

Andrzej WILK
Tomasz MATYJA

WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ W PODSTAWIE ZĘBA METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Streszczenie. W pracy wyznaczano naprężenia w podstawie zębów kół wewnętrznie uzębionych za pomocą MEB. Analizowano wpływ grubości wieńca i liczby zębów na wartość naprężeń. Opracowano program generujący automatycznie zarys zęba i siatkę MEB w zależności od zadanych parametrów koła i narzędzia obróbczego.

STRESSES COMPUTATION IN THE BASIS OF A TOOTH USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

Summary. In this paper with the uses of BEM the stresses in the internal tooth root are computed. An analysis of the influence of rim thickness and number of teeth on stress value has been made. The program automatically generates a tooth profile and a boundary elements mesh on the grounds of the toothed wheel and working tool assigned parameters.

1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych kryteriów optymalizacji konstrukcji przekładni zębatych jest warunek wytrzymałości uzębienia kół na złamanie, co wiąże się z wyznaczeniem naprężeń u podstawy zębów. W tym przypadku celowe jest stosowanie takiej metody dokładnego wyznaczania naprężeń w stopie zębów, która umożliwiałaby analizę wpływu różnych cech geometrycznych i technologicznych uzębienia na wartość maksymalnego naprężenia. Taką metodą komputerową jest MES, którą stosuje się coraz częściej [1,2,3]. Metoda elementów skończonych wymaga podziału zęba na przynajmniej 250 elementów i rozwiązania od 500 do 1500 równań liniowych [4].

Do wyznaczenia naprężeń u podstawy zębów kół wewnętrznie uzębionych zastosowano inną metodę komputerową, tj. metodę elementów brzegowych (MEB), ze względu na znacznie mniejszą wymaganą liczbę węzłów obliczeniowych, które dobiera się wyłącznie na obrysie zęba oraz odpowiednio mniejszą liczbę równań liniowych.

Uznając, że naprężenia u podstawy zębów kół zewnętrznie uzębionych są dostatecznie dokładnie wyznaczane innymi metodami [4,5], przyjęto jako przedmiot rozważań ząb koła wewnętrznie uzębionego. Podstawą wszelkich obliczeń wytrzymałościowych jest wyznaczenie kształtu zęba zależnego od cech geometrycznych koła i narzędzia obróbczego. W związku z tym zachodziła potrzeba opracowania

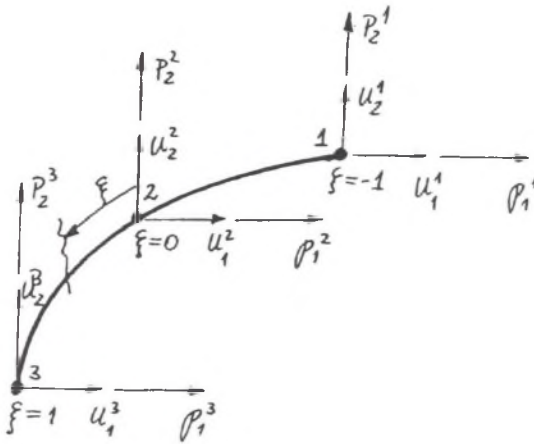
W przypadku MEB gotowe oprogramowanie jest kosztowne i trudno dostępne. Dlatego wykorzystano algorytm i program obliczeniowy MEB dla płaskiego stanu odkształcenia (naprężenia) opublikowany w pracy [8]. Program przystosowano do pracy na komputerze typu IBM PC w środowisku Windows. Środowisko Windows pozwala wykorzystać do obliczeń całą dostępną pamięć operacyjną komputera. Dzięki temu można było analizować stosunkowo duże układy MEB, bez gromadzenia danych na dysku. Skróciło to znacznie czas obliczeń i uprościło algorytm obliczeniowy.

W obliczeniach użyto elementów z trzema węzłami i kwadratowymi funkcjami kształtu:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \quad , \quad \Phi_2 = 1-\xi^2 \quad , \quad \Phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \quad . \quad (1)$$

Przyjęto, że przemieszczenia i obciążenia powierzchniowe na brzegu elementu opisane są funkcjami (rys.2):

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1 u_1^i \quad , \quad u_2 = \Phi_1 u_2^i \quad , \\ p_1 &= \Phi_1 p_1^i \quad , \quad p_2 = \Phi_1 p_2^i \quad . \end{aligned} \quad (2)$$



