

Stanisław Dżula

## ANALITYCZNE MODELE KOŁA I ZESTAWU KOŁOWEGO\*

Dynamiczne zachowanie kół i zestawów kołowych ma istotny wpływ na właściwości układu pojazd-tor. Analiza dynamiczna tradycyjnych modeli pojazdu szynowego pozwala na badanie zjawisk w wąskim zakresie częstotliwości i prędkości. Jest to związane z modelowaniem kół i zestawów kołowych jako brył sztywnych, co wydaje się zbyt daleko idącym uproszczeniem. Niniejsza praca poświęcona jest analitycznym modelom koła i zestawu kołowego jako układów ciągłych. Duża jej część dotyczy omówienia wybranych wyników analizy numerycznej na podstawie, której możliwe jest prognozowanie dynamicznego zachowania się zestawów kołowych w zakresie wysokich częstotliwości i prędkości jazdy.

## ANALYTICAL MODELS OF WHEEL AND WHEELSET

Dynamical behaviour of wheels and wheelsets have a great influence on the properties of vehicle-rail system. Dynamical analysis of traditional models of rail vehicle makes investigation of such phenomenon in only narrow range of frequency and velocity possible. The reason of that is due to the manner of wheels and wheelsets modelling as a rigid body. This approach seems to be too much simplified. In the paper, the analytical models of wheel and wheelset as a continuous systems have been presented. The main part deals with description of selected results of numerical analysis. The analysis makes the forecasting of dynamical behaviour of wheelsets in the range of high frequencies and high velocity possible.

### 1. WSTĘP

W badaniach wielu zjawisk dynamicznego oddziaływania koła i szyny, w których interesują nas głównie wysokoczęstotliwościowe drgania kontaktowe, jako model pojazdu przyjmuje się koło lub zestaw kołowy, na który działa zadane obciążenie statyczne. Jest to uzasadnione tym, że zespoły pojazdu znajdujące się nad usprężynowaniem mają małe wartości częstotliwości drgań własnych (z reguły nie przekraczające kilku Hz) i wzbudzenie ich przez mającą wysoką częstotliwość siły kontaktowe koła i szyny jest trudne [1]. Stwierdzenie to jest słuszne przy

założeniu, że zespoły te traktuje się jako bryły sztywne. W rzeczywistości rama wózka i nadwozie jako zespoły o rozłożonej masie i sztywności mają nieskończoną liczbę stopni swobody, a zatem istnieje możliwość wzbudzenia wysokoczęstotliwościowych drgań elementów usprężynowanych. Jak wykazano w [2] już częstotliwość pierwszej formy drgań giętnych wózka wagonu towarowego wynosi w zależności od stopnia załadowania wagonu kilkanaście do kilkudziesięciu Hz, a drugiej i trzeciej formy drgań kilkaset Hz. W związku z tym model podukładu, złożonego z koła lub zestawu kołowego współpracującego z szynami może być wykorzystany w analizie dynamicznej, polegającej na wyznaczeniu widma częstości siły kontaktowej lub widma przemieszczeń. Uzyskane w ten sposób widmo wymuszenia dynamicznego lub kinematycznego jest podstawą do zbudowania bardziej złożonego modelu pojazdu poprzez jego częściową dyskretyzację.

W badaniach dynamiki układu koło-szyna, z wykorzystaniem modelu w postaci koła obciążonego pionową siłą statyczną, zwykle zakłada się, że koło jest idealnie sztywne z ewentualnym elementem sprężystym, tzw. sprężyną Hertza o charakterystyce liniowej lub nieliniowej, modelującej lokalne odkształcenia sprężyste w obszarze styku. Takie podejście do zagadnienia dynamicznego oddziaływania koła z szyną spotyka się w wielu pracach, np. [1], [3], [4], [5]. Jak podano w [4], w zakresie niskich częstotliwości drgań (poniżej 30 Hz), a nawet do ok. 100 Hz [6], koło może być modelowane jako ciało idealnie sztywne, zaś powyżej tej granicy należy uzupełnić model "sprężyną Hertza". Częstotliwość 100 Hz przyjmowana również jako umowna granica między drganiami niskiej i wysokiej częstotliwości wydaje się być zbyt wysoka dla modelu sztywnego koła. Wyznaczona w badaniach eksperymentalnych najniższa częstotliwość drgań własnych koła pojazdów kolei brytyjskich wynosi ok. 70 Hz [3].

Model sztywnego koła upraszcza w znaczny sposób analizę dynamiczną, jednakże może być wykorzystany w ograniczonym zakresie, np. do badania wpływu drgań na organizm ludzki. Zakres częstotliwości analizowany pod względem komfortu jazdy zawiera się w paśmie do 20 Hz [6].

Jest oczywiste, że przy dostatecznie wysokich częstotliwościach drgań również model ze "sprężyną Hertza" nie umożliwia opisu z wystarczającą dokładnością zjawisk zachodzących w strefie kontaktu koła z szyną. Granica stosowności tego modelu jest określona przez najniższą wartość częstotliwości drgań własnych. Częstotliwość ta jest związana z drganiami giętnymi nie leżącymi w płaszczyźnie koła i jej wartość zależy od konstrukcji koła, a przede wszystkim od grubości tarczy i wieńca oraz średnicy koła. Dolną wartość częstotliwości drgań giętnych dla kół kolejowych można przyjąć w granicach 70÷80 Hz, jakkolwiek dla konkretnej konstrukcji koła wartość tej częstotliwości może być dwa lub trzy razy wyższa.

