

Krzysztof ZBOIŃSKI

## MODELOWANIE MATEMATYCZNE POJAZDU SZYNOWEGO POD KĄTEM STANOWISKOWYCH BADAŃ MODALNYCH

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono metodykę postępowania przyjętą przy budowie modelu(i) matematycznego pojazdu na potrzeby projektu stanowiska do badania pojazdów szynowych pod względem przepustowości dynamicznej i bezpieczeństwa przed wykołnieniem. Przedstawiono model ogólny obiektu wzorcowego obejmujący wszystkie stopnie swobody. Zaproponowano sposób uzyskania równań ruchu dla obiektów o strukturze innej niż obiekt wzorcowy. Pokazano możliwe sposoby budowy modeli dla poszczególnych modów drgań.

## MATHEMATICAL MODELLING OF A RAILWAY VEHICLE FROM THE POINT OF VIEW OF MODAL ANALYSIS

**Summary.** The methodology taken while building vehicle's mathematical model(s) for needs of a project of the station for investigations of railway vehicles' transfer functions and of safety against derailment is being presented in the paper. The general model of the standard vehicle, including all degrees of freedom, is presented, too. The way of derivation of the equations of motion for the objects of structure different than structure of the standard vehicle is proposed. Possible methods of building the models for particular vibration modes are shown.

### 1. WSTĘP

Prezentowany w artykule model matematyczny obiektu wzorcowego i sposób jego budowy odnosi się do fragmentu większego układu mechanicznego odpowiadającego kompletnemu stanowisku badawczemu do badań modalnych pojazdów szynowych. Analizując taki układ jako całość, oprócz badanego obiektu (pojazdu), należałoby uwzględnić podukład wymuszający drgania pojazdu, jak i układ wibroizolujący otoczenie (infrastrukturę zewnętrzną) od stanowiska pomiarowego generującego drgania. W obecnej wstępnej fazie ograniczymy się jednak tylko do pojazdu i działających na niego wymuszeń zakładając, iż wpływ własności układu wibroizolującego na zachowanie pojazdu na stanowisku jest pomijalny. Pełny model

matematyczny stanowiska może być przedmiotem naszych późniejszych rozważań. Zamodelowanie układu fundamentowania i wibroizolacji stanowiska, o ile okazałoby się konieczne, będzie bardziej trafne po uzyskaniu większej liczby danych na temat rozwiązania konstrukcyjnego tych elementów. Celem pracy, w ramach której uzyskano prezentowane tu wyniki, jest stworzenie wstępnej koncepcji, tj. opracowanie modelu fizycznego i założeń, budowy stanowiska do badania bezpieczeństwa jazdy pojazdów szynowych oraz wykonanie jego analizy dynamicznej na modelach matematycznych. Z punktu widzenia przejrzystości uzyskiwanych wyników i celu wstępnej analizy dynamicznej prowadzonej z użyciem omawianych w artykule modeli, przyjęcie założenia o idealnej sztywności układu fundamentowania stanowiska wydaje się celowe i konieczne.

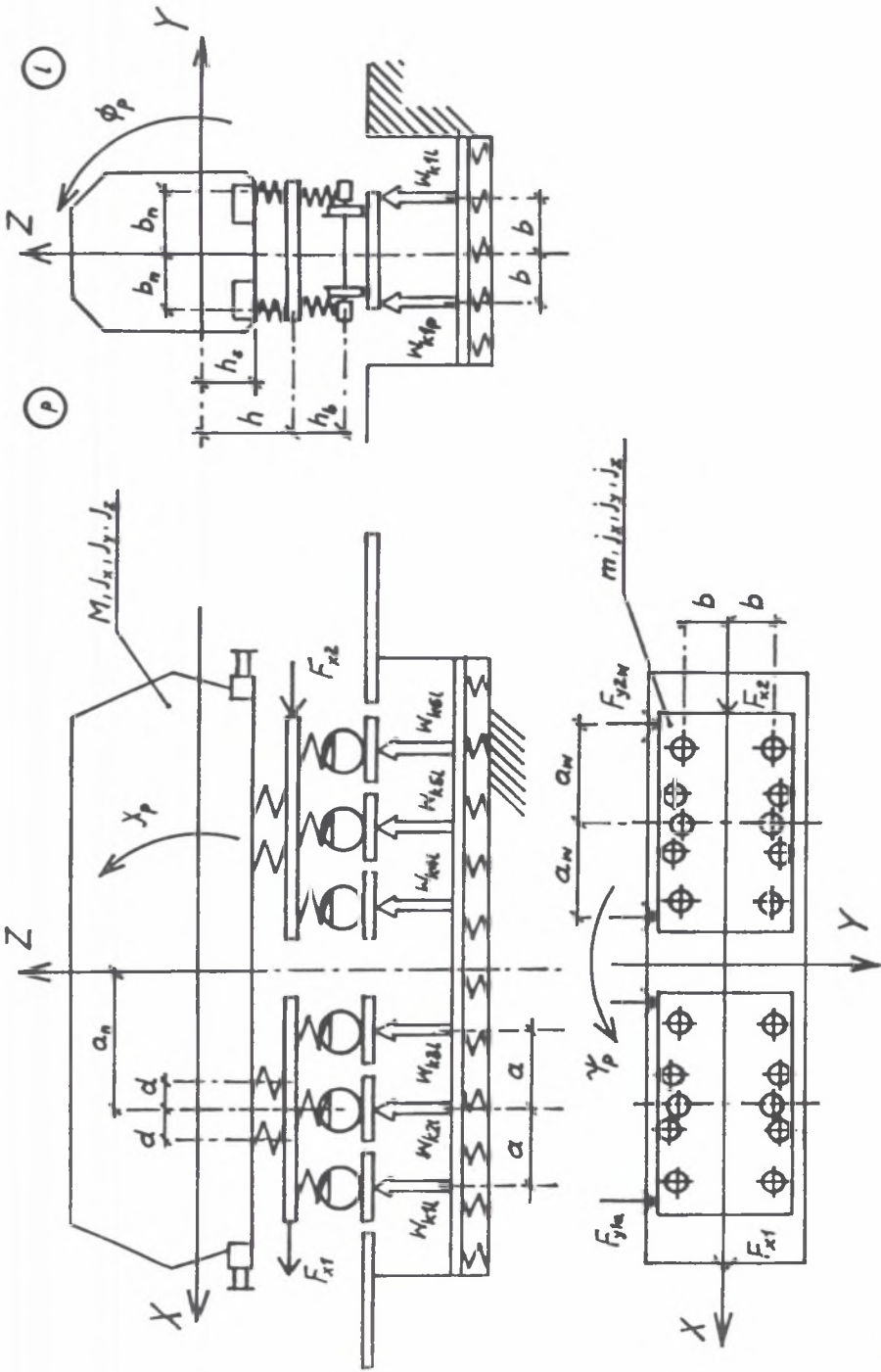
Prezentowana poniżej metodyka postępowania, jak i same modele matematyczne, w zamierzeniu autorów koncepcji stanowiska, wykorzystane będą również w okresie późniejszym. po fizycznym wykonaniu stanowiska, do prowadzenia różnorodnych analiz numerycznych związanych z prowadzonymi badaniami stanowiskowymi.

