ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965

Seria: INŻYNIERIA SANITARNA z. 7 Nr kol. 131

CZESŁAW LEWINOWSKI
Katedra Kominikacji Miejskich

MIECZYSŁAW WĘGRZYN
Katedra Budowli Komunalnych

ZASTOSOWANIE RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA I TEORII STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ DO OCENY WYNIKÓW BADAŃ WYTRZYMAŁOŚCI BETONU

Wytrzymałość betonu zależy od wielu czynników stosunkowo trudnych do uchwycenia w procesie jego wytwarzania. Z tego też względu jego wytrzymałość w poszczególnych punktach pomiarowych danego elementu jest na ogół różną od projektowanej marki betonu.

W niniejszej pracy przyjęto hipotezę, że rozkład wytrzymałości betonu danego elementu konstrukcyjnego na rozkład normalny $N(\mu\sigma)$ i jest określony wzorem

$$f_{(y)_t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

gdzie:

- e - podstawa logarytmu naturalnego,
- y_i - wytrzymałość betonu w i-tym punkcie pomiarowym,
- σ - odchylenie standardowe (w odniesieniu do całego elementu),
- μ - średnia wytrzymałość betonu całego elementu konstrukcyjnego,
- σ^2 - wariancja.

Wzór (1) określa rozkład normalny teoretyczny zwany też rozkładem Gaussa. Empiryczny rozkład wytrzymałości betonu uzyskany na podstawie dokonanych pomiarów możemy określić wzorem

$$f_{(y)_e} = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - \bar{y})^2}{2 s^2}} \tag{2}$$

gdzie:

$$\bar{y} = \mu = \hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} y_i \tag{3}$$

$$s^2 = \sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \bar{y})^2 \tag{4}$$

$$s = \sigma = \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \bar{y})^2 - \frac{h^2}{12}} \tag{5}$$

We wzorach (2), (3), (4) i (5) wprowadzono następujące oznaczenia:

N - liczba punktów pomiarowych (liczebność próby),

$\bar{y}$ - średnia wytrzymałość betonu z N próbek (punktów pomiarowych),

s^2 - wariancja z próby,

s - odchylenie standardowe w próbie.

Wyrażenie $\frac{h^2}{12}$ nosi nazwę poprawki Sheparda, zaś h oznacza długość przedziału klasowego.

Za miarę zgodności rozkładu normalnego N (μ,σ) (teoretycznego) wyrażonego wzorem (1), z rozkładem empirycznym wyrażonym wzorem (2) może posłużyć kryterium zgodności χ^2 (chi-kwadrat) obliczone ze wzoru.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(n_i - N \cdot \hat{P}_{y_i})^2}{N \cdot \hat{P}_{y_i}} \tag{6}$$

gdzie:

$\hat{P}_{y_i}$ - jest prawdopodobieństwem, wyznaczonym przez hipotetyczną dystrybuantę, że wartość zmiennej y jest zawartą w przedziale o liczebności n_i,

$N.\hat{P}_{y_i}$ - hipotetyczna liczebność tego przedziału,która winna być $\geqslant 5$.

Odpowiednie tablice statystyczne podają wartości χ^2 uzależnione od liczby stopni swobody i poziomu istotności α

Liczbę stopni swobody dla rozkładu empirycznego możemy obliczyć ze wzoru

$$r = k - L - 1 \tag{7}$$

gdzie:

k - liczba składników sumy w wyrażeniu na χ^2,

L - liczba nieznanych parametrów wyliczonych z próby ($\bar{y}$ i s).

Poziom istotności α w zagadnieniach technicznych przyjmuje się: $\alpha = 0{,}05$ lub $\alpha = 0{,}01$.

Jeżeli wartość χ^2 obliczona ze wzoru (6) okaże się mniejsza od χ_α^2 to hipotezę, że wytrzymałość betonu ma rozkład N (μ,σ) przyjmujemy.

Innymi słowy mówiąc nie mamy podstaw do odrzucenia założonej hipotezy, że beton posiada rozkład normalny z uwagi na badaną cechę.

Przy pomocy testu zgodności χ^2 sprawdzono rozkład empiryczny $N_{(\bar{y},s)}$ z rozkładem normalnym $N(\mu,\sigma)$ dla 10 elementów konstrukcyjnych. Dane liczbowe odnośnie wytrzymałości zaczerpnięto z literatury i we wszystkich przypadkach nie było podstaw do odrzucenia założonej hipotezy.

Dla oceny dokładności z jaką $\bar{y}$ przedstawia wartość średnią w całym elemencie obliczamy tzw. przedział ufności dla średniej $\bar{y}$ rozkładem $N(\mu,\sigma)$.

Przedziałem ufności rzeczywistej wytrzymałości całego elementu konstrukcyjnego nazywamy taki przedział liczbowy wyznaczony na podstawie znanych nam wartości y_i, w którym to przedziale z określonym prawdopodobieństwem zawarta jest wartość rzeczywista.

Przedział ufności możemy obliczyć ze wzoru

$$P\,(\bar{y} - L) < \mu = R\,\text{śr} < (\bar{y} + L) = 1 - \alpha, \tag{8}$$

gdzie:

$$L = t_\alpha \frac{s}{\sqrt{N - 1}} \quad \text{dla} \quad N \leqslant 30$$

$$L = t_\alpha \frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{dla} \quad N > 30.$$

Wartość t_α odczytujemy z tablicy t - Studenta przy poziomie ufności α i liczbie stopni swobody $r = N - 1$. Jeżeli prawdopodobieństwo $1 - \alpha$ jest równe 0,95 lub 0,99, to otrzymamy 95 lub 99, procentowy przedział ufności.

Stosując rachunek prawdopodobieństwa i teorię statystyki matematycznej do oceny wyników badań wytrzymałości betonu przy stosunkowo niewielkiej liczebności pomiarów możemy obliczyć średnią wytrzymałość całej konstrukcji (lub jej elementu) z określonym prawdopodobieństwem.

Opisana metoda może być również stosowana do opracowania wyników innych badań, a w szczególności wyników badań naukowych.