Granice stosowności modelu "sztywnego koła" stały się impulsem do podjęcia prac nad dynamicznym modelem koła, który uwzględniłby jego odkształcenia sprężyste oraz umożliwił badanie stateczności ruchu w zakresie wysokich częstotliwości. Jednym ze sposobów analizy tego zagadnienia jest wykorzystanie metody elementów skończonych (MES). W zagadnieniach dynamiki koła może to być związane z trudnościami natury technicznej oraz z trudnościami związanymi z interpretacją otrzymanych wyników numerycznych. Szczególnie dotyczy to ciągłych układów mechanicznych, w których częstotliwości drgań własnych różnią się nieznacznie. Problem taki występuje przy badaniu stateczności ruchu [7] oraz analizie bifurkacji drgań. Bifurkacja drgań pojawia się w układach wirujących, jak np. koło samochodowe [8] lub koło kolejowe [9], [10]. Stąd też stosowanie MES w zagadnieniach dynamicznych wymaga dużej dokładności numerycznej, co wiąże się z wydłużeniem procesu obliczeń. Niemniej jednak z uwagi na znaczne założenia upraszczające w istniejących analitycznych modelach sprężystego koła kolejowego, np. [3], [11], MES jest szeroko wykorzystywana w problemach wysokoczęstotliwościowych drgań kontaktowych.

Metoda ta stwarza możliwość uwzględnienia specyficznych parametrów geometrycznych koła, jak np. zmienną grubość tarczy i jej krzywizny, które analitycznie są trudne do modelowania. MES stosowana jest głównie do wyznaczania częstotliwości drgań własnych kół lub zestawów, wyznaczenia charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych oraz w badaniach emisji hałasu wywołanego przez toczące się koła. Literatura z tego zakresu jest tak obszerna, że cytowanie jej wykracza poza ramy artykułu.

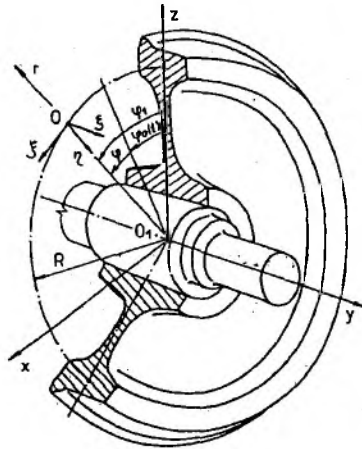
Celem niniejszej pracy jest prezentacja analitycznych modeli koła i zestawu kołowego oraz wyników analizy dynamicznej przeprowadzonej przy wykorzystaniu tych modeli.

## 2. MODEL WIRUJĄCEGO KOŁA

### 2. 1. Fizyczny model koła

Wieniec koła kolejowego jest modelowany jako sprężysta zakrzywiona belka Rayleigha, połączona z osią ciągłym inercyjnym podłożem sprężystym typu Winklera. Podłoże sprężyste tworzy tarczę koła. Na rys.1 pokazano układy współrzędnych wykorzystywanych do matematycznego opisu modelu:

- biegunowy układ współrzędnych  $r, \varphi$  o biegunie w środku koła  $O$ , sztywno związany z wirującym kołem; w układzie tym opisuje się geometryczną oś wieńca koła,
- biegunowy układ współrzędnych  $r, \varphi$ , o biegunie w środku koła; wykorzystywany do opisu ruchu obrotowego koła,
- prostokątny prawoskrętny układ  $\xi, \eta, \zeta$ , którego początek  $O$  leży na geometrycznej osi wieńca, a jego początek określony jest zmienną przestrzenną  $\varphi$  lub  $\varphi_i$ ; osie  $\xi, \eta, \zeta$  są lokalnie styczne, normalne i binormalne do osi wieńca; wykorzystywany do opisu przemieszczeń, sił wewnętrznych i kształtu przekroju poprzecznego wieńca.



Rys.1. Układy współrzędnych  
Fig.1. Coordinate systems

Przez geometryczną oś wieńca rozumie się miejsce geometryczne środków ciężkości przekrojów poprzecznych nieodkształconego wieńca koła.