## 2. BUDOWA MODELU MATEMATYCZNEGO OBIEKTU WZORCOWEGO NA STANOWISKU Z UWZGLĘDNIENIEM WYMUSZEŃ

Struktura stanowiska (włączając fundamentowanie i układ wibroizolacji) pokazana jest na rys.1. Przedstawiony tam pojazd odpowiada obiektowi wzorcowemu, który przyjęliśmy jako punkt wyjścia biorąc pod uwagę jego stosunkową prostotę i typowość. Obiekt ten składa się z 9 elementów masowych: 6 zestawów kołowych, 2 ram wózków i pudła (nadwozia). Przyjmując sposób i miejsce przyłożenia wymuszeń zewnętrznych działających na obiekt jak na rys.1, opisowi podlegają 3 z elementów masowych. Są to ramy wózków i pudło. W modelu będą one reprezentowane przez 3 bryły sztywne ( $n=3$ ). Sposób połączenia wymienionych 3 brył poprzez elementy podatno tłumiące, jak też ten sam typ połączenia pomiędzy zestawami kołowymi i ramą wózka umożliwi traktowanie każdej z brył jako swobodnej o 6 stopniach swobody. Tym sposobem całkowita liczba stopni swobody analizowanego układu trzymasowego wynosi  $k=6 \times n=18$ . Współrzędne uogólnione opisujące położenie każdej z brył przyjmujemy analogicznie. Są to przemieszczenia wzdłuż i kąty obrotu wokół odpowiednich osi układu  $OXYZ$ . Ich oznaczenia to:  $x, y, z, \phi, \chi, \psi$ . Indeksy  $b1, b2$  oraz  $p$  wskazują kolejno ramę wózka przedniego, ramę wózka tylnego oraz pudło.

Mając świadomość niewielkich ruchów kątowych analizowanych brył przyjmujemy w tej pracy założenie o ich małych drganiach wokół położenia równowagi. Co więcej, pomijamy nieliniowości typu kinematycznego wynikające z ruchu kulistego brył. Wyprowadzony model jest zatem liniowy z punktu widzenia kinematyki. O elementach podatnych zakładamy, iż składają się dla każdej więzi ze sprężyny i tłumika o liniowych charakterystykach. W obecnej fazie założono też symetrię pojazdu względem płaszczyzn pionowych, wzdłużnej i poprzecznej, przechodzących przez środek geometryczny pudła pojazdu. W dokładniejszych dalszych badaniach utrzymanie tego założenia ograniczyłoby niepotrzebnie możliwości analiz. Praktyczne uniesienieometrycznienie modelu nie stanowi jednak większego problemu.

Wymuszenia przyjmujemy w zależności od analizowanego kierunku jako kinematyczne dla kierunku pionowego oraz siłowe dla kierunku wzdłużnego i poprzecznego.



Rys.1. Schemat struktury stanowiska badawczego wraz z obiektem  
 Fig.1. Scheme of structure of the test station with the object

## 2.1. Użyty formalizm budowy równań i ich postać jawna

Przyjęcie założenia o liniowości modelu w sensie kinematyki sprawia, że najprostszym i najbardziej naturalnym sposobem wyprowadzenia, równań ruchu jest metoda sił. Nie wymaga

ona linearyzacji równań na końcu procesu wyprowadzania, lecz prowadzi wprost do równań liniowych w sensie kinematyki. Taką też i metodę zastosowaliśmy. Postać modelu matematycznego dana jest równaniami poniżej:

$$m\ddot{x}_{h1} - 6k_x x_{h1} - 6c_x \dot{x}_{h1} - 4K_x(x_{h1} - x_p + h_x \chi_p) - 4C_x(\dot{x}_{h1} - \dot{x}_p + h_x \dot{\chi}_p) = F_{x1} \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_{h1} - 6k_y y_{h1} - 6c_y \dot{y}_{h1} - 4K_y(y_{h1} - y_p - h_y \phi_p - a_n \psi_p) + \\ - 4C_y(\dot{y}_{h1} - \dot{y}_p - h_y \dot{\phi}_p - a_n \dot{\psi}_p) = F_{y1a} + F_{y1w} \quad (2)$$

