ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: TRANSPORT z. 5 Nr kol. 873

Wacław ZABRZEWSKI
Instytut Transportu Kolejowego
Politechniki Śląskiej

NIEKTÓRE PROBLEMY MODELOWANIA TOPOLOGII TRANSPORTU ZBIOROWEGO

Streszczenie. W artykule podejmuje się problem wykorzystania niektórych metod matematycznych do opisania struktury topologicznej transportu zbiorowego. Przede wszystkim oparto się na teorii grafów i sieci. Opracowano podstawowy model matematyczny topolgii miejskiej sieci drogowej w postaci grafu, w którym wprowadzono numerację topologiczną. Przedstawiono również w sposób stosunkowo przejrzysty interpretację geometryczną modelu na płaszczyźnie. Następnie teoria grafów i sieci została adoptowana do specyfiki techniki komputerowej. Przy umieszczaniu modelu w pamięci komputera wykorzystano jego numeryczne odwzorowanie w uporządkowanej leksykograficznie liście incydencji. Na tej bazie opracowano algorytm numeryczny poszukujący przy zadanych kryteriach ścieżki metodą przeszukiwania grafu. Zamieszczono go w przetestowanej procedurze. Pozwala ona na stosunkowo łatwe i szybkie ustalanie optymalnych tras przemieszczania się jednostek transportu zbiorowego w dużych aglomeracjach. Model może zostać rozbudowany do postaci sieci, której właściwości oraz szerokie możliwości zastosowania w pracy transportu zbiorowego przedstawiono w zakończeniu artykułu.

1. Wprowadzenie

Informatyka umożliwia efektywne wykorzystanie komputerów do analizy i projektowania różnych dziedzin działalności ludzkiej. Wydaje się, że również efektywną dziedziną jej zastosowania będzie transport w wielkich aglomeracjach miejskich. Ze względu na nadmierny ruch pojazdów, niedobory obsady kadrowej i komplikowanie się procesów podejmowania decyzji przez dyspozytorów itp. wykorzystanie zdobyczy współczesnej informatyki do kierowania ruchem, jak i projektowania nowych połączeń drogowych jest niezmiernie ważne dla pracy transportu. Aby rozwiązać te problemy za pomocą technik komputerowych, trzeba uprzednio opracować odpowiednie modele matematyczne oraz systemy przetwarzania informacji charakteryzujących właściwości ruchowo-techniczne elementów sieci transportowej i znajdujących się na niej obiektów.

2. Ogólna charakterystyka modelu

Podstawowym modelem matematycznym, który może być do realizacji wymienionych zadań wykorzystany, jest graf. Składa się on ze zbioru wierzchołków W oraz zbioru gałęzi U. Aby go zdefiniować, należy podać zbiór jego wierzchołków, zbiór gałęzi oraz relację R[x], będącą podzbiorem produktu kartezjańskiego. Zatem graf abstrakcyjny tworzy trójkę uporządkowaną $G = [W, U, R]$, gdzie [2]:

W - zbiór wierzchołków grafu,

U - zbiór gałęzi grafu,

R - relacja incydencji $R \subset W \times U \times W$ i spełniająca warunki:

a) dla każdej gałęzi $u \in U$ istnieje taka para wierzchołków $x, y \in W$, że $(x,u,y) \in R$,

b) jeżeli dla gałęzi $u \in U$ istnieją $(x,u,y) \in R$ i $(v,u,z) \in R$, to albo $x = v$ i $y = z$ albo $x = z$ i $y = v$.

Graf nazywa się grafem skończonym, gdy $|W| + |U| < \infty$, to znaczy gdy suma mocy zbiorów wierzchołków i gałęzi jest skończona. Gałęzie tego grafu dzielą się na trzy rodzaje:

- krawędzie to takie gałęzie u, że jeżeli $x \neq y$ i $(x,u,y) \in R$, to również $(y,u,x) \notin R$,
- łuki to takie gałęzie u, że jeżeli $x \neq y$ i $(x,u,y) \in R$, to trójka $(y,u,x) \notin R$,
- pętle stanowią takie gałęzie u, dla których istnieją takie wierzchołki x, że $(x,u,x) \in R$.

