

Zbigniew CICHOCKI  
Andrzej GRZYB  
PKP CNTK Zakład Mechaniki Taboru Pracownia Hamulców,  
Politechnika Krakowska

## NIELINIOWOŚĆ PODŁOŻA PRZY MODELOWANIU UKŁADU DYNAMICZNEGO POJAZD SZYNOWY - TOR

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono problem doboru nieliniowego modelu układu dynamicznego pojazd szynowy-tor z wykorzystaniem wyników badań eksperymentalnych.

## NONLINEARITY OF FOUNDATION BY MODELLING DYNAMICAL SYSTEM: RAIL VEHICLE-TRACK

**Summary.** In the paper the problem of a choice of a nonlinear model for a dynamical system: rail vehicle-track is presented. The results of the experimental investigation have been taken into account.

### 1. WSTĘP

Rozwój teorii modelowania i symulacji komputerowej zjawisk fizycznych sprawił, że w literaturze spotkać można dużą liczbę publikacji dotyczących problematyki modelowania i analizy zjawisk w układzie pojazd szynowy-tor. Prace te można podzielić na dwie grupy:

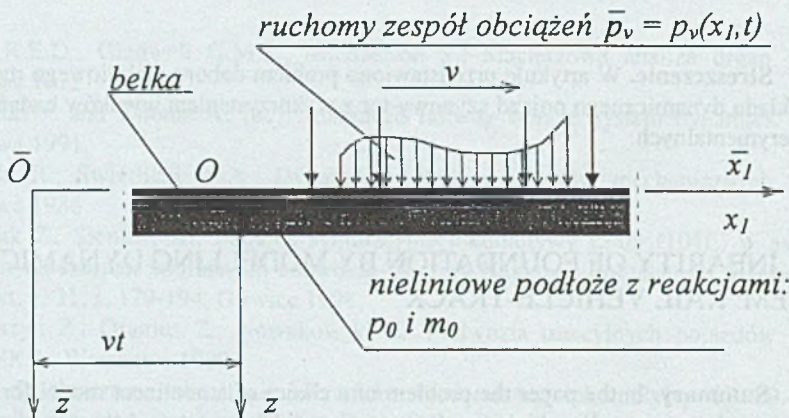
- 1) prace zawierające obszerny przegląd literaturowy, między innymi: [7, 11, 13, 14],
- 2) prace, które omawiają konkretny temat, np. modelowanie toru, lub zawierają rozwiązania wybranych zagadnień z zakresu omawianej tematyki, przykładowo prace [1, 2, 3, 8, 9].

Przegląd literatury (reprezentatywne prace zamieszczamy w wykazie) wskazuje, że autorzy przeważnie nie podejmowali dotychczas zagadnienia uwzględnienia nieliniowości podłoża drogi kolejowej. Wyniki prac, w których rozważano nieliniowość podłoża, np. [7, 10], okazują się jeszcze niewystarczające na potrzeby praktyki kolejowej. Świadczą o tym wyniki pomiarów uzyskanych między innymi na kolejach DB [12]. Wskazują one, że nieliniowe charakterystyki podłoża należy dokładnie opisać i uwzględnić w analizie.

W artykule przedstawiamy sposób wykorzystania danych uzyskanych w trakcie badań rzeczywistego toru do budowy i analizy modelu dynamicznego pojazdu szynowy - tor, z uwzględnieniem nieliniowości podłoża. Zamieszczony przykład pierwszego przybliżenia uwzględnienia nieliniowości pozwala porównać rezultaty otrzymane teoretycznie z wynikami badań eksperymentalnych.

## 2. OPIS MODELU UKŁADU POJAZD SZYNOWY - TOR PRZYJĘTEGO DO ANALIZY

Do analizy przyjmujemy układ mechaniczny przedstawiony na rys. 1. Układ ten można traktować w szczególności jako model toru i jadącego po nim pociągu. Jest to ciągły układ dynamiczny, w którym po prostoliniowej nieskończenie długiej belce o modelu Timoshenki porusza się ze stałą prędkością niezmienny w czasie zespół obciążeń.