$$m\ddot{z}_{h1} - 6k_z z_{h1} - 6c_z \dot{z}_{h1} - 4K_z(z_{h1} - z_p + a_n \chi_p) - 4C_z(\dot{z}_{h1} - \dot{z}_p + a_n \dot{\chi}_p) = \\ = -k_z(w_{k1l} + w_{k2l} + w_{k3l} + w_{k1p} + w_{k2p} + w_{k3p}) - c_z(\dot{w}_{k1l} + \dot{w}_{k2l} + \dot{w}_{k3l} + \dot{w}_{k1p} + \dot{w}_{k2p} + \dot{w}_{k3p}) \quad (3)$$

$$j_x \ddot{\phi}_{h1} - 6k_z b^2 \phi_{h1} - 6c_z b^2 \dot{\phi}_{h1} - 4K_z b_n^2 (\phi_{h1} - \phi_p) - 4C_z b_n^2 (\dot{\phi}_{h1} - \dot{\phi}_p) = \\ = -k_z b(w_{k1l} + w_{k2l} + w_{k3l} - w_{k1p} - w_{k2p} - w_{k3p}) + \\ - c_z b(\dot{w}_{k1l} + \dot{w}_{k2l} + \dot{w}_{k3l} - \dot{w}_{k1p} - \dot{w}_{k2p} - \dot{w}_{k3p}) \quad (4)$$

$$j_y \ddot{\chi}_{h1} - 4k_z a^2 \chi_{h1} - 4c_z a^2 \dot{\chi}_{h1} - 4K_z d^2 (\chi_{h1} - \chi_p) - 4C_y d^2 (\dot{\chi}_{h1} - \dot{\chi}_p) = \\ = -k_z a(-w_{k1l} + w_{k3l} - w_{k1p} + w_{k3p}) - c_z a(-\dot{w}_{k1l} + \dot{w}_{k3l} - \dot{w}_{k1p} + \dot{w}_{k3p}) \quad (5)$$

$$j_z \ddot{\psi}_{h1} - 6k_x b^2 \psi_{h1} - 6c_x b^2 \dot{\psi}_{h1} - 4k_y a^2 \psi_{h1} - 4c_y a^2 \dot{\psi}_{h1} - 4K_x b_n^2 (\psi_{h1} - \psi_p) + \\ - 4C_x b_n^2 (\dot{\psi}_{h1} - \dot{\psi}_p) - 4K_y d^2 (\psi_{h1} - \psi_p) - 4C_y d^2 (\dot{\psi}_{h1} - \dot{\psi}_p) = -F_{y1a} a_w + F_{y1w} a_w \quad (6)$$

$$m\ddot{x}_{h2} - 6k_x x_{h2} - 6c_x \dot{x}_{h2} - 4K_x(x_{h2} - x_p + h_x \chi_p) - 4C_x(\dot{x}_{h2} - \dot{x}_p + h_x \dot{\chi}_p) = F_{x2} \quad (7)$$

$$m\ddot{y}_{h2} - 6k_y y_{h2} - 6c_y \dot{y}_{h2} - 4K_y(y_{h2} - y_p - h_y \phi_p + a_n \psi_p) + \\ - 4C_y(\dot{y}_{h2} - \dot{y}_p - h_y \dot{\phi}_p + a_n \dot{\psi}_p) = F_{y2a} + F_{y2w} \quad (8)$$

$$m\ddot{z}_{h2} - 6k_z z_{h2} - 6c_z \dot{z}_{h2} - 4K_z(z_{h2} - z_p - a_n \chi_p) - 4C_z(\dot{z}_{h2} - \dot{z}_p - a_n \dot{\chi}_p) = \\ = -k_z(w_{k4l} + w_{k5l} + w_{k6l} + w_{k4p} + w_{k5p} + w_{k6p}) - c_z(\dot{w}_{k4l} + \dot{w}_{k5l} + \dot{w}_{k6l} + \dot{w}_{k4p} + \dot{w}_{k5p} + \dot{w}_{k6p}) \quad (9)$$

$$j_x \ddot{\phi}_{h2} - 6k_z b^2 \phi_{h2} - 6c_z b^2 \dot{\phi}_{h2} - 4K_z b_n^2 (\phi_{h2} - \phi_p) - 4C_z b_n^2 (\dot{\phi}_{h2} - \dot{\phi}_p) = \\ = -k_z b(w_{k4l} + w_{k5l} + w_{k6l} - w_{k4p} - w_{k5p} - w_{k6p}) + \\ - c_z b(\dot{w}_{k4l} + \dot{w}_{k5l} + \dot{w}_{k6l} - \dot{w}_{k4p} - \dot{w}_{k5p} - \dot{w}_{k6p}) \quad (10)$$

$$j_y \ddot{\chi}_{h2} - 4k_z a^2 \chi_{h2} - 4c_z a^2 \dot{\chi}_{h2} - 4K_z d^2 (\chi_{h2} - \chi_p) - 4C_y d^2 (\dot{\chi}_{h2} - \dot{\chi}_p) = \\ = -k_z a(-w_{k4l} + w_{k6l} - w_{k4p} + w_{k6p}) - c_z a(-\dot{w}_{k4l} + \dot{w}_{k6l} - \dot{w}_{k4p} + \dot{w}_{k6p}) \quad (11)$$

