

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

TOMASZ JĘKOT

**ZASTOSOWANIE METOD SPEKTRALNYCH
W NIELINIOWEJ SPRĘŻONEJ TERMOSPĘŻYSTOŚCI**



P.3359 | 90

MATEMATYKA-FIZYKA

**Z. 63
GLIWICE
1990**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1069



P. 3359/90

TOMASZ JĘKOT

**ZASTOSOWANIE METOD SPEKTRALNYCH
W NIELINIOWEJ SPRZĘŻONEJ
TERMOSPREŻYSTOŚCI**

GLIWICE

1990

02.19.122

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski

Prof. dr hab. Józef Ignaczak

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Jan Węgrzyn

REDAKTOR DZIAŁU — Doc. dr inż. Bogusław Nosowicz

SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Leško

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Mgr Aleksandra Kłobuszowska

Druk z makiet przygotowanych przez Autora

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-470X

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+85 Ark. wyd. 6,8 Ark. druk. 7,75 Papier offset. kl. III 78x100, 70g
Oddano do druku 26.03.90 Podpis. do druku 4.04.90 Druk ukończ. w kwietniu 1990
Zam. 161/90 Cena zł 4.290,—

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	strona
WSTĘP	11
(1) Wprowadzenie.....	11
(2) Pierwotne założenia pracy.....	11
(3) Zrealizowane założenia pracy.....	12
(4) Opis pracy w świetle stanu badań.....	12
(5) Uwagi dotyczące notacji, cytowania literatury i wniosków	17
(6) Podziękowania.....	17
I. RÓWNANIA NIELINIOWEJ TERMOSPĘŻYSTOŚCI OŚRODKÓW ANIZOTROPOWYCH NIEJEDNORODNYCH	19
1. Notacja absolutna.....	19
2. Druga zasada termodynamiki i jej konsekwencje.....	21
3. Termospężyłość.....	23
4. Spężyłość.....	29
5. Problemy początkowo-brzegowe.....	30
6. Wnioski i uwagi.....	32
II. RÓWNANIA DLA OŚRODKÓW JEDNORODNYCH, IZOTROPOWYCH W ZAPISIE TENSOROWYM	33
7. Termospężyłość.....	34
7.1. Równania nieliniowej termospężyłości.....	34
7.2. Równania liniowej termospężyłości.....	35
8. Spężyłość.....	36
8.1. Równania nieliniowej teorii spężyłości.....	36
8.2. Równania liniowej teorii spężyłości.....	37
9. Wnioski i uwagi.....	37

P121/90

III. WSTĘPNA ANALIZA RÓWNAŃ KONSTITUTYWNYCH I SPRĘŻENIA PÓŁ PRZEMIĘSZCZEŃ I TEMPERATURY	39
10. Warianty teorii fizykalnie nieliniowych.....	39
10.1. Materiały termosprężyste.....	39
10.2. Materiały sprężyste.....	40
11. Zależność między izotermicznymi a izentropowymi tensorami sprężystości.....	40
12. Termiczne ściskanie sześcianu.....	42
13. Ściskanie-rozciąganie pręta.....	45
13.1. Efekt termiczny.....	45
13.2. Efekt mechaniczny.....	47
14. Temperaturowe zależności współczynników materiałowych analizowane w literaturze.....	50
15. Wnioski i uwagi.....	52
IV. METODY SPEKTRALNE DLA PROBLEMÓW NIELINIOWYCH	53
16. Określenie typu rozważanych równań.....	53
17. Opis metody.....	54
18. Wybrane rodziny wielomianów ortogonalnych.....	59
19. Metoda Newtona-Raphsona oraz metoda siecznych.....	60
20. Wnioski i uwagi.....	60
V. MODEL RAPTOWNIE OGRZANEGO PRĘTA	62
21. Sformułowanie problemu.....	63
22. Równania bezwymiarowe.....	66
23. Rekurencyjne równania wariacyjne i rozwiązania uogólnione.....	68
24. Element z podziałem.....	73
24.1. Równania problemu w pierwszym kroku czasowym.....	73
24.2. Równania wariacyjne problemu.....	77
25. Zastosowanie metod spektralnych.....	79
26. Wyniki obliczeń.....	81
27. Wnioski i uwagi.....	94
VI. MODEL UDERZENIA PRĘTA.....	97
28. Równania problemu.....	97
29. Równania bezwymiarowe.....	99
30. Rekurencyjne równania wariacyjne i rozwiązania uogólnione (metoda 1).....	100

31. Element z podziałem (metoda 2).....	103
31.1. Równania problemu w pierwszym kroku czasowym.....	103
31.2. Równania wariacyjne problemu.....	105
32. Rozwiązanie problemu.....	106
33. Wyniki obliczeń.....	107
34. Wnioski i uwagi.....	111
WNIOSKI KOŃCOWE.....	113
SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ WYSTĘPUJĄCYCH W TEKŚCIE.....	114
LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE.....	115
STRESZCZENIA	122

СОДЕРЖАНИЕ

	стороница
ПРЕДИСЛОВИЕ	11
(1) Введение	11
(2) Первоначальные предположения работы	11
(3) Осуществленные предположения работы	12
(4) Описание работы в свете состояния исследований	12
(5) Замечания по нотации, цитированию литературы и выводам	17
(6) Слова благодарности	17
I. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ	19
1. Абсолютная нотация	19
2. Второе начало термодинамики и его следствия	21
3. Термоупругость	23
4. Упругость	29
5. Начально-краевые задачи	30
6. Выводы и замечания	32
II. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ В ТЕНЗОРНОЙ ЗАПИСИ	33
7. Термоупругость	34
7.1. Уравнения нелинейной термоупругости	34
7.2. Уравнения линейной термоупругости	35
8. Упругость	36
8.1. Уравнения нелинейной теории упругости	36
8.2. Уравнения линейной теории упругости	37
9. Выводы и замечания	37
III. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И СВЯЗЕЙ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	39
10. Варианты физически нелинейных теории	39
10.1. Термоупругие материалы	39
10.2. Упругие материалы	40
11. Зависимость между изотермическими и изэнтропическими тензорами упругости	40
12. Термическое сжатие куба	42
13. Сжатие-растяжение стержня	45
13.1. Термический эффект	45
13.2. Механический эффект	47