Rys. 1. Model fizyczny przyjęty do badań symulacyjnych  
Fig. 1. Physical model of system assumed into simulation investigations

Skupione siły pionowe reprezentują naciski wywołane przez zestawy kołowe dwóch sąsiednich wózków, a obciążenie ciągłe o dowolnym kształcie jest obciążeniem obliczeniowym, którego działanie pozwala uwzględnić wpływ nieliniowości w analizowanym układzie.

Wprowadzamy układ współrzędnych  $\bar{O}\bar{x}_1\bar{z}$  związany z belką (nieruchomy) oraz ruchomy układ współrzędnych  $Ox_1z$  związany z poruszającym się wzdłuż belki obciążeniem.

Ruch belki w układzie nieruchomym  $\bar{O}\bar{x}_1\bar{z}$  opisuje następujący układ równań różniczkowych cząstkowych:

$$\kappa AG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_1^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_1} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_v - p_0 = 0, \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}_1^2} + \kappa AG \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1} - \psi \right) - \rho r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - N \frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1} - m_0 = 0,$$

gdzie:

- $A$  - pole powierzchni przekroju belki,
- $E$  - moduł sprężystości podłużnej,
- $G$  - moduł sprężystości poprzecznej,
- $I$  - moment bezwładności przekroju belki,
- $m_0$  - zewnętrzne obciążenie reakcyjne momentowe rozłożone w sposób ciągły,
- $N$  - zadana siła podłużna,
- $p_v$  - zadane ruchome obciążenie ciągłe,
- $p_0$  - zewnętrzne obciążenie reakcyjne siłowe rozłożone w sposób ciągły,
- $r$  - promień bezwładności przekroju belki ( $I = A r^2$ ),
- $t$  - czas,
- $w$  - ugięcie belki,
- $\kappa$  - współczynnik ścinania Timoshenki,
- $\rho$  - gęstość liniowa (masa jednostki długości) belki,
- $\psi$  - kąt obrotu przekroju belki.

Przyjmujemy, że linię ugięcia belki:

$$w = w(\bar{x}_1, t)$$

wywołują następujące obciążenia:

$$p_v = p_v(\bar{x}_1, t), \quad p_0 = p_0(\bar{x}_1, t), \quad m_0 = m_0(\bar{x}_1, t) \quad \text{oraz} \quad N.$$

Zewnętrzne obciążenia reakcyjne siłowe i momentowe jako zależne od przemieszczeń wywołanych drganiami belki wyrażają się następującymi wzorami:

$$p_0 = c_p w + b_p \frac{\partial w}{\partial t} + p_0^*, \quad m_0 = c_m \psi + b_m \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

gdzie:

- $p_0^*$  - oznacza składnik nieliniowy,
- $c_p, c_m$  - stałe sprężystości składowej liniowej charakterystyki podłoża odniesione do jednostki długości belki,
- $b_p, b_m$  - stałe tłumienia składowej liniowej charakterystyki podłoża odniesione do jednostki długości belki.

Poszukując rozwiązań stacjonarnych wprowadzamy nowe bezwymiarowe zmienne:

$$x = \frac{\bar{x}_1 - vt}{r}, \quad u = \frac{w}{w_s},$$

gdzie:  $v$  oznacza prędkość ruchu obciążenia (jazdy pociągu), a  $w_s$  przyjętą, stałą, dodatnią wartość ugięcia  $w$ .

Pochodną względem  $x$ , czyli  $\frac{d}{dx}$  oznaczamy (\*).

Wprowadzenie zmiennej  $x$  oraz przejście do układu ruchomego spowodowało, że pochodne cząstkowe wyrażają się pochodnymi zwyczajnymi i równania drgań belki (1) przyjmują postać równań różniczkowych zwyczajnych. Następnie w wyniku eliminacji kąta  $\psi$  oraz wprowadzenia kilku bezwymiarowych parametrów otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu na  $u(x)$ , które w formie zwartej jest następujące:

$$F[u(x)] + f[u(x)] = g_p[\bar{p}_v(x)], \quad (2)$$

w którym:

$$F[u(x)] = D(V)^2 u^{(4)} - 2V \left[ B(V^2 - V_1^2) + b(V^2 - V_2^2) \right] u''' + \\ + \left[ V^2(V_1^2 + 1 + 4bB + C) - (S + C)V_1^2 - V_2^2 \right] u'' - \\ - 2V \left[ b(V_1^2 + C) + B \right] u' + (V_1^2 + C)u, \quad (3)$$

$$f[u(x)] = (V^2 - V_2^2) \bar{p}_0^* - 2BV \bar{p}_0^* + (V_1^2 + C) \bar{p}_0^*, \quad (4)$$

$$g_p[\bar{p}_v(x)] = (V^2 - V_2^2) \bar{p}_v''(x) - 2BV \bar{p}_v'(x) + (V_1^2 + C) \bar{p}_v(x). \quad (5)$$