$$j_z \ddot{\psi}_{h2} - 6k_x b^2 \psi_{h2} - 6c_x b^2 \dot{\psi}_{h2} - 4k_y a^2 \psi_{h2} - 4c_y a^2 \dot{\psi}_{h2} - 4K_x b_n^2 (\psi_{h2} - \psi_p) - 4C_x b_n^2 (\dot{\psi}_{h2} - \dot{\psi}_p) - 4K_y d^2 (\psi_{h2} - \psi_p) - 4C_y d^2 (\dot{\psi}_{h2} - \dot{\psi}_p) = -F_{y2a} a_w + F_{y2w} a_w \quad (12)$$

$$M\ddot{x}_p - 4K_x (x_p - h_x \chi_p - x_{h1}) - 4C_x (\dot{x}_p - h_x \dot{\chi}_p - \dot{x}_{h1}) + -4K_x (x_p - h_x \chi_p - x_{h2}) - 4C_x (\dot{x}_p - h_x \dot{\chi}_p - \dot{x}_{h2}) = 0 \quad (13)$$

$$M\ddot{y}_p - 4K_y (y_p - y_{h1}) - 4C_y (\dot{y}_p - \dot{y}_{h1}) - 4K_y (y_p - y_{h2}) - 4C_y (\dot{y}_p - \dot{y}_{h2}) = 0 \quad (14)$$

$$M\ddot{z}_p - 4K_z (z_p - z_{h1}) - 4C_z (\dot{z}_p - \dot{z}_{h1}) - 4K_z (z_p - z_{h2}) - 4C_z (\dot{z}_p - \dot{z}_{h2}) = 0 \quad (15)$$

$$J_x \ddot{\phi}_p - 8K_y h_x^2 \phi_p - 8C_y h_x^2 \dot{\phi}_p - 4K_y h_x (y_p - y_{h1}) - 4C_y h_x (\dot{y}_p - \dot{y}_{h1}) + -4K_y h_x (y_p - y_{h2}) - 4C_y h_x (\dot{y}_p - \dot{y}_{h2}) - 4K_z b_n^2 (\phi_p - \phi_{h1}) + -4C_z b_n^2 (\dot{\phi}_p - \dot{\phi}_{h2}) - 4K_z b_n^2 (\phi_p - \phi_{h2}) - 4C_z b_n^2 (\dot{\phi}_p - \dot{\phi}_{h2}) = 0 \quad (16)$$

$$J_y \ddot{\chi}_p - 8K_x h_x^2 \chi_p - 8C_x h_x^2 \dot{\chi}_p + 4K_x h_x (x_p - x_{h1}) + 4C_x h_x (\dot{x}_p - \dot{x}_{h1}) + 4K_x h_x (x_p - x_{h2}) + +4C_x h_x (\dot{x}_p - \dot{x}_{h2}) - 8K_z (a_n^2 + d^2) \chi_p - 8C_z (a_n^2 + d^2) \dot{\chi}_p - 4K_z a_n z_{h1} - 4C_z a_n \dot{z}_{h1} + 4K_z d^2 \chi_{h1} + 4C_z d^2 \dot{\chi}_{h1} + 4K_z a_n z_{h2} + 4C_z a_n \dot{z}_{h2} + 4K_z d^2 \chi_{h2} + 4C_z d^2 \dot{\chi}_{h2} = 0 \quad (17)$$

$$J_z \ddot{\psi}_p - 4K_x b_n^2 (\psi_p - \psi_{h1}) - 4C_x b_n^2 (\dot{\psi}_p - \dot{\psi}_{h1}) - 4K_x b_n^2 (\psi_p - \psi_{h2}) - 4C_x b_n^2 (\dot{\psi}_p - \dot{\psi}_{h2}) + -8K_y (a_n^2 + d^2) \psi_p - 8C_y (a_n^2 + d^2) \dot{\psi}_p + 4K_y a_n y_{h1} + 4C_y a_n \dot{y}_{h1} + 4K_y d^2 \psi_{h1} + 4C_y d^2 \dot{\psi}_{h1} - 4K_y a_n y_{h2} - 4C_y a_n \dot{y}_{h2} + 4K_y d^2 \psi_{h2} + 4C_y d^2 \dot{\psi}_{h2} = 0 \quad (18)$$

## 2. MACIERZOWA POSTAĆ RÓWNAŃ

Wyprowadzony przez nas powyżej model matematyczny jest modelem liniowym względem współrzędnych, prędkości i przyspieszeń uogólnionych. Liniowość modelu umożliwia zastosowanie metod badawczych, w tym analizy modalnej, typowych dla układów liniowych. Umożliwia skuteczne badanie modelu w dziedzinie częstotliwości. Efektem dodatkowym jest możliwość zapisania równań ruchu w następującej postaci macierzowej. Postać taka porządkuje zapis i daje możliwość bezpośredniego operowania występującymi w niej macierzami i wektorami w komputerowych metodach badania modeli liniowych. Doprowadzenie modelu do postaci macierzowej ma więc duże znaczenie praktyczne. Oto ona:

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (19)$$

Jawny zapis wektorów i macierzy występujących w (19) zaczniemy od wektora współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}$ . Na początek nadajmy 18 współrzędnym uogólnionym określoną kolejność. Wynika ona z przyjęcia umowy, iż współrzędne dotyczące danej bryły będą podawane tuż po sobie w kolejności  $x, y, z, \phi, \chi, \psi$ . Rozpoczynamy od bryły reprezentującej ramę przedniego wózka, a kończymy na bryle odpowiadającej nadwoziu (puđu) pojazdu. Wektor współrzędnych określony jest zatem jak niżej:

$$\mathbf{q} = \text{col}[q_j] = \text{col}[q_1, \dots, q_{18}] = \text{col}[x_{b1}, y_{b1}, z_{b1}, \phi_{b1}, \chi_{b1}, \psi_{b1}, x_{b1}, y_{b1}, z_{b1}, \phi_{b1}, \chi_{b1}, \psi_{b1}, x_{b1}, y_{b1}, z_{b1}, \phi_{b1}, \chi_{b1}, \psi_{b1}] \quad (20)$$

Odpowiednio do wektora współrzędnych, uwzględniając taką samą kolejność, wektor prędkości uogólnionych zapiszemy w postaci  $\dot{\mathbf{q}} = \text{col}[\dot{q}_j] = \text{col}[\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{18}] = \text{col}[\dot{x}_{b1}, \dot{y}_{b1}, \dots, \dot{\psi}_p]$ . Wektor przyspieszeń uogólnionych to  $\ddot{\mathbf{q}} = \text{col}[\ddot{q}_j] = \text{col}[\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{18}] = \text{col}[\ddot{x}_{b1}, \ddot{y}_{b1}, \dots, \ddot{\psi}_p]$ .

Macierze bezwładności  $\mathbf{A}$ , sztywności  $\mathbf{B}$  oraz tłumienia  $\mathbf{C}$  będące macierzami kwadratowymi o wymiarze  $k \diamond k$ , określimy poniżej. Wykorzystamy przyjętą umowę odnośnie do kolejności (numeracji wskaźników) współrzędnych, prędkości i przyspieszeń oraz bezpośrednio postać równań (1) do (18). Ogólna postać macierzy bezwładności to

$$\mathbf{A} = [A_{ij}]; \quad (i, j = 1, \dots, 18). \quad (21)$$

Większość elementów tej macierzy jest zerowa ze względu na to, że układ składa się z brył swobodnych. Co więcej, macierz ta jest macierzą diagonalną. Jej niezerowe elementy to:

$$\begin{aligned} A_{1,1} = A_{2,2} = A_{3,3} = A_{7,7} = A_{8,8} = A_{9,9} = m \\ A_{4,4} = A_{10,10} = J_x; \quad A_{5,5} = A_{11,11} = J_y; \quad A_{6,6} = A_{12,12} = J_z \\ A_{13,13} = A_{14,14} = A_{15,15} = M; \quad A_{16,16} = J_x; \quad A_{17,17} = J_y; \quad A_{18,18} = J_z \end{aligned} \quad (22)$$

Macierz sztywności jest również macierzą rzadką o wyraźnej przewadze elementów zerowych. Wynika to, jak poprzednio, z faktu, że bryły sztywne modelu nominalnego są swobodne oraz z tego, że sprzężenia pomiędzy współrzędnymi, wynikające ze struktury więzi podatnych rozważanego obiektu, są słabe. Ogólna postać macierzy sztywności to

$$\mathbf{B} = [B_{ij}]; \quad (i, j = 1, \dots, 18). \quad (23)$$

Niezerowe elementy macierzy  $\mathbf{B}$  równe są:

$$\begin{aligned} B_{1,1} = -6k_x - 4K_x; \quad B_{1,13} = 4K_x; \quad B_{1,17} = -4K_x h_x \\ B_{2,2} = -6k_y - 4K_y; \quad B_{2,14} = 4K_y; \quad B_{2,16} = 4K_y h_x; \quad B_{2,18} = 4K_y a_n \\ B_{3,3} = -6k_z - 4K_z; \quad B_{3,15} = 4K_z; \quad B_{3,17} = -4K_z a_n \\ B_{4,4} = -6k_z b^2 - 4K_z b_n^2; \quad B_{4,16} = 4K_z b_n^2; \quad B_{5,5} = -4k_z a^2 - 4K_z d^2; \quad B_{5,17} = 4K_z d^2 \\ B_{6,6} = -6k_x b^2 - 4k_y a^2 - 4K_x b_n^2 - 4K_y d^2; \quad B_{6,18} = 4K_x b_n^2 + 4K_y d^2 \\ B_{7,7} = -6k_x - 4K_x; \quad B_{7,13} = 4K_x; \quad B_{7,17} = -4K_x h_x \\ B_{8,8} = -6k_y - 4K_y; \quad B_{8,14} = 4K_y; \quad B_{8,16} = 4K_y h_x; \quad B_{8,18} = -4K_y a_n \\ B_{9,9} = -6k_z - 4K_z; \quad B_{9,15} = 4K_z; \quad B_{9,17} = 4K_z a_n; \quad B_{10,10} = -6k_z b^2 - 4K_z b_n^2; \quad B_{10,16} = 4K_z b_n^2 \\ B_{11,11} = -4k_z a^2 - 4K_z d^2; \quad B_{11,17} = 4K_z d^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$B_{12,12} = -6k_x b^2 - 4k_y a^2 - 4K_x b_n^2 - 4K_y d^2; \quad B_{12,18} = 4K_x b_n^2 + 4K_y d^2$$

$$B_{13,1} = 4K_x; \quad B_{13,7} = 4K_x; \quad B_{13,13} = -8K_x; \quad B_{13,17} = 8K_x h_x$$

$$B_{14,2} = 4K_y; \quad B_{14,8} = 4K_y; \quad B_{14,14} = -8K_y; \quad B_{15,3} = 4K_z; \quad B_{15,9} = 4K_z; \quad B_{15,15} = -8K_z$$

