.99 Nr kol. 1057

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"
POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
Beskid Śląski, 1990

Ryszard Maroński
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

O PEWNYM ZAGADNIENIU LOKOMOCJI

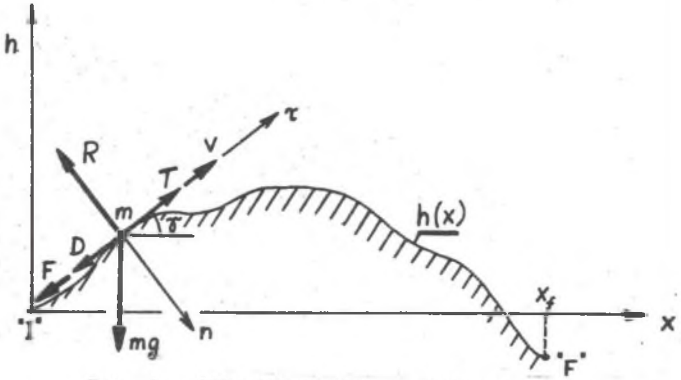
Streszczenie. Celem pracy jest pokazanie, że dwa zadania: minimalizacji pracy mechanicznej potrzebnej na pokonanie przez kolarza zadanago dystansu w danym czasie oraz minimalizacji czasu przejazdu tego dystansu przy zadanym zasobie energii mechanicznej, jaką dysponuje zawodnik, mają jednakowe rozwiązania. Dla kolarza traktowanego jak punkt materialny wykazano, że na środkowym odcinku trajektorii (cruise) optymalna prędkość jazdy jest stała i nie zależy od profilu trasy. Jeżeli prędkość wiatru wzdłuż trasy jest zmienna, optymalna prędkość kolarza może być wyznaczona z pewnego równania algebraicznego trzeciego stopnia.

1. Sformułowanie problemu

Rozważmy następujące zagadnienie. Kolarz o masie m /wraz z rowerem/ porusza się po trasie o profilu opisanym przez daną, różniczkowalną funkcję h(x). Trasa prowadzi z punktu początkowego I do punktu końcowego F. Wzdłuż trasy wieje wiatr z prędkością $V_w(x)$. Prędkość wiatru wiejącego "w plecy" zawodnika uważamy za dodatnią. Wyróżnijmy dwa zadania:

Zadanie 1. Przy ustalonym i danym czasie przejazdu t_f z punktu I do punktu F należy znaleźć taką prędkość kolarza v w funkcji zmiennej niezależnej x, aby ilość pracy mechanicznej L, wydatkowanej przez zawodnika, była minimalna.

<u>Zadanie 2</u>. Przy ustalonym zasobie pracy L, jaką może wydatkować zawodnik na pokonanie dystansu, należy wyznaczyć taką funkcję v(x), aby czas przejazdu t_f był minimalny.



Rys. 1. Siły działające na kolarza

Siły działające na zawodnika przedstawiono na rys. 1, na którym mg jest ciężarem kolarza wraz z rowerem, F -oporem toczenia, D -oporem aerodynamicznym, T -siłą napędzającą, R -reakcją normalną podłoża, v -prędkością ruchu kolarza, γ -kątem nachylenia profilu trasy. Równania ruchu zawodnika w naturalnym układzie współrzędnych (τ, n) można otrzymać z drugiego prawa Newtona. Są one następujące:

$$m\frac{dv}{dt} = T - D - F - mg\sin\gamma, \tag{1a}$$

$$0 = R - mg\cos\gamma. \tag{1b}$$

Równanie (1b) otrzymano przy założeniu, że składowa normalna przyspieszenia zawodnika jest bliska zeru, co jest konsekwencją dużych na ogół promieni krzywizny profilu trasy. Dla przeciętnych wyścigów szosowych można przyjąć, że kąt nachylenia profilu trasy γ jest mały - prawdziwe są wówczas przybliżenia:

$$\cos\gamma \approx 1, \tag{2a}$$

$$\sin\gamma \approx \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{dh}{dx}. \tag{2b}$$