Rys.2. Kwadratowy element brzegowy
Fig.2. Quadratic Boundary Element

Ponieważ oryginalny program opublikowany w [8] umożliwiał wyznaczanie jedynie przemieszczeń punktów brzegowych, rozbudowano go o moduł obliczający naprężenia. Dla płaskiego stanu odkształcenia są to naprężenia σ_1 , σ_2 , σ_{12} . Na rys.3 przedstawiono schematycznie sposób wyznaczania naprężeń σ'_2 , σ'_{12} w lokalnym układzie współrzędnych (oś x'_1 styczna do brzegu). Widoczne jest, że:

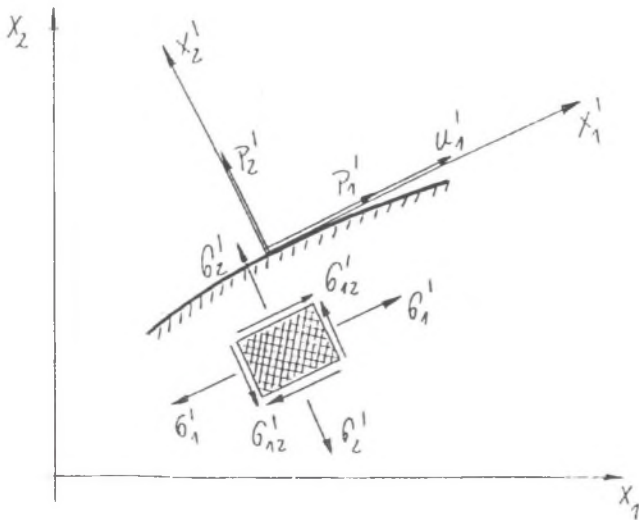
$$\sigma'_2 = p'_2 \quad i \quad \sigma'_{12} = p'_1 \quad (3)$$

Natomiast naprężenie σ'_1 wyznaczyć można z zależności:

$$\sigma'_1 = 2G \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} = 2G \left(\frac{du'_1}{d\xi} \right) \left(\frac{dx'_1}{d\xi} \right)^{-1} \quad (4)$$

gdzie: p'_1 i p'_2 - obciążenia powierzchniowe na brzegu elementu w układzie lokalnym,
 u'_1 - przemieszczenie na brzegu w kierunku osi x'_1 ,
 G - moduł sprężystości poprzecznej.

We wzorze (4) pochodne obliczane są wzdłuż brzegu elementu z wykorzystaniem funkcji kształtu.



Rys.3. Metoda wyznaczania naprężeń na brzegu
 Fig.3. Stresses on the boundary computation method

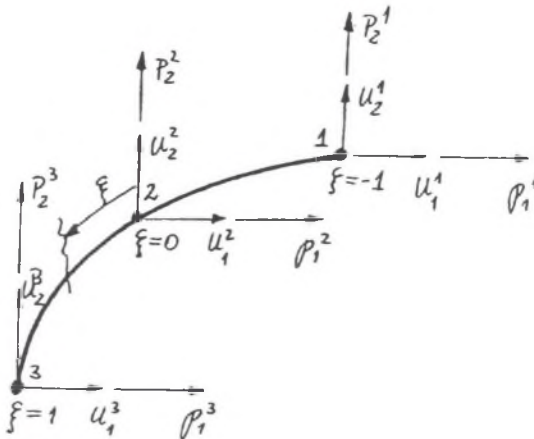
W przypadku MEB gotowe oprogramowanie jest kosztowne i trudno dostępne. Dlatego wykorzystano algorytm i program obliczeniowy MEB dla płaskiego stanu odkształcenia (naprężenia) opublikowany w pracy [8]. Program przystosowano do pracy na komputerze typu IBM PC w środowisku Windows. Środowisko Windows pozwala wykorzystać do obliczeń całą dostępną pamięć operacyjną komputera. Dzięki temu można było analizować stosunkowo duże układy MEB, bez gromadzenia danych na dysku. Skróciło to znacznie czas obliczeń i uprościło algorytm obliczeniowy.

W obliczeniach użyto elementów z trzema węzłami i kwadratowymi funkcjami kształtu:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \quad , \quad \Phi_2 = 1-\xi^2 \quad , \quad \Phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \quad . \quad (1)$$

Przyjęto, że przemieszczenia i obciążenia powierzchniowe na brzegu elementu opisane są funkcjami (rys.2):

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1 u_1^i \quad , \quad u_2 = \Phi_1 u_2^i \quad , \\ p_1 &= \Phi_1 p_1^i \quad , \quad p_2 = \Phi_1 p_2^i \quad . \end{aligned} \quad (2)$$