Współczynniki równania (2) wyrażone są za pomocą przyjętych parametrów bezwymiarowych, które charakteryzują układ dynamiczny. Opisane są one następującymi wzorami:

$$D(V^2) = (V^2 - V_1^2)(V^2 - V_2^2), \\ V = \frac{v}{r} \sqrt{\frac{\rho}{c_p}}, \quad V_1 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\kappa AG}{c_p}}, \quad V_2 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{EA}{c_p}}, \\ b = \frac{b_p}{2\sqrt{c_p \rho}}, \quad B = \frac{b_m}{2r^2 \sqrt{c_p \rho}}, \quad S = \frac{N}{r^2 c_p}, \quad C = \frac{c_m}{r^2 c_p}, \\ \bar{p}_0^* = \bar{p}_0^*[u(x)] = \frac{P_0^*}{p_s}, \quad \bar{p}_v = \bar{p}_v(x) = \frac{P_v}{p_s}, \quad p_s = c_p w_s.$$

W przypadku liniowym ruch belki w układzie ruchomym  $Ox_1z$  (związany z ruchomym obciążeniem) opisuje równanie różniczkowe zwyczajne (2) czwartego rzędu, w którym  $F[u(x)]$  jest składnikiem liniowym, a  $f[u(x)]$  składnikiem nieliniowym.

Porównując wyrażenia (4) i (5) możemy zapisać:

$$f[u(x)] = g_p \{ \bar{p}_0^*[u(x)] \}. \quad (6)$$

Jeżeli zatem wprowadzimy pomocniczą funkcję:

$$\bar{p}_{vo}(x) = -\bar{p}_0^*[u(x)], \quad (7)$$

to wyrażenie (6) przyjmie postać:

$$f[u(x)] = -g_p [\bar{p}_{vo}(x)]. \quad (8)$$

Wstawiając (7) do (2) otrzymujemy:

$$F[u(x)] - g_p [\bar{p}_{vo}(x)] = g_p [\bar{p}_v(x)],$$

a po przekształceniu:

$$F[u(x)] = g_p [\bar{p}_v(x) + \bar{p}_{vo}(x)]. \quad (9)$$

Na podstawie wzajemnie równoważnych równań różniczkowych (2) i (9) możemy stwierdzić, że wpływ składnika nieliniowego może być uwzględniony przez wprowadzenie dodatkowego (obliczeniowego), ruchomego obciążenia ciągłego  $\bar{p}_{vo}(x)$ , poruszającego się wraz z zadanym obciążeniem eksploatacyjnym  $\bar{p}_v(x)$ . Równanie (9) jest równaniem nieliniowym ze względu na  $u(x)$ , ponieważ zgodnie z wyrażeniem (7), funkcja  $u(x)$  występuje ogólnie nieliniowo w  $\bar{p}_{vo}(x)$ . Przy wyznaczaniu funkcji  $u(x)$  posługujemy się metodą kolejnych przybliżeń:

1<sup>o</sup> Zakładamy, że pierwszym przybliżeniem rozwiązania równania różniczkowego nieliniowego (9) jest rozwiązanie jego przybliżenia liniowego  $u_0(x)$ , czyli:

$$F[u_0(x)] = g_p[\bar{p}_v(x)]. \quad (10)$$

2<sup>o</sup> Po wyznaczeniu funkcji  $u_0(x)$  przechodzimy do równania nieliniowego (9), w którym na podstawie (7), za funkcję  $\bar{p}_{v0}(x)$  podstawiamy:

$$\bar{p}_{v01}(x) = -\bar{p}_0^*[u_0(x)]. \quad (11)$$

W rezultacie otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe, zastępujące w pierwszym przybliżeniu równanie nieliniowe (9):