Najczęściej spotykany jest graf zorientowany, który nazywa się także skierowanym. Jest to graf, którego zbiór krawędzi jest pusty. Może on zawierać jedynie łuki i pętle.

Geometrycznie zaś można graf przedstawić jako sieć linii, uwzględniającą występowanie trzech rodzajów gałęzi, w następujący sposób: każdemu wierzchołkowi $x \in W$ przyporządkowany jest jeden dowolny punkt przestrzeni euklidesowej, zaś każdej krawędzi $u \in U$ przyporządkowana jest dowolna linia łącząca punkty odpowiadające różnym wierzchołkom x i $y \in W$. Każdemu łukowi $u \in U$ przyporządkowana jest strzałka-wektor o początku w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi x, nazywanym wierzchołkiem wychodzącym (początkowym) i końcu w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi y, nazywanym wierzchołkiem wchodzącym (końcowym). Każdej pętli przyporządkowana jest dowolna linia zamknięta przechodząca przez punkt odpowiadający wierzchołkowi $x \in W$.

---

[x] Tak zdefiniowany graf Jürgen Flachsmeyer proponuje nazwać, ze względu na relację R, grafem abstrakcyjnym (Kombinatoryka. PWN, Warszawa 1977r).

Jeżeli dowolnemu grafowi przyporządkujemy numery wierzchołków i gałęzi, to otrzymamy trywialny przypadek sieci. Zauważmy, że sieć jako pojęcie formalne może stanowić naturalny i poglądowy model matematyczny wielu rodzajów obiektów fizycznych, a w szczególności tych, które powszechnie nazywane są sieciami w języku potocznym. Teoria sieci dzieli się na takie działy, jak: teoria sieci transportowych[x)], teoria sieci elektrycznych oraz teoria sieci transmitacyjnych. Inne podziały teorii sieci są uzależnione od rodzaju grafu sieci. Siecią skierowaną nazywamy trójkę uporządkowaną $S = [G, \{\xi_i\}, \{\varphi_j\}]$, gdzie [2]:

$G = [W, U, R]$ - graf zorientowany (skierowany),

$\{\xi_i\} = \{\xi_1, \ldots, \xi_I\}$ - zbiór funkcji $\xi_i : W \to R_+$, określonych na zbiorze wierzchołków grafu o wartościach rzeczywistych,