14. Температурные зависимости материальных коэффициентов анализированные в литературе	50
15. Выводы и замечания	52
IV. СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ	53
16. Определение типа рассматриваемых уравнений	53
17. Описание метода	54
18. Некоторые семейства ортогональных многочленов	59
19. Метод Ньютона-Рафсона и метод секущих	60
20. Выводы и замечания	60
V. МОДЕЛЬ ВНЕЗАПНО НАГРЕТОГО СТЕРЖНЯ	62
21. Формулировка задачи	63
22. Критериальные уравнения	66
23. Рекуррентные вариационные уравнения и обобщенные решения	68
24. Поделенный элемент	73
24.1. Уравнения проблемы на первом временном шагу	73
24.2. Вариационные уравнения проблемы	77
25. Применены спектральных методов	79
26. Результаты расчетов	81
27. Выводы и замечания	94
VI. МОДЕЛЬ УДАРА СТЕРЖНЯ	97
28. Уравнения проблемы	97
29. Критериальные уравнения	99
30. Рекуррентные вариационные уравнения и обобщенные решения (метод 1)	100
31. Поделенный элемент (метод 2)	103
31.1. Уравнения на первом временном шагу	103
31.2. Вариационные уравнения проблемы	105
32. Решение проблемы	106
33. Результаты расчетов	107
34. Выводы и замечания	111
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ВЫВОДЫ	113
СПИСОК ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ ВЫСТУПАЮЩИХ В РАБОТЕ ...	114
ЛИТЕРАТУРА	115
РЕЗЮМЕ	122

CONTENTS

	page
PREFACE	11
(1) Introduction	11
(2) Primary assumptions of the work	11
(3) Realized assumptions of the work	12
(4) Description of the work in reference to the literature ..	12
(5) Remarks about notation, references and conclusions	17
(6) Acknowledgement	17
 I. EQUATIONS OF NONLINEAR THERMOELASTICITY OF ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS MEDIA	19
1. Absolute notation	19
2. Second law of thermodynamics and its consequences	21
3. Thermoelasticity	23
4. Elasticity	29
5. Boundary-value problems	30
6. Conclusions and remarks	32
 II. EQUATIONS OF HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC MEDIA IN TENSOR	33
NOTATION	
7. Thermoelasticity	34
7.1. Equations of nonlinear thermoelasticity	34
7.2. Equations of linear thermoelasticity	35
8. Elasticity	36
8.1. Equations of nonlinear theory of elasticity	36
8.2. Equations of linear theory of elasticity	37
9. Conclusions and remarks	37
 III. PRELIMINARY ANALYSIS OF CONSTITUTIVE EQUATIONS AND COUPLED DISPLACEMENT AND TEMPERATURE FIELDS	39

10. Variants of physically nonlinear theories	39
10.1. Thermoelastic materials	39
10.2. Elastic materials	40
11. Dependence between isothermal and isotropic elastic tensors	40
12. Thermal compression of a cube	42
13. Compression-tension of a rod	45
13.1. Thermal effect	45
13.2. Mechanical effect	47
14. Temperature dependence of material coefficients analyzed in the literature	50
15. Conclusions and remarks	52
 IV. SPECTRAL METHODS FOR NONLINEAR PROBLEMS	53
16. Definition of type of equation considered	53
17. Description of the method	54
18. Certain families of orthogonal polynomials	59
19. Newton-Raphson and secant methods	60
20. Conclusions and remarks	60
 V. MODEL OF A RAPIDLY HEATED ROD	62
21. Formulation of the problem	63
22. Dimensionless equations	66
23. Recurrent variational equations and generalized solutions	68
24. Divided element	73
24.1. Equations of the problem in the first time step	73
24.2. Variational equations of the problem	77
25. Application of spectral methods	79
26. Computational results	81
27. Conclusions and remarks	94
 VI. MODEL OF A COMPACT OF A ROD	97
28. Equations of the problem	97
29. Dimensionless equations	99
30. Recurrent variational equations and generalized solutions (method 1).....	100
31. Divided element (method 2).....	103
31.1. Equations of the problem in the first time step.....	103
31.2. Variational equations of the problem	105
32. Solution to the problem	106

33. Computational results	107
34. Conclusions and remarks	111
CONCLUSIONS	113
LIST OF SYMBOLS	114
REFERENCES	115
SUMMARIES	122

WSTĘP

(1) Wprowadzenie

Dażenie do dokładniejszego opisu teorii stanu termosprężystego ciała odkształcalnego powoduje coraz większe zainteresowanie teoriami nie uwzględniającymi założeń upraszczających te teorie. Większość przyjmowanych założeń związana jest z linearyzacją teorii, tzn. z procesem powodującym, że teorię opisują równania liniowe. Nieprzyjmowanie tych założeń powoduje, że teoria opisywana jest równaniami nieliniowymi. Problem w tym, aby znaleźć proste metody opisu teorii nieliniowych i proste metody rozwiązywania równań opisujących je. Niniejsza praca jest próbą opisu nieliniowej teorii termosprężystości i sprężystości oraz propozycją zbudowania metody rozwiązywania pewnej klasy problemów nieliniowych, z tymi teoriami związanych.

(2) Pierwotne założenia pracy

Pierwotnie praca miała trzy główne cele. Pierwszym z nich było zaproponowanie pewnego modelu nieliniowych równań konstytutywnych termosprężystości spełniających dwa postulaty:

- równania są wyprowadzone z zasad termodynamiki,
- w równaniach wykorzystuje się współczynniki materiałowe, które są wyznaczone eksperymentalnie lub można je wyznaczyć znanymi metodami.

Drugim celem pracy było uogólnienie metody tau (jedna z metod spektralnych, por. C. CANUTO i in. [1]) w ten sposób, aby obejmowała przypadki nieliniowych problemów początkowo-brzegowych. Trzecim celem było zastosowanie proponowanej metody do rozwiązania problemu udaru termicznego pręta o skończonej długości.

(3) Zrealizowane założenia pracy

Po zrealizowaniu pierwotnych założeń pracy, a w szczególności po pozytywnym rozwiązaniu problemu raptownie ogrzanego pręta, w naturalny sposób pojawiła się możliwość rozwiązania problemu mechanicznego udaru pręta. Ostatecznie zdecydowano się włączyć rozwiązanie tego problemu do programu pracy. Dodatkowymi argumentami za takim poszerzeniem programu były: z jednej strony, wykazana przydatność zastawiania proponowanej metody, a z drugiej - poznawczy aspekt uzyskanych obliczeń numerycznych. W konsekwencji do pracy dołączono, oprócz rozwiązania problemu mechanicznego udaru pręta, także i podstawowe równania nieliniowej teorii sprężystości. Równania konstytutywne tej ostatniej teorii nie są wkładem autora; pochodzą one od F.D. MURNAGHANA [1] i zainspirowały autora do otrzymania analogicznych równań w termosprężystości.