$$F[u_1(x)] = g_p[\bar{p}_v(x) + \bar{p}_{v01}(x)]. \quad (12)$$

Całkując to równanie wyznaczamy kolejne przybliżenie funkcji  $u(x)$ , czyli  $u_1(x)$ . Następnie, podobnie jak za pierwszym razem, korzystając z (7) możemy wyznaczyć kolejne przybliżenie funkcji  $\bar{p}_{va}(x)$ :

$$\bar{p}_{v02}(x) = -\bar{p}_0^*[u_1(x)]. \quad (13)$$

Pozwala to, podobnie jak w poprzednim kroku, wyznaczyć kolejne przybliżenie funkcji  $u(x)$ :

$$F[u_2(x)] = g_p[\bar{p}_v(x) + \bar{p}_{v02}(x)]. \quad (14)$$

W ten sposób możemy wyznaczać dalsze wyrazy ciągu kolejnych przybliżeń  $u_3, \dots, u_k, u_{k+1}$  funkcji  $u(x)$ . Za pomocą odpowiedniego kryterium sprawdzamy, czy różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami funkcji  $u(x)$ , tzn.  $(u_{k+1} - u_k)$ , jest dostatecznie mała. Pojawiające się w ciągu kolejnych przybliżeń funkcji  $u(x)$  wyrażenia  $\bar{p}_{v01}(x), \bar{p}_{v02}(x), \dots, \bar{p}_{v0k}(x)$  możemy traktować jako dodatkowe ruchome obciążenia. W ten sposób rzeczywisty układ nieliniowy możemy zastąpić układem liniowym, w którym oprócz obciążeń rzeczywistych działają obciążenia dodatkowe. W przypadku zbieżności ciągu  $u_k(x)$  ten zastępczy układ liniowy, pod wpływem obciążeń rzeczywistych działających na układ nieliniowy i ostatniego z ciągu obliczanych obciążeń dodatkowych  $\bar{p}_{v0k}(x)$ , zachowuje się tak samo, jak układ nieliniowy. Dodatkowe obciążenia, które nazwalismy obliczeniowymi, przybierają postać obciążeń ciągłych o dowolnych zwykle kształtach.

Przyjmując z kolei konkretny przypadek obciążenia toru oraz charakter nieliniowości charakterystyki podtorza można wyznaczyć konkretne obciążenia dodatkowe, czyli  $\bar{p}_{va}(x)$ .

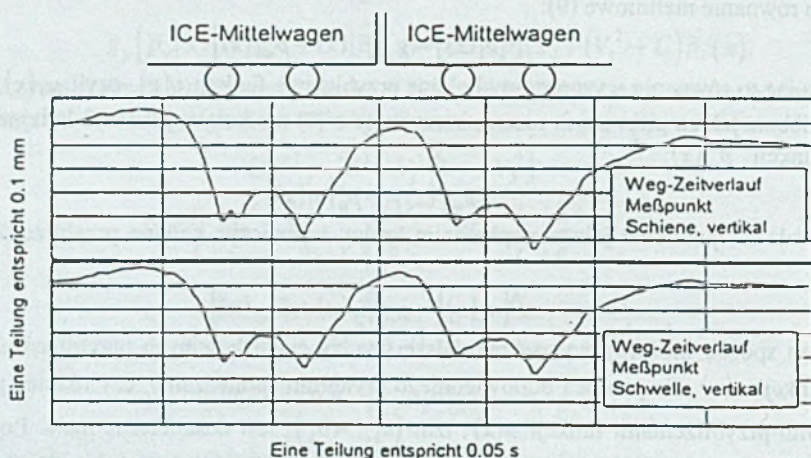
Przykłady kształtów obciążeń dodatkowych, jakie można spotkać przy analizie przypadku prostych obciążeń toru dla pierwszego przybliżenia, czyli  $\bar{p}_{v01}(x)$ , przedstawiono w pracy [5]. W pracy tej podano również sposób analitycznego uwzględnienia obciążeń ciągłych o dowolnym kształcie polegający na wykorzystaniu teorii funkcji sklepanych i przybliżaniu tych obciążeń funkcjami sklepanymi do stopnia trzeciego włącznie.