## 2.2. Matematyczny model koła

Układ sprzężonych równań różniczkowych opisujących w układzie  $r, \varphi$  drgania swobodne wieńca koła wirującego z prędkością  $\dot{\varphi}_0$  ma postać [9]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -m_1 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + m_2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + m_3 u \right) - 2\dot{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial t} (m_4 v + s_1 \vartheta) - k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (k_2 v - k_3 w) + k_4 u = Rq_\xi + \\ & \hspace{20em} - s_7 \dot{\varphi}_0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (m_5 v + m_6 w) - m_7 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - m_8 v - s_2 \vartheta \right] + 2\dot{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_9 v - m_{10} w - s_3 \vartheta) - m_{11} \right. \\ & \left. - k_5 \left( \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + v \right) - k_6 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (k_7 v + k_8 w + t_1 \vartheta) + k_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - k_9 v + t_2 \vartheta \right] = -Rq_\eta + \frac{\partial m_\zeta}{\partial \varphi} + s_8 \\ & \hspace{20em} (1) \\ & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (m_{12} v + m_{13} w) + m_{14} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - m_{15} w - s_4 \vartheta \right] - 2\dot{\varphi}_0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial t} (m_{16} v + s_5 \vartheta) - \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} (k_6 v + k_{10} w) + \\ & \hspace{10em} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (k_8 v + k_{11} w + t_3 \vartheta) - k_3 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - k_{12} w - t_4 \vartheta = -Rq_\zeta - \frac{\partial m}{\partial \varphi} \\ & \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m_{17} v + m_{18} w + s_6 \vartheta) + 2\dot{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_{12} v + m_{13} w) + m_{14} u \right] - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (k_6 v + k_{13} w + t_5 \vartheta) - k_{14} v + k \\ & \hspace{15em} + t_6 \vartheta = m_\xi - s_9 \dot{\varphi}_0^2, \end{aligned}$$

gdzie:

$u, v, w$  - przemieszczenie punktu  $O$  odpowiednio wzdłuż osi  $\xi, \eta, \zeta$ ,

$\vartheta$  - kąt obrotu przekroju poprzecznego wieńca względem osi  $\xi$ ,

$m_p, s_i$  - zredukowane masy i momenty masowe wieńca i tarczy koła [12],

$k_i, t_j$  - zredukowane sztywności wieńca i tarczy koła [12],

$q_\xi, q_\eta, q_\zeta, m_\xi, m_\eta, m_\zeta$  - zewnętrzne ciągle liniowe obciążenie osi wieńca.

Pierwsze równanie układu (1) opisuje drgania podłużne (obwodowe) osi wieńca; drugie - drgania giętne w płaszczyźnie koła (radialne); trzecie - drgania giętne z płaszczyzny koła; czwarte - drgania skrętne wieńca. Równania te są sprzężone siłami sprężystości i siłami bezwładności. Siły bezwładności powodujące sprzężenie drgań wynikają z asymetrycznego przekroju poprzecznego wieńca oraz przyspieszenia Coriolisa. Pierwsze dwa równania opisują drgania w płaszczyźnie koła, drugie dwa drgania z płaszczyzny koła.

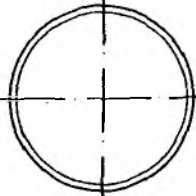
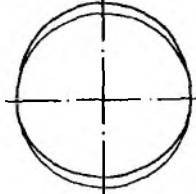
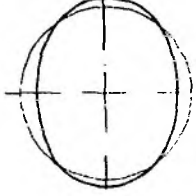
## 3. PRZYKŁADY ANALIZY NUMERYCZNEJ WIRUJĄCEGO KOŁA

### 3.1. Częstotliwości i amplitudy drgań własnych

Dla  $\dot{\varphi}_0 = \text{const.}$  równania (1) są układem równań różniczkowych o stałych współczynnikach. W związku z tym rozwiązania problemu brzegowo-początkowego jednorodnego układu (1) można szukać metodą Fouriera i w efekcie uzyskać rozwiązania

ściśle. Dla trzech pierwszych form drgań w tabeli 1 podano wyniki obliczeń numerycznych częstotliwości drgań własnych koła o średnicy nominalnej 0.95 m i grubości wieńca 0.05 m. Obliczenia wykonano dla prędkości kątowych koła  $\phi_0$ , którym w ruchu tocznym odpowiadają prędkości liniowe 0, 100, 200, 300 km/h.

Tabela 1

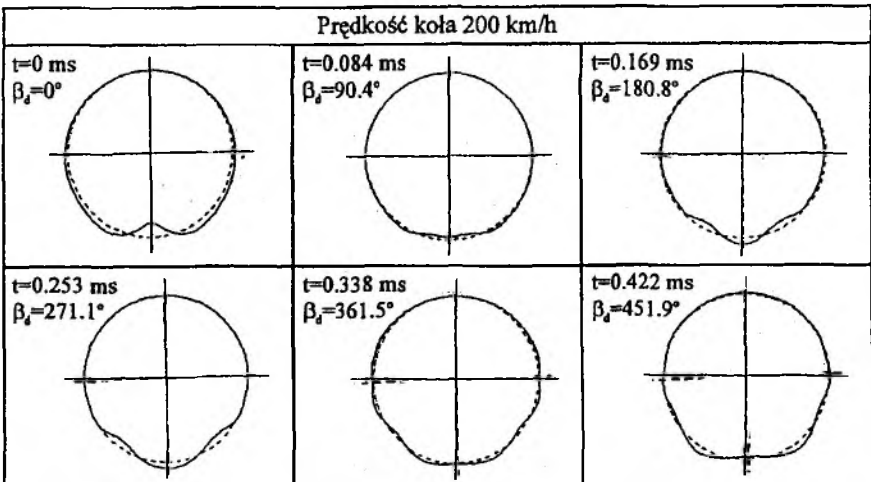
Nr formy	Forma drgań własnych	Częstotliwość [Hz] przy prędkości V[km/h]			
		0	100	200	300
0		90.06	90.06	90.06	90.06
		586.21	586.20	586.15	586.08
		1520.17	1520.17	1520.18	1520.20
		2748.69	2748.75	2748.94	2749.25
1		94.78	94.66 94.91	94.54 95.03	94.41 95.16
		1282.29	1276.17 1288.40	1270.04 1294.50	1263.91 1300.59
		1679.59	1678.98 1680.20	1678.38 1680.83	1677.80 1681.47
		2959.74	2953.59 2965.98	2947.52 2972.31	2941.54 2979.72
		307.98	307.29 308.67	306.60 309.36	305.91 310.05
2		1709.48	1705.32 1713.56	1701.07 1717.54	1696.73 1721.44
		2102.49	2097.52 2107.59	2092.69 2112.82	2088.00 2118.19
		3892.43	3883.89 3901.00	3875.37 3909.58	3866.87 3918.19

