

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"

POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Beskid Śląski, 1990

Zbigniew Sroka, Bogdan Wosiewicz

Katedra Mechaniki Budowli i Budownictwa Rolniczego

Akademia Rolnicza w Poznaniu

SPRZĘŻENIE MES I MEB W ANALIZIE FILTRACJI PRZEZ ZAPORĘ  
NA PODŁOŻU PRZEPUSZCZALNYM

Streszczenie. Zaporę dyskretyzowano metodą elementów skończonych, a podłoże metodą elementów brzegowych. W sposób iteracyjny zapewniono ciągłość wysokości piezometrycznych oraz przepływu na granicy podziału. Przedstawiono rezultaty konkretnych obliczeń.

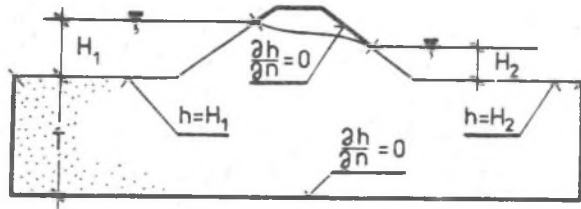
1. Wstęp

Analizowano przepływ filtracyjny przez zaporę ziemną na podłożu przepuszczalnym. Schemat zadania przedstawia rys.1. Obliczenia miały dać odpowiedź na pytanie: jaki jest związek pomiędzy miąższością przepuszczalnego podłoża a całkowitym przepływem oraz czy mając przepływ, oraz znając pozostałe parametry modelu można oszacować miąższość podłoża (uwarunkowanie zadania).

Założono, że przepływ odbywa się przez cały korpus zapory, również w strefie ograniczonego podsiąku kapilarnego. Przyjęto, że strefa ta obejmuje obszar powyżej krzywej depresji, do fizycznego brzegu obszaru. Po przyjęciu takich założeń upraszczających zadanie sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego dla następującego równania :

$$\frac{\partial h}{\partial x} \left[ k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial h}{\partial y} \left[ k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0, \quad (1)$$

przy mieszanych i niejednorodnych warunkach brzegowych (rys. 1.).



Rys. 1. Obszar filtracji i warunki brzegowe

Wyznaczenie związku pomiędzy całkowitym przepływem  $Q$  a miąższością podłoża  $T$  wymaga rozwiązania szeregu takich zadań przy zmieniającej się stopniowo miąższości. Zdecydowano się na fragmentację zadania. Obszar filtracji podzielono na dwa podobszary: korpus zapory oraz podłoże. W korpusie zapory zadanie poddano dyskretyzacji metodą elementów skończonych, natomiast w podłożu zastosowano metodę elementów brzegowych.

Wstępnie rozważano zastosowanie MES w całym obszarze filtracji. W metodzie elementów skończonych istotnym problemem jest jednak zawsze przygotowanie siatki podziału na elementy. Rozwiązując kolejne zadania dla różnych wartości  $T$  trzeba, by za każdym razem zbudować inną siatkę. Po dokonaniu fragmentacji siatka elementów w korpusie zapory jest zbudowana tylko raz i jest identyczna w każdym zadaniu. Przy zmieniającej się miąższości podłoża zmieniać trzeba zestaw danych do modelu brzegowego. Zmiany te jednak są niewielkie i nie wymagają większego nakładu pracy.

## 2. Sprzężenie MES i MEB

Od pewnego czasu podejmowane są prace nad zbudowaniem efektywnego algorytmu sprzężenia MES i MEB. Każda z nich bowiem ma swoje indywidualne zalety. MES pozwala na łatwe uwzględnienie anizotropii i niejednorodności ośrodka. MEB wymaga znacznie mniej danych, daje z reguły dokładniejsze oszacowania prędkości, pozwala na uwzględnienie nieskończonych wymiarów obszaru, itp. Stąd

możliwość zastosowania dowolnej z nich w poszczególnych fragmentach obszaru jest dla użytkownika bardzo cenna.

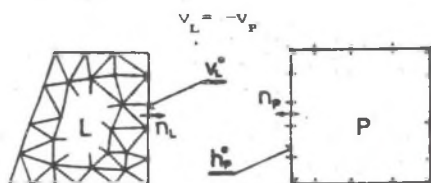
Jeżeli obszar filtracji podzielimy na dwie części (rys.2.), to na granicy podziału muszą być spełnione dwa warunki [1] :

- 1) zgodności wysokości piezometrycznych

$$h_L = h_P, \quad (2)$$

- 2) ciągłości przepływu

$$v_L = -v_P \quad (3)$$



Rys. 2. Podział na fragmenty

Jeżeli zapewnimy spełnienie tych warunków, to zadanie można rozpatrywać niezależnie w jednym i drugim podobszarze.