Ze związku (1b) otrzymujemy wtedy:

$$R \approx mg. \tag{3}$$

Siłę napędzającą T można wyrazić za pomocą mocy maksymalnej kolarza $N(v)$ oraz współczynnika wykorzystania mocy $\eta \in \langle 0, 1\rangle$

$$T = \frac{N(v)\eta}{v} \, . \tag{4}$$

O mocy $N(v)$ zakładamy, że zależy tylko od prędkości jazdy. Jeżeli rower jest wyposażony w przekładnię, to zakładamy, że kolarz umie się nią posługiwać - jest w stanie dostosować przełożenie do aktualnej prędkości jazdy. Siła oporu aerodynamicznego D jest dana w klasyczny dla mechaniki lotu sposób

$$D = 0.5 \rho S C_x (v-V_w)^2 = d (v-V_w)^2, \tag{5}$$

gdzie ρ jest gęstością powietrza, S -polem odniesienia, C_x -współczynnikiem oporu aerodynamicznego. Stała $d=0.5 \rho SC_x$. O oporze toczenia $F(x)$ zakładamy, że jest funkcją zmiennej niezależnej x. Pozwala to uwzględnić zmiany oporu toczenia wynikające ze zmian nawierzchni.

Związek określający składową prędkości kolarza wzdłuż osi x jest następujący:

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \gamma . \tag{6}$$

Po wykorzystaniu przybliżenia (2a) przybiera on postać:

$$\frac{dx}{dt} = v . \tag{7}$$

Wstawiając zależności (4), (5) do równania ruchu (1a), po wykorzystaniu (2b) i (7) otrzymujemy tak zwane równanie stanu:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{m}\left[\frac{N(v)\eta}{v^2} - \frac{d}{v}(v-V_w)^2 - \frac{F(x)}{v} - \frac{mg}{v}\frac{dh}{dx}\right] . \tag{8}$$

Równanie to należy uzupełnić warunkami brzegowymi:

$$v(0) = v_i > 0 \, , \tag{9a}$$
$$v(x_f) = v_f \, . \tag{9b}$$

Prędkości: początkowa v_i i końcowa v_f powinny być dane. Za prędkość końcową v_f można wybrać prędkość finiszu danego zawodnika. Finiszowanie z prędkością maksymalną ma pewne uzasadnienie fizjologiczne. Zawodnik korzysta wtedy ze źródeł anaerobowych energii, których produktem jest kwas mlekowy. Obecność tego kwasu w mięśniach i we krwi prowadzi do wyraźnego zmniejszenia wydolności organizmu. Przesunięcie zatem zwiększonego wysiłku na koniec konkurencji nie odbija się ujemnie na wyniku sportowym /regeneracja sił następuje już po zakończeniu konkurencji/.

Możemy sformułować dwa funkcjonały: praca mechaniczna L potrzebna do pokonania dystansu wynosi

$$L = \int_i^f \frac{N\eta}{v}\,dx \quad , \tag{10}$$

czas przebycia dystansu

$$t_f = \int_i^f \frac{1}{v}\,dx \quad . \tag{11}$$

Indeksy "i" oraz "f" oznaczają odpowiednio punkt początkowy i końcowy trasy. Zadania 1 i 2 możemy zapisać teraz w następujący sposób:

Zadanie 1. Dla danej wartości t_f wyrażonej całką (11) należy znaleźć taką prędkość kolarza $v(x)$, aby było spełnione równanie stanu (8) z warunkami brzegowymi (9) i aby całka (10) przyjmowała wartość minimalną.

Zadanie 2. Dla danej wartości L wyrażonej całką (10) należy znaleźć taką prędkość kolarza $v(x)$, aby było spełnione równanie stanu (8) z warunkami brzegowymi (9) i aby całka (11) przyjmowała wartość minimalną.

2. Metoda rozwiązania

Metoda rozwiązania problemu polega na zauważeniu, że oba zadania można sprowadzić do ekstremalizacji pewnych całek liniowych zależnych od dwóch zmiennych (x,v). Ponieważ ekstremalizacja odbywa się przy założeniu, że jedna z całek: czas przejazdu lub ilość przeznaczonej na to energii jest stała, to zadania te są zadaniami izoperymetrycznymi. Metodę rozwiązania omówimy na przykładzie zadania 1.

