Piotr FOLĘGA, Andrzej WILK

# NUMERYCZNA ANALIZA STANU NAPRĘŻENIA WIEŃCA ZĘBATEGO TULEI PODATNEJ ZA POMOCĄ MEB

**Streszczenie.** W opracowaniu zastosowano metodę elementów brzegowych [MEB] do wyznaczania naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca zębatego tulei podatnej. Celem przeprowadzonych obliczeń numerycznych była weryfikacja opracowanej metodyki obliczeń oraz poprawności zastosowanego modelu MEB wieńca zębatego.

# NUMERICAL ANALYSIS OF STRESSE IN THE BASE OF A TOOTH OF FLEXSPLINE WITH BEM

**Summary.** Application of the Boundary Elements Method (BEM) in the numerical analysis of the harmonic gear drive flexspline has been presented in the paper. The presented a stress analysis of the flexspline can help the designer to determine accurately the maximum stress on the flexspline, which can then be used for optimisation of the flexspline construction.

### 1. WPROWADZENIE

Ważnym zagadnieniem dotyczącym obliczeń wytrzymałościowych przekładni falowych jest ocena wpływu wartości naprężeń we wrębach międzyzębnych wieńca zębatego na wytrzymałość tulei podatnej. Jak wynika z badań doświadczalnych [1, 2], miejscem narażonym na silny wzrost naprężeń, a co za tym idzie - o obniżonej wytrzymałości, są dna wrębów międzyzębnych wieńca. Częstym zjawiskiem poprzedzającym zniszczenie członu podatnego jest jego pękanie w miejscach lokalnego wzrostu naprężeń w wieńcu zębatym [2].

Stan naprężeń w wieńcu zębatym przekładni falowej można obecnie badać metodami tradycyjnymi z wykorzystaniem przetworników tensometrycznych, mostków oraz rejestrujących kart pomiarowych. Do wyznaczania naprężeń w podstawie zęba można również stosować metody zalecane przez normy ISO lub DIN. Dla uściślenia obliczeń wytrzymałościowych i doboru cech konstrukcyjnych przekładni celowe jest stosowanie dokładnych metod wyznaczania naprężeń, które umożliwiają analizę wpływu cech geometrycznych kół zębatych oraz parametrów narzędzia na wytrzymałość. Naprężenia w podstawie zęba wyznacza się coraz częściej metodami komputerowymi. Są to najczęściej metody numeryczne: metoda elementów skończonych (MES), która wymaga podziału zęba na

dużą liczbę elementów i rozwiązania odpowiednio dużej liczby równań liniowych, oraz metoda elementów brzegowych (MEB), która wymaga w porównaniu z MES znacznie mniejszej liczby węzłów obliczeniowych, znajdujących się na zarysie zęba i odpowiednio mniejszej liczby równań liniowych. Zastosowanie MEB w procesie konstruowania kół zębatych umożliwia dobór cech konstrukcyjnych kół zębatych i narzędzia ze względu na wytrzymałość na złamanie zębów, a także pozwala na ilościową ocenę wpływu zmian tych cech na wytrzymałość.

W opracowaniu zastosowano metodę elementów brzegowych [3, 4] do wyznaczania naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca zębatego tulei podatnej.

Zastosowane w pracy oprogramowanie [5, 6] opracowane w Instytucie Transportu Politechniki Śląskiej umożliwia:

 wyznaczenie dokładnego zarysu zęba koła zewnętrznie lub wewnętrznie uzębionego w zależności od przyjętych cech geometrycznych kół zębatych i parametrów zarysu odniesienia,
obliczenia wartości i rozkładu naprężeń w stopie zęba.

Celem przeprowadzonych obliczeń numerycznych była weryfikacja opracowanej metodyki obliczeń oraz poprawności zastosowanego modelu MEB wieńca zębatego. W tym celu przeprowadzono analizę wpływu cech konstrukcyjnych tulei podatnej, takich jak względna deformacja promieniowa w<sub>o</sub>/m i względna grubość powłoki g/d<sub>f</sub> na wartości naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca zębatego. Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych porównano z rezultatami uzyskanymi/innymi/metodami/obliczeń zamieszczonymi w

literaturze [10, 11]. Kolejnym etapem pracy było przeprowadzenie analizy wpływu cech konstrukcyjnych narzędzia na wartości naprężeń w dnie wrębu międzyzębnego przy optymalnych cechach konstrukcyjnych tulei podatnej.