W omawianym zagadnieniu zastosowano iteracyjny algorytm sprzężania MES i MEB zaproponowany w pracy [2], który składa się z następujących kroków :

- 1) Dokonujemy podziału obszaru na dwa podobszary.

2) Na granicy podziału w **jednym** z podobszarów zadajemy startowy rozkład wysokości piezometrycznych  $h_P^0$  (warunek Dirichleta), natomiast w drugim podobszarze startowy rozkład składowych normalnych wektora prędkości  $v_L^0$  (warunek Neumanna). W każdym fragmencie mamy zatem poprawnie sformułowane zagadnienie brzegowe.

3) Kolejno rozwiązujemy tak sformułowane zagadnienia brzegowe. We fragmencie P stosujemy MEB, natomiast we fragmencie L MES. Po rozwiązaniu zagadnienia w P na granicy podziału uzyskujemy rozkład wydatku (składowych normalnych wektora prędkości)  $v_P^i$ , a po rozwiązaniu zadania w L otrzymamy rozkład wysokości piezometrycznych  $h_L^i$ . Uzyskiwane na granicy podziału rozwiązania nie spełniają ściśle warunków (2) i (3). Wykorzystane są one do wyznaczenia nowego, poprawionego warunku brzegowego  $v_L^i$  oraz  $h_P^i$ . Najprostsze formuły obliczania tych wartości dla dowolnego węzła na brzegu podziału ma postać :

$$\begin{aligned} v_L^i &= 0,5 (v_L^{i-1} - v_P^i), \\ h_P^i &= 0,5 (h_P^{i-1} + h_L^i). \end{aligned} \quad (4)$$

4) Jeżeli warunki (2) i (3) nie są spełnione z wymaganą dokładnością, to po wyznaczeniu nowych, poprawionych wartości brzegowych wykonujemy następną iterację (powrót do pkt.3).

Cały proces ma prostą interpretację fizyczną. W iteracyjny sposób na granicy podziału uzgadniamy wysokości piezometryczne oraz bilansujemy przepływ. Szczegółowy opis algorytmu wraz z przykładami konkretnych zastosowań w teorii filtracji oraz analizą numerycznych aspektów tego typu obliczeń znaleźć można w pracy [2].

Zaznaczyć należy, że algorytm można zastosować w modelowaniu różnych problemów mechaniki. Warunki "zszycia" dla każdego zjawiska będą oczywiście miały inną interpretację fizyczną.

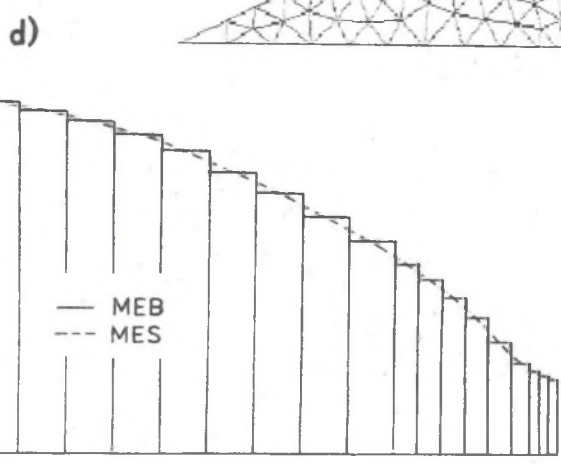
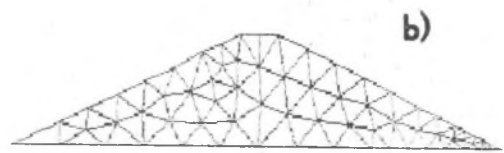
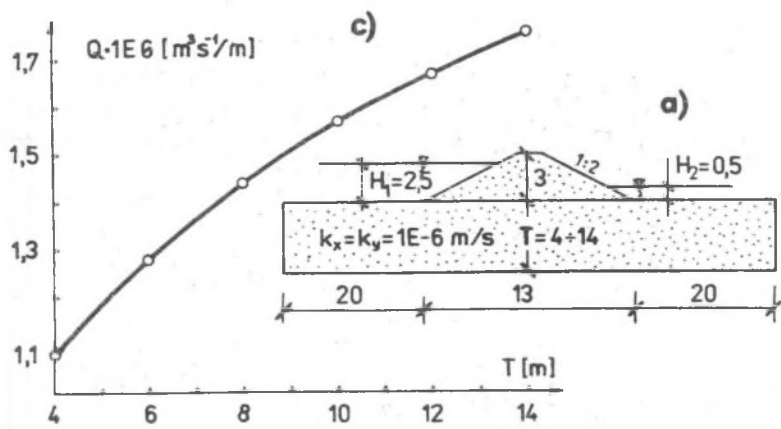
### 3. Obliczenia