W tabeli 2 podano wartości amplitud drgań harmonicznycch dla prędkości 200 km/h. Warunki początkowe przyjęte w obliczeniach odpowiadają odkształceniom koła pod działaniem skupionej siły radialnej  $P=1$  N, działającej w chwili  $t=0$  na tocznym okręgu koła.

Z tabeli 1 wynika,  $\phi_0 = 0$  że dla każdej formie drgań odpowiadają cztery wartości częstotliwości. Dla formy drgań z zerową liczbą średnic węzłowych występuje rozprężenie drgań obwodowych z pozostałymi rodzajami drgań. Drgania podłużne wieńca są niezależne od drgań giętych i skrętnych. Ruch obrotowy koła powoduje bifurkację drgań, skutkiem której jest podwojenie się z wyjątkiem formy "zerowej" liczby częstotliwości drgań własnych. Bifurkacja drgań w kole związana jest z propagacją fal sprężystych zgodnie i przeciwnie do kierunku obrotów koła.

Tabela 2

Nr formy n	Prędkość koła V=200 km/h								
	Częstotliwość [Hz]	Amplituda dla drgań							
		$\times 10^{-11}$ [m/N]						$\times 10^{-10}$ [rad/N]	
		podłużnych (obwodowych)		giętych (radialnych)		giętych (z płaszcz. koła)		skretnych wieńca	
0	90.06	0.000	-	0.000	-	0.408	-	-0.001	-
	586.15	0.627	-	-0.002	-	0.000	-	-0.002	-
	1520.18	0.003	-	0.124	-	-0.068	-	1.409	-
	2748.94	0.132	-	8.986	-	0.155	-	-3.190	-
1	94.54	0.420	-0.420	-0.417	-0.417	19.765	19.765	-4.150	-4.150
	95.03	0.412	0.412	0.409	-0.409	-19.464	19.464	4.077	-4.077
	1270.04	6.261	-6.261	-3.160	-3.160	-0.147	-0.147	-7.081	-7.081
	1294.50	5.924	5.924	2.954	-2.954	0.115	-0.115	7.018	-7.018
	1678.38	0.984	-0.984	-0.046	-0.046	-0.045	-0.045	5.106	5.106
	1680.83	1.039	1.039	0.052	-0.052	0.052	-0.052	-5.065	5.065
	2947.52	1.483	1.483	-3.329	3.329	-0.035	0.035	0.907	-0.907
2972.31	1.534	-1.534	3.240	3.240	0.032	0.032	-0.851	-0.851	
2	306.60	0.172	-0.172	-0.337	-0.337	5.655	5.655	-3.316	-3.316
	309.36	0.166	0.166	0.326	-0.326	-5.509	5.509	3.219	-3.219
	1701.07	2.184	-2.184	-3.250	-3.250	-0.981	-0.981	-8.837	-8.837
	1717.54	1.935	1.935	2.928	-2.928	0.904	-0.904	8.599	-8.599
	2092.69	2.066	-2.066	-2.470	-2.470	0.465	0.465	8.119	8.119
	2112.82	2.219	2.219	2.703	-2.703	-0.420	0.420	-7.904	7.904
	3875.37	1.070	1.070	-0.856	0.856	-0.006	0.006	0.051	-0.051
	3909.58	1.068	-1.068	0.858	0.858	0.006	0.006	-0.048	-0.048



Rys.2. Propagacja paczek fal  
 Fig.2. Propagation of wave packets

### 3.2. Fale sprężyste w wieńcu koła

Metoda Fouriera w zastosowaniu do układów ciągłych pozwala zwykle uzyskać rozwiązanie w postaci fal stojących. Niemniej jednak wykorzystując zależności wynikające z wyznacznika charakterystycznego układu równań (1) można z tej formy rozwiązania otrzymać rozwiązanie w postaci fal biegnących.