Rys.2. Kwadratowy element brzegowy
Fig.2. Quadratic Boundary Element

Ponieważ oryginalny program opublikowany w [8] umożliwiał wyznaczanie jedynie przemieszczeń punktów brzegowych, rozbudowano go o moduł obliczający naprężenia. Dla płaskiego stanu odkształcenia są to naprężenia σ_1 , σ_2 , σ_{12} . Na rys.3 przedstawiono schematycznie sposób wyznaczania naprężeń σ_2^i , σ_{12}^i w lokalnym układzie współrzędnych (oś x_1^i styczna do brzegu). Widoczne jest, że:

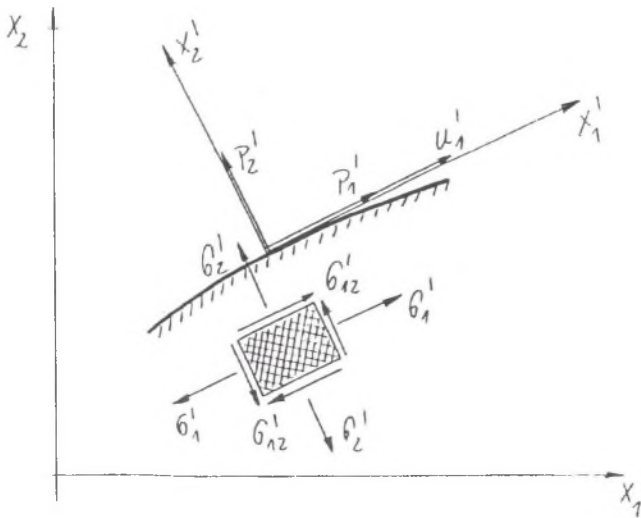
$$\sigma_2 = p_2 \quad i \quad \sigma_{12} = p_1 \quad . \quad (3)$$

Natomiast naprężenie σ_1 wyznaczyć można z zależności:

$$\sigma_1 = 2G \frac{\partial u_1'}{\partial x_1'} = 2G \left(\frac{du_1'}{d\xi} \right) \left(\frac{dx_1'}{d\xi} \right)^{-1} \quad , \quad (4)$$

gdzie: p_1' i p_2' - obciążenia powierzchniowe na brzegu elementu w układzie lokalnym,
 u_1' - przemieszczenie na brzegu w kierunku osi x_1' ,
 G - moduł sprężystości poprzecznej.

We wzorze (4) pochodne obliczane są wzdłuż brzegu elementu z wykorzystaniem funkcji kształtu.



Rys.3. Metoda wyznaczania naprężeń na brzegu
 Fig.3. Stresses on the boundary computation method

3. Modelowanie zadania analizy stanu naprężenia w stopie zęba

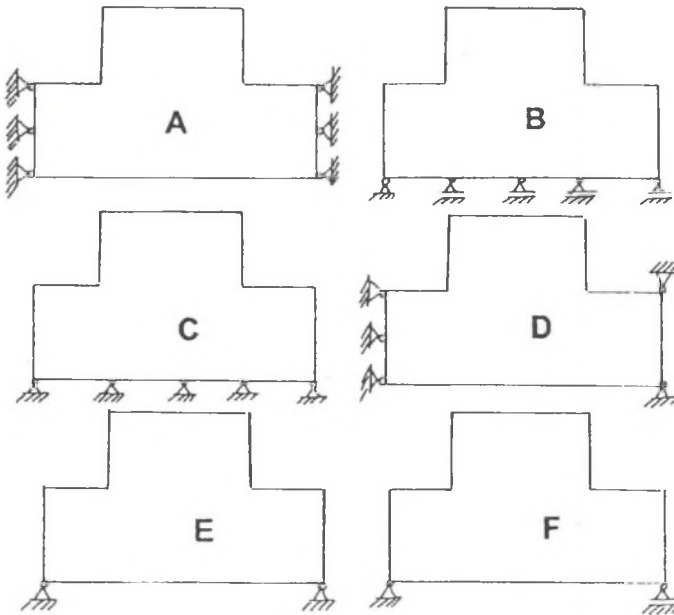
Modelowanie zadania analizy stanu naprężenia w stopie zęba koła zębatego podzielić można na trzy etapy:

- modelowanie kształtu zębów i wieńca koła zębatego,
- modelowanie podparcia wieńca,
- modelowanie siły skupionej działającej na ząb.