(4) Opis pracy w świetle stanu badań

Podstawowym celem rozdziału pierwszego jest wyprowadzenie równań nieliniowej termosprężystości ośrodków anizotropowych, niejednorodnych, we współrzędnych konwekcyjnych, na bazie zasad termodynamiki, por. I. MÜLLER [1], K. WILMANSKI [1]. Materiał zgromadzony w tym rozdziale powstał na podstawie prac autora [3], [5], które poszerzono o prezentację nieliniowej teorii sprężystości w przyjętym zapisie. W rozdziale tym rozważania ograniczono do sprężystych przewodników ciepła, por. K. WILMANSKI [1]. Podstawowym problemem w prezentowanej teorii są konstytutywne zależności między tensorem naprężenia i odkształcenia w procesach nieizotermicznych. Powszechnie znane liniowe związki DUHAMELA-NEUMANNA, por. J. IGNACZAK [2], W. NOWACKI [1], [2], [3] można stosować dla małych przyrostów temperatur i małych odkształceń. Dopuszczając występowanie odkształceń skończonych należy zbudować nieliniowe związki konstytutywne wyższych rzędów. Pozostaje jeszcze kwestia powiązania tego typu równań z wpływami termicznymi. W tym zakresie można odnotować trzy podejścia: w pierwszym narzuca się a priori postać równań konstytutywnych, por. Sz. BORKOWSKI [1], [2], [3] dla materiału Kauderera, G. HERRMANN [1]. Podejścia drugie i trzecie są równoważne: drugie, prezentowane m. in. przez K.G. GODUNOWA [1], polega na rozwijaniu funkcji energii wewnętrznej względem tensora odkształcenia oraz przyrostu entropii. Otrzymane w ten sposób zależności konstytutywne zawierają szereg współczynników, nie zbadanych dotąd dla żadnych materiałów. Trzecie podejście, prezentowane dla problemów liniowych m.in. przez W. NOWACKIEGO [1], [2], [3], a dla problemów nieliniowych w niniejszej pracy, opiera się na funkcji energii swobodnej,

zależnej od tensora odkształcenia oraz temperatury. Pewną nowością w podejściu do zagadnienia prezentowanego w niniejszej pracy jest stosowanie rozwinięcia funkcji energii swobodnej tylko względem tensora odkształcenia, natomiast współczynniki rozwinięcia przyjęto jako funkcje temperatury, (por. O. W. DILLON [1], gdzie energia swobodna rozwijana jest zarówno względem tensora odkształcenia, jak i temperatury). Takie traktowanie zagadnienia rozwiązuje jednocześnie problem faktycznej zależności współczynników materiałowych od temperatury, co zostało poparte wieloma badaniami doświadczalnymi. Z kolei, mając pewne dane odnośnie do zależności współczynników materiałowych dowolnego rzędu od temperatury, łatwo wyznacza się tensor naprężeniowo-temperaturowy występujący w wyrażeniu na energię swobodną. W pracy ograniczono się do takiego rozwinięcia energii swobodnej, aby generowane były współczynniki co najwyżej 3 rzędu. Nie zmniejsza to ogólności rozważań, a jest podyktowane aktualnymi możliwościami badań doświadczalnych. W kolejnych rozdziałach będziemy rozważali przykłady liczbowe dotyczące ośrodków jednorodnych i izotropowych.

Zadaniem drugiego rozdziału jest prezentacja równań dla tych ośrodków. W celu ułatwienia przejścia z zapisu absolutnego do wektorowego, dla konkretnych problemów, równania przedstawiono tutaj w notacji tensorowej. Zaproponowano tu pewną wersję konstytutywnych równań nieliniowej termosprężystości, bazujących na znanych w literaturze współczynnikach materiałowych. Materiał tu zawarty powstał na bazie pracy autora [1].

Rozdział trzeci to analiza nieliniowych równań konstytutywnych termosprężystości, bazująca na porównaniu rozwiązań pewnych prostych problemów nieliniowych sprzężonych z rozwiązaniami analogicznych problemów liniowych niesprężonych. Na wstępie określono pewne warianty nieliniowej termosprężystości i sprężystości. Następnie dokonano porównania współczynników izotropowych ze współczynnikami izotermicznymi, które jest ważne z punktu widzenia przydatności akustycznych metod pomiarowych współczynników materiałowych do proponowanych równań konstytutywnych; bowiem pomiary akustyczne mierzą współczynniki izotropowe, a w prezentowanych równaniach konstytutywnych współczynniki są izotermiczne. Przy porównaniu tych grup współczynników pojawia się problem sprzężenia pola przemieszczeń i temperatury. W przypadku ogólnym podano metodę pozwalającą na analizę tego sprzężenia, a dla jednorodnego, izotropowego pręta przedstawiono dane liczbowe. Wstępnie przyjęto dane materiałowe stopu aluminium D54S, por. R.T. SMITH i in. [1], a następnie pewne hipotetyczne współczynniki, przy których znacznie uwypuklone są efekty sprzężenia. zilustrowano również wykresami zależność naprężenia od temperatury w termicznie ściskanych sześciannie - dla różnych wariantów nieliniowych równań konstytutywnych - oraz dla równań liniowych, jak również mechanicznie ściskanym-rozciągającym pręcie. W dalszej

części omówiono zależność współczynników materiałowych drugiego rzędu od temperatury. Jak się okazuje, znajomość tych zależności wnosi już wiele do postaci równań konstytutywnych. Wydaje się, że obecny poziom rozwoju akustycznych metod pomiarowych (są to najbardziej efektywne metody pomiaru modułów materiałowych rzędu wyższego) pozwala na wyznaczenie zależności współczynników 3 rzędu od temperatury, lecz autorowi nie są znane ogólne opracowania podejmujące ten temat. Niniejszy rozdział to m.in. syntetyczne połączenie prac autora [1], [2], [3], [4], [5].

