ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z.99 Nr kol. 1057

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"
POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
Beskid Śląski, 1990

Maciej Minch, Dariusz Styś
Instytut Budownictwa
Politechnika Wrocławska

ROZWIĄZANIE TARCZY ZARYSOWANEJ POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę drgań nieustalonych zarysowanej tarczy żelbetowej pod działaniem obciążeń ruchomych. Rozwiązanie zadania dynamicznego podano w formie układu równań całkowych, których jądra stanowią tensory Stokesa, stosując pośrednią wersję metody elementów brzegowych. Zamieszczono wybrany przykład liczbowy.

1. Wstęp

Nieustalone drgania tarcz jednorodnych, wywołane obciążeniem ruchomym, uważać można za znane. Zarysowanie żelbetowej konstrukcji tarczy powoduje znaczną redystrybucję naprężeń σ_{ij}, zaś pole przemieszczeń u_i w miejscach rys l doznaje skończonego skoku $r = u^1(Q) - u^2(Q)$, $Q \in l$, stąd wykorzystanie rozwiązania tarcz jednorodnych w przypadku konstrukcji z rysami jest nieprzydatne. Celem niniejszej pracy jest zastosowanie metody elementów brzegowych (BEM) do analizy pracy żelbetowych tarcz zarysowanych pod działaniem obciążeń ruchomych.

Zaletą zastosowania BEM jest mniejsza liczba stopni swobody niż w innych metodach numerycznych. Wadami są konieczność znajomości rozwiązania podstawowego, niesymetryczne macierze układu równań rozwiązujących oraz stosunkowo skomplikowany algorytm obliczeń.

Rozpatruje się tarczę w płaskim stanie naprężenia, sprężystą i izotropową, bowiem anizotropia wywołana zbrojeniem może być pominięta. Tarcza zajmuje obszar Ω i ograniczona jest brzegiem $\partial\Omega$. Celem zwiększenia przejrzystości zapisu założono, że w obszarze Ω istnieje pojedyncza i niepropagująca się rysa krzywoliniowa l. Rysa ta dzieli obszar Ω na dwa podobszary Ω_1 i Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, zaś brzeg tarczy $\partial\Omega$ na dwie części $\partial\Omega_1$ i $\partial\Omega_2$, gdzie $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. W zadaniu przyjęto warunki początkowe:

$$u_i(T,t) = u_i^o(T) \quad , \ T \in \Omega \quad , \tag{1}$$

$$\dot{u}_i(T,t) = \dot{u}_i^o(T) \quad , \ T \in \Omega \quad , \tag{2}$$

warunki brzegowe na $\partial\Omega$:

$$u_i(Q,t) = \tilde{u}_i(Q,t)\,\big|_{\partial\Omega_1} \quad , \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}(Q,t)\; n_j(Q) = \tilde{P}_i(Q,t)\,\big|_{\partial\Omega_2} \tag{4}$$

oraz warunki graniczne w rysie l:

$$u_i(Q,t) = r_i(Q,t)\,\big|_{l} \quad . \tag{5}$$

Dla rozpatrywanego tu zadania płaskiego indeksy i,j przyjmują wartości $i,j = 1,2$.

2. Rozwiązanie podstawowe

Jako rozwiązanie podstawowe przyjęto w niniejszej pracy rozwiązanie Stokesa [1] dla tarczy nieograniczonej obciążonej siłą skupioną $P = \delta(t - \tau)\ \delta(T - Q)\delta_{ij}\ e_i$. Tutaj δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera, zaś δ jest funkcją typu δ-Diraca. Pod wpływem obciążenia siłą jednostkową e_j przemieszczenia w punkcie T tarczy w chwili t wywołane siłą działającą w punkcie Q w kierunku osi i wyrażą się przez tensor Stokesa następująco:

$$u_i(T,t) = S_{ij}(T,t,Q,\tau)\ e_j(Q) \quad , \tag{6}$$

gdzie:

$$S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2 \tag{7}$$

oraz

$$S_{ij}^1 = \frac{1}{4\Pi\rho r}\left[-\left(\frac{3R_iR_j}{r^2} - \delta_{ij}\right) \int_0^{c_L^{-1}} \lambda\delta(t - \tau - \lambda r)\, d\lambda + \frac{R_iR_j}{r^2c_L^2}\,\delta\!\left(t - \tau - \frac{r}{c_L}\right)\right] \tag{8}$$

$$S^2_{ij} = \frac{1}{4\Pi\rho r}\left[\left(\frac{3R_iR_j}{r^2} - \delta_{ij}\right)\int_0^{c_T^{-1}} \lambda\delta(t - \tau - \lambda r)\,d\lambda + \right.$$

$$\left. - \frac{R_iR_j}{r^2c_T^2}\,\delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_T}\right) + \frac{\delta_{ij}}{c_T^2}\,\delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_T}\right)\right]. \tag{9}$$