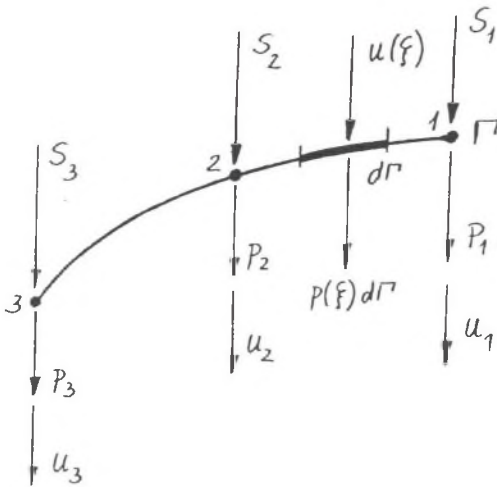
W literaturze spotkać można różne rozwiązania dotyczące problemu modelowania kształtu zęba i wieńca koła zębatego dla potrzeb MES lub MEB. Zasadniczo stosowane są trzy podstawowe modele:

- model ograniczony do jednego zęba z jednoczesnym pominięciem krzywizny wieńca,
- model, w którym rozpatrywany jest jeden ząb oraz fragment wieńca z pominięciem zębów sąsiednich,
- model uwzględniający oddziaływanie sąsiednich zębów.

Wprowadzane są różne sposoby podparcia wieńca (rys.4). Najczęściej w przypadku zębów zewnętrznych stosuje się podparcie typu B. Podparcie typu A najlepiej odpowiada sytuacji, gdy brzeg wieńca jest swobodny, co ma miejsce w kołach wewnętrznie uzębionych.



Rys.4. Modele podparcia
Fig.4. Support models



Rys.5. Modelowanie siły skupionej
Fig.5. Concentrated force modelling

W toku dalszych rozważań uzasadniony zostanie, na podstawie eksperymentów numerycznych, wybór właściwego modelu koła i sposobu jego podparcia.

Modelowanie siły skupionej działającej na węzeł siatki MEB nie jest procesem tak naturalnym jak w MES. W MEB na węzły działają intensywności obciążeń powierzchniowych i na nie właśnie zamieniona musi być siła skupiona. Na rys.5 pokazano element poddany działaniu sił skupionych S . Przez p oznaczono poszukiwane intensywności obciążeń, a przez u przemieszczenia węzłów elementu. Wychodząc z zasady prac przygotowanych, zapisać można:

$$W = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3 = \int_{\Gamma} p(s) u(s) d\Gamma = \int_{-1}^1 p(\xi) u(\xi) |G| d\xi, \quad (5)$$

gdzie $|G|$ Jakobian:

$$|G| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (6)$$

Obciążenie $p(\xi)$ oraz przemieszczenie $u(\xi)$ w dowolnym punkcie ξ elementu przedstawić można poprzez funkcje kształtu (1). W ten sposób uzyskuje się zależność:

$$W = \int_{-1}^1 \Phi_i \Phi_j p_i u_j |G| d\xi. \quad (7)$$

Równanie (5) musi być spełnione dla dowolnych wartości przemieszczeń u . Wychodząc z tego założenia uzyskuje się układ trzech równań postaci:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie współczynniki: $c_{ij} = c_{ji} = \int_{-1}^1 \Phi_i \Phi_j |G| d\xi$ całkować można numerycznie.

Rozwiązując układ (8) uzyskuje się wartości intensywności naprężeń zastępujących obciążenia skupione.

4. Porównanie wyników MEB z metodą odwzorowań wiernokątnych

Zgodnie z [4] wartości naprężeń uzyskane metodą odwzorowań wiernokątnych pozostają w dobrej zgodności z wynikami doświadczalnymi. W związku z tym postanowiono posłużyć się MOW do weryfikacji wyników otrzymanych metodą elementów brzegowych. Ze względu na brak w dostępnej literaturze odpowiednio precyzyjnych danych pozwalających przeprowadzić taką weryfikację dla kół wewnętrznie uzębionych, dalsze rozważania dotyczyć będą zębów zewnętrznych. Wnioski wyciągnięte z analizy numerycznej kół zewnętrznych wykorzystane zostaną potem w obliczeniach kół wewnętrznie uzębionych.