Rozdział czwarty przedstawia uogólnienie metody tau dla nieliniowych równań wariacyjnych, dla dowolnej rodziny wielomianów ortogonalnych. Na wstępie określono klasę równań podlegających metodzie. Pokazano szereg własności wielomianów ortogonalnych. Na podstawie tych własności skonstruowano funkcjonały, które przekształcają wyrażenia nieliniowe w równaniach cząstkowych w ich analogony algebraiczne. Powstaje pytanie, jak wprowadzone uogólnienia mają się do istniejących rozwiązań problemów nieliniowych metodami spektralnymi. W pracy C. CANUTO i in. [1] zebrano ważniejsze tego typu rozwiązania, por. również D. GOTTLIEB i in. [1], F. IF i in. [1], K.Z. KORCZAK i in. [1], H.C. KU i in. [1] N. STERNBERG [1]. Można zauważyć dwa podstawowe przypadki: pierwszy dotyczy rozwiązań periodycznych na przedziale $(0, 2\pi)$, wówczas funkcja aproksymująca $u^N(x, t)$ jest reprezentowana przez obcięty szereg Fouriera

$$u^N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} u_k(t) e^{ikx} \quad (1)$$

oraz drugi, związany z rozwiązaniami na przedziale $(-1, 1)$, a wówczas rozwiązanie jest wyrażone szeregiem Czebyszewa

$$u^N(x, t) = \sum_{k=0}^N u_k(t) T_k(x) \quad (2)$$

gdzie $T_k(x)$ są wielomianami Czebyszewa, stopnia k -tego. W obu powyższych wzorach $u_k(t)$ są nieznanymi współczynnikami. W pierwszym przypadku traktowanie wyrażań nieliniowych oparte jest na następującej zależności:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{ilx} e^{-inx} dx = \delta_{(k+l)n} \quad (3)$$

gdzie δ_{nm} jest delta Kroneckera. Natomiast w drugim przypadku - na znanej

tożsamości

$$T_m T_n = \frac{1}{2} (T_{m-n} + T_{m+n}) \quad (4)$$

Oba przypadki dotyczą równań cząstkowych (RC) o stałych współczynnikach. W niniejszej pracy proponuje się nieco ogólniejsze podejście. Dotyczy ono RC o współczynnikach będących dowolnymi wielomianami i bazuje na zbiorze dowolnych wielomianów ortogonalnych, a więc również o półnieskończonych i nieskończonych przedziałach ortogonalności. Na podkreślenie zasługuje odmienne niż w pracach F. IF i in. [1], C. CANUTO i in. [1], N. STERNBERG [1] potraktowanie zależności od czasu. W wymienionych pracach funkcję niewiadomą $u(x, t)$ zależną od zmiennej przestrzennej x i czasu t , zastępuje się szeregiem, którego wyrazy tworzą iloczyny wielomianów ortogonalnych $P_j(x)$ (zależnych od zmiennej x) i współczynników $a_j(t)$, zależnych od zmiennej t , tj.:

$$u(x, t) = \sum_{i,j=0} a_j(t) P_j(x) \quad (5)$$

Po wykorzystaniu warunku ortogonalności otrzymuje się równania różniczkowe względem czasu, gdzie niewiadomymi funkcjami są współczynniki $a_j(t)$. W prezentowanej pracy współczynniki $a_j(t)$ rozwinięto również w szereg wielomianów ortogonalnych; ponadto zaproponowano iteracyjne równania wariacyjne, dzięki którym badanie rozwiązania, w następnym kroku, sprowadza się do rozwiązania tych samych równań ze zmienionymi warunkami początkowymi; oraz warunki ortogonalności prowadzi do układu nieliniowych równań algebraicznych o nieliniowościach rzędu dwa. W związku z tym podano schemat metody Newtona-Raphsona oraz metody siecznych, które są bardzo przydatne w rozpatrywanym tutaj przypadku.

Zagadnienie propagacji fal w nieliniowych ośrodkach termosprężystych podejmuje m.in. P.B. BAILEY i in. [1], D.R. BLAND [1], [2], J.E. DUNN i in. [1], U.M. DŻURAJEW i in. [1], J.B. HADDOW i in. [1], K. LEONOV i in. [1], M. TORRISI [1], Z. WESOŁOWSKI [1], [2]. Problem propagacji fali termosprężystej w przecie liniowym nieskończonym, dla pewnej klasy warunków początkowych, rozpatrzył J. IGNACZAK [1].

W rozdziale piątym zbadano problem nagle ogrzanego nieliniowego termosprężystego pręta skończonego $0 \leq x \leq l$. Dla $x=0$ temperatura jest funkcją liniową, osiągająca pewną stałą wartość w skończonym czasie t_0 . Jeżeli t_0 dąży do zera, temperatura ta zmierza do funkcji Heavisidea $H(t)$. Również dla $x=0$ znika naprężenie. Natomiast dla $x=l$ znika zarówno temperatura, jak i przemieszczenie

Ponadto przyjęto liniowe związki geometryczne, liniowe równanie ruchu oraz liniowe prawo Fouriera, natomiast równanie energii i związki konstytutywne są nieliniowe. Uwzględniono sprzężenie pola temperatur z polem przemieszczeń. Przedstawiono dwie przybliżone metody rozwiązania tego problemu. Pierwsza metoda polega na wykorzystaniu metody tau, w której funkcje przemieszczenia i temperatury, na całej długości pręta aproksymujemy w kolejnych krokach czasowych. W drugiej metodzie korzystamy z tego, że otoczenie ogrzanego nagle brzegu pręta skończonego zachowuje się podobnie do otoczenia brzeg raptownie ogrzanej liniowej półprzestrzeni, por. R.B. HETNARSKI [1], [2], W. NOWACKI [1], J.T. ODEN [1], w której propaguje się fala sprężysta z nieciągłą pierwszą pochodną przemieszczenia na czole tej fali. Stąd też w drugiej metodzie zastosowano podział obszaru zmienności funkcji poszukiwanych wzdłuż linii charakteryzującej czoło fali sprężystej; pozwoliło to na: 1) dość dokładne przybliżenie skokowego warunku brzegowego na temperaturę, 2) uwzględnienie skoku naprężeń, 3) uzyskanie przybliżonego rozwiązania drogą sklejenia rozwiązań uzyskanych w dwóch podobszarach. Drugą metodę szczegółowo zilustrowano na przykładzie poszukiwania pola temperatury. Sprawa otwarta jest problem poprawności obu metod rozwiązania rozważanego nieliniowego problemu początkowo - brzegowego. Problem ten jest trudny również z tego powodu, że autorowi nie są znane prace rozstrzygające istnienie i jednoznaczność rozwiązania dla tak sformułowanego nieliniowego zagadnienia. Pewną klasę problemów scharakteryzowanych quasi-liniowymi równaniami hiperbolicznymi, a które opisują m.in.: wibracje utwierdzonej membrany z tarciami na brzegu oraz pewną klasę problemów dla nieliniowych równań termosprężystości badał, Q. TIEHU [1]. Pokazał on istnienie globalnego, gładkiego rozwiązania dla małych obciążeń. Jednoznaczność i ciągła zależność rozwiązań od parametrów dla pewnych problemów termosprężystości nieliniowej udowodnił S. CHIRITA [1], [2]. Globalne istnienie, jednoznaczność oraz stabilność rozwiązań pewnej klasy jednowymiarowych problemów nieliniowej termosprężystości pokazał M. SLEMROD [1]. W niniejszym rozdziale pokazano, jak zmienia się rozwiązanie problemu nieliniowego w zależności od stopnia rozwinięcia funkcji, od przyjętej metody przybliżonej; oraz czym różni się ono od rozwiązania analogicznego problemu liniowego. Rozdział piąty jest efektem prac autora [6], [7].

