

Andrzej WILK
Piotr FOLEGA

WYZNACZANIE WYTRZYMAŁOŚCI PODSTAWY ZĘBÓW KÓŁ NAPĘDÓW ZĘBATYCH

Streszczenie. W pracy przeprowadzono obliczenia wytrzymałościowe zębów kół zewnętrznie uzębionych za pomocą metody elementów brzegowych (MEB). Przeanalizowano wpływ wybranych cech konstrukcyjnych koła zębatego oraz narzędzia na wartości naprężeń w stopie zęba. Otrzymane wyniki obliczeń porównano z rezultatami uzyskanymi za pomocą metod zalecanych przez normy ISO/DIN. Przeprowadzono również analizę wpływu zużycia powierzchni roboczych zębów na wartości naprężeń w ich stopach.

CALCULATION OF STRENGTH OF TOOTH BASE OF A DRIVING GEAR

Summary. Application of the Boundary Elements Method in the numerical analysis of the strength of the wheels' gears has been presented in the paper. The influence of the construction features of gear wheel and construction features of the tool on the values of stresses in the base of an external gear tooth has also been presented. Results of the calculations have been compared with the ones obtained by means of the methods recommended by ISO/DIN standards. Analysis of the influence of wear of active faces of teeth on the values of stresses in their bases has also been made.

1. WPROWADZENIE

Do wyznaczania naprężeń w podstawie zęba napędów zębatych stosuje się metody zalecane przez normy ISO lub DIN. Metody te uwzględniają wyłącznie naprężenia gnące w podstawie zęba. Dla uściślenia obliczeń wytrzymałościowych i optymalizacji cech konstrukcyjnych przekładni celowe jest stosowanie dokładnych metod wyznaczania naprężeń, które umożliwiają analizę wpływu cech geometrycznych kół zębatych oraz parametrów narzędzia na wartości naprężeń.

Naprężenia w podstawie zęba wyznacza się coraz częściej metodami komputerowymi. Są to głównie metody numeryczne: metoda elementów skończonych (MES), która wymaga podziału zęba na dużą liczbę elementów i rozwiązania odpowiednio dużej liczby równań liniowych oraz metoda elementów brzegowych (MEB), która wymaga w porównaniu z MES znacznie mniejszej liczby węzłów obliczeniowych, znajdujących się na zarysie zęba i odpowiednio mniejszej liczby równań liniowych.

W artykule zastosowano metodę elementów brzegowych [1],[2],[3] do wyznaczania naprężeń w podstawie zębów kół zewnętrznie uzębionych. Opis metody obliczeń podano w pozycji [4], w której zamieszczono wyniki analiz komputerowych naprężeń w podstawie zębów kół wewnętrznie uzębionych.

Uzyskane wyniki obliczeń zostały porównane z rezultatami obliczeń otrzymanymi zgodnie z zaleceniami ISO (DIN). W opracowaniu przeprowadzono analizę wpływu doboru wybranych cech geometrycznych kół i narzędzi obróbczych na wartości maksymalnych naprężeń w podstawie zęba oraz wpływu zużycia powierzchni roboczych zębów na wartości naprężeń w ich stopach.

Zastosowanie MEB w procesie konstruowania kół zębatych umożliwia optymalny dobór cech konstrukcyjnych kół zębatych i narzędzia ze względu na wytrzymałość na złamanie zębów, a także pozwala na ilościową ocenę wpływu zmian tych cech na wytrzymałość. Przedstawione w pracy wykresy zbiorcze wyników obliczeń mogą stanowić wytyczne do konstruowania kół o uzębieniu zewnętrznym.

2. ANALIZA WPLYWU CECH KONSTRUKCYJNYCH KOŁA ZĘBATEGO I PARAMETRÓW NARZĘDZIA NA NAPRĘŻENIA W STOPIE ZĘBA KOŁA ZEWNĘTRZNIE UZĘBIONEGO

Obliczenia wytrzymałościowe uzębień przeprowadza się obecnie metodami zalecanymi przez normy ISO/DIS 6336/3 oraz DIN 3990/3. Przykładowo w metodzie C naprężenie u podstawy zęba oblicza się najpierw przy przyłożeniu obciążenia u wierzchołka zęba, a następnie za pomocą współczynnika przyporu Y_e przelicza się w przybliżeniu na naprężenie

przy przyłożeniu obciążenia w punkcie jednoparowego przyporu. Nominalne naprężenie u podstawy zęba wyznacza się z zależności:

$$\sigma_{FO-C} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{FS} \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta, \quad (1)$$

gdzie:

F_t - nominalna siła obwodowa,

b - szerokość wieńca zębatego,

m_n - moduł normalny,

Y_ϵ - współczynnik przyporu przy obliczaniu wytrzymałości podstawy zęba,

Y_β - współczynnik kąta pochylenia linii zęba,

Y_{FS} - współczynnik głowy zęba, przy czym

$$Y_{FS} = Y_{Fa} \cdot Y_{Sa}, \quad (2)$$

gdzie:

Y_{Fa} - współczynnik kształtu zęba,

Y_{Sa} - współczynnik korekcji naprężeń.