### 3. O BUDOWIE MODELU NIELINIOWEGO, DAJĄCEGO WYNIKI MOŻLIWIE ZBLIŻONE DO UZYSKANYCH DROGĄ EKSPERYMENTALNĄ

Rys. 2 przedstawia wyniki badań eksperymentalnych uzyskanych na kolejach niemieckich DB [12]. Są to ugięcia toru wywołane przejazdem dwóch wózków sąsiednich wagonów pociągu ekspresowego ICE przejeżdżającego z prędkością 250 km/h, ze statycznym naciskiem

wywoływanych przez jeden zestaw kołowy wynoszącym 140 kN. Rysunek przedstawia dwa wykresy ugięć wywołanych przejazdem sąsiednich wózków dwóch kolejnych wagonów. Górny wykres dotyczy pionowych ugięć zarejestrowanych czujnikiem przymocowanym do szyny, a dolny czujnikiem przymocowanym do podkładu.

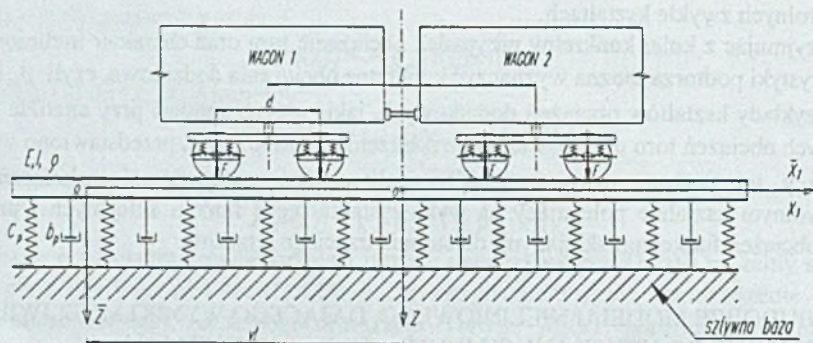
Zakładamy, że podczas pomiaru eksperymentalnego chwila, w której środek odległości między wózkami znajduje się nad czujnikiem pomiarowym, może być przyjęta jako początek ruchomego układu współrzędnych  $Ox_1z$ . W naszym przypadku w chwili tej  $t = 0,15$  s, zgodnie z położeniem wagonów przedstawionym na rys. 2.



Rys. 2. Wyniki badań eksperymentalnych [12]

Fig. 2. Results of experimental research [12]

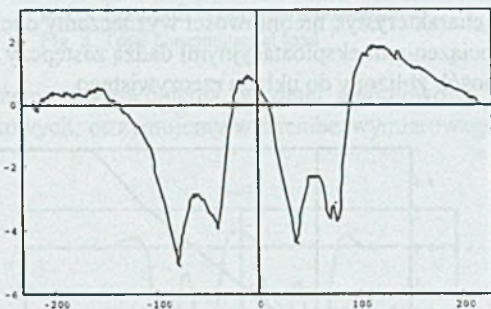
Na rys. 3 przedstawiono model odpowiadający parametrami pociągowi badanemu na DB, utworzony w celu porównania wyników analizy teoretycznej z badaniami na rzeczywistym obiekcie.



Rys. 3. Model do analizy teoretycznej

Fig. 3. Model for theoretical analysis

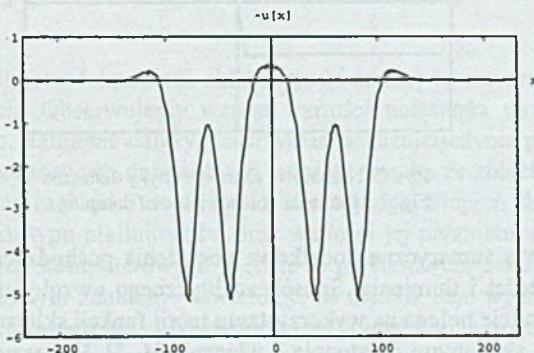
Utworzenie modelu teoretycznego wymaga przyjęcia konkretnych wartości parametrów opisujących układ rzeczywisty. Część tych parametrów, takich jak prędkość jazdy, naciski zestawów kołowych, parametry szyn, jest znana. Jednak niektóre właściwości fizyczne toru nie były podane. Dotyczy to parametru  $c_p$ , czyli stałej sprężystości składowej liniowej charakterystyki podłoża odniesionej do jednostki długości toru. Według naszych szacunków w cytowanym eksperymencie wartość  $c_p$  wynosiła od 200 do 250 MN/m<sup>2</sup>. W analizie założyliśmy wartość  $c_p = 230$  MN/m<sup>2</sup>. Przyjęte wartości parametrów pozwoliły przeliczyć współrzędne wymiarowe wykresu z eksperymentu (górną krzywą dotyczącą pomierzonych ugięć szyny) na stosowane w analizie współrzędne bezwymiarowe. Na rys. 4 przedstawiono wykres ugięcia szyny z eksperymentu DB wykonany we współrzędnych bezwymiarowych.