W rozdziale szóstym rozpatrujemy współosiowe uderzenie nieliniowego pręta sprężystego w warunkach izotermicznych. Rozpatrywany problem jest bardzo ważny w zastosowaniach praktycznych i został omówiony w monografii R. GRYBOSIA [1], 223-242. W cytowanej pracy zakłada się teorię liniową, a zależność między siłą uderzenia i odkształceniem wyrażona jest przez tzw. prawo podatności lokalnej; które orzeka, że odkształcenie lokalne jest funkcją kształtu powierzchni

uderzenia. Podstawowym celem omawianej pracy jest określenie czasowego przebiegu siły uderzenia. W niniejszym podejściu idealizuje się sam moment uderzenia i przyjmując siłę brzegową za znaną, na bazie metody tau znajdujemy przemieszczenia i naprężenia w dowolnym punkcie pręta i w dowolnej chwili czasu. Pola te porównujemy z rozwiązaniami analogicznego problemu liniowego. Problemem otwartym, podobnie jak w rozdziale poprzednim, jest istnienie i jednoznaczność rozwiązania oraz poprawność stosowanej metody. Należy dodać, że problemy istnienia i jednoznaczności rozwiązań nieliniowej izotermicznej sprężystości są lepiej zbadane niż analogiczne problemy nieliniowej termosprężystości, por. m.in. M. ALIC [1], M. ARON [1], J.M. BALL [1], J.T. ODEN [2], L. WHEELER i in. [1], VALENT T. [1], V.G. VILKE [1].

(5) Uwagi dotyczące, notacji, cytowania literatury oraz wniosków

Żołeniem pracy jest przedstawienie nieliniowej termosprężystości i sprężystości w jak najbardziej ogólnym ujęciu. Podstawowe wyniki uzyskano dla ośrodków niejednorodnych, anizotropowych. Ponieważ tensory odpowiadające modułom materiałowym trzeciego rzędu są w tym przypadku sześciowskażnikowe, przeto zdecydowano się na tym etapie rozważań na notację absolutną, która w tym przypadku znakomicie ułatwia zapis. Efektem ostatecznym pracy są obliczenia numeryczne bazujące na równaniach opisujących jednorodny, izotropowy pręt. W celu wyprowadzenia równań z ogólnej teorii oraz nadania im praktycznych walorów, w dalszej części pracy przyjęto zapis tensorowy.

Sposób cytowania literatury przyjęto m. in. za L. DEMKOWICZEM [1]. Autorzy prac podani są w kolejności alfabetycznej. Cytowanie następuje przez podanie nazwiska pierwszego z autorów a następnie, w nawiasach [], pojawia się numer kolejnej pracy autora lub grupy autorów.

Na końcu każdego rozdziału są podane uwagi i wnioski dotyczące materiału w nim zawartego. Natomiast na końcu pracy zredagowano wnioski końcowe stanowiące podsumowanie wszystkich rozdziałów.

(6) Podziękowania

Za długoletnią opiekę naukową, wiele inspirujących dyskusji chciałbym wyrazić olbrzymią wdzięczność profesorowi Szczepanowi Borkowskiemu z Instytutu Mechaniki Teoretycznej Politechniki Śląskiej w Gliwicach.

Za czas poświęcony krytyce moich artykułów, stanowiących podstawę niniejszej pracy, za wiele bezcennych wskazówek, które wzbogaciły pracę oraz pomogły mi w jej zredagowaniu, dziękuję profesorowi Józefowi Ignaczakowi z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie.

Za opiekę na stażu naukowym w IPPT PAN Warszawa w 1983r, podczas którego powstało wiele pomysłów stanowiących podstawy moich publikacji, dziękuję profesorowi Zbigniewowi Wesołowskiemu z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie.

Za wiele cennych dyskusji na temat termodynamicznych podstaw mechaniki ciała stałego dziękuję profesorowi Krzysztofowi Wilmańskiemu z Uniwersytetu w Hamburgu.

Za atmosferę umożliwiającą wykonywanie pracy w domu oraz za precyzyjne wykonanie rysunków gorąco dziękuję mojej żonie Barbarze.

Autor

Gliwice, październik 1989

ROZDZIAŁ I

RÓWNANIA NIELINIOWEJ TERMOSPŁĘZYSTOŚCI OSRODKÓW ANIZOTROPOWYCH NIEJEDNORODNYCH

Rozdział ten podaje podstawy nieliniowej termosprężystości dla ośrodków anizotropowych i niejednorodnych w zapisie absolutnym. Najważniejszym elementem są tutaj równania konstytutywne, które skonstruowano opierając się na drugiej zasadzie termodynamiki. Zakładając wielomianową zależność współczynników materiałowych od temperatury wyprowadzono związek na tensor naprężeniowo-temperaturowy. Sformułowano problemy początkowo brzegowe.