Naprężenia u podstawy zęba σ_{F-C} wyznacza się z zależności:

$$\sigma_{F-C} = \sigma_{FO-C} \cdot K_A \cdot K_v \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha}, \quad (3)$$

gdzie:

K_A - współczynnik zastosowania,

K_v - współczynnik nadwyżek dynamicznych,

$K_{F\beta}$ - współczynnik nierównomiernego rozkładu obciążenia wzdłuż linii styku,

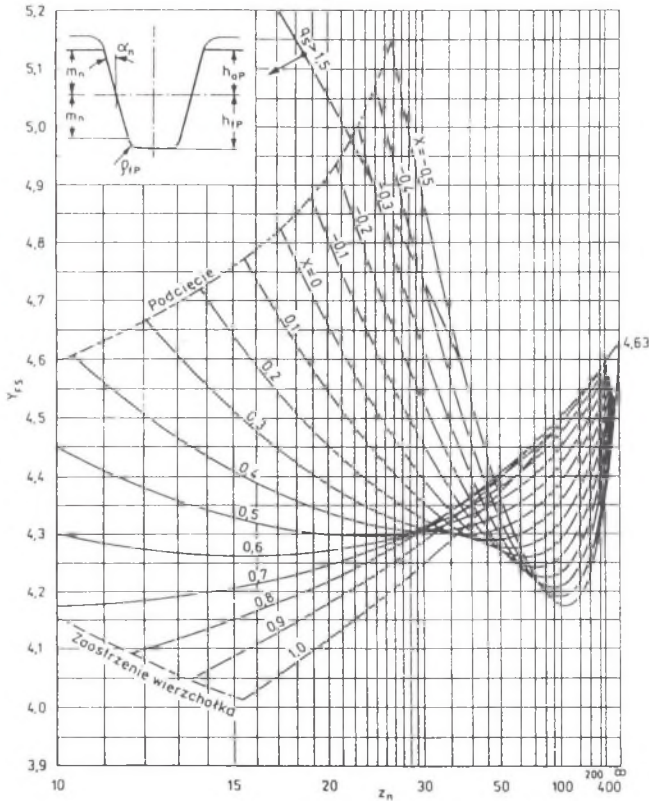
$K_{F\alpha}$ - współczynnik nierównomiernego rozdziału obciążenia na pary zębów w przyporze, przy czym nie powinny one przekraczać naprężeń dopuszczalnych σ_{FP} zgodnie z nierównością:

$$\sigma_{F-C} \leq \sigma_{FP} \quad (4)$$

Ponieważ Y_{Fa} oraz Y_{Sa} poza liczbą zębów i współczynnikiem korekcji zależą również od wielkości określających zarys odniesienia, to współczynnik głowy zęba Y_{FS} można wyznaczyć dla każdego zarysu odniesienia w zależności od liczby zębów i współczynnika przesunięcia

przesunięcia zarysu. Na rys. 1 przedstawiono taki przykładowy wykres współczynnika głowy zęba dla koła zewnętrznie uzębionego wg ISO/DIS 6336/3 [5].

Celem przeprowadzonych obliczeń było ustalenie wpływu na wartości naprężeń po rozciąganej stronie zęba cech konstrukcyjnych nacinanego koła oraz cech konstrukcyjnych narzędzia.



Rys. 1. Wykres współczynnika głowy zęba Y_{FS} [5].

Zarys odniesienia: $\alpha_{on} = 20^\circ$, $h_{ao} = 1.25$, $\rho_{ao} = 0.25$

Fig. 1. Diagram of a factor of a tooth point Y_{FS} [5].