Rys. 4. Bezwymiarowe ugięcie szyn obliczone na podstawie eksperymentu DB  
Fig. 4. Dimensionless deflection of rails calculated on basis of DB experiment

Opierając się na opisanej w poprzednim rozdziale teorii utworzyliśmy model liniowy z takimi samymi parametrami prędkości, toru i sposobu obciążenia, jak w eksperymencie DB.

Rys. 5 przedstawia, wyznaczoną na drodze teoretycznej, funkcję bezwymiarowego ugięcia toru (do modelu przedstawionego na rys. 3 z podłożem o liniowej charakterystyce), w przypadku obciążenia go układem czterech ruchomych sił skupionych (odpowiednio do badań na DB przyjęto naciski wywołane przez dwa wózki sąsiednich wagonów i zbliżone do układu rzeczywistego pozostałe parametry). Bezwymiarowe siły mają wartość 110 i rozmieszczone są w punktach  $x$  o współrzędnych: -80, -40, 40 i 80.



Rys. 5. Bezwymiarowe ugięcia toru do modelu przedstawionego na rys. 3  
Fig. 5. Dimensionless track deflection for model on Fig. 3

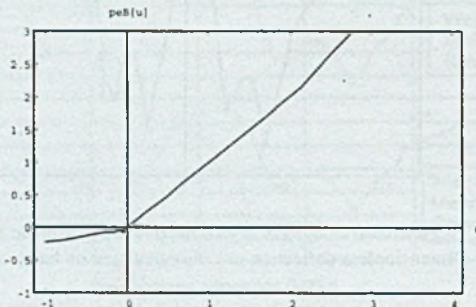
Porównując przedstawione wykresy (rys. 4 i 5) możemy zauważyć, że wyniki analizy teoretycznej układu liniowego nie odzwierciedlają w sposób zadowalający rezultatów badań eksperymentalnych. Naszym zdaniem różnice wynikają głównie z faktu, że w rzeczywistości odpowiedniejszym modelem układu dynamicznego pojazd szynowy - tor jest model uwzględniający nieliniowość.

W przykładzie numerycznym przyjmujemy model nieliniowości sprężystości przedstawiony na rys. 6 i nieliniowości tłumienia na rys. 7.

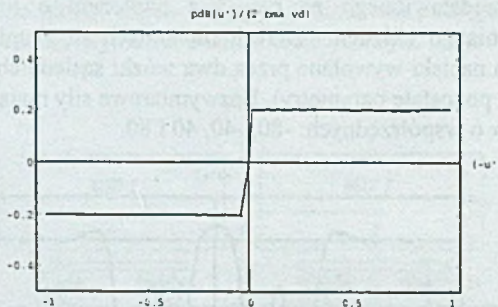
Parametry charakterystyki sprężystości: załamania przy dodatnim i ujemnym  $u$  (-0,04 i 2,00) oraz współczynniki kierunkowe wynoszące odpowiednio 0,2 i 1,3.

Parametry charakterystyki tłumienia przybliżającej tarcie suche: części poziome mają wartości bezwymiarowe -0.2 i +0.2.

Do tak przyjętych charakterystyk nieliniowości wyznaczamy obciążenia obliczeniowe, które działając wraz z obciążeniami eksploatacyjnymi dadzą zastępczy układ liniowy, który może zachowywać się w sposób zbliżony do układu rzeczywistego.