$$B_{16,2} = 4K_y h_x; \quad B_{16,4} = 4K_z b_n^2; \quad B_{16,8} = 4K_y h_x; \quad B_{16,10} = 4K_z b_n^2; \quad B_{16,14} = -8K_y h_x;$$

$$B_{16,16} = -8K_y h_x^2 - 8K_z b_n^2$$

$$B_{17,1} = -4K_x h_x; \quad B_{17,3} = -4K_z a_n; \quad B_{17,5} = 4K_z d^2; \quad B_{17,7} = -4K_x h_x; \quad B_{17,9} = 4K_z a_n;$$

$$B_{17,11} = 4K_z d^2; \quad B_{17,17} = -8K_x h_x^2 - 8K_z (a_n^2 + d^2)$$

$$B_{18,2} = 4K_y a_n; \quad B_{18,6} = 4K_x b_n^2 + 4K_y d^2; \quad B_{18,8} = -4K_y a_n; \quad B_{18,12} = 4K_x b_n^2 + 4K_y d^2;$$

$$B_{18,18} = -8K_x b_n^2 - 8K_y (a_n^2 + d^2)$$

(25)

(26)

Macierz tłumienia  $C$  strukturalnie jest analogiczna do macierzy sprężystości. Wynika to z identycznej struktury więzi podatnych w modelu nominalnym pojazdu wzorcowego. Każda z tych więzi składa się z równoległego połączenia elementu sprężystego i tłumiącego o liniowych charakterystykach. Ze względu na ograniczoną objętość artykułu nie zapiszemy niezerowych elementów macierzy  $C$  w sposób jawny. By te elementy otrzymać, wystarczy w elementach  $B$  danych przez (24) zamienić  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  oraz  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  odpowiednio przez  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  oraz  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  zachowując numerację wskaźników dla poszczególnych elementów.

Na zakończenie zapiszemy w postaci jawnej postać wektora  $F$  sił wymuszających działających na elementy analizowanego obiektu. Uwzględnimy sytuację odpowiadającą jednoczesnemu działaniu wszystkich wymuszeń. W rzeczywistości w badaniach modalnych należy spodziewać się raczej wybiórczego ich działania. Odpowiada to stanowi, w którym część z przedstawionych wymuszeń przyjmie wartości zerowe. Postać jawna wektora  $F$  to

$$F = \text{col}[F_j] = \text{col}[F_1, \dots, F_8], \quad (27)$$

gdzie elementy wektora równe są:

$$F_1 = -F_{x1}; \quad F_2 = -F_{y1a} - F_{y1w}$$

$$F_3 = -k_z (w_{k1l} + w_{k2l} + w_{k3l} + w_{k1p} + w_{k2p} + w_{k3p}) - c_z (\dot{w}_{k1l} + \dot{w}_{k2l} + \dot{w}_{k3l} + \dot{w}_{k1p} + \dot{w}_{k2p} + \dot{w}_{k3p})$$

$$F_4 = -k_z b (w_{k1l} + w_{k2l} + w_{k3l} - w_{k1p} - w_{k2p} - w_{k3p}) - c_z b (\dot{w}_{k1l} + \dot{w}_{k2l} + \dot{w}_{k3l} - \dot{w}_{k1p} - \dot{w}_{k2p} - \dot{w}_{k3p})$$

$$F_5 = -k_z a (-w_{k1l} + w_{k3l} - w_{k1p} + w_{k3p}) - c_z a (-\dot{w}_{k1l} + \dot{w}_{k3l} - \dot{w}_{k1p} + \dot{w}_{k3p})$$

$$F_6 = -F_{y1a} a_w + F_{y1w} a_w; \quad F_7 = -F_{x2}; \quad F_8 = -F_{y2a} - F_{y2w} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 F_9 &= -k_z(w_{k4l} + w_{k5l} + w_{k6l} + w_{k4p} + w_{k5p} + w_{k6p}) - c_z(\dot{w}_{k4l} + \dot{w}_{k5l} + \dot{w}_{k6l} + \dot{w}_{k4p} + \dot{w}_{k5p} + \dot{w}_{k6p}) \\
 F_{10} &= -k_z b(w_{k4l} + w_{k5l} + w_{k6l} - w_{k4p} - w_{k5p} - w_{k6p}) - c_z b(\dot{w}_{k4l} + \dot{w}_{k5l} + \dot{w}_{k6l} - \dot{w}_{k4p} - \dot{w}_{k5p} - \dot{w}_{k6p}) \\
 F_{11} &= -k_z a(-w_{k4l} + w_{k6l} - w_{k4p} + w_{k6p}) - c_z a(-\dot{w}_{k4l} + \dot{w}_{k6l} - \dot{w}_{k4p} + \dot{w}_{k6p}) \\
 F_{12} &= -F_{y2a} a_w + F_{y2w} a_w ; \quad F_{13} = F_{14} = F_{15} = F_{16} = F_{17} = F_{18} = 0
 \end{aligned}$$

### 3. MODELE MATEMATYCZNE DLA OBIEKTÓW O INNEJ STRUKTURZE

W niniejszym akapicie przedstawimy sposób budowy równań dla obiektów o strukturze innej niż przedstawiona na rys.1. Zasadniczo można tutaj rozpatrywać dwa podejścia. Pierwsze to komputerowa generacja modeli liniowych w sposób podobny np. do opisanego w [1], [2], [3] dla układów nieliniowych. Oczywiście, dla modeli liniowych cała procedura ulegnie znacznemu uproszczeniu. Podejście takie umożliwi uwzględnienie bez mała dowolnej struktury obiektu. Drugie podejście to wykorzystanie zbudowanego tutaj modelu do budowy modeli pochodnych. Podejście to umożliwi opis również szerokiej gamy rzeczywistych obiektów.