Całkę (10) po wyeliminowaniu zmiennej sterującej η na mocy związku (8) możemy przedstawić w postaci:

$$L = \int_i^f \psi(v)\,dv + \varphi(x,v)\,dx \quad , \tag{12}$$

gdzie:

$$\psi(v) = m\,v \quad , \tag{13a}$$

$$\varphi(x,v) = d(v-V_w)^2 + F(x) + mg\,\frac{dh}{dx} \quad . \tag{13b}$$

Całka (11) jest zaś równa:

$$t_f = \int_i^f \psi_1(x,v)\,dv + \varphi_1(v)\,dx \ , \tag{14}$$

gdzie

$$\psi_1(x,v) \equiv 0 \ , \tag{15a}$$

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{v} \tag{15b}$$

i jej wartość jest dana. Stosując metodę Mielego [2,1] można stwierdzić, że dla parametrów typowych dla wyścigów szosowych rozwiązanie optymalne składa się z trzech odcinków: środkowego /cruise/ - na tak zwanym łuku osobliwym, gdzie $\eta<1$, oraz dwóch odcinków skrajnych - dojścia i zejścia z łuku osobliwego, gdzie $\eta=1$.

Z uwagi na to, że środkowy odcinek rozwiązania optymalnego /cruise/ odgrywa w zawodach decydującą rolę, poświęcimy parę słów na jego omówienie. Optymalną prędkość kolarza na tym odcinku otrzymujemy z przyrównania do zera tak zwanej funkcji fundamentalnej rozwiązania. Prawdziwe jest wówczas równanie:

$$2\ d\ v^2\ \left(v-V_w(x)\right) - \lambda_1 = 0 \ , \tag{16a}$$

w którym λ_1 jest stałym mnożnikiem Lagrange'a. Zastosowanie tej samej metody do rozwiązania zadania 2 prowadzi do następującego równania łuku osobliwego:

$$2\ d\ v^2\ \left(v-V_w(x)\right) - \frac{1}{\lambda_2} = 0. \tag{16b}$$

Porównanie obu związków (16) pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

<u>Wniosek 1</u>. Charakter rozwiązań optymalnych na łukach osobliwych dla zadań 1 i 2 jest taki sam, to znaczy, że istnieją takie zestawy parametrów, dla których rozwiązania optymalne obu zadań są jednakowe.

<u>Wniosek 2</u>. Dla stałej prędkości wiatru V_w=const. prędkość optymalna kolarza jest stała. Własność ta nie zależy od profilu trasy $h(x)$ /innymi słowy zawodnik powinien jechać jednakowo szybko pod górę jak i z góry/.

LITERATURA

[1] Maroński R.: Minimalizacja zużycia paliwa w locie na zadaną odległość, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 3, 26 /1988/.

[2] Miele A.: Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem, w zbiorze Leitmann G.: Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems, Academic Press, New York 1962

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ

Резюме

В работе показано, что две задачи: минимизация механического усилия необходимого для преодоления велосипедистом заданной дистанции в заданное время, а также минимизация времени преодоления этой дистанции при заданных ресурсах механической энергии, которой располагает спортсмен - имеют одинаковое решение. Для велосипедиста, который представлен в виде материальной точки, показано, что на среднем отрезке траектории оптимальная скорость езды постоянна и не зависит от профиля трассы. Если скорость ветра вдоль трессы изменяется, то оптимальная скорость велосипедиста определяется алгебраическим уравнением III степени.

ON A LOCOMOTION PROBLEM

Summary

The paper deals with sport cycling. Two problems have been formulated: the minimization of the competitor's effort needed to cover the given distance in the given time, and the minimization of the time for the given effort being at the cyclist's disposal. It has been shown that the solutions of both problems are the same. For the cyclist regarded as a material point, the optimal cruise velocity is constant and it is irrespective to the profile of the route. For the wind pattern given, the optimal velocity results from an algebraic equation of the third order.