ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: TRANSPORT z. 41 Nr kol. 1491

Piotr FOLĘGA
Andrzej WILK

ANALIZA NUMERYCZNA TULEI PODATNEJ Z WYKORZYSTANIEM ELEMENTÓW KONTAKTOWYCH MES

Streszczenie. W pracy przeprowadzono analizę numeryczną tulei podatnej przekładni falowej za pomocą metody elementów skończonych (MES) z wykorzystaniem elementów kontaktowych.

NUMERICAL ANALYSIS OF FLEXSPLINE WITH GAP CONTACT ELEMENTS

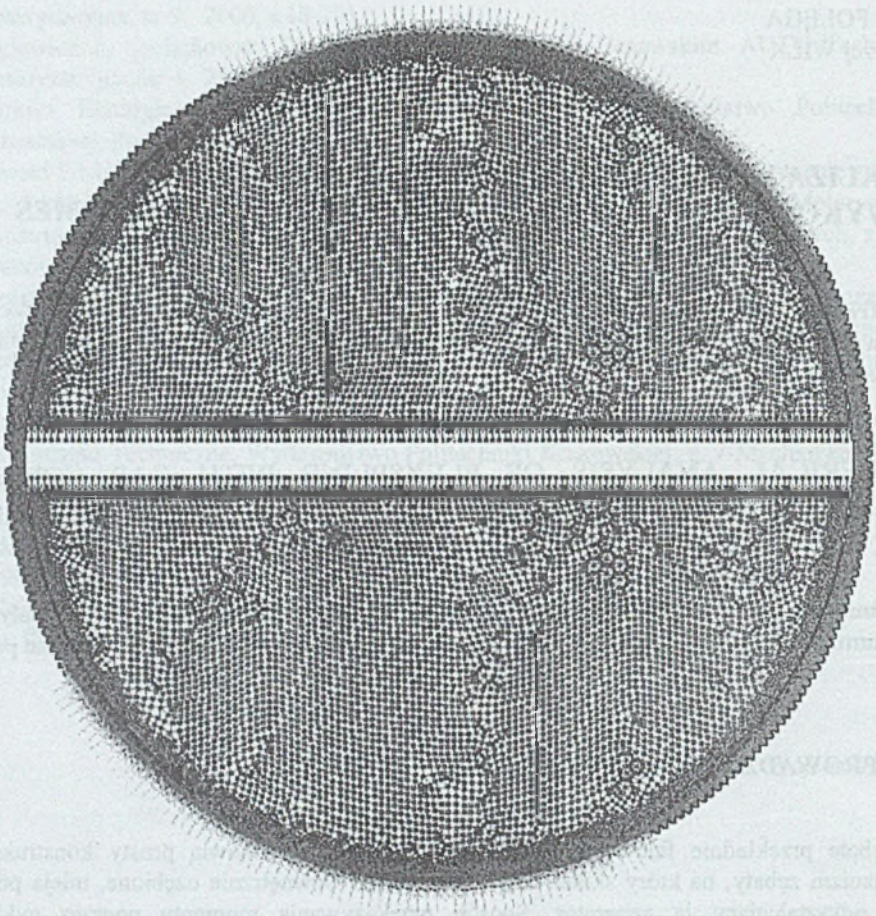
Summary. Application of the Finite Elements Method (FEM) in the numerical analysis of the harmonic gear drive flexspline with gap contact elements has been presented in the paper.

1. WPROWADZENIE

Zębate przekładnie falowe w klasycznym wykonaniu stanowią prosty konstrukcyjnie mechanizm zębaty, na który składa się: koło sztywne wewnętrznie uzębione, tuleja podatna oraz odkształcający ją generator. Sposób przekazywania momentu poprzez cykliczne deformowanie generatorem sprężystej tulei podatnej powoduje powstawanie w tym elemencie przekładni falowej złożonego stanu naprężeń, który decyduje o trwałości całej przekładni. Ważnym problemem dla konstruktora jest więc optymalizacja kształtu i parametrów geometrycznych tulei podatnej, która powinna zapewnić minimalizację naprężeń w przekrojach niebezpiecznych oraz równomierny rozkład naprężeń w całej tulei.