Na rys.2 dla prędkości 200 km/h przedstawiono rozchodzenie się paczki fal giętych składającej się z fal monochromatycznych o liczbach falowych od 1 do 50. Czas  $t$ , po którym przedstawiono na kolejnych rysunkach bieżące położenie paczki fal, wyliczono z warunku, iż przy prędkości fala harmoniczna o największej prędkości fazowej przebyła drogę  $\beta_s = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  i  $450^\circ$ . Przerzywane osie symetrii obrazują obrót koła po czasie  $t$ . Fale wzbudzone są warunkami początkowymi jak w punkcie 3.1

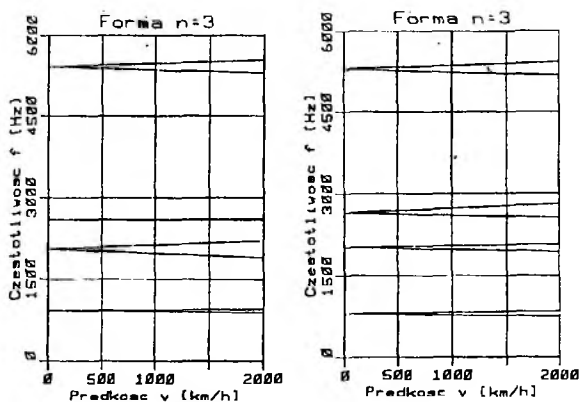
Każda fala monochromatyczna ma osiem prędkości fazowych, cztery o zwrocie zgodnym i cztery o zwrocie przeciwnym do zwrotu kątowej prędkości koła. Oznacza to, że propagacja fal następuje w kierunkach o przeciwnych zwrotach, przy czym dla  $\phi_0 = 0$  występuje pełna symetria co do wartości prędkości fazowych, a w przypadku symetrycznych warunków początkowych również co do wartości amplitud. Ruch obrotowy koła powoduje naruszenie symetrii propagacji fal sprężystych w wyniku pojawienia się sił bezwładności związanych z przyspieszeniem Coriolisa. Prędkości grupowe paczek fal o przeciwnych zwrotach są różne i zależne od prędkości wirowania koła. Wynika stąd, że w kole wirującym nie mogą powstać fale stojące. Szczegółowo problem fal sprężystych w wieńcu koła kolejowego był omawiany w pracach [10] i [13].

### 3.3. Bifurkacja i efekt dudnienia w kole

Bifurkacja drgań w wirującym kole powoduje podwojenie się liczby częstotliwości dla każdej formy drgań z wyjątkiem formy zerowej. Jedna z częstotliwości ma wartość niższą, a druga wyższą w porównaniu do częstotliwości dla koła nieruchomego. Może zatem istnieć taka prędkość koła, przy której dwie częstotliwości tej samej formy drgań mają identyczną wartość. Z fizycznego punktu widzenia oznacza to, że może nastąpić utrata stateczności drgającego układu. Prędkość, przy której występuje to zjawisko, jest krytyczną prędkością koła.

Na rys.3 przykładowo zilustrowano dla formy drgań  $n=3$  (trzy średnice węzłowe) bifurkację częstotliwości w kole. Obliczenia wykonano dla koła o średnicy nominalnej 0.95 m oraz grubości wieńca 0.05 m (wykres lewy) i 0.03 m (wykres prawy).

Wyniki obliczeń wskazują, że utrata stateczności koła może wystąpić w zakresie bardzo dużych prędkości, których osiągnięcie w praktyce jest niemożliwe. Należy jednak zwrócić uwagę, że na wartości częstotliwości mają wpływ materiały konstrukcyjne i sama konstrukcja koła. Stąd też dla każdego koła, a w szczególności dla kół, których konstrukcja odbiega od kół aktualnie stosowanych, warunek stateczności powinien być sprawdzony. W pracy [14] podano wyniki obliczeń dla koła o średnicy 0.92 m i stwierdzono, że dla formy  $n=5$  prędkość ok. 500 km/h jest prędkością krytyczną. Jest to już prędkość, którą osiągają najszybsze doświadczalne pociągi świata.



Rys.3. Bifurkacja częstotliwości w wirującym kole  
Fig.3. Bifurcation in rotating railway wheel

Jak wynika z rys.3, bifurkacja drgań powoduje, że w układzie pojawiają się częstotliwości, których różnice wartości dla realnych prędkości jazdy są nieznaczne. Jest to przyczyną występowania w kole efektu dudnienia. Podobne zjawisko występuje w szynie kolejowej [15]. Z analizy [12] wynika, że częstotliwość drgań niematerialnego punktu leżącego na osi wieńca nad punktem kontaktu z szyną jest niezależna od prędkości kątowej koła. Natomiast wprost proporcjonalnie od prędkości zależna jest częstotliwość dudnienia. Wynika stąd, że droga, jaką przebywa koło w czasie jednego okresu dudnienia, nie zależy od prędkości. Podczas eksploatacji pojazdów szynowych występują takie grubości wieńca, przy których droga przebyta przez koło w czasie jednego okresu dudnienia jest dokładnie wielokrotnością obwodu koła. Powoduje to, że w układzie dynamicznym koło-szyna powstają potencjalne warunki poligonizacji kół, a w tym również owalizacji.