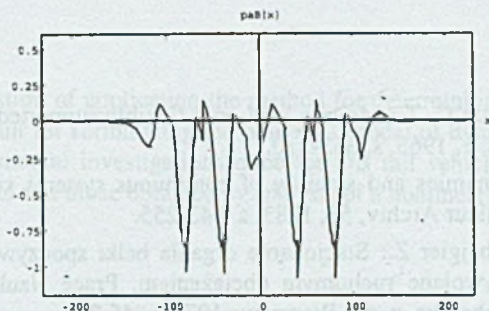
Rys. 6. Nieliniowa charakterystyka sprężystości  
Fig. 6. Nonlinear characteristic of elasticity



Rys. 7. Nieliniowa charakterystyka tłumienia  
Fig. 7. Nonlinear characteristic of damping

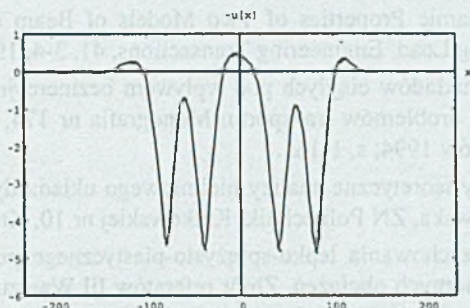
Rys. 8 przedstawia sumaryczne dodatkowe obciążenia pochodzące od nieliniowych charakterystyk sprężystości i tłumienia. Sposób analitycznego uwzględnienia obciążeń ciągłych o tak złożonym kształcie polega na wykorzystaniu teorii funkcji sklepanych i przybliżaniu tych obciążeń funkcjami sklepanymi do stopnia 3 włącznie [4, 5]. W naszym przykładzie obciążenia obliczeniowe przybliżamy funkcjami sklepanym stopnia 1, czyli krzywą łamaną.





Rys. 8. Sumaryczne obciążenie obliczeniowe  
Fig. 8. Total computational load

W pierwszym przybliżeniu uwzględnienia przyjętej nielineowości, przy ruchu obciążeń eksploatacyjnych i dodatkowych, otrzymujemy wykres bezwymiarowego ugięcia zamieszczonego na rys. 9.



Rys. 9. Ugięcie toru wyznaczone przy założeniu nielineowości podłoża  
Fig. 9. Track deflection under assumption of nonlinearity of foundation

#### 4. WNIOSKI

Uwzględnienie nielineowości podłoża zbliża wyniki analizy teoretycznej do rezultatów badań eksperymentalnych. Obserwujemy wzrost wartości uniesienia toru oraz zmniejszenie ugięcia maksymalnego. Pamiętać należy, że przykład pokazuje jedynie pierwsze przybliżenie rozwiązania. Z dotychczasowych doświadczeń autorów wynika że zbieżność szeregu przybliżeń uzyskuje się w granicach od 5 do 10 kroku iteracyjnego. Stopień zbliżenia do rzeczywistości zależy od doboru typu nielineowości oraz wartości jej parametrów. Wymaga to wykonania licznych symulacji komputerowych. Będzie to przedmiotem dalszych analiz. Na obecnym etapie można - naszym zdaniem - stwierdzić, że metoda daje wyniki pozwalające opracować taki model nielineowego układu dynamicznego pojazdu szynowego - tor, który może być w dużym stopniu przydatny do zastosowania w praktyce.