W artykule zastosowano do analizy numerycznej tulei podatnej przekładni falowej metodę elementów skończonych z wykorzystaniem elementów kontaktowych MES Systemu COSMOS/M. W opracowaniu do wstępnej analizy wymiarów geometrycznych projektowanej tulei oraz wyznaczenia obciążenia pochodzącego od generatora powstającego w strefie jego działania na powierzchnię wewnętrzną tulei proponuje się zastosowanie parametrycznego płaskiego modelu MES z wykorzystaniem elementów kontaktowych [1]. Obciążenie pochodzące od generatora w opracowanym modelu MES powstaje w wyniku jego ruchu jako rezultat oddziaływania elementów kontaktowych pomiędzy tuleją a generatorem. Opracowano w tym celu model obliczeniowy tulei podatnej przedstawiony na rysunku 1. Uzyskane wyniki obliczeń porównano z wynikami badań doświadczalnych otrzymanymi przez innych autorów [2,3].

Poniżej podane zostaną również zależności analityczne służące do określenia wielkości i charakteru rozkładu sił w zazębieniu i w strefie kontaktu z generatorem.



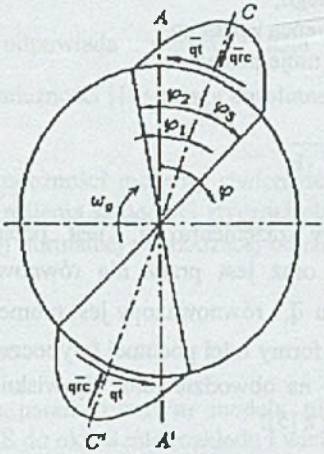
Rys. 1. Model tulei podatnej
Fig. 1. The flexspline FEM model

2. WIELKOŚĆ I CHARAKTER ROZKŁADU SIŁ W ZAZĘBIENIU ORAZ W STREFIE KONTAKTU Z GENERATOREM

Elementem najbardziej obciążonym przekładni falowej jest jej człon podatny, który ma postać cienkościennej walcowej powłoki ze zmienną, zwiększoną w części uzębionej grubością, połączoną z drugiej strony z wałem wyjściowym cienkościennym denkiem. Na tuleję podatną działa zmienne oraz złożone obciążenie od generatora i sił międzyzębnych w strefie zazębienia oraz strefie kontaktu z generatorem. Jak wynika z badań i analiz teoretycznych, koncentracja maksymalnych naprężeń występuje na granicy przejścia wieńca

zębatego tulei w jej gładki płaszcz oraz w denku. Tworząc model tulei musimy określić obciążenia w zazębieniu i strefie kontaktu z generatorem, w funkcji przenoszonego momentu. Zagadnienie to mimo licznych prac teoretycznych i doświadczalnych [4,5,6,7] nie zostało do chwili obecnej w pełni teoretycznie rozwiązane, dlatego problem ten wymaga ciągłych badań i prac rozwojowych. Próbę rozwiązania tego zagadnienia podjęto w niniejszej pracy. Do określenia rozkładu obciążeń w obu strefach wykorzystano wyniki badań doświadczalnych podane w [4] oraz zależności będące próbą aproksymacji tych wyników opracowane przez M.I. Iwanowa i A. I. Sorokina w [5]. Przedstawione poniżej zależności dotyczą tulei podatnej odkształcanej generatorem krzywkowym, ewolwentowego zarysu zębów o nominalnym kącie zarysu $\alpha=20^0$ oraz stosunku deformacji promieniowej w_o do modułu mieszczącego się w przedziale $w_0/m=0.9 \div 1.1$.

Na podstawie wyników badań doświadczalnych obciążenia działające na tuleję podatną można aproksymować w sposób przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Rozkład obciążenia działającego na tuleję podatną
Fig. 2. The flexspline load distribution

Na rysunku 2 kąty φ_2 oraz φ_3 określają wielkość strefy obciążenia, a kąt φ_1 położenie tej strefy względem dużej osi generatora AA'. Obciążenie promieniowe $\bar{q}_r$ oraz styczne $\bar{q}_t$ działające w zazębieniu w strefie działania sił międzyzębnych, pochodzące od przenoszonego momentu, można opisać następującymi zależnościami:

$$\bar{q}_t = \bar{q}_{t\,max} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2} \cdot (\varphi - \varphi_1)\right] \tag{1}$$

$$\bar{q}_r = \bar{q}_{t\,max} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2} \cdot (\varphi - \varphi_1)\right] \tag{2}$$

Obciążenie promieniowe $\bar{q}_r$ można wyznaczyć również na podstawie wzoru

$$\bar{q}_r = \bar{q}_t \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_t \tag{3}$$

gdzie:

α_t - nominalny kąt zarysu na średnicy tocznej $\alpha_t = 20^0 \div 30^0$,

$\bar{q}_{t\,max}$ - maksymalne obciążenie styczne.