### 3.4. Drgania wymuszone koła

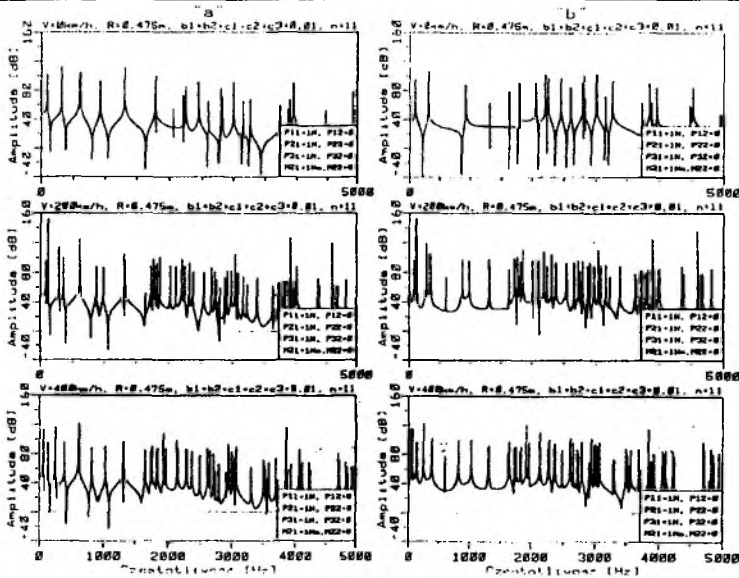
Ścisłe rozwiązanie drgań wymuszonych wirującego koła uzyskano dla wymuszeń harmoniczných działających w punkcie kontaktu koła z szyną przy uwzględnieniu tłumienia drgań wywołanego tarciem wewnętrznym.

Lepkie właściwości koła opisano pięcioma różnymi współczynnikami tłumienia wewnętrznego. Dwa z nich odnoszą się do materiału wieńca, a pozostałe do materiału tarczy. Wymuszenie drgań może być zadane jako równoczesne działanie siły obwodowej, radialnej, poprzecznej i momentu wiertnego. Dodatkowo siły wymuszające mogą występować z różną fazą.

Na rys. 4 podano przykładowe wyniki obliczeń drgań wymuszonych w formie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych: "a"-drżania obwodowe, "b"-drżania radialne. Charakterystyki wykonano przy wymuszeniu w postaci równoczesnego działania momentu spinu i sił w trzech kierunkach. Fazy początkowe sił wymuszających są takie same.

Na powyższych wykresach widoczny jest wyraźny wpływ prędkości obrotowej koła, wyrażający się dwukrotnym wzrostem liczby częstotliwości rezonansowych.





Rys.4. Drgania wymuszone wirującego koła kolejowego  
 Fig.4. Forced vibrations of rotating railway wheel

#### 4. MODEL ZESTAWU KOŁOWEGO W RUCHU TOCZNYM

##### 4.1. Fizyczny model zestawu

Model zestawu składa się z dwóch sprężystych kół (modelowanych jak w punkcie 2) połączonych sztywną osią (na tym etapie badań). Zakłada się punktowe oddziaływanie kół z szynami modelując je liniowymi sprężynami Hertza, przenoszącymi obciążenie w trzech kierunkach oraz obciążenie wynikające z ruchu wiernego kół na szynach. Zestaw kołowy toczy się w torze prostym bez poślizgu.

##### 4.2. Model matematyczny zestawu

Pełny opis matematyczny drgań zestawu kołowego stanowi układ 14 nieliniowych, sprzężonych równań różniczkowo-całkowych, przy czym równania różniczkowe są równaniami cząstkowymi. Poszczególne równania układu opisują:

- drgania kół (po 4 równania dla każdego koła),
- drgania środka masy zestawu kołowego (3 równania),
- drgania w ruchu kulistym wokół środka masy zestawu (3 równania).

Ścisłe rozwiązanie układu równań opisującego dynamikę zestawu w zakresie nieliniowym nie jest możliwe. Można je uzyskać w zakresie liniowym drgań przy dodatkowych założeniach, np.  $V=const$ . Wybrane wyniki analizy dynamicznej podane w punkcie następnym odnoszą się do zakresu liniowego.

Z uwagi na ograniczenia niniejszego artykułu prezentacja pełnego modelu zestawu nie jest możliwa. Szczegóły są dostępne w pracy [12].

## 5. PRZYKŁADY ANALIZY NUMERYCZNEJ ZESTAWU W RUCHU TOCZNYM

### 5.1. Częstotliwości drgań własnych

Stosując metodę Fouriera można uzyskać rozwiązanie problemu brzegowego układu równań opisującego dynamikę zestawu. W tabeli 3, dla prędkości  $V=0$  i  $80$  km/h oraz sztywności sprężyny Hertza  $k_H = 1.5$  GN/m, podano wartości 10 pierwszych częstotliwości dla różnych form drgań (S-S, S-A, A-S, A-A) zestawu z kołami o średnicy  $0.95$  m. Forma drgań zestawu, np. S-A oznacza, że drgania wieńców leżące w płaszczyźnie koła (podłużne i radialne) są symetryczne względem płaszczyzny symetrii zestawu (S), a drgania wieńców nie leżące w płaszczyźnie koła (giętne z płaszczyzny koła i skrętne) są antymetryczne (A). Każda z form drgań zestawu kołowego S-S, S-A, A-S, A-A tworzy zbiór o nieskończonej liczbie elementów. Elementy zbiorów różnią się między sobą formą drgań kół, a te z kolei określone są liczbą średnic węzłowych  $n$ .