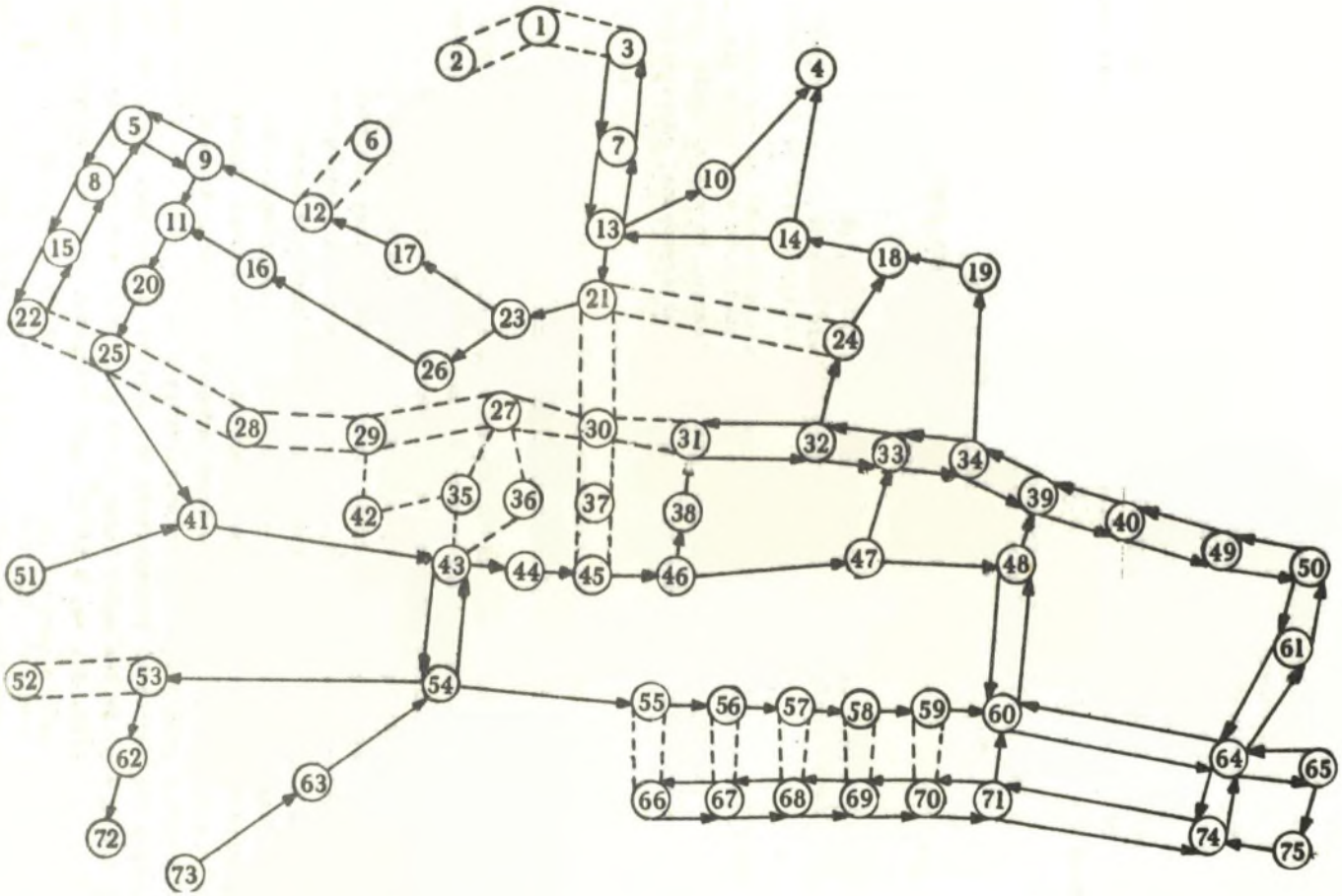
$\{\varphi_j\} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_J\}$ - zbiór funkcji $\varphi_j : U \to R_+$, określonych na zbiorze gałęzi grafu o wartościach rzeczywistych.

Jeśli oba zbiory funkcji $\{\xi_i\}$ oraz $\{\varphi_j\}$ są puste, to sieć staje się grafem G. Inaczej mówiąc, sieć jest grafem opisanym, to znaczy takim grafem, że wierzchołki i gałęzie są opisane (scharakteryzowane) odpowiednimi liczbami.

3. Model matematyczny topologii sieci transportu zbiorowego

Poszczególne drogi sieci łączą się ze sobą bądź rozwidlają w węzłach. Podczas przejazdu przez węzeł powstaje problem wyboru dalszej drogi, jak i drogi bezpośredniego przejazdu ze startem w węźle x i metą w węźle y, którą nazywamy trasą. W celu opracowania modelu wszystkim węzłom przyporządkowano numerację topologiczną, przez [1], którą należy rozumieć jednoznaczne odwzorowanie $t: W \to \{1, \ldots, m\}$, gdzie W jest zbiorem wyróżnionych węzłów, zaś m - ich ogólną liczbą. Wartość t(x) nazwiemy numerem topologicznym wierzchołka $x \in W$. Zatem wszystkim węzłom przyporządkowano liczby naturalne od 1 aż do m. Niech teraz symbol W oznacza zbiór numerów wszystkich węzłów: $W = \{1, 2, \ldots, m\}$. Przez drogę bezpośrednią łączącą dwa węzły o numerach i oraz j będziemy rozumieć drogę z węzła i do j, po której mogą poruszać się jednostki transportowe nie napotykając żadnego innego węzła. Gdy zdarzy się, że dwa węzły łączy wiele dróg bezpośrednich, wtedy wyróżnimy jedną z nich, tj, tę, z której będą korzystać interesujące nas jedno-

x) Sieć transportowa jako szczególny graf jest abstrakcyjnym modelem matematycznym zarówno sieci kołowej, jak i szynowej.