Tutaj $R_i = T_i - Q_i$ i $r^2 = R_i^2$, ρ jest gęstością masy, λ oraz μ są stałymi sprężystości, zaś c_L i c_T oznaczają odpowiednio prędkości dylatacyjną i dystorsyjną fal:

$$c_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad c_T = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Naprężenia w punkcie (T,t) tarczy wyrażą się wzorem:

$$\sigma_{ij} = \rho\,[(c_L^2 - 2c_T^2)\,S_{pk,p}\,\delta_{ij} + c_T^2\,(S_{ik,j} + S_{jk,i})]\,e_k \tag{11}$$

lub inaczej analogicznie jak (7):

$$\sigma_{ij} = M_{ijk}(T,t;Q,\tau)\,e_k(Q) = (M^1_{ijk} + M^2_{ijk})\,e_k(Q) \tag{12}$$

Wypisując warunek napięć otrzymano:

$$N_i(T,t) = F_{ik}(T,t;Q,\tau)\,e_k(Q) \tag{13}$$

gdzie:

$$F_{ik} = M_{ijk}\,n_j = M^1_{ijk}\,n_j + M^2_{ijk}\,n_j \tag{14}$$

3. Rozwiązanie całkowe

Do rozwiązania zadania przyjęto pośrednią wersję BEM z obciążeniem siłami fikcyjnymi na krzywej s leżącej na zewnątrz brzegu $\partial\Omega \cup l$ tarczy:

$$u_i(T,t) = \int_s (S_{ij} * \Phi_j)\,ds + \tag{15}$$

$$+ \rho\int_\Omega (S_{ij} * b_j)\,d\Omega + \rho\int_\Omega (\dot{u}^o_j\,S_{ij|\tau=o} + u^o_j\,\dot{S}_{ij|\tau=o})\,d\Omega,$$

$$N_i(T,t) = \int_s (F_{ij} * \Phi_j)\,ds + \tag{16}$$

$$+ \rho\int_\Omega (F_{ij} * b_j)\,d\Omega + \rho\int_\Omega (\dot{u}^o_j\,F_{ij|\tau=o} + u^o_j\,\dot{F}_{ij|\tau=o})\,d\Omega$$

Tutaj symbol $*$ oznacza mnożenie splotowe, zaś b_j siły masowe na jednostkę masy. Przyjęcie wersji pośredniej BEM ma na celu uniknięcie osobliwości przy całkowaniu po brzegu $\partial\Omega \cup l$. Potencjał brzegowy Φ_j jest niewiadomą o wymiarze obciążenia ciągłego na s. Wyznaczenie Φ_j wymaga wykorzystania warunków brzegowych (3), (4) oraz granicznych (5). Po określeniu Φ_j przemieszczenia i napięcia w tarczy wylicza się bezpośrednio ze wzorów (15) i (16). Dla obciążenia tarczy siłą skupioną poruszającą się ze stałą prędkością v po brzegu $\partial\Omega_2$ warunek (4) przyjmie postać:

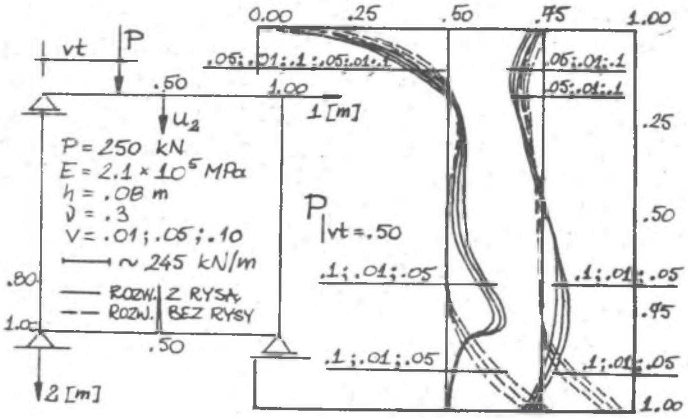
$$\sigma_{ij}(Q,t)\ n_j(Q) = \tilde{P}_i\ \delta(t-\tau)\ \delta(Q - vt)\ \delta_{ij} \tag{17}$$