## LITERATURA

1. Achenbach I. D., Sun C. T.: Moving load on a flexibly supported Timoshenko beam. *Int. J. Solids Structures*, 1, 1965, s. 353-370.
2. Bogacz R.: On dynamics and stability of continuous systems subjected to a distributed moving load. *Ingenieur Archiv*, 53, 1983, s. 243-255.
3. Bogacz R., Rozenbajgier Z.: Stacjonarne drgania belki spoczywającej na półprzestrzeni lepkosprężystej wywołane ruchomym obciążeniem. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej*, ser. Mechanika, z. 63, Warszawa 1979, s. 45-71.
4. Cichocki Z., Grzyb A.: Analiza drgań belki Timoshenki przy ruchomych obciążeniach ciągłych o dowolnym kształcie. *Zbiór referatów IV Warsztatów Naukowych PTSK – Jeleń Góra 1997*, Symulacja w badaniach i rozwoju, Warszawa 1998, s. 48-57.
5. Cichocki Z.: Drgania toru kolejowego wywołane ruchem pojazdów. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, ser. Transport, z. 31, Gliwice 1998, s. 57-68.
6. Grzyb A.: On Dynamic Properties of Two Models of Beam on Nonlinear Foundation Subjected to Moving Load. *Engineering Transactions*, 41, 3-4, 1993, s. 337-350.
7. Grzyb A.: Drgania układów ciągłych pod wpływem bezinercyjnych obciążeń ruchomych w zastosowaniu do problemów transportu. *Monografia nr 174, Politechnika Krakowska*, s. Mechanika, Kraków 1994, s. 1-165.
8. Grzyb A.: Podstawy teoretyczne analizy nieliniowego układu dynamicznego pojazd - tor. *Politechnika Krakowska, ZN Politechniki Krakowskiej nr 10*, Kraków 1996, s. 47-60.
9. Grzyb A.: Analiza zachowania lepko-sprężysto-plastycznego podłoża poddanego działaniu dowolnych ruchomych obciążeń. *Zbiór referatów III Warsztatów Naukowych PTSK - Wigry 1996*, Symulacja w badaniach i rozwoju, Warszawa 1997, s. 32-41.
10. Jemielita G., Szcześniak W.: Sposoby modelowania podłoża. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej*, ser. Budownictwo, z. 120, Warszawa 1993, s. 5-49.
11. Kisilowski J. (red.): *Dynamika układu mechanicznego pojazd szynowy - tor*. PWN, Warszawa 1991.
12. Müller-Boruttua F. H., Ebersbach D.: Elastische Zwischenlagen im Gleis lösen Schwingungsprobleme. *Hochbruck H., Knothe K., Meinke P.: Systemdynamik der Eisenbahn, Hennigsdorf 13,14 X 1994*, s. 87-95.
13. Strzyżakowski J.: Dynamika układu mechanicznego pojazd-tor-otoczenie modelowanego układem dyskretno-ciągłym. *Prace Instytutu Transportu Politechniki Warszawskiej*, z. 31, Warszawa 1992.
14. Szcześniak W.: Wybrane zagadnienia kolejowe. Wzajemne oddziaływania w układzie pojazd - tor kolejowy - podtorze - podtorze gruntowe. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej*, ser. Budownictwo, z. 129, Warszawa 1995, s. 5-182.

Recenzent: Dr hab.inż. Marek Sitarz  
Prof. Politechniki Śląskiej

## Abstract

In the paper the suggestion of application the method for determining track displacements caused by passing of a train for formulating the nonlinear model of dynamical system is presented. Results of experimental investigations done for DB rail vehicles are given and the comparison of these results and those obtained by analysis of a nonlinear model is made.

Praca finansowana z projektu badawczego KBN nr 0947/T07/99/16.

**Streszczenie:** Praca dotyczy wybranych problemów dynamicznych mających szczególne znaczenie przy wysokich prędkościach jazdy. Wykorzystano dane eksperymentalne i skonstruowano nieliniowy model koleiny z podłożem. Wyniki badań porównano z wynikami analizy nieliniowej modelu dynamicznego toru i wagonu.

## DYNAMICAL PROBLEMS AT HIGH SPEEDS MOTION

**Summary:** The paper deals with selected dynamic problems which are especially important at high speed motion. The author makes the attempt to explain with the use of the dynamic analysis of the track and wheelset continuous models, such as nonlinear polynomialization of rail wheels and comparison.

## SŁOWA KLUCZE

Wysokie prędkości jazdy powodują dynamiczne problemy toru i wagonu. Wyniki badań porównano eksperymentalnie z wynikiem analizy nieliniowej modelu dynamicznego toru i wagonu. Wyniki badań porównano z wynikami analizy nieliniowej modelu dynamicznego toru i wagonu.

W celu badania nieliniowości problemu z podłożem w kółkach jest konieczne wybudowanie modelu nieliniowego toru i wagonu. Wyniki badań porównano eksperymentalnie z wynikiem analizy nieliniowej modelu dynamicznego toru i wagonu. Wyniki badań porównano z wynikiem analizy nieliniowej modelu dynamicznego toru i wagonu.