Basic rack tooth profile: $\alpha_{on} = 20^\circ$, $h_{ao} = 1.25$, $\rho_{ao} = 0.25$

Naprężenia podano w jednostkach bezwymiarowych :

$$Y_e = \sigma_{\max} \cdot \frac{b \cdot m}{F_{bn}}, \quad (5)$$

gdzie :

- σ_{max} - maksymalna wartość naprężenia na brzegu zęba ,
 b - szerokość koła zębatego ,
 m - moduł zęba ,
 F_{bn} - wartość siły międzyzębnej, przy czym

$$F_{bn} = \frac{F_t}{\cos\alpha_n} \quad (6)$$

Obliczenia, których wyniki przedstawiono na rys. 2b, przeprowadzono przy założeniu cech geometrycznych zarysu odniesienia jak na rys. 1. Odpowiadają one rezultatom, które uzyskano za pomocą MES [6] oraz są jakościowo zgodne z wynikami obliczeń normami ISO (rys. 1). Otrzymane wartości naprężeń maksymalnych Y_e są większe od odpowiednich wyników wyznaczonych metodą MES lub metodami przybliżonymi proponowanymi przez normy ISO/DIN (rys. 1). Wynika to między innymi z faktu, że w metodzie MEB naprężenia są liczone bezpośrednio na brzegu zęba, gdzie występują ich maksymalne wartości. W metodzie MES natomiast wartości naprężeń wyznacza się w środkach ciężkości elementów skończonych, które nie leżą na powierzchni zewnętrznej zęba.

Analizując krzywe przedstawione na rys. 2 można stwierdzić następujące cechy kół zewnętrznie uzębionych [7] :

- stosowanie korekcji jest pod względem wytrzymałościowym szczególnie skuteczne przy małej liczbie zębów w kole ($z \in 12 \div 50$),
- dodatnie wartości współczynnika przesunięcia zarysu koła powodują proporcjonalne zmniejszenie naprężeń w stopie zęba,
- stosowanie ujemnych wartości współczynnika przesunięcia zarysu uzasadnione jest tylko przy dużej liczbie zębów w kole.

2.1. Wpływ kąta zarysu odniesienia

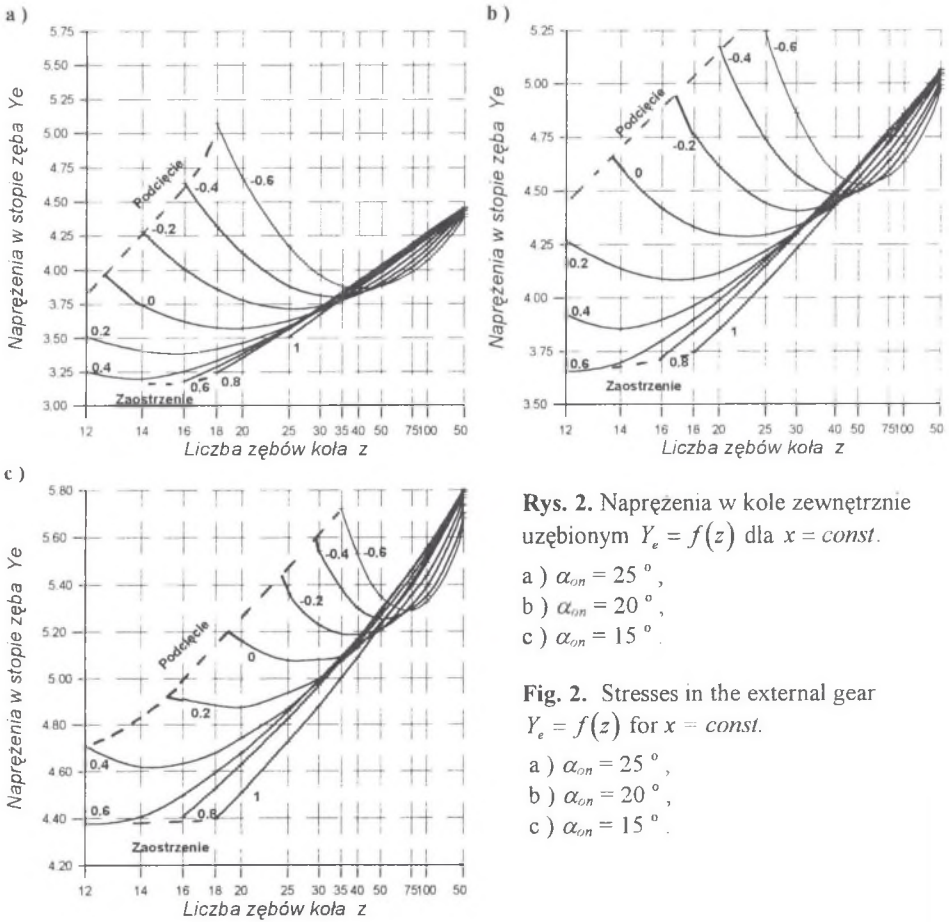
Duży wpływ na wartości naprężeń w stopie zęba koła zewnętrznie uzębionego ma kąt zarysu narzędzia. Obliczenia przeprowadzono przy założeniu zarysu odniesienia o następujących parametrach (wg PN) :

- wysokość głowy narzędzia $h_{ao} = 1.25$,

- kąt zarysu $\alpha_{on} \in (25^\circ, 20^\circ, 15^\circ)$,
- promień zaokrąglenia głowy narzędzia $\rho_{ao} = 0.25$.