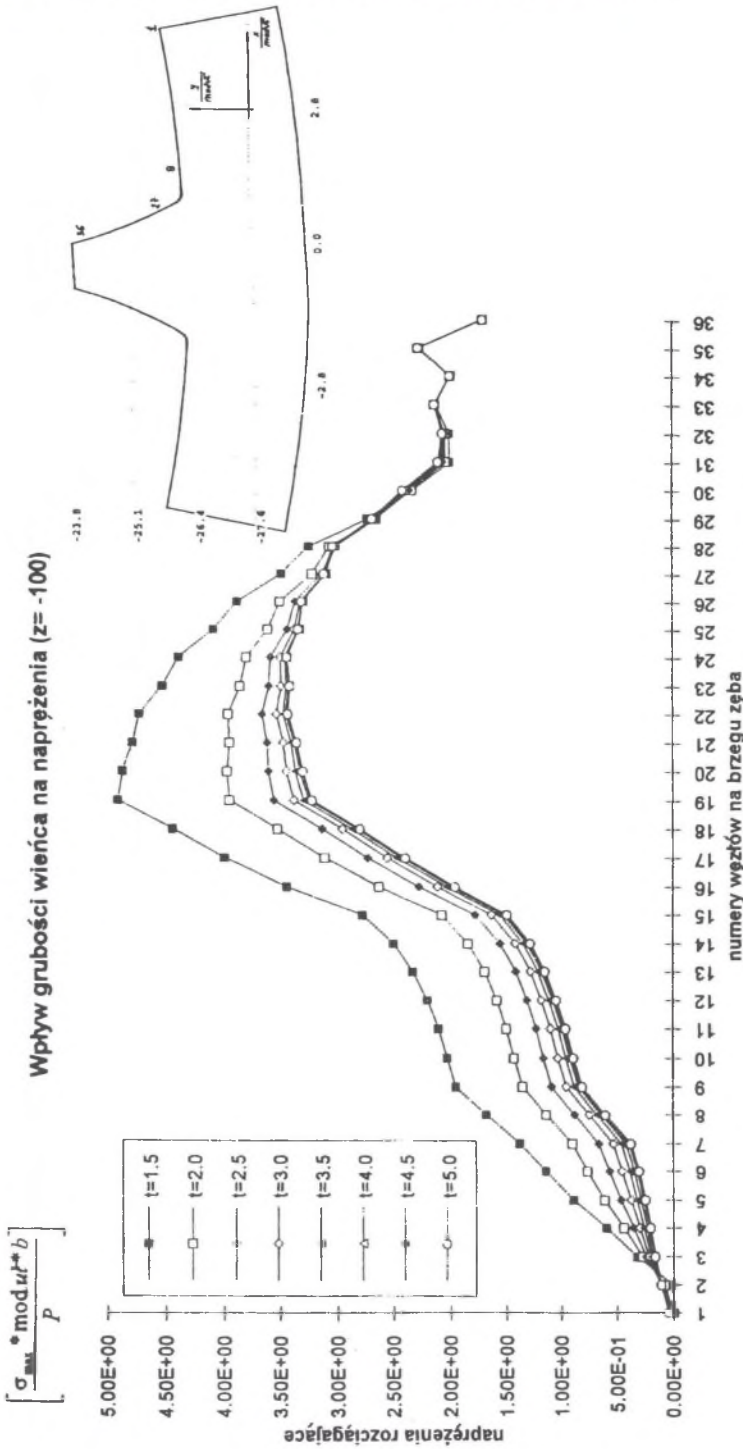
Algorytm numerycznego wyznaczania naprężeń w stopie zęba za pomocą MOW opisany został szczegółowo w pracy [4]. Przykład ($z = 30$) i wyniki tam uzyskane wykorzystano do oceny poprawności modeli zęba stosowanych w obliczeniach metodą MEB. Głównie zwrócono uwagę na:

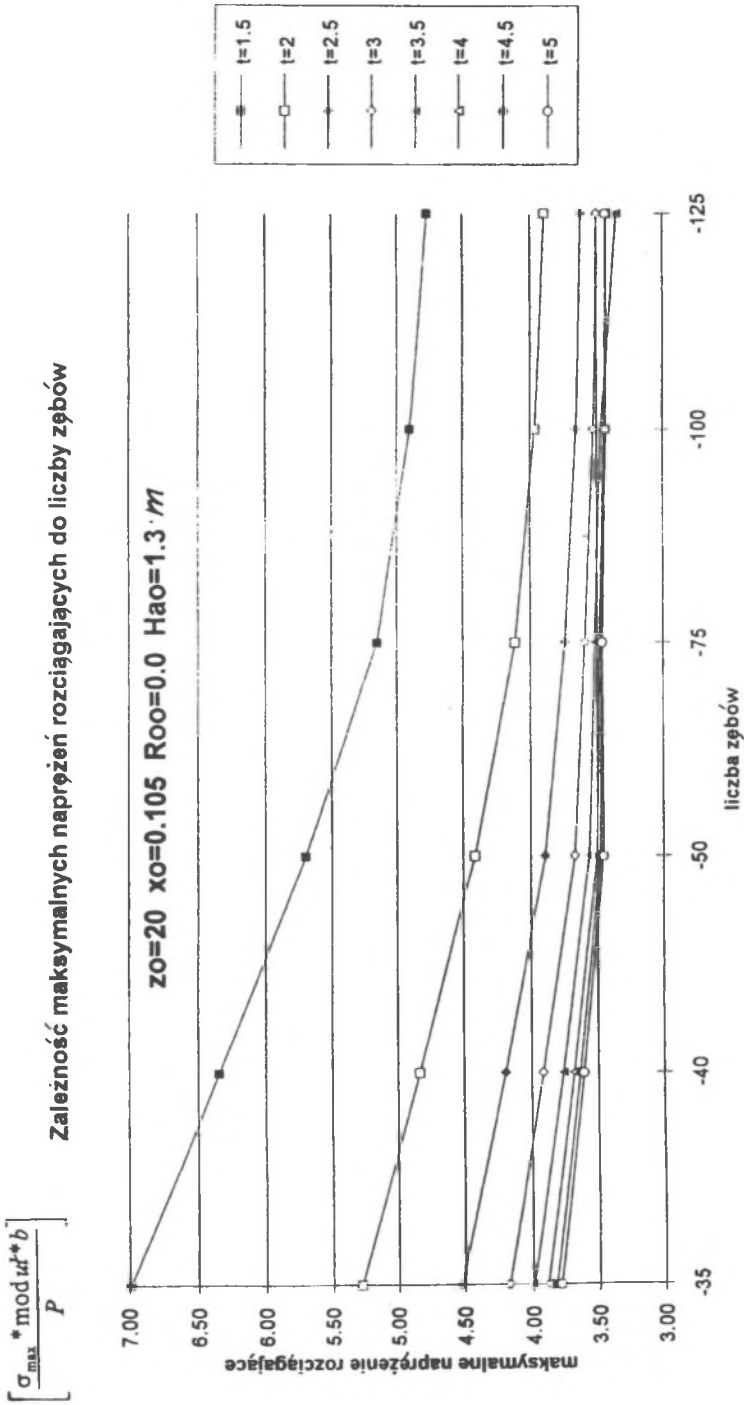
- sposób podparcia modelu,
- grubość wieńca.

W MOW zarys zęba opisany jest za pomocą funkcji zmiennej zespolonej. Przebieg funkcji tylko w kilku punktach na stopie oraz w punkcie przyłożenia siły na wierzchołku zgadza się z zarysem rzeczywistym. Poza tymi punktami przebieg funkcji znacznie odbiega od rzeczywistego zarysu. W związku z tym, aby faktycznie porównać MEB z MOW, wygenerowano kształt zęba posługując się funkcją wyznaczoną w pracy [4]. Wszystkie punkty wspólne rzeczywistego zarysu zęba i wykresu funkcji zmiennej zespolonej (część urojona argumentu równa zero) stanowiły jedne z węzłów wygenerowanych elementów brzegowych. Dzięki temu stało się możliwe porównanie nie tylko wartości naprężeń maksymalnych, ale również miejsca ich występowania.