Wielkość maksymalną obciążenia $\bar{q}_{t\,max}$ związaną z momentem przenoszonym przez przekładnie M_2 możemy określić następującą zależnością:

$$M_2 = 4 \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\varphi_2} b \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \bar{q}_{t\,max} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2} \cdot (\varphi - \varphi_1)\right] d\varphi \tag{4}$$

gdzie:

b - szerokość wieńca zębatego,

d - średnica podziałowa wieńca zębatego,

która po przekształceniach otrzymuje postać

$$\bar{q}_{t\,max} = \frac{\pi \cdot M_2}{2 \cdot \varphi_2 \cdot d^2 \cdot b} \tag{5}$$

Obciążenie promieniowe w zazębieniu $\bar{q}_r$ jest przeciwnie zwrócone do reakcji promieniowej generatora $\bar{q}_{rg}$ oraz jest przez nią równoważone. Moment, jaki tworzy obciążenie styczne w zazębieniu $\bar{q}_t$, równoważony jest momentem M_2 na wale wyjściowym. Obciążenie $\bar{q}_t$ dąży do zmiany formy tulei podatnej (wyboczenia). Spowodowane jest to jego nierównomiernym rozłożeniem na obwodzie tulei. Zjawisku temu przeciwdziała normalna reakcja generatora $\bar{q}_{rg}$. Zgodnie z [5]:

$$\bar{q}_{rg} = \int \bar{q}_t d\varphi \tag{6}$$

Rozkładając następnie $\bar{q}_t$ określone wzorem 1 w szereg otrzymamy

$$\bar{q}_t = \bar{q}_{t0} + \sum_{k=2,4,6...} \bar{q}_{tk} \cdot \cos(k \cdot (\varphi - \varphi_1)) \tag{7}$$

W celu wyznaczenia $\bar{q}_{t0}$ należy zależność 7 scałkować w granicach od $\varphi = \varphi_1$ do $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$, natomiast by określić $\bar{q}_{tk}$, musimy wyrażenie 7 pomnożyć przez $\cos(k \cdot (\varphi - \varphi_1))$, a następnie scałkować w granicach jak wyżej. Po tych operacjach otrzymamy następujące wyrażenia:

$$\bar{q}_{t0} = \frac{4 \cdot \varphi_2}{\pi^2} \cdot \bar{q}_{t\,max} \tag{8}$$

$$\bar{q}_{tk} = \frac{2}{\pi} \cdot \bar{q}_{t\,max} \cdot \left[\frac{\sin(a-k)\varphi_2}{a-k} - \frac{\sin(a+k)\varphi_2}{a+k}\right] \tag{9}$$

gdzie: $a = \frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2}$

Otrzymane wyrażenie na obciążenie $\bar{q}_{t0}$ jest równoważne momentowi M_2, natomiast do zmiany kształtu tulei podatnej dąży składowa $\bar{q}_{tk}$ obciążenia stycznego. Dlatego przy określaniu normalnej reakcji generatora $\bar{q}_{rg}$ (wzór 6) należy brać pod uwagę tylko $\bar{q}_{tk}$. Stąd promieniową reakcję generatora możemy określić

$$\bar{q}_{rg} = \int \sum_{k=2,4,6...} \bar{q}_{tk} \cdot \cos(k \cdot (\varphi - \varphi_1)) d\varphi = \sum_{k=2,4,6...} \frac{\bar{q}_{tk}}{k} \cdot \sin(k \cdot (\varphi - \varphi_1)) + C \tag{10}$$

gdzie: $$C = -\sum_{k=2,4,6...} \frac{\bar{q}_{tk}}{k} \cdot \sin(k \cdot (\gamma - \varphi_1)) \tag{11}$$

W wzorze 11 kąt γ odpowiada wartości kąta φ, przy której wyrażenie $\sum_{k=2,4,6...} \frac{\bar{q}_{tk}}{k} \cdot \sin(k \cdot (\varphi - \varphi_1))$ z zależności [10] osiąga absolutne minimum.