W przypadku podejścia drugiego proponujemy dwuetapową realizację postawionego zadania. Po pierwsze, należy zbudować model analogiczny do powyżej wyprowadzonego, ale odpowiadający pojazdowi 4-osiowemu o dwóch wózkach oraz pojazdowi 2-osiowemu bezwózkowemu. Po drugie, należy zaproponować ogólną procedurę umożliwiającą uwzględnienie pojazdów w strukturach z więzami holonomicznymi. Przykładem takich pojazdów są objekty, w których połączenie pomiędzy ramami wózków i pudłem występuje poprzez czop skrętu. Dzięki macierzowej budowie modelu liniowego oraz zdobytemu wcześniej doświadczeniu realizacja obu etapów będzie dla nas stosunkowo prosta.

#### 3.1. Budowa modeli dla pojazdów dwu- i czteroosiowych

Model matematyczny dla pojazdu 4-osiowego analogiczny do wyprowadzonego wcześniej (tzn. zbudowany pod kątem badań modalnych) otrzymamy z równań (1) do (18). Musimy uwzględnić tylko brak środkowych zestawów kołowych (patrz rys.1) i odpowiadających im elementów sprężystych i tłumiących oraz wymuszeń. Liczba równań pozostanie nie zmieniona, tj. równa 18, gdyż nadal analizie poddajemy trzy bryły swobodne. Dla przykładu zapiszemy pierwsze z równań (1) do (18) w zmodyfikowanej zgodnie z powyższym postaci:

$$m\ddot{x}_{b1} - 4k_x x_{b1} - 4c_x \dot{x}_{b1} - 4K_x(x_{b1} - x_p + h_x \chi_p) - 4C_x(\dot{x}_{b1} - \dot{x}_p + h_x \phi \dot{\chi}_p) = -F_{x1} \quad (29)$$

Zwróćmy przy tym uwagę, że równania (13) do (18) będą identyczne z poprzednimi.

Model dla pojazdu 2-osiowego otrzymamy wprost z modelu dla pojazdu 4-osiowego odrzucając odpowiedniki równań (7) do (18), a zachowując tylko równanie (29) oraz odpowiedniki równań (2) do (6). Sześć zachowanych równań należy jeszcze zmodyfikować. Po pierwsze, indeksy *b*1 należy zastąpić indeksami *p*. Po drugie, należy zachować tylko te z sił w elementach podatnych, które odpowiadają pierwszemu stopniowi usprężynowania. Dla przykładu, równanie (29) przyjmie postać:



$$m\ddot{x}_p - 4k_x x_p - 4c_x \dot{x}_p = -F_{x1} \quad (30)$$

Dzięki powyższym rozważaniom dysponujemy nie jednym, a praktycznie trzema modelami wyjściowymi dla pojazdów 6-, 4- oraz 2-osiowych, których struktura nie posiada więzów.

### 3.2. Modele dla pojazdów z więzami holonomicznymi

Modele o strukturze zawierającej więzy holonomiczne dla pojazdów 6-, 4- oraz 2-osiowych otrzymamy w analogiczny sposób dla każdego z przypadków. Możemy tu przy tym postąpić dwojako. Po pierwsze, możemy dokonać redukcji modeli wyjściowych dla układu z więzmi wykorzystując postać macierzową odpowiednich modeli wyjściowych. Musimy przy tym najpierw wyznaczyć zredukowany wektor  $q$  współrzędnych uogólnionych niezależnych, a następnie zredukować macierze bezwładności  $A$ , sztywności  $B$  i tłumienia  $C$  do wymiaru i postaci uwzględniających liczbę więzów holonomicznych. Procedury tej nie będziemy opisywać szczegółowo, gdyż uczyniliśmy to w [5], [4]. Zastosowano ją tam do redukcji macierzy bezwładności  $A$  wyprowadzając model matematyczny pojazdu w quasi-współrzędnych. Taki sam tryb postępowania należy zastosować w przypadku macierzy  $B$  i  $C$ . Proces taki daje się przy tym łatwo zalgorytmizować i zakodować w postaci procedury numerycznej, co wykazano w [1]. Dokonano tam, w podobny do zastosowanego w [5] sposób, redukcji macierzy prędkości cząstkowych dla układu swobodnego do postaci uwzględniającej więzy. Zadanie to było w [1] nawet trudniejsze bo dotyczyło macierzy trójwymiarowych. Powyższe wnioski są o tyle ważne, że dotyczą także komputerowej generacji równań ruchu.

Drugi sposób redukcji modeli wyjściowych do postaci uwzględniającej więzy holonomiczne dotyczy postaci jawnej równań. Możemy mianowicie wykorzystać twierdzenie udowodnione w [6] i zaprezentowane w [7], które co prawda w treści dotyczy sił pozornych, ale jego dowód przeprowadzono dla dowolnego typu sił (bezwładności, pozornych, zewnętrznych). Mówi ono, że siły dla układu z więzami holonomicznymi i nieholonomicznymi są liniowymi funkcjami odpowiednich sił dla układu swobodnego. Dysponując więc postacią jawną równań dla układu swobodnego (modele wyjściowe) możemy wykorzystując współczynniki równań więzów przekształcić takie równania do zredukowanej ich liczby i odpowiednio zmienionej formy uwzględniającej więzy. Twierdzenie powyższe obejmuje swoim zasięgiem również siły sprężystości, tłumienia i ewentualne wymuszające jako wchodzące do grupy sił zewnętrznych.