#### 2. MODEL MEB WIENCA ZĘBATEGO

Elementem najbardziej obciążonym przekładni falowej jest jej człon podatny. Ma on postać cienkościennej walcowej powłoki ze zmienną, zwiększoną w części uzębionej grubością, połączoną z drugiej strony z wałem wyjściowym cienkościennym denkiem. Na tuleję podatną działa zmienne oraz złożone obcjążenie od generatora i sił międzyzębnych w strefie zazebienia oraz strefie kontaktu z generatorem. Tworzac model wieńca zebatego tulei należy określić obciążenia w zazębieniu i strefie kontaktu z generatorem, w funkcji teoretycznych i przenoszonego momentu. Zagadnienie to, mimo licznych prac doświadczalnych, nie zostało do chwili obecnej w pełni teoretycznie rozwiązane, dlatego problem ten wymaga ciągłych badań i prac rozwojowych. Próbe rozwiązania tego zagadnienia autorzy podjęli w pracy [7], w której zastosowano do wyznaczenia obciążenia pochodzącego od generatora oddziałującego na człon podatny metodę elementów skończonych z wykorzystaniem elementów kontaktowych. Przeprowadzone przez autorów w pracy [7] badania własne z wykorzystaniem opracowanego parametrycznego modelu tulej podatnej potwierdziły jego przydatność do wyznaczenia tych obciążeń. W wykorzystanym modelu MEB wieńca zębatego obciążenie członu podatnego pochodzace od generatora krzywkowego zostało zadane w postaci uprzednio wyznaczonych przemieszczeń powierzchni wewnętrznej tulei za pomocą płaskiego modelu tulei i generatora fali opracowanego w [7]. Natomiast obciążenie pochodzące od przenoszonego momentu obrotowego przez przekładnie zostało zadane w postaci wartości sił międzyzębnych działających na zęby zgodnie z zależnościami podanymi w pracy [8]. Wykonane w opracowaniu obliczenia dotyczą tulei podatnej współpracującej z generatorem krzywkowym.

W programie komputerowym do obliczeń współrzędnych punktów zarysu zębów wykorzystano algorytm podany w pracy [9]. W obliczeniach rozpatrywano wyodrębnione z wieńca zębatego trzy zęby pomijając wpływ pozostałych zębów.



Rys. 1. Model MEB wieńca tulei podatnej Fig. 1. The BEM model of flexspline

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ

Przeprowadzono analizę stanu naprężenia w wieńcu zębatym powłoki podatnej przekładni falowej o następujących parametrach:

i = 146 - przełożenie,

- $z_1 = 292$  liczba zębów wieńca,
- m = 0.419 mm moduł,
- d<sub>f</sub> = 120 mm średnica wewnętrzna,

g = 1.48 mm - grubość ścianki pod uzębieniem,

 $x_1 = 3.5$  - współczynnik przesunięcia zarysu zębów.

Przedstawione wyniki dotyczą wpływu na naprężenia następujących cech konstrukcyjnych tulei:

- względnej deformacji promieniowej w₀/m, w₀/m ∈ (0.9, 1, 1.1)
- względnej grubości g/d<sub>f</sub>,
  - $g/d_f \in (0.009, 0.012, 0.015).$

Rozpatrzono wpływ tych parametrów na wartości naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca w przypadku pracy przekładni bez obciążenia zewnętrznego oraz przy obciążeniu nominalnym.

Analizowany w obliczeniach wrąb międzyzębny z zaznaczoną numeracją węzłów siatki elementów brzegowych przedstawiono na rysunku 2.

Przykładowe wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawiono na rysunkach od 3 do 6.



Rys. 2. Wrąb międzyzębny z zaznaczoną numeracją węzłów siatki MEB Fig. 2. The base of a tooth with BEM node





Fig. 3. The diagram of stress of base a tooth with  $w_o/m = 1$ ,  $M_{nom} = 0$ 



Rys. 4. Rozkłady naprężeń w dnie wrębumiędzyzębnego przy założeniach:  $g/d_f = 0.012$ ,  $M_{nom} = 0$ 

Fig. 4. The diagram of stress of base a tooth with  $g/d_f = 0.012$ ,  $M_{nom} = 0$ 