Podsumuwując powyższe zależności możemy stwierdzić, że do obliczeń należy przyjąć następujące wyrażenia. Do określenia składowej stycznej obciążenia w zazębieniu zależność 1, a do wyznaczenia składowej normalnej pochodzącej od sił międzyzębnych oraz generatora sumę wyrażeń 2 i 10 jako

$$\bar{q}_{rc} = \bar{q}_r + \bar{q}_{rg} \tag{12}$$

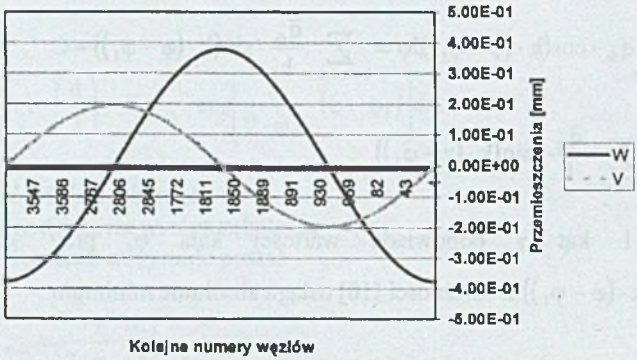
W opracowanym płaskim parametrycznym modelu tulei podatnej z wykorzystaniem elementów kontaktowych MES do określenia rozkładu i wielkości obciążenia działającego na człon podatny w strefie działania sił międzyzębnych wykorzystano zależności 1 i 2. Obciążenie pochodzące od generatora (w metodzie analitycznej zależności 10 i 11) otrzymywane są w wyniku ruchu generatora odkształcającego tuleję podatną. Obciążenie promieniowe w strefie kontaktu tulei podatnej z generatorem $\bar{q}_{rg}$ powstaje więc jako rezultat oddziaływania elementów kontaktowych pomiędzy wewnętrzną powierzchnią tulei a generatorem.

3. WYNIKI OBLICZEŃ

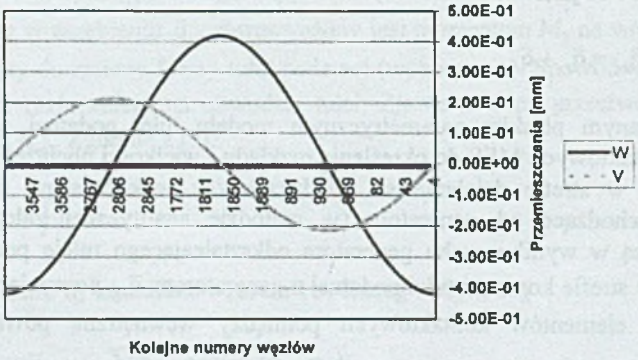
W opracowaniu przeanalizowano wpływ względnej deformacji promieniowej w_0/m na wartości przemieszczeń normalnych „w" i stycznych „v" tulei podatnej oraz wartości naprężeń maksymalnych powstających w tulei w wyniku oddziaływania generatora, bez obciążenia pochodzącego od sił międzyzębnych. W obliczeniach wykorzystano człon podatny przekładni falowej o następujących parametrach:

$i = 146$	- przełożenie,
$z_1 = 292$	- liczba zębów wieńca tulei podatnej,
$m = 0.419$ mm	- moduł,
$d_r = 120$ mm	- średnica wewnętrzna tulei,
$g = 1.05$ mm	- grubość ścianki tulei.

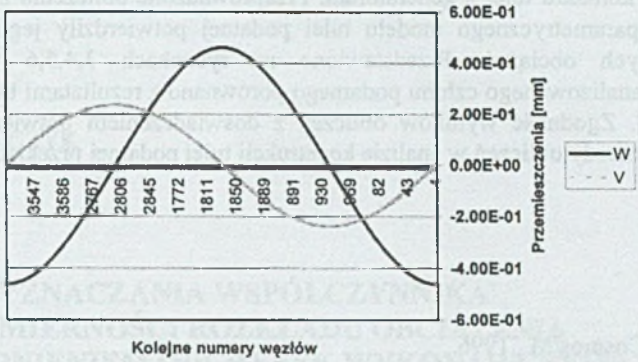
Wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawiono na rysunkach od 3 do 6.