Wyniki przedstawiono w postaci graficznej na rys. 2.

Przy kącie zarysu odniesienia wynoszącym 25° wartości obliczonych naprężeń są najmniejsze. Natomiast dla $\alpha_{ON} = 20^\circ$ oraz $\alpha_{ON} = 15^\circ$ wartości otrzymanych naprężeń odpowiednio zwiększają się. Na zmniejszenie naprężeń w podstawie zęba ze wzrostem kąta zarysu narzędzia decydujący wpływ ma zwiększenie grubości zęba u podstawy.



Rys. 2. Naprężenia w kole zewnętrznie uzębionym $Y_e = f(z)$ dla $x = const$.

- a) $\alpha_{on} = 25^\circ$,
- b) $\alpha_{on} = 20^\circ$,
- c) $\alpha_{on} = 15^\circ$.

Fig. 2. Stresses in the external gear $Y_e = f(z)$ for $x = const$.

- a) $\alpha_{on} = 25^\circ$,
- b) $\alpha_{on} = 20^\circ$,
- c) $\alpha_{on} = 15^\circ$.

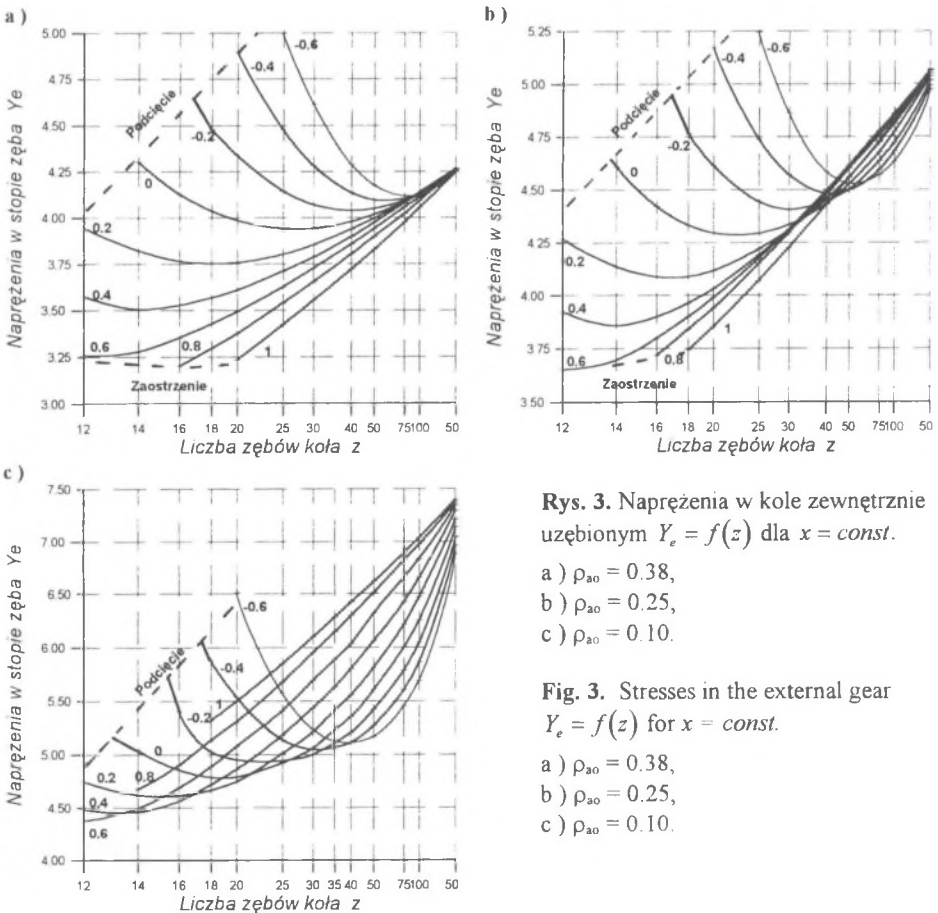
2.2. Wpływ promienia zaokrąglenia głowy narzędzia

Ważnym parametrem konstrukcyjnym narzędzia, mającym również wpływ na wartości naprężeń w stopie zęba, jest promień zaokrąglenia głowy narzędzia. Od jego wartości zależy kształt krzywej przejściowej w stopie zęba.