Należy zwrócić uwagę na to, że dla wirującego koła każdej formie drgań odpowiada skończona liczba częstotliwości o różnych wartościach. Natomiast dla zestawu kołowego współpracującego z torem niezależnie od formy jego drgań (S-S, S-A, A-S, A-A) każdą formę drgań koła charakteryzują te same częstotliwości, ale ich liczba w ogólnym przypadku zmierza do nieskończoności.

### 5.2. Stabilność tocznego ruchu zestawu kołowego

Otrzymany w wyniku rozwiązania zagadnienia brzegowego wyznacznik charakterystyczny stanowi podstawę badania stabilności ruchu zestawu. Stabilność ta analizowana była w zależności od prędkości  $V$  [7], [16]. Na rys. 5 w układzie sztywność sprężyny Hertza - prędkość zilustrowano wyniki obliczeń numerycznych obszarów niestabilnego ruchu po torze zestawu kołowego o masie  $1200$  kg z kołami o średnicy nominalnej  $0.95$  m.

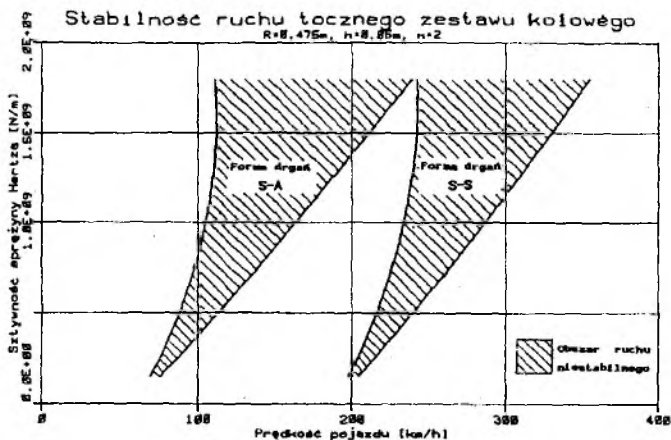
Przyczyną niestabilnego ruchu zestawu jest, podobnie jak w przypadku flatteru, przekazanie energii doprowadzonej do układu zapewniającej  $V=\text{const.}$  na drgania samowzbućne. W układzie rzeczywistym zestaw kołowy poddany jest działaniu elementów wózka i tłumików, co w realnych nieliniowych układach prowadzi do cykli granicznych [15].

Niestabilność tocznego ruchu zestawu kołowego objawia się narastającymi drganiami w płaszczyźnie poziomej i pionowej. Dla formy S-S będzie to podskakiwanie zestawu, dla S-A podskakiwanie i wężykowanie dynamiczne, dla A-S kołysanie i wężykowanie kinematyczne, dla A-A kołysanie i wężykowanie dynamiczne połączone z wężykowaniem kinematycznym.

Być może uwzględnienie w dalszych badaniach sprężystości osi oraz poślizgów w kontakcie koła z szyną pozwoli wyjaśnić dynamiczną przyczynę korugacji szyn i kół.

Tabela 3

Lp.	Częstotliwość drgań własnych zestawu kołowego [Hz]							
	V = 0 km/h				V = 80 km/h			
	S-S	S-A	A-S	A-A	S-S	S-A	A-S	A-A
1	91.65	34.61	91.41	34.52	88.84	34.47	88.50	34.37
2	95.30	95.29	95.60	94.09	97.85	94.64	97.24	93.48
3	201.14	119.61	206.19	119.42	201.13	120.11	206.06	119.88
4	239.49	201.01	248.11	216.95	238.04	201.01	244.78	216.74
5	262.60	236.01	255.68	240.55	262.64	234.80	257.29	239.04
6	275.16	263.11	265.61	266.19	275.16	263.10	266.35	266.54
7	282.63	294.50	275.16	275.16	279.55	291.67	275.16	275.16
8	282.64	299.12	276.81	275.16	285.76	301.73	276.77	275.16
9	308.61	308.60	308.63	308.61	309.88	309.93	309.67	309.87
10	689.32	689.91	688.54	689.10	688.65	689.24	687.88	688.43



Rys.5. Obszary niestabilnego ruchu zestawu kołowego  
Fig. 5. Unstable motion of the wheelset

## 6. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w pracy ciągłe modele wirującego koła i zestawu z odkształcalnymi kołami umożliwiają badanie dynamiki tych układów w zakresie liniowym w oparciu o rozwiązania ścisłe. Równocześnie wyprowadzone równania mogą stanowić podstawę do numerycznej analizy dynamiki w sformułowaniu nieliniowym.

Należy zaznaczyć, że z wyjątkiem badań stabilności czas maszynowy przedstawionych obliczeń numerycznych (PC 486 z zegarem 50 MHz) wynosi kilkanaście sekund do minuty. Sporządzenie wykresu jak na rys.5 wymaga czasu pracy komputera liczonego w godzinach.