- Rys. 5. Wykres maksymalnych naprężeń w dnie wrębu zęba (396. węzeł siatki MEB) w funkcji względnej grubości powłoki
- Fig. 5. The diagram of maximum stress of base a tooth  $\sigma_{max}=f(g/df)$





Fig. 6. The diagram of maximum stress of base a tooth  $\sigma_{max} = f(g/df)$ 

#### 4. PODSUMOWANIE

W opracowaniu przedstawiono obliczenia wytrzymałościowe zębów wieńców zębatych członu podatnego przekładni dwufalowej z wykorzystaniem MEB. W przeprowadzonej analizie numerycznej rozpatrywano wpływ cech konstrukcyjnych tulei podatnej na wartości naprężeń we wrębach międzyzębnych wieńca. Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych odpowiadają jakościowo wynikom zamieszczonym w literaturze [10, 11]. Analizując wyniki obliczeń można podać następujące wnioski:

1. Przeprowadzona analiza stanu naprężeń z wykorzystaniem opracowanego modelu MEB wieńca zębatego potwierdziła przydatność opracowanej metodyki obliczeń oraz poprawność zastosowanego modelu.

2. Wzrost względnej grubości powłoki (rys. 3) oraz wzrost względnej deformacji promieniowej (rys. 4) powodują zwiększenie wartości naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca.

3. Miejscem narażonym na silny wzrost naprężeń, a co za tym idzie - o obniżonej wytrzymałości, są dna wrębów międzyzębnych wieńców zębatych. Wartości naprężeń w stopie zęba (rys. 6) są odpowiednio mniejsze od naprężeń występujących w pobliżu dna wrębu (rys. 5). Jak wynika z badań doświadczalnych [1, 2], częstym zjawiskiem poprzedzającym zniszczenie członu podatnego jest jego pękanie w miejscach lokalnego wzrostu naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca [2].

## Literatura

- 1. Nalepa A., Gardulski J.: Stan naprężeń w gładkiej tulei podatnej odkształcanej generatorem fal. ABN, Z. 2, 1976, str. 301-311.
- 2. Nalepa A.: Stan naprężeń w tulejach podatnych zębatych przekładni falowych. Przegląd Mechaniczny, Nr. 11, 1976, str. 376-378.
- 3. Brebbia C. A., Dominquez J.: Boundary Elements. An Introductory Course, McGraw-Hill Inc. 1989.
- 4. Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w mechanice. WNT, Warszawa 1995.
- 5. Wilk A., Matyja T.: Zastosowanie MEB do wyznaczania naprężeń w podstawie zębów kół wewnętrznych uzębionych. XVII Sympozjum PKM, Lublin-Nałęczów 1995.
- Wilk A., Matyja T.: Zastosowanie MEB w obliczeniach wytrzymałościowych kół zębatych. Mat. Konf. Metody i środki projektowania wspomaganego komputerowo. Pol. Warszawska 1995.
- 7. Folęga P., Wilk A.: Analiza numeryczna tulei podatnej z wykorzystaniem elementów kontaktowych MES, ZN Pol. Śl., s. Transport, Z. 41, Gliwice 2000.
- Iwanow M. N., Sorokin A. N.: Rasczot nagruzki na kułczakowyj gienierator i napriażenij rastiażenija gibkogo kolesa wołnowoj pieredaczi. JWUZ Maszinostrojenije, Nr 6, 1980.
- 9. Müller L.: Naprężenia w podstawie zęba koła wewnętrznego uzębionego. ZN. Pol. Śl. s. Transport, z. 10, Gliwice 1991, str. 27-39.
- 10.Gorelow W. N.: Napriażennoje sostojanije zubaczatogo wienca gibkogo kolesa wołnowoj pieredaczi. Maszinostrojenije, Nr 10, 1981, str. 7-10.
- 11.Suvalov S. A., Gorelov V. N.: Stress in the Flexible Gear by Finite Element Method. Maszinostroenije 1, 1983, str. 9-11.

Recenzent: Prof. dr hab. inz. Jerzy Osiński

### Abstract

Application of the Boundary Elements Method (BEM) in the numerical analysis of the harmonic gear drive flexspline has been presented in the paper. The presented a stress analysis of the flexspline can help the designer to determine accurately the maximum stress on the flexspline, which can then be used for optimisation of the flexspline construction. Numerical results of the calculations (Fig. 3,4,5,6) have been compared with results of work [10, 11].

Praca wykonana w ramach BK225/RM10/2001