Obliczenia wykonano dla trzech wartości promienia zaokrąglenia głowy narzędzia przy założeniu zarysu odniesienia o następujących parametrach :

- wysokość głowy narzędzia $h_{ao} = 1.25$,
- promień zaokrąglenia głowy narzędzia $\rho_{ao} \in (0.38, 0.25, 0.10)$,
- kąt zarysu $\alpha_{on} = 20^\circ$.

Wyniki przedstawiono w postaci graficznej na rys. 3.



Rys. 3. Naprężenia w kole zewnętrznie uzębionym $Y_e = f(z)$ dla $x = const$.

- a) $\rho_{ao} = 0.38$,
- b) $\rho_{ao} = 0.25$,
- c) $\rho_{ao} = 0.10$.

Fig. 3. Stresses in the external gear $Y_e = f(z)$ for $x = const$.

- a) $\rho_{ao} = 0.38$,
- b) $\rho_{ao} = 0.25$,
- c) $\rho_{ao} = 0.10$.

Analizując wykresy przedstawione na rys. 3 można stwierdzić wzrost wartości naprężeń wraz ze zmniejszeniem wartości promienia zaokrąglenia głowy narzędzia. Szczególnie duży wzrost naprężeń występuje przy $\rho_{a0} = 0.10$. W tym przypadku linie odpowiadające poszczególnym wartościom współczynnika przesunięcia zarysu przecinają się wielokrotnie, co uniemożliwia prostą ocenę optymalnego rozwiązania. Powodem zwiększenia się wartości naprężeń jest zmiana grubości zęba u podstawy oraz kształt krzywej przejściowej w stopie zęba.

2.3. Wpływ współczynnika przesunięcia zarysu dłutaka

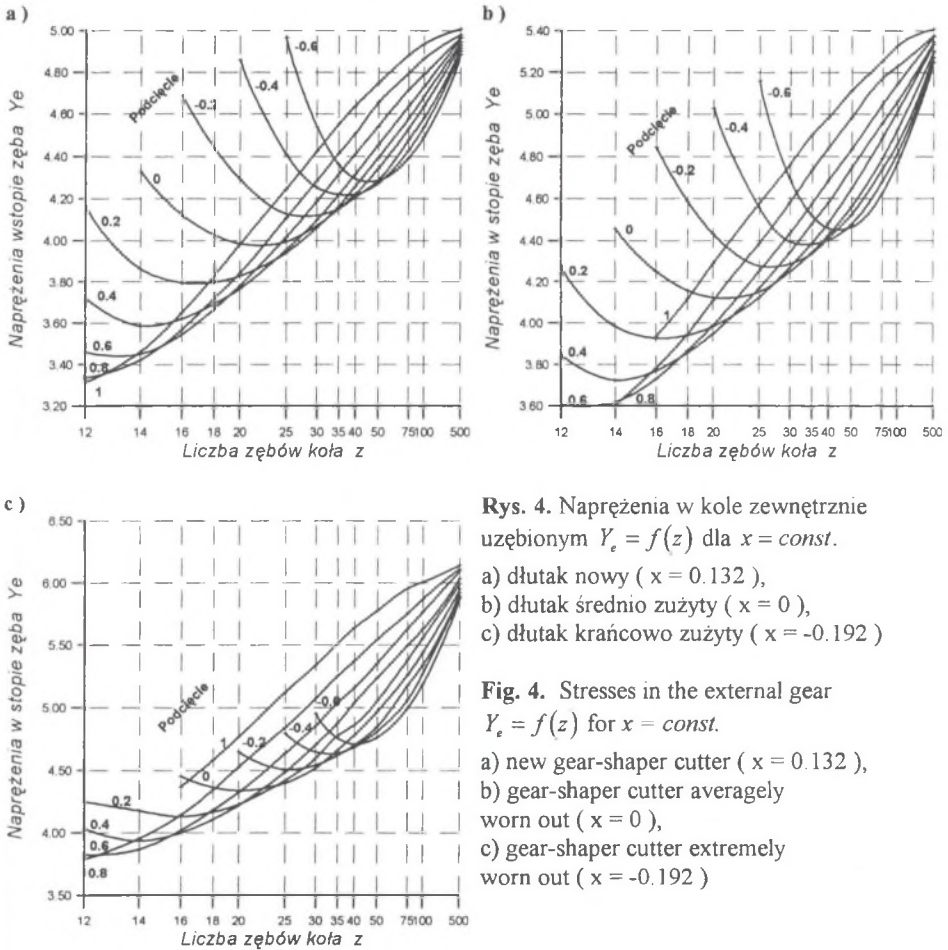
O kształcie zęba, a zwłaszcza jego stopy decydują nie tylko parametry nacinanego koła, ale także parametry dłutaka, które zmieniają się podczas ostrzenia narzędzia. Na wartość naprężeń w stopie zęba wpływa w dużym stopniu wartość współczynnika przesunięcia zarysu dłutaka, która zmienia się w miarę zużywania się narzędzia od wartości dodatniej, w przypadku nowego narzędzia do wartości ujemnych w narzędziu mocno zużytych. Z tego powodu obliczenia przeprowadzono w dwóch krańcowych stanach stopnia zużycia dłutaka oraz przy założeniu jego stanu pośredniego, czyli przy założeniach:

- dłutaka nowego ($x_0 > 0$),
- dłutaka średnio zużytego ($x_0 = 0$),
- dłutaka krańcowo zużytego ($x_0 < 0$).

Obliczenia wykonano przy założeniu dłutaka o następujących parametrach [8]:

- liczba zębów $z_0 = 25$,
- wysokość głowy dłutaka $h_{a0} = 1.3$,
- kąt zarysu dłutaka $\alpha_{0N} = 20$,
- promień zaokrąglenia głowy dłutaka $\rho_{a0} = 0$.

Wyniki przedstawiono w postaci graficznej na rys. 4.



Rys. 4. Naprężenia w kole zewnętrznie uzębionym $Y_e = f(z)$ dla $x = const$.

- a) dłutak nowy ($x = 0.132$),
 b) dłutak średnio zużyty ($x = 0$),
 c) dłutak krańcowo zużyty ($x = -0.192$)

Fig. 4. Stresses in the external gear $Y_e = f(z)$ for $x = const$.

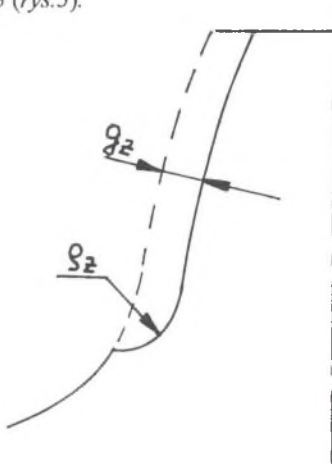
- a) new gear-shaper cutter ($x = 0.132$),
 b) gear-shaper cutter averagely worn out ($x = 0$),
 c) gear-shaper cutter extremely worn out ($x = -0.192$)

Wartości naprężeń dla dłutaka nowego są najmniejsze; ze wzrostem stopnia zużycia dłutaka podczas ostrzenia narzędzia wzrastają naprężenia występujące w stopie zęba po jego rozciąganej stronie. Na zwiększenie naprężeń w podstawie zęba ze wzrostem stopnia zużycia narzędzia decydujący wpływ ma zmniejszenie grubości zęba u podstawy.

3. WPŁYW ZUŻYCIA ZĘBÓW NA WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ W STOPACH ZĘBÓW KÓŁ ZEWNĘTRZNIE UZĘBIONYCH

Ciekawym problemem związanym z eksploatacją kół zębatych w przekładniach jest wpływ zachodzącego zużycia powierzchni roboczych na występujące naprężenia w stopie zęba. W opracowaniu rozważono przypadek naturalnego procesu zużywania się zębów w wyniku ich

współpracy, a w szczególności wpływu tego zużycia na wartości naprężeń występujących w stopie zęba po jego rozciąganej stronie. Obliczenia naprężeń wykonano dla zęba nie zużytego oraz dla 7 wartości głębokości zużycia $g_z \in (0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.12, 0.15)$ oraz wartości promienia zużycia $\rho_z = 0.5$ (rys. 5).



Rys. 5. Parametry zużycia zęba
Fig. 5. Tooth wear parameters

Na podstawie doświadczeń eksploatacyjnych można stwierdzić, że zużycie powierzchni roboczej zębów prowadzi do wystąpienia karbu w skrajnym punkcie przyporu położonym na stopie zęba. Wzrost wartości naprężeń w tym karbie w wyniku zachodzącego tam zużycia w znacznym stopniu odciąża stopę zęba, powodując w niej stopniowy spadek naprężeń ze wzrostem wartości zużycia.