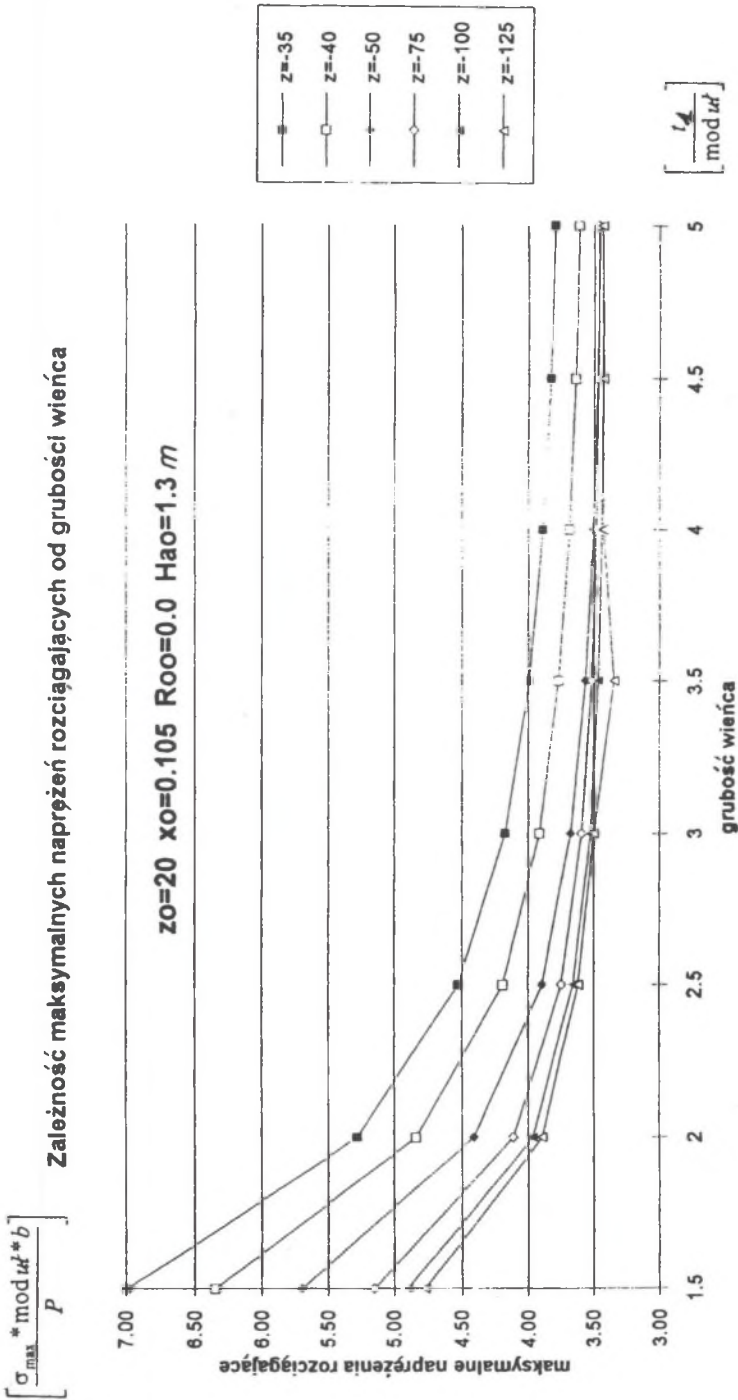
Już pierwsze eksperymenty numeryczne pokazały, że stopa zęba musi być modelowana bardzo dokładnie, przy użyciu co najmniej 10 punktów zarysu. W przeciwnym wypadku uzyskuje się wyniki znacznie odbiegające od dokładnych (MOW).

Również bezpośrednie wykorzystanie wygenerowanych punktów zarysu jako kolejnych węzłów elementów brzegowych, mimo oczywistych oszczędności związanych z rozmiarem modelu, może prowadzić do pojawienia się elementów o niekorzystnych kształtach [8] i do koncentracji naprężeń w miejscach innych, niż to jest w rzeczywistości. Dlatego w dalszych obliczeniach przyjęto zasadę, że punkty zarysu będą zawsze węzłami zewnętrznymi elementu brzegowego, a węzeł środkowy wygenerowany zostanie jako środek odcinka łączącego punkty.





Rys.7. Wpływ grubości wieńca na wartość naprężeń
 Fig.7. Influence of rim thickness on stress value



Rys.8. Wpływ liczby zębów na wartość naprężeń
 Fig.8. Influence of number of teeth on stress value

Przeprowadzono badania wpływu podparcia na wielkość naprężeń przy stałej, jednostkowej grubości wieńca. W tabeli 1 zestawiono wartości maksymalnych naprężeń rozciągających w zależności od typu podparcia. Przyjęto wynik dokładny 3.62 [4].

Tabela 1

Wpływ podparcia na wielkość maksymalnych naprężeń

Typ podparcia	A	B	C	D	E	F
σ_{\max}	3.6576	3.6117	3.5714	3.2719	3.4490	3.3692
błąd %	+1.03	-0.23	-1.34	-9.60	-4.72	-6.93
węzeł	49	48	46	49	49	46

Widoczne jest, że najlepsza prawie 100% zgodność wyników występuje w przypadku B (także jeśli chodzi o miejsce występowania ekstremum). Jest to w pełni uzasadnione, gdyż w MOW kształt zęba odwzorowywany jest na półpłaszczyznę. Dość dobre rezultaty uzyskuje się również stosując podparcie typu A.

W dalszych obliczeniach analizowano oddziaływanie sąsiednich zębów na wartość naprężeń u podstawy zęba. Rozpatrywano dwa modele uwzględniające krzywiznę wieńca: pojedynczy ząb i trzy sąsiednie zęby (przy różnej grubości wieńca i podparciu typu A). Wartości naprężeń wyznaczone dla obu rozpatrywanych modeli różniły się od siebie jedynie o kilka procent.

Mimo że przeprowadzone rozważania dotyczyły zębów zewnętrznych, pozwoliły jednak wybrać właściwy model obliczeniowy do badania naprężeń w zębach wewnętrznie uźbionych. Przyjęto do dalszych obliczeń model z pojedynczym zębem i podparciem typu A.