Rys. 1. Graf liniowy zorientowany fragmentu sieci transportu zbiorowego

Fig. 1. Linear digraph of the fragment of the collective transport network

stki transportowe. Następnie załóżmy, że istnieje tylko ta jedna droga bezpośrednia łącząca dwa węzły. W związku z tym każda droga bezpośrednia jest jednoznacznie określona parą (i,j) numerów węzłów, które ona bezpośrednio łączy. Jeżeli węzeł i jest połączony bezpośrednią drogą (i,j) z węzłem j, to będzie on sąsiedni względem węzła j. Nie oznacza to, że jest on także sąsiednim względem węzła i, ponieważ może nie istnieć bezpośrednia droga (j,i) z j do i. Przypadek taki występuje w miastach, w których znajdują się ulice jednokierunkowe.

Przyporządkowując każdej drodze bezpośredniej D_k parę numerów (i_k,j_k), przy czym $k=1,2,\ldots,K$ jest numerem drogi, możemy utworzyć zbiór

$$D = \bigcup_{k=1}^{K} D_k = \left\{(i_1,j_1),\ (i_2,j_2),\ldots,(i_k,j_k),\ldots,(i_K,j_K)\right\}.$$

Zbiór ten będziemy nazywać zbiorem dróg, podobnie jak zbiór W nazywamy zbiorem węzłów. Zbiór wszystkich dróg i węzłów tworzy sieć transportu zbiorowego. W teorii grafów odpowiada to pojęciu grafu liniowego zorientowanego, który jest w naszym przypadku zdefiniowany parą zbiorów $G = [W,D]$.

Przykład topologii sieci transportu zbiorowego przedstawionej za pomocą grafu jest pokazany na rysunku 1.

Zastosowano tu stosunkowo przejrzystą interpretację geometryczną dowolnego grafu G w następujący sposób: każdemu wierzchołkowi $i \in W$ (W-zbiór wierzchołków) przyporządkowany jest jeden punkt płaszczyzny, zaś każdemu łukowi $(i,j) \in D$ (D-zbiór łuków) przyporządkowana jest strzałka-wektor o początku w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi i oraz końcu w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi j.

4. Parametry modelu struktury topologicznej

Ustalając wielkości charakteryzujące drogę z punktu widzenia ruchu jednostek transportowych można równocześnie przyporządkować im parametry liczbowe. Ponieważ często drogi nie są jednorodne na całej swej długości, podzielić je można na szereg względnie jednorodnych odcinków. Na przykład bezpośrednia droga kołowa łączącą dwa węzły może składać się z odcinków szosy różnych klas, mostów, wiaduktów itp. W związku z powyższym dla każdego jednorodnego odcinka wyróżnimy takie jego parametry techniczno-ruchowe, jak: długość odcinka drogi, maksymalna prędkość, z jaką mogą poruszać się na tym odcinku interesujące nas jednostki transportowe, czas przejazdu (w przypadku transportu szynowego), rodzaj ruchu, liczba pasów ruchu, klasa techniczna drogi itd. Przykładowymi parametrami opisującymi węzły są: rodzaj posterunku ruchu kolejowego, typ skrzyżowania drogowego, sposób organizacji ruchu itd.

Długością drogi (i,j) łączącej węzły i oraz j nazwiemy sumę długości wszystkich odcinków jednorodnych, na które została podzielona. W teorii grafów droga odpowiada pojęciu ścieżki, którą jest ciąg wierzchołków i łuków,np. 1,(1,2),2,(2,3),...,n-1,(n-1,n),n. Łańcuchem zaś nazywamy skończony ciąg wierzchołków i krawędzi. Ponieważ każdy łuk grafu jest jego krawędzią, więc każda ścieżka w grafie jest jednocześnie łańcuchem w tym grafie.

Czasem przejścia drogi D_k nazywamy sumę czasów trwania wszystkich czynności należących do danej drogi, czyli $T(D_k) = \sum_{k=1}^{k} t_k$.