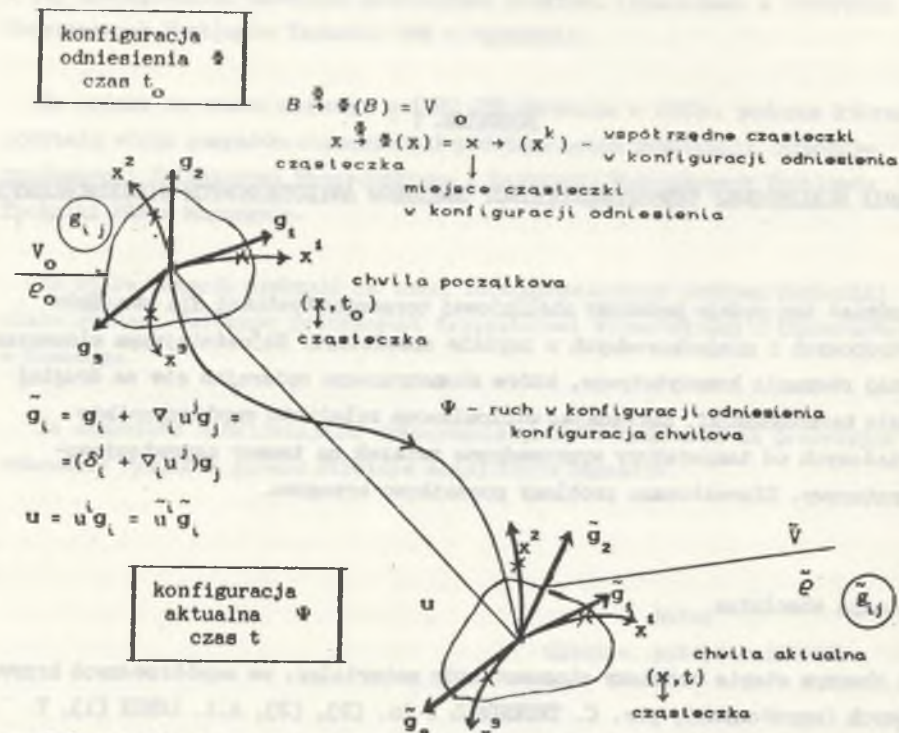
1. Notacja absolutna

Na obecnym etapie będziemy stosować opis materialny, we współrzędnych krzywoliniowych (wmięzionych), por. C. TRUESDELL i in. [2], [3], A.I. LURIE [1], T. JEKOT [5]. Rozważmy ośrodek w stanie naturalnym zajmujący w chwili początkowej t_0 obszar V (por. rys. 1). Obszar V z układem (x, t_0) , gdzie x odpowiada współrzędnym x^k , $k=1,2,3$, nazwiemy konfiguracją odniesienia. Przyjmijmy, że w procesie deformacji, w czasie t , ośrodek zajmie obszar \bar{V} . Obszar \bar{V} z układem (x, t) nazwiemy konfiguracją aktualną. W celu podkreślenia, że obiekt (\cdot) odnosi się do konfiguracji aktualnej używamy symbolu (\cdot) . Stosujemy tensorową analizę absolutną w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa, por. A.I. LURIE [1], C. TRUESDELL [1], C. TRUESDELL i in. [2], [3].

Niech tensory drugiego, czwartego i szóstego rzędu będą oznaczone odpowiednio przez $A, B, E, \bar{E}, G, \bar{S}, S_0 \in \mathcal{E}_2, C, \bar{C}, \bar{C} \in \mathcal{E}_4, D, \bar{D}, \bar{D} \in \mathcal{E}_6$. Niech $P \in \mathcal{E}_p, Q \in \mathcal{E}_q, p \geq q$, oznaczmy przez \otimes operację iloczynową tensorową, przez $\text{tr}_{mn} P \in \mathcal{E}_{p-2}$ operację kontrakcji $(m,n) 1 \leq m \leq n \leq p$. Wprowadzmy operację

$$P Q = \text{tr}_{p,p+1} (P \otimes Q) \in \mathcal{E}_{p+q-2} \quad (1.1)$$

$$P \cdot Q = \begin{matrix} \text{tr} & \text{tr} \\ p-q+1, p+1 & p, p+q \end{matrix} (P \otimes Q) \in \mathcal{E}_{p-q}$$



$$\begin{aligned} (d\tilde{s})^2 - (ds)^2 &= \\ &= (\tilde{g}_{ij} - g_{ij}) dx^i dx^j = \\ &= (g_{il} \nabla_j u^l + g_{kj} \nabla_i u^k + \\ &+ g_{kl} \nabla_i u^k \nabla_j u^l) dx^i dx^j = \\ &= (\tilde{g}_{il} \tilde{\nabla}_j \tilde{u}^l + \tilde{g}_{kj} \tilde{\nabla}_i \tilde{u}^k - \tilde{g}_{kl} \tilde{\nabla}_i \tilde{u}^k \tilde{\nabla}_j \tilde{u}^l) dx^i dx^j = \tilde{E}_{ij} dx^i dx^j = \tilde{E}_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

\tilde{E}_{ij} - tensor odkształcenia Greena \tilde{E}_{ij} - tensor odkształcenia Almansiego

Rys. 1. Konfiguracje odniesienia i aktualna

1. Reference and actual configurations

Operatory różniczkowania oznaczmy przez

$$\nabla = g^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \nabla a = g^k \frac{\partial a}{\partial x^k} = g^k \otimes g^a \nabla_k a_a = g^k \otimes g_a \nabla_k a^a;$$

$$\tilde{\nabla} = \tilde{g}^k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}, \quad \tilde{\nabla} a = \tilde{g}^k \frac{\partial a}{\partial \tilde{x}^k} = \tilde{g}^k \otimes \tilde{g}^a \tilde{\nabla}_k a_a = \tilde{g}^k \otimes \tilde{g}_a \tilde{\nabla}_k a^a,$$

gdzie $g^k, g_k; \tilde{g}^k, \tilde{g}_k$ są wektorami baz, odpowiednio konfiguracji odniesienia oraz aktualnej. Operacje $\nabla(\cdot), \tilde{\nabla}(\cdot)$ są operacjami gradientu, gdy (\cdot) jest skalarem, a $\nabla \cdot (\cdot), \tilde{\nabla} \cdot (\cdot)$ są operacjami dywergencji, gdy (\cdot) jest tensorem, odpowiednio w konfiguracjach odniesienia i aktualnej.