Zadanie przedstawione powyżej dotyczy rysy z jawnie określoną wartością rozwarcia r(Q,t), niezależną od wielkości sił w tarczy (dotyczy to np. szczeliny). W przypadku żelbetowej tarczy zarysowanej "uzewnętrznione" zbrojenie w rysie przenosi dodatkowe siły tak, że jej brzegi nie są wolne od napięć N_i. Zatem warunek graniczny (5) okazuje się bardziej skomplikowany (por. np. [2]):

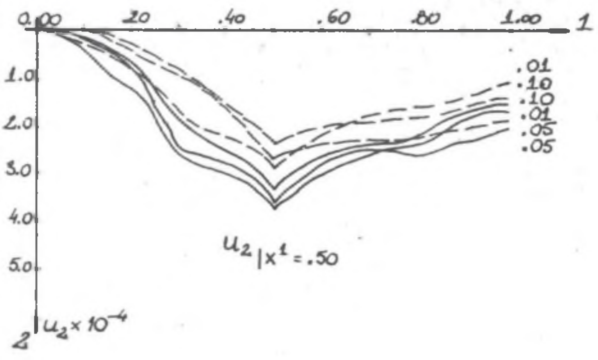
$$u_i(Q,t) = r_{0i}(Q,t) + r_{1i}\ N_i(Q,t)\ n_i \tag{18}$$

Tutaj r_0 opisuje deformacje trwałe rysy, zaś r_1 jej deformacje sprężyste. Wyznaczenie wielkości r odbywa się z warunków równowagi przekroju zarysowanego, przy założeniach przyjmowanych z teorii rys w konstrukcjach żelbetowych i w przypadku obciążeń dynamicznych jest trudne oraz złożone.
Wykorzystanie warunku (18) komplikuje zadanie w zasadniczy sposób. Okazuje się że część równań zależy jawnie od niewiadomych funkcji podcałkowych. Przy dyskretyzacji zadania i rozwiązywaniu układów równań konieczne jest stosowanie metody kolejnych przybliżeń dla ustalonej dyskretyzacji czasowo-punktowej, co znacznie zwiększa czasochłonność obliczeń numerycznych. Stwierdzono, że pierwsze przybliżenie N_i jak dla tarczy jednorodnej zapewnia dobrą zbieżność iteracji. W rozwiązaniu przyjęto krzywą s w kształcie elipsy z obciążeniem jej zbiorem sił skupionych Φ_j. Takie zastosowanie zmodyfikowanej wersji BEM przyjęto np. w pracy [3].

Na rys. 1 i 2 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń numerycznych kwadratowej, żelbetowej tarczy zarysowanej dla trzech prędkości v w porównaniu z tarczą bez rys. Zauważyć można istotną redystrybucję przemieszczeń i napięć w tarczy z rysą w stosunku do tarczy jednorodnej.



Rys. 1. Napięcia poziome N_1 w tarczy sprężystej i zarysowanej w zależności od prędkości v



Rys. 2. Przemieszczenie u_2 w zależności od prędkości v w tarczy sprężystej i zarysowanej o schemacie jak na rys. 1

LITERATURA

[1] Banerjee, P. K., Butterfield, R.; Boundary Element Methods in Engineering Science. London, New York, 1981.
[2] Minch, M.; Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych. Rozp. Inż. t. 28, z. 3, s. 445-468, 1980.
[3] Mathson R., Johnston R.L.; The approximate solution of Elliptic Boundary-Value Problems by Fundamental Solutions SIAM J. Num. Anal. **14**, 1977, s. 638-650.

РЕШЕНИЕ ВВПРОФИЛИРОВАННОГО ДИСКА НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Резюме

В работе представлен анализ неропеделенных колебаний выпрофилированного железобетонного диска, находящегося под воздействием повижной нагрузки. Решение динамической задачи представлено в форме системы дифференциальных уравнений, ядро которых составляют тензоры Стокса, с применением промежуточной вестии метода конечных элементов. Дан числовой пример.

SOLUTION OF RC CRACKED PLATE UNDER THE MOVING LOAD

Summary

The paper presents an analysis of transient vibrations in cracked RC plate, loaded in its plane, under the effect of moving forces. The soluton of the dynamic problem in the indirect BEM version is given in terms of a system of integral equations, the kernels of which are Stokes tensors. The paper is illustrated by number of numerical examples.