5. Numeryczne odwzorowanie modelu

Przy umieszczaniu modelu matematycznego w pamięci komputera sposób reprezentacji grafu najbardziej przejrzysty i użyteczny dla człowieka, tzn. przez rysunek punktów i łączących je linii na płaszczyźnie, jest całkowicie bezużyteczny. Wybór odpowiedniej struktury danych do reprezentacji grafu ma zasadniczy wpływ na efektywność algorytmów. W teorii grafów klasycznym sposobem reprezentacji grafu jest macierz incydencji. Wierzchołek jest incydentny z łukiem, jeżeli łuk wchodzi lub wychodzi z tego wierzchołka i łuk ten jest również incydentny z tym wierzchołkiem. Liczbą łuków incydentnych z danym wierzchołkiem nazywamy stopniem tego wierzchołka. Macierzowa reprezentacja jest dogodna dla algorytmu budującego przepływ w sieci lub ścieżkę w grafie, czyli algorytmu podającego trasę pomiędzy dwoma dowolnie wybranymi węzłami sieci transportowej. Lepszym sposobem reprezentacji grafu jest macierz sąsiedztwa wierzchołków, określona jako macierz zero-jedynkowa wymiaru m m, gdzie m-liczba wierzchołków grafu. W macierzy tej element o indeksach i oraz j jest równy 1, jeśli istnieje krawędź prowadząca od i-tego do j-tego wierzchołka, oraz 0 w przeciwnym przypadku. W przypadku grafu niezorientowanego macierz sąsiedztwa wierzchołków jest zawsze symetryczna. Wadą tych dwóch reprezentacji jest fakt, że zajętość pamięci jest duża. Oszczędniejsza jeśli idzie o zajętość pamięci - szczególnie w przypadku grafów rzadkich - jest metoda reprezentacji grafu przez listę par odpowiadających jego krawędziom. Sytuację można jeszcze znacznie poprawić przez uporządkowanie leksykograficzne zbioru par i przedstawienie w postaci listy incydencji struktury danych. Zawiera ona dla każdego wierzchołka $i \in W$ listę wierzchołków $j \in W$ takich, że (i,j) jest łukiem. Dokładniej, każdy element takiej listy jest rekordem zawierającym wierzchołek wychodzący i wchodzący będący wskaźnikiem do następnego rekordu na liście. W wielu algorytmach struktura grafu jest dynamicznie modyfikowana przez dodawanie i usuwanie łuków. Listy incydencji odpowiadające grafowi z rysunku 1 przedstawiono na rysunku 2.

1	0	0
2	0	0
3	7	0
4	0	0
5	8	9
6	0	0
7	13	0
8	15	0
9	5	11
10	4	0
11	20	0
12	9	0
13	21	0
14	4	13
15	22	0
16	11	0
17	12	0
18	14	0
19	18	0
20	25	0
22	0	0
23	17	26
24	18	0
25	41	0
26	16	0
27	0	0
28	0	0
29	0	0
30	0	0
31	32	0
32	24	33
33	34	0

Rys. 2. Fragment listy incydencji
Fig. 2. Incidence list - fragment

6. Algorytm poszukujący ścieżki

Istnieje wiele algorytmów grafowych, których ogólna budowa polega na systematycznym przeszukiwaniu wierzchołków grafu, tak aby każdy wierzchołek był odwiedzony dokładnie raz. Dlatego też ważnym problemem jest znalezienie dobrych metod przeszukiwania grafu. Metody te dzielą się na dwa typy [3]:

- przeszukiwanie w głąb,
- przeszukiwanie wszerz.