5. Analiza numeryczna stanu naprężenia w stopie zęba koła wewnętrznie uźbionego

Zrealizowano przykładowe obliczenia numeryczne dla zębów wewnętrznych wykonanych za pomocą dłutaka o następujących parametrach: $z_0 = 20$, $x_0 = 0.105$, $\rho_0 = 0.0$, $h_{a0} = 1.3$ m, przy zmieniającej się liczbie zębów $z \in \{35; 40; 50; 75; 100; 125\}$; ($x = 0$) oraz przy zmiennej grubości wieńca $t = t_1/m \in \{1.5; 2.0; 2.5; 3.0; 3.5; 4.0; 4.5; 5.0\}$; gdzie m - moduł koła zębatego.

Wyniki obliczeń zobrazowano na wykresach. Rys. 6 pokazuje, że wraz ze wzrostem grubości wieńca zmienia się nie tylko wartość maksymalnych naprężeń, ale również miejsce ich występowania. Podobne charakterystyki otrzymano dla wszystkich kół bez względu na liczbę zębów.

Na rys. 7 i 8 pokazano zbiorcze zestawienie pozwalające ustalić zależność maksymalnych naprężeń zarówno od grubości wieńca (t), jak i od liczby zębów w kole (z).

6. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych rozważań i analiz numerycznych można stwierdzić, że:

- 1) Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą MEB dobrze zgadzają się z danymi literaturowymi. MEB wykazuje dobrą dokładność i może być wykorzystana do optymalizacji kół zębatych.
- 2) Połączenie algorytmu wyznaczania zarysu zęba z MEB umożliwia atomatyzację procesu obliczeniowego.
- 3) MEB jest bardzo wrażliwa na niestaranne generowanie elementów brzegowych, złe modelowanie kształtu stopy zęba, niewłaściwy sposób podparcia.
- 4) Grubość wieńca ma istotny wpływ na wielkość naprężeń w stopie zęba koła wewnętrznie uzębionego. Naprężenia maleją, gdy rośnie grubość wieńca lub liczba zębów w kole zębatym.
- 5) Opracowane algorytmy obliczeniowe i przygotowane narzędzia programistyczne umożliwiają przeprowadzenie dalszych badań numerycznych pozwalających ustalić wpływ na naprężenia innych cech konstrukcyjnych i technologicznych uzębienia.

Literatura

1. Moriwaki I., Watabe Y., Saito K.: Tooth bending deflection calculation of non-standard gear by global local finite element method. International Gearing Conference. University of Newcastle, UK. Mechanical Engineering Publication Limited, LONDON 1994.
2. Blazakis C.A., Houser D.R.: Finite element and experimental analysis of the effect of thin-rimmed gear geometry on spur gear fillet stresses. International Gearing Conference. University of Newcastle, UK. Mechanical Engineering Publication Limited LONDON, 1994. International Gearing Conference. University of Newcastle, UK. Mechanical Engineering Publication Limited, LONDON 1994.
3. Mandak J.: New approaches to design of Gearing. International Gearing Conference. University of Newcastle, UK. Mechanical Engineering Publication Limited, LONDON 1994.
4. Müller L.: Obliczanie naprężeń w podstawie zęba. ZN Politechniki Śląskiej, seria Transport z.8, Gliwice 1988.
5. Müller L.: Naprężenia w podstawie zęba koła zewnętrznie uzębionego. ZN Politechniki Śląskiej, seria Transport z.10, Gliwice 1991.
6. Müller L.: Naprężenia w podstawie zęba koła wewnętrznie uzębionego. ZN Politechniki Śląskiej, seria Transport z.10, Gliwice 1991.
7. Zhong S., Huang C., Chao T.: Study of the rigity of a single tooth of a thinrimmed external spur gear by BEM. International Gearing Conference. University of Newcastle, UK. Mechanical Engineering Publication Limited, LONDON 1994.
8. Brebbia C.A., Dominguez J.: Boundary Elements. An Introductory Course. McGraw-Hill Inc. 1989.

Recenzent : Prof. zw. dr hab. inż. Leszek Kwapisz

Wpłynęło do Redakcji : 10.11.1995 r.

Abstract

In this paper the program automatically generates a tooth profile on the grounds of the toothed wheel and working tool assigned parameters was worked. The algorithm [4] was used. The example of tooth profile shows fig.1. The program of boundary element method was worked, too. The quadratic boundary elements (fig.2) was used. The comparison boundary element method to the conformal mapping method was made. The best possible manner of tooth support was chosen. An analysis of the influence of rim thickness and number of teeth on stress value has been made. Fig . 6,7,8 show analysis results.