Korpus zapory dyskretyzowano za pomocą siatki 70 elementów oraz 97 węzłów (rys.3b). Siatkę wygenerowano automatycznie [3], zadając jedynie podział na konturze. Stosowano elementy trójkątne z liniowymi funkcjami kształtu. Podłoże analizowano metodą elementów brzegowych. Dla minimalnej miąższości  $T=4m$  brzeg obszaru podzielony został na 71 elementów jednowęzłowych. Zadanie przeliczono szesciokrotnie, za każdym razem zwiększając miąższość o 2m. Każdorazowo zestaw danych do metody brzegowej powiększano o dwa elementy. Jako startowy rozkład prędkości oraz wysokości piezometrycznych na granicy podziału na podobszary przyjęto:  $v^0 = 0$  i  $h^0 = 0,5(H_1 + H_2)$ . Wystarczająco dobre "zszycie" podobszarów uzyskiwano po 12 iteracjach ( $\max|h^{i-1} - h^i| < 1E-3$ ,  $\max|v^{i-1} - v^i| < 1E-2 \cdot k$ ).

W celu weryfikacji zastosowanego iteracyjnego algorytmu połączenia MES i MEB jedno zadanie (dla  $T=6m$ ) przeliczono metodą elementów skończonych bez podziału na fragmenty, uzyskując praktycznie identyczne wyniki. W tym wypadku wygenerowana za pomocą programu GENMESH [3] siatka składała się z 496 elementów oraz 287 węzłów.

Zależność  $Q(T)$  dla parametru  $T$  z przedziału od 4 do 14m przedstawia rys.3c. Przykładowy rozkład wysokości piezometrycznych na granicy podziału na podobszary dla  $T=6m$  (po 12 iteracjach) przedstawiono na rys. 3d.

Obliczenia wykazały, że dla przebadanego zakresu parametru  $T$  zadanie oszacowania miąższości podłoża na podstawie znanego (ale zawsze obciążonego pewnym błędem) przepływu  $Q$  jest zadaniem dobrze uwarunkowanym. O dokładności oszacowania będzie zatem decydować dokładność wyznaczenia pozostałych parametrów modelu, głównie współczynnika wodoprzepuszczalności.



Rys. 3. Dane i rezultaty

## LITERATURA

- [1] Bear J.: Hydraulics of groundwater. McGraw-Hill, New York 1979.
- [2] Sroka Z.: Iteracyjna metoda sprzęgania dyskretnych modeli obliczeniowych w zagadnieniach filtracji ustalonej. Rozprawa doktorska [w przygotowaniu]. Akademia Rolnicza, Wrocław 1990.
- [3] Wosiewicz B., Sroka Z.: Dwustopniowy, interakcyjny generator siatki trójkątnej dla dyskretnych modeli zjawisk mechanicznych XXIX Sympozjon "Modelowanie w mechanice", Beskid Śląski, 1990.

**СВЯЗЬ МКЭ И МЭЭ В ЗАДАЧИ ФИЛТРАЦИИ В ПЛОТИНЕ И ОСНОВАНИИ  
КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

**Резюме**

Плотина дискретизована методом конечных элементов а основание методом граничных элементов. Итерационном методом загарантировали непрерывность напора и расхода грунтовых вод у границы раздела. Представлены результаты конкретных расчетов.

**COUPLING OF BEM AND FEM IN ANALYSIS OF SEEPAGE THROUGH A DAM  
ON A PERMEABLE FOUNDATION**

**Summary**

FEM and BEM discretization were used for the dam and for the foundation respectively. Compatibility and equilibrium conditions between subregions were satisfied in an iterative way. Results of some examples were presented.