W celu sprawdzenia tego zjawiska przebadano dwa przypadki kół zębatach o następujących parametrach :

$$z_1 = 31, x_1 = 0.5,$$

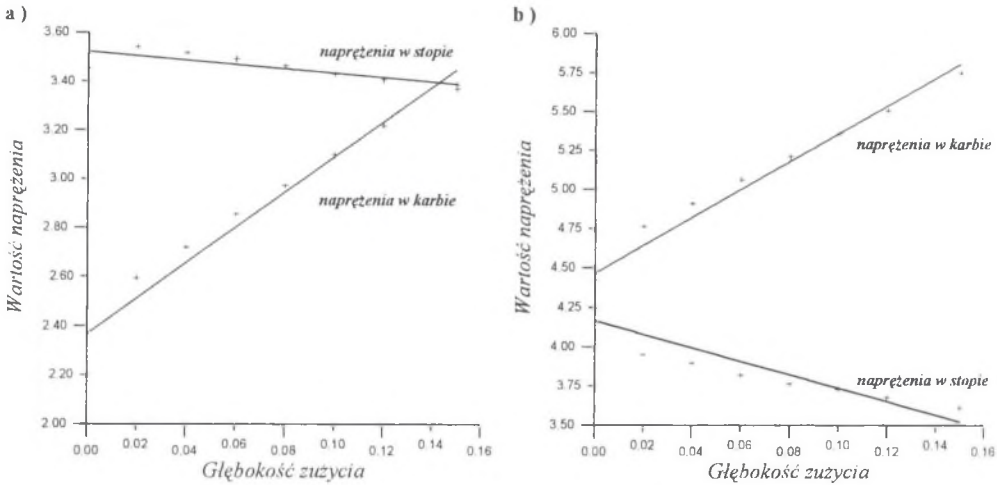
$$z_2 = 31, x_2 = -0.5, \text{ naciętych za pomocą zarysu odniesienia o parametrach :}$$

$$\text{kąt zarysu} \quad \alpha_{on} = 20^\circ,$$

$$\text{wysokość głowy narzędzia} \quad h_{ao} = 1.25,$$

$$\text{promień zaokrąglenia głowy narzędzia} \quad \rho_{ao} = 0.38.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach obrazujących zależność naprężeń w stopie zęba σ_s oraz naprężeń w karbie σ_K w funkcji głębokości zużycia g_z (rys. 6).



Rys. 6. Zależność naprężeń w funkcji głębokości zużycia;

a) $z = 31$, $x = 0,5$, $h_z = 2$, $\rho_z = 0,5$

b) $z = 31$, $x = -0,5$, $h_z = 2$, $\rho_z = 0,5$

Fig. 6. Relationship of stresses in the function of wear depth;

a) $z = 31$, $x = 0,5$, $h_z = 2$, $\rho_z = 0,5$

b) $z = 31$, $x = -0,5$, $h_z = 2$, $\rho_z = 0,5$

Na podstawie otrzymanych wartości naprężeń można stwierdzić następujące prawidłowości dotyczące procesu zużycia kół zewnętrznie zębionych :

- ze wzrostem zużycia można zaobserwować znaczny spadek wartości naprężeń w stopie zęba, przy jednoczesnym wzroście naprężeń w karbie. Spowodowane jest to odciążeniem stopy zęba przez powstający w wyniku zużycia karb, który powoduje znaczne spiętrzenie naprężeń;
- w określonych przypadkach (rys. 6a) karb spowodowany zużyciem zęba spełnia rolę karbu odciążającego, zwiększając wytrzymałość podstawy zęba na złamanie;
- w przypadku przedstawionym na rys. 6b naprężenia w karbie spowodowane zużyciem są większe od naprężeń w stopie i rosną w miarę zużycia. O wytrzymałości zęba decydują w tym przypadku naprężenia w karbie.

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono obliczenia wytrzymałościowe kół zębatach z wykorzystaniem metody elementów brzegowych. W przeprowadzonej analizie numerycznej dotyczącej kół zewnętrznie uzębionych przedstawiono wpływ parametrów nacinanego koła zębatego i narzędzia (zębátky, dłutaka) na wartości naprężeń w stopie zęba po jego rozciąganej stronie. Przeprowadzono również analizę wpływu występującego w kołach zewnętrznie uzębionych zużycia powierzchni roboczych zębów na wartości naprężeń w ich stopach. Wszystkie wyniki zilustrowano w postaci graficznej w formie wykresów. Analiza tych wyników pozwala sformułować następujące wnioski :