Mogą być one użyte do znajdowania ścieżki między ustalonymi wierzchołkami s oraz t. Realizuje to procedura SCIEŻKA napisana w wersji wzorcowej języka algorytmicznego ALGOL.

```
procedure SCIEŻKA (GRAF, m, n, s, t);
  value m, n, s, t;
  integer m, n, s, t;
  array GRAF;
  comment procedura SCIEŻKA znajduje wszy-
          stkie trasy pomiędzy zadanymi z
          góry dwoma punktami s oraz t sieci
          transportowej i umieszcza uzyskane
          ścieżki w tablicy Q, zapisując w
          niej numery wierzchołków znajdują-
          cych się na znalezionej trasie.
          Struktura sieci jest zapisana w
          tablicy GRAF;
  begin
    integer array Q, R [0 : n] ;
    integer i, j, k, l;
    for k:=0 step 1 until n do
    Q[k] :=R[k] :=0;
    Q[0] :=s;
    j:=0;
E1: j:=j+1;
E2: for i:=R[j]+1 step 1 until m do
    begin
      R[j] :=i;
      Q[j] :=GRAF[Q[j-1], i];
```

```
      if Q[j]=0 then goto E3;
      if Q[j]=t then goto E4;
      for l:=j-1 step -1 until 0 do
      if Q[j]=Q[l] then goto E3;
      goto E1
E3: end;
    goto E5;
E4: for k:=0 step 1 until j do
    print (Q[k]);
E5: if R[1]=m then goto E6;
    if j≠0 then
    begin
      R[j]:=0;
      j:=j-1;
      goto E2
    end;
E6: print ('KONIEC PROCEDURY')
  end
end procedury SCIEŻKA;
```

W procedurze użyto wyrażenia print (drukuj), które nie należy do języka wzorcowego i przybiera różną postać w języku konkretnym.

7. Zakończenie

Przedstawiony model matematyczny posiada takie właściwości, jak:

- abstrakcyjność, zapewniającą możliwość opisu dowolnego obszaru sieci transportowej,
- ekonomiczność, która wymaga, by opis był krótki i zajmował mało miejsca w pamięci operacyjnej komputera,
- realność, polegającą na możliwości łatwego kodowania danych źródłowych dla maszynowego przetwarzania,
- prostotę, polegającą na łatwości przetworzenia charakterystyk ruchowo-technicznych obiektów sieci transportu zbiorowego w parametry przyporządkowane elementom grafu tworzącego w ten sposób sieć transportową,
- uniwersalność, umożliwiającą wielorakie wykorzystanie modelu,
- wierność, prawie zawsze zapewniającą zgodność modelu z rzeczywistością.

Ponadto omówiona koncepcja modelu matematycznego w postaci grafu i procedury generowania tras przejazdu różnych jednostek transportu zbiorowego może być po pewnej modyfikacji czy rozwinięciu wykorzystana do rozwiązywania następujących zagadnień praktycznych:

- w systemach sterowania ruchem w miastach,

- w planowaniu rozbudowy układów komunikacyjnych,
- w eksploatacji przy określaniu optymalnych tras transportu zbiorowego uwzględniających właściwe rozmieszczenie przystanków.

LITERATURA

[1] Jankowski B.: Sieci zorientowane. Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1972.
[2] Korzan B.: Elementy teorii grafów i sieci. WNT, Warszawa 1978.
[3] Lipski W.: Kombinatoryka dla programistów. WNT, Warszawa 1982.
[4] Piasecki S.: Optymalizacja systemów przewozowych. WKŁ, Warszawa 1973.

Recenzent: Prof. dr inż. Edward Perykasza

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТОНОЛОГИИ СОВМЕСТНОГО ТРАНСПОРТА

Р е з ю м е

В статье обсуждается проблема использования математических методов исследования технологической структуры транспорта. Прежде всего используется теория графов и сетей. Эта теория адаптируется для ЭВМ. Это позволяет относительно легко и быстро установить оптимальные трассы перемещения транспорта общего пользования в больших агломерациях.

SOME PROBLEMS OF COLLECTIVE TRANSPORT MODELING

S u m m a r y

The paper presents a problem of application of some mathematical methods to modeling of the topological structure of collective transport networks. Graph and net theory has been mainly used. The basic mathematical model of topology of urban network in the form of graph is presented using topological denumeration. Geometric interpretation of the model en the plane has been also proposed. Then graph and net theory has been adopted to the computer technique specification. The incidence list in lexicographic order has been placed in the memory as the numerical mapping of the graph. The algorithm seeking the path based on graph searching method has been proposed taking into account different criteria. It has been included in the procedure which was tested. It anables easy and fast definition of optimal routes for collective transport units in big agglomerations. Model may be enlarged to the net form whose properties and broad possibilities of applications have been described in the final part of the paper.