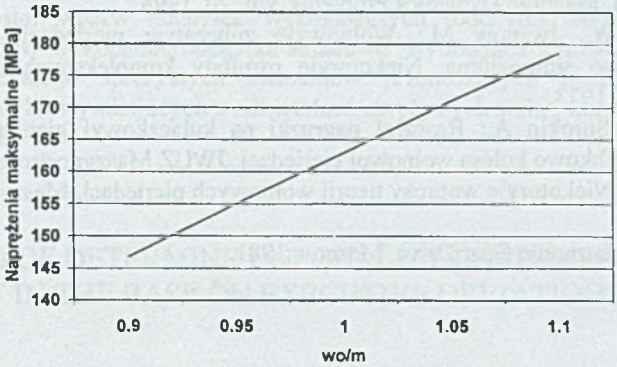
Rys. 3. Wykres przemieszczeń normalnych i stycznych przy $w_0/m = 0.9$ ($M_{nom}=0$)
Fig. 3. The diagram of radial and tangential displacements for $w_0/m = 0.9$ ($M_{nom}=0$)



Rys. 4. Wykres przemieszczeń normalnych i stycznych przy $w_0/m = 1$ ($M_{nom}=0$)
Fig. 4. The diagram of radial and tangential displacements for $w_0/m = 1$ ($M_{nom}=0$)



Rys. 5. Wykres przemieszczeń normalnych i stycznych przy $w_0/m = 1.1$ ($M_{nom}=0$)
Fig. 5. The diagram of radial and tangential displacements for $w_0/m = 1.1$ ($M_{nom}=0$)



Rys. 6. Wykres naprężeń maksymalnych $\sigma_{max}=f(w_0/m)$ ($M_{nom}=0$)
Fig. 6. The diagram of maximum stress $\sigma_{max}=f(w_0/m)$ ($M_{nom}=0$)

Otrzymane wartości przemieszczeń normalnych „w" oraz stycznych „v" (rys. 3,4,5) dla analizowanej tulei odpowiadają jakościowo oraz ilościowo wynikom badań doświadczalnych [2,3]. Również zmiany wartości naprężeń maksymalnych w funkcji względnej deformacji promieniowej w_0/m (rys. 6) są zgodne z wynikami zamieszczonymi w literaturze [3].

4. PODSUMOWANIE

Problem określenia obciążenia działającego na tuleję podatną przekładni falowej generowanego w zazębieniu i strefie kontaktu z generatorem do chwili obecnej nie jest w pełni rozwiązany. Podane w literaturze analityczne zależności służące do wyznaczenia obciążeń działających na człon podatny zostały opracowane na podstawie badań doświadczalnych i po przyjęciu licznych uproszczeń i założeń. W pracy podjęto próbę wyznaczenia obciążenia pochodzącego od generatora oddziałującego na człon podatny za pomocą metody elementów skończonych z wykorzystaniem elementów kontaktowych, które

określają strefę kontaktu tulei z generatorem. Przeprowadzone obliczenia z wykorzystaniem opracowanego parametrycznego modelu tulei podatnej potwierdziły jego przydatność do wyznaczenia tych obciążeń. Przedstawione na rysunkach 3,4,5,6 wyniki obliczeń numerycznych analizowanego członu podatnego porównano z rezultatami badań podanymi w literaturze [2,3]. Zgodność wyników obliczeń z doświadczeniem potwierdza przydatność proponowanej metody obliczeń w analizie konstrukcji tulei podatnej przekładni falowej.

Literatura

1. User Guide Cosmos/M., 1996.
2. Ren Z., Flasker J. : Numerical Stress Analysis of Harmonic Gear Drive Flexspline. Special Mechanical Gears-Modelling, Product Development and Prospects of Application. Warszawa 1996.
3. Ostapski W. : Structural Modification of Flexspline of a Harmonic Drive Gearing under a Service Load. Machine Dynamics Problems, vol. 20, 1998.
4. Finogeniew W., Iwanow M.: Wołnowyje zubczatyje pieriedaci. Tezisy dokładow wsiesojuznowo simpozjuma. Niekotoryje rezultaty kompleksnych ekspierymientow i issledowanij. 1973.
5. Iwanow M., Sorokin A.: Rascziot nagruzki na kułaczkowyj gienierator i napriażenij rastiażenija gibkowo kolesa wolnowoj pieriedaci. JWUZ Maszynostrojenije, nr 6, 1980.
6. Kowalew N.: Niekotoryje woprosy tieorii wołnowych pieriedaci. Maszynowiedienije, nr 2, 1978.
7. Ivanow M. : Harmonic Gear Drive, Moscow 1981.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Osiński

Abstract

Application of the Finite Elements Method (FEM) in the numerical analysis of the harmonic gear drive flexspline with gap contact elements has been presented in the paper. The presented approach to a stress analysis of the flexspline can help the designer to determine accurately the maximum stress on the flexspline, which can then be used for optimisation of the flexspline construction. Numerical results of the calculations (Fig. 3,4,5,6) have been compared with results of experiments [2,3]. The numerical results coincide well with the experiments results.