2. Druga zasada termodynamiki i jej konsekwencje

Rozważania nasze ograniczymy do ośrodków zwanych sprężystymi przewodnikami ciepła, por. C. TRUESDELL i in. [1], K. WILMANSKI [1]. Relacje konstytutywne ograniczają się wówczas do zależności

$$\tilde{U} = \tilde{U}(\tilde{E}, T; \mathbf{x}), \quad \tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{E}, T, T_k; \mathbf{x}), \quad (1.2)$$

gdzie \tilde{U} jest gęstością energii wewnętrznej na jednostkę masy, \tilde{E} jest tensorem odkształcenia Almansiego, $T=T(\mathbf{x}, t)$ temperatura absolutna, natomiast \tilde{q} jest strumieniem ciepła (powierzchniowa gęstość przepływu ciepła). Wymienione wielkości określone są w konfiguracji aktualnej. Równania lokalnej postaci bilansu energii oraz lokalnej, drugiej zasady termodynamiki (nierówność Clausiusa-Duhema), w wersji zaproponowanej przez I. MÜLLERA [1], w przyjętym tutaj opisie mają postać

I zasada termodynamiki

$$\tilde{\rho} \dot{\tilde{U}} = \tilde{E} \cdot \tilde{S} - \tilde{\nabla} \tilde{q} + \tilde{W}, \quad \text{lokalna (różniczkowa) postać bilansu energii} \quad (1.3.1)$$

II zasada termodynamiki

$$\tilde{\rho} \dot{\tilde{s}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{q}/T) \geq 0, \quad \text{nierówność Clausiusa-Duhema,} \quad (1.3.2)$$

gdzie $\tilde{\rho}=\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ jest aktualną gęstością ośrodka, \tilde{S} tensorem naprężeń Cauchy'ego, $\tilde{E} \cdot \tilde{S}$ jest gęstością mocy na jednostkę objętości (gęstość mocy naprężenia), \tilde{W} intensywnością źródeł ciepła na jednostkę objętości, \tilde{s} entropia na jednostkę objętości oraz $(\dot{\cdot})=\partial(\cdot)/\partial t$ w przyjętym opisie. Podstawiając do wzoru (1.3.2) obliczoną z (1.3.1), wartość $\tilde{\nabla} \tilde{q}$ otrzymamy

$$\tilde{\rho} \dot{\tilde{s}} + (1/T) (\tilde{E} \cdot \tilde{S} - \tilde{\rho} \dot{\tilde{U}}) + \tilde{W}/T - \tilde{q} \tilde{\nabla} T/T^2 \geq 0 \quad (1.4)$$

Wprowadzmy funkcję energii swobodnej \bar{F} na jednostkę masy

$$\bar{F} = \bar{U} - \bar{s} T \quad (1.5)$$

Można wówczas napisać

$$\dot{\bar{U}} = \dot{\bar{F}} + \dot{\bar{s}} T + \bar{s} \dot{T} \quad (1.6)$$

Po podstawieniu powyższej równości do (1.4) mamy

$$(\dot{\bar{E}} \cdot \dot{\bar{S}} - \dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{F}} - \dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{s}} \dot{T})/T + \bar{W}/T - \bar{q} \nabla T/T^2 \geq 0 \quad (1.7)$$

Ze względu na zależność (1.2) uzyskamy

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{E}, T; \mathbf{x}), \quad (1.8)$$

stad

$$\dot{\bar{F}} = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{E}} \right)_T \cdot \dot{\bar{E}} + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial T} \right)_E \dot{T}, \quad (1.9)$$

gdzie pochodne $(\cdot)_T$, $(\cdot)_E$ są wyznaczone, odpowiednio, przy stałej temperaturze oraz przy stałym odkształceniu. Wstawiając (1.9) do (1.7) otrzymamy

$$\left\{ \left[\dot{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{E}} \right)_T - \dot{\bar{S}} \right] \cdot \dot{\bar{E}} + \dot{\bar{\rho}} \left[\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial T} \right)_E + \bar{s} \right] \dot{T} \right\} / T - \bar{W}/T + \bar{q} \nabla T/T^2 \leq 0 \quad (1.10)$$

Ze względu na to, że powyższa nierówność musi zachodzić dla dowolnych wartości $\dot{\bar{E}}$, \dot{T} , spełnione powinny być relacje

$$\dot{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{E}} \right)_T = \dot{\bar{S}}, \quad \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial T} \right)_E = -\bar{s} \quad (1.11)$$

Z relacji (1.5) i (1.11) można otrzymać związek

$$\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial T} \right)_E = T \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial T} \right)_E, \quad (1.12)$$

a łącząc (1.5) z (1.11) uzyskujemy równość

$$\dot{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{E}} \right)_T = -\dot{\bar{S}}/T + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{T} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{E}} \right)_T \quad (1.13)$$

Podstawiając dwie ostatnie równości ((1.12), (1.13)) do relacji

$$\dot{\bar{\rho}} d\bar{s} = \dot{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial T} \right)_E dT + \dot{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{E}} \right)_T \cdot d\bar{E}, \quad (1.14)$$

otrzymujemy tożsamość Gibbsa

$$\dot{\bar{\rho}} d\bar{U} = T \dot{\bar{\rho}} d\bar{s} + \dot{\bar{S}} \cdot d\bar{E} \quad (1.15)$$

Wprowadzmy obecnie nowe funkcje F i s odpowiadające kolejno energii swobodnej oraz entropii w odniesieniu do jednostki objętości ciała w stanie naturalnym:

$$F = \rho_0 \bar{F}, \quad s = \rho_0 \bar{s}, \quad (1.16)$$

gdzie $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x})$ jest gęstością masy ośrodka w stanie naturalnym. Podstawiając (1.16) do równań (1.11) otrzymamy

$$\dot{\bar{S}} = \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\rho_0} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{E}} \right)_T, \quad s = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_E \quad (1.17)$$

W przyjętym zapisie współrzędne kowariantne tensora odkształcenia Greena E są równe współrzędnym kowariantnym tensora odkształcenia Almansiego \bar{E} (por.: T. JEKOT [1], rys. 1, uwaga (b)) stad równanie (1.17) przyjmuje postać

$$\dot{\bar{S}} = \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\rho_0} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{E}} \right)_T \quad (1.18)$$

3. Termosprężystość

Określmy następujące wielkości, por. T. JEKOT [5],

$$\bar{c}_E = \dot{\bar{\rho}} T \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial T} \right)_E, \quad s_\theta = - \frac{\rho_0}{\dot{\bar{\rho}}} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial T} \right)_E, \quad (1.19)$$

gdzie c_e jest względną pojemnością cieplną objętościową (ciepłem właściwym przy stałej deformacji liczoną na jednostkę objętości), natomiast wielkość S_e będziemy mogli obliczyć znając zależność tensora naprężenia Cauchy'ego S od temperatury. Łącząc obecnie równanie bilansu ciepła (1.3.1) z tożsamością Gibbasa (1.15) oraz wykorzystując relacje (1.11)₂, (1.16)₂, (1.19), po prostych przekształceniach otrzymamy równanie bilansu ciepła w konfiguracji aktualnej

$$\frac{e_0}{e} (\nabla \cdot \tilde{q} + \tilde{c}_e \dot{T}) + T S_e \cdot \dot{E} = \frac{e_0}{e} \tilde{W} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right) \quad (1.20)$$