Konkretniejsze potraktowanie niniejszego tematu możliwe będzie po podjęciu decyzji, jaką technikę modelowania zastosujemy budując oprogramowanie służące analizom. Myślimy tu o wyborze pomiędzy tradycyjnym wyprowadzeniem równań a ich komputerową generacją.

Na zakończenie odniesiemy się jeszcze do pojazdu 4- lub 6-osiowego, w którym połączenie pomiędzy ramami wózków i pudłem realizowane jest poprzez czop skrętu. Przykład opisu 5 więzów holonomicznych wynikających z tego typu połączenia znaleźć można w [4], [5].

#### 4. BUDOWA MODELI DLA POSZCZEGÓLNYCH MODÓW DRGAŃ

W obecnej chwili nie chcemy przesądzać, które z modów będą możliwe do wygenerowania i skutecznej analizy na stanowisku. Dlatego ograniczymy się do naszkicowania sposobu budowy modeli modalnych i zapisania równań dla jednego przykładowego modu. Sądzymy, że dysponując ogólnymi modelami wyjściowymi, jak wyżej opisane, najwygodniej budować modele modalne poprzez redukcję modelu ogólnego do modeli dla poszczególnych modów.

Dla modu związanego z drganiami pionowymi pudła wagonu przyjmijmy następujące założenia. Po pierwsze, wszystkie współrzędne oprócz  $z_{b1}$ ,  $z_{b2}$ ,  $z_p$  równe są zero. Po drugie, zachodzi równość współrzędnych  $z_{b1}=z_{b2}=z_b$ . Po trzecie, pojazd jest idealnie symetryczny w sensie geometrycznym, masowym oraz parametrów sztywności i tłumienia. Po czwarte, wymuszenia działają tylko w kierunku pionowym. Są to wymuszenia kinematyczne przy czym ich wartości dla "wszystkich kół" są identyczne, tj. zachodzi  $w_k=w_{k1}=w_{k2}=w_{k3}=w_{k4}=w_{k5}=w_{k6}$ .

Przy takich założeniach model opisuje drgania pionowe ram wózków i pudła. Redukuje się on do dwóch stopni swobody, a tym samym i dwóch równań o postaci jak niżej. Pierwsze z tych równań powstało po uwzględnieniu założeń i zsumowaniu (3) i (9) stronami.

$$2m\ddot{z}_b - 12k_z z_b - 12c_z \dot{z}_b - 8K_z(z_b - z_p) - 8C_z(\dot{z}_b - \dot{z}_p) = -12k_z w_k - 12c_z \dot{w}_k \quad (3c/9c)$$

$$M\ddot{z}_p - 8K_z(z_p - z_b) - 8C_z(\dot{z}_p - \dot{z}_b) = 0 \quad (15c)$$

#### LITERATURA

1. Choromański W., Zboiński K.: Komputerowy system do automatycznej generacji równań ruchu pojazdu szynowego. Grant KBN nr 3 0545 91 01, Wyd. Transp. PW, 1994.
2. Choromański W., Zboiński K.: Pakiet softwarowy do automatycznej generacji równań ruchu i analizy dynamiki pojazdu, Prace Politechniki Wrocławskiej - Konferencje (X Konferencja Naukowa - Pojazdy Szynowe), s. 34-55, Wrocław 1994.
3. Choromański W., Zboiński K.: "The Software Package Ulysses for Automatical Generation of Equations and Simulation of Vehicle Motion", Transport Systems Engineering. Proc. of Intern. Scientific Conf., Warsaw Univ. of Technology, pp. 47-52, Warsaw 1995.
4. Kisilowski J.: red., Dynamika układu mechanicznego pojazd-szynowy tor, PWN, Warszawa 1991.
5. Zboiński K.: Wybrane zagadnienia modelowania drgań pojazdu szynowego ze szczególnym uwzględnieniem ruchu po łuku, Praca doktorska, Politech. Warszawska, Warszawa 1984.
6. Zboiński K.: Adaptacja równań Kane'a do opisu dynamiki w układach nieinercjalnych-zastosowanie w automatycznej generacji równań dla uogólnionych modeli pojazdów szynowych, Grant Rektora PW, Wyd. Transp. PW, 1996.

7. Zboiński K.: Zastosowanie równań Kane'a do opisu dynamiki pojazdów szynowych i automatycznej generacji ich modeli matematycznych, XVII symp. drgania w układach fizycznych, s. 272-273, Błażejewko k/Poznania 1996.

Recenzent: Prof.zw.dr hab.inż. Włodzimierz Gąsowski

### **Abstract**

The paper presents methodology taken while building vehicle's mathematical model(s) for needs of a project of the station for analyses of railway vehicles' transfer functions as well as of safety against derailment. The models generated this way will be applied also in the further investigations conducted on the mentioned station. The general model of the standard vehicle, including all degrees of freedom, is presented, too. Due to the aims of the model building we assumed in advance its linearity in the sense of both the kinematics and the stiffness as well as dumping elements. The model is represented through equations of motion in explicit form as well as through matrix form that is suitable for numerical analyses. The way of derivation of the equations of motion for the objects of structure different than structure of the standard vehicle is proposed. In this way one can take account of greater number of the rigid bodies representing the vehicle and of the constraints. Possible methods of building the models for particular vibration modes on the basis of the general model are shown.

*Pracę wykonano w ramach realizacji Grantu KBN nr 9 T12C 040 13.*