1. Stosowanie korekcji jest pod względem wytrzymałościowym szczególnie skuteczne przy małej liczbie zębów w kole ($z \in 12 \div 50$).
2. Dodatnie wartości współczynnika przesunięcia zarysu koła powodują proporcjonalne zmniejszenie naprężeń w stopie zęba, natomiast stosowanie jego ujemnych wartości jest tylko uzasadnione przy dużej liczbie zębów w kole.
3. Wzrost wartości kąta zarysu narzędzia (zębátky) powoduje spadek wartości naprężeń w stopie zęba ze względu na zwiększenie grubości zęba u podstawy.
4. Zmniejszenie wartości promienia zaokrąglenia głowy zębátky powoduje skrócenie krzywej przejściowej w stopie zęba, zmniejszenie grubości zęba u podstawy, co prowadzi do zwiększenia się wartości naprężeń.
5. Wartości naprężeń dla dłutaka nowego są najmniejsze; ze wzrostem stopnia zużycia dłutaka podczas ostrzenia narzędzia wzrastają naprężenia występujące w stopie zęba.
6. Ze wzrostem stopnia zużycia wartości naprężeń w stopie zęba ulegają znacznemu zmniejszeniu przy jednoczesnym ich wzroście w karbie. W określonych przypadkach karb spowodowany zużyciem zęba spełnia rolę karbu odciążającego, zwiększając wytrzymałość podstawy zęba na złamanie.

LITERATURA

1. Brebbia C.A., Dominquez J. : *Boundary Elements - An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications , Southampton and Boston 1989
2. Burczyński T. : *MEB w wybranych zagadnieniach analizy i optymalizacji układów odkształcalnych*. ZN Pol. Śl. s. Mechanika , z. 97, Gliwice 1989
3. Burczyński T., Mrówczyńska B. : *MEB w analizie wytrzymałościowej zębów kół zębatych*. ZN Pol. Śl. s. Transport, z. 9, Gliwice 1989
4. Wilk A., Matyja T., Folęga P. : *Analiza wpływu cech konstrukcyjnych koła wewnętrznie uzębionego i narzędzia na naprężenia w podstawie zęba*. ZN Pol. Śl. s. Transport , z. 28, Gliwice 1996
5. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A. : *Przekładnie walcowe*. WKiŁ , Warszawa 1992
6. Kondo K., Takada J.: *On the bending stress of spur gear by FEM - in relation to effect of stressed volum on the strenght*. International symposium on gearing and power transmission 1981, ss. 129-134
7. Müller L. : *Przekładnie zębate - projektowanie*. WNT , Warszawa 1979
8. Norma GOST 9323 - 60.

Recenzent: Prof. nz. dr hab. inż. Zbigniew Dąbrowski

Wpłynęło do Redakcji: 04.02.1997 r.

Abstract

Application of the Boundary Element Method in numerical analysis of the strength of the wheel gears has been presented in the paper. The influence of construction features of gear wheel and construction features of the tool on values of stresses in the base of external gear tooth has been presented in calculations. Results of the calculations (*Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4*) have been displayed in the form of charts presenting the relationship of dimensionless stresses in the base of the tooth Y_e in the function of the number of wheel's teeth at the assumption of constant values of the addendum modification coefficient of a gear wheel ($Y_e = f(z)$ for

$x = const.$). The achieved results are convergent with the results of the Finished Elements Method calculations [6] ISO standards (*Fig. 1*). The influence of the angle of a tool's profile on the stresses in the base of the gear wheel's tooth has been presented in *Fig. 2*. The increase of the value of the angle of a tool's profile causes the decrease of values of stresses in the tooth's base. The analysis of the charts presented in *Fig. 3* indicates an increase of values of stresses with a decrease of value of the tool's head radius. The influence of the addendum modification coefficient of a gear-shaper cutter on the values of stresses has been illustrated in *Fig. 4*. In case of a new gear-shaper cutter (with the positive value of the addendum modification coefficient) stresses are the smallest and for the gear-shaper cutter that is average or extremely used they gradually increase. Also an analysis of influence of wear use of working surfaces of teeth on values of stresses in their bases has been presented. Parameters of tooth wear are presented in *Fig. 5*. The values of stresses in the tooth base undergo significant decrease with the increase of wear (*Fig. 6*) at their simultaneous increase in the notch. In specific cases (*Fig. 6a*) the notch resulting from wear of tooth plays a role of relieving notch increasing the strength of the tooth base to break. The obtained calculation results shown in the form of graphs facilitate the optimal choice of selected design and process features of the tothing.