## Literatura

- [1] Clarc R.A., Dean P.A., Elkins J.A., Newton S.G.: An investigation into the dynamic effects of railway vehicles running on corrugated rails. *Journal Mechanical Engineering Science*, Vol 24, no 2, 1982, p.65-76.
- [2] Chudzikiewicz A., Drożdźiel J., Kisilowski J., Żochowski A.: Modelowanie i analiza dynamiki układu mechanicznego tor-pojazd. PWN, Warszawa 1982.
- [3] Grassie S.L., Gregory R.W., Johnson K.L.: The behaviour of railway wheelset and track at high frequencies of excitation. *Journal Mechanical Engineering Science*, Vol 24, no 2, 1982, p.103-111.
- [4] Nayak P.R.: Contact vibrations of a wheel on a rail. *Journal of Sound and Vibrations*, no 28, 1973, p.277-293.
- [5] Grassie S.L., Knothe K.: Modelling of railway and vehicle/track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics*, Vol 22, no 3-4, 1993, p.209-262.
- [6] Nefzger A.: Współpraca koła z szyną przy dużych prędkościach jazdy. *Pojazdy Szynowe*, nr 3, 1980, s.32-45.
- [7] Bogacz R., Dżuła S.: Dynamics and stability of a wheelset in rolling contact motion on rails. *International Symposium on Technological Innovation in Guided Transport*, Lille - France, 1993, p.871-883.
- [8] Krapf K.G.: Der elastisch gebettete Kreisring als Model für den Gürtelreifen. Dissertation TH, Darmstadt 1979.
- [9] Dżuła S.: Die Schwingungsanalyse des Eisenbahnrades mit der Anwendung der Theorie gekrümmten Stäbe. *Z. angew. Math. Mech.*, nr 72(4), 1992, s.T87-T91.
- [10] Dżuła S.: Elastic waves in rotating railway wheel. *Periodica Polytechnica Ser. Transp. Eng.*, Vol 21, nr 1, Budapest 1993, p.65-88.
- [11] Brommundt E.: Oscillations and stability of a wheel rolling on a flexible rail. 2<sup>nd</sup> German-Polish Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems, Eds. R.Bogacz, J.Lüchel, K.Popp, Padeborn 1991, p.63-75.
- [12] Dżuła S.: Dynamika wirującego koła i zestawu kołowego modelowanych układami ciągłymi. Monografia nr 186, Pol. Krakowska, 1995.
- [13] Dżuła S.: propagacja sprężystych fal podłużnych, poprzecznych i skrętnych w wieńcu wirującego koła. X Konf. Pojazdy Szynowe, Wrocław 1994, s.97-110.
- [14] Dżuła S.: Critical velocities of a railway wheel. *Noise Control* 92, Kraków 1992, p. 297-300.
- [15] Bogacz R., Krzyżyński T.: O stateczności ruchu układu dyskretnego wzdłuż układu ciągłego modelowanego belką Timoshenki. *Czas. Technicz. Pol. Krak.* "Mechanika", nr 2-M, 1991, s.3-53.

- [16] Bogacz R., Meinke P., Dżuła S.: Vehicle/track-dynamics interaction for high-speed frequency range. 3<sup>th</sup> Polish-German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems, Wierzbica 1993, p.165-179.

\*Praca finansowana z grantu KBN PB 0737/P4/94/06

Recenzent: dr hab. inż. prof. Pol. Śl. Andrzej Wilk

Wpłynęło do redakcji: 02.06.1995

### Abstract

Dynamical behaviour of wheels and wheelsets have a great influence on the properties of vehicle-rail system. Dynamical analysis of traditional models of rail vehicle makes investigation of such phenomenon in only narrow range of frequency and velocity possible. The reason of that is due to the manner of wheels and wheelsets modelling as a rigid body. This approach seems to be too much simplified. In the paper, the analytical models of wheel and wheelset as a continuous systems have been presented. The main part deals with description of selected results of numerical analysis. The analysis makes the forecasting of dynamical behaviour of wheelsets in the range of high frequencies and high velocity possible.

The analytical solution of the boundary problem of vibration equations of rotating wheel has enabled determination of the modes of free vibrations and for the mode - its frequency. It has been proved that angular velocity causes bifurcation phenomenon in a wheel, which is an effect of beat of deep amplitude modulation in a wheel.

On the basis of the solution of boundary - initial problem of equations system describing wheel vibrations analytical solution of running waves in a wheel tyre has been obtained.

The excited vibrations of rotating wheel has been analysed concerning internal friction basing on visco-elastic Kelvin-Voigt model. The model enables to determine amplitude-frequency characteristics for every point of the cross-sections of a tyre for any exciting harmonic forces.

The analysis of dynamics of a wheelset in rolling motion without slide has been carried out on the basis of the model consisting of the system of two elastic wheels connected by a rigid axle. One point interaction between a wheel and a rail has been assumed, modelled by linear Hertz spring. The stability investigations have proved that in the high frequency range of vibrations there are large velocity zones of unstable wheelset motion.