W celu zapisania powyższego równania w konfiguracji odniesienia przedstawimy na wstępie wektor strumienia ciepła w metryce tej konfiguracji,

$$\bar{q} = G \tilde{q} \quad (1.21)$$

gdzie

$$\bar{q} = \frac{e_0}{e} \tilde{q} \quad , \quad G = 1 + \nabla u \quad .$$

W powyższych wzorach 1 oznacza tensor jednostkowy, natomiast u wektor przemieszczenia. Ponieważ

$$\nabla \bar{q} = \frac{e_0}{e} \nabla \tilde{q} \quad , \quad (1.22)$$

więc równanie (1.20) przyjmuje w konfiguracji odniesienia postać (por. W.I. KONDAUROW [1], T. JĘKOT [5]):

$$\nabla \cdot (G^{-1} \bar{q}) + c_e \dot{T} + T S_e \cdot \dot{E} = W \quad , \quad (1.23)$$

gdzie $c_e = (e_0/e) \tilde{c}_e$ oraz $W = (e_0/e) \tilde{W}$ są, odpowiednio, ciepłem właściwym, na jednostkę objętości ciała (w stanie naturalnym) oraz intensywnością źródła ciepła (w stanie aktualnym), odniesioną do elementu objętości ciała w stanie początkowym. Do tej pory rozważania dotyczyły termosprężystości. Obecnie podamy równania równowagi dynamicznej, które są identyczne dla teorii sprężystości i termosprężystości. Równania te w przyjętym zapisie, w konfiguracji odniesienia mają postać (por. również A. I. LURIE [1], C. TRUESDELL [1]):

$$\nabla \cdot T - e_0 \ddot{u} + e_0 f = 0 \quad ,$$

$$GT = (GT)^T \quad , \quad (1.24)$$

gdzie T jest pierwszym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, f wektorem sił masowych, a $(\cdot)^T$ operacją transponowania. Tensor T jest związany z tensorem naprężenia Cauchy'ego S relacją

$$T = e_0 G \tilde{S} / e \quad , \quad (1.25)$$

Podstawiając do powyższego związku relację (1.18) otrzymamy równość

$$T = G \left(\frac{\partial F}{\partial E} \right)_T \quad , \quad (1.26)$$

w której nie występuje iloraz gęstości ośrodka.

Określimy obecnie zależności strumienia ciepła od temperatury, a także - tensor naprężenia od temperatury oraz tensora odkształcenia w zakresie termosprężystym. Związek (1.2)₂ jest przedmiotem badań wielu prac (por. np. E.S. SUHUBI [1]).

W niniejszej pracy przyjmijmy liniowe prawo Fouriera

$$\bar{q} = -L \nabla T \quad , \quad (1.27)$$

gdzie L jest tensorem przewodzenia ciepła. Przejdziemy obecnie do określenia tensora naprężenia. W tym celu rozwińmy funkcję energii swobodnej F względem tensora odkształcenia E , zakładając, że współczynniki rozwinięcia są zależne od temperatury i miejsca

$$F(E, T; x) = F_0(T; x) + \bar{B}(T; x) \cdot E + \bar{C}(T; x) \cdot (E \otimes E) + \bar{D}(T; x) \cdot (E \otimes E \otimes E) + \dots \quad (1.28)$$

Podstawiając równanie (1.28), w którym zachowano cztery wyrazy rozwinięcia do (1.18), otrzymamy

$$\bar{S} = \frac{e}{e_0} [\bar{B}(T; x) + \bar{C}(T; x) \cdot E + \bar{D}(T; x) \cdot (E \otimes E)] \quad , \quad (1.29)$$

gdzie \bar{B} jest tensorem naprężeniowo-temperaturowym, por. np. W.I. KONDAUROW [1], E.S. SUHUBI [1], a \bar{C} , \bar{D} są izotermicznymi tensorami sprężystości drugiego i

trzeciego rzędu, związanymi z tensorami C i D operacją wyrażoną relacją (1.18). Wyznamy teraz tensor naprężeniowo-temperaturowy. Ze względu na łatwiejszą interpretację fizyczną dalsze rozważania przeprowadzimy operując przyrostem temperatury

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_0, \quad (1.30)$$

gdzie $T_0 = \text{const}$ jest temperatura ośrodka w stanie naturalnym. Równanie (1.29) przyjmuje postać

$$\tilde{S} = \frac{\tilde{e}}{e_0} [B + C \cdot E + D \cdot (E \otimes E)], \quad (1.31)$$

gdzie

$$B = B(\theta, x) = \bar{B}(\theta + T_0, x), \quad C = C(\theta, x) = \bar{C}(\theta + T_0, x),$$

$$D = D(\theta, x) = \bar{D}(\theta + T_0, x).$$

Ograniczmy obecnie rozważania do badania ośrodków, podobszarami jednorodnych w sensie materiałowym. Podzielmy rozważany obszar na jednorodne obszary V_α . Załóżmy, że obszary V_α rozdzieliliśmy. Na każdym z wydzielonych obszarów V_α dokonujemy następującego eksperymentu prowadzącego do określenia tensora naprężeniowo-temperaturowego. Podobszar V_α , o brzegu Γ_α , ogrzejmy jednorodnym polem temperatury, bez naprężeń brzegowych, stąd naprężenia Cauchy'ego;

$$\tilde{S} \Big|_{\Gamma_\alpha} = 0 \quad (1.32)$$

Ze względu na jednorodność wewnątrz podobszaru tensor naprężenia \tilde{S} zależy wyłącznie od temperatury, stąd ze względu na (1.32) mamy

$$\tilde{S} = 0, \quad \forall x \in V_\alpha, \quad (1.33)$$

a odkształcenie E przyjmuje postać

$$E(t) = A(\theta) \theta(t), \quad (1.34)$$

gdzie $A = A(\theta; x)$ jest tensorem rozszerzalności termicznej, (por. np. W.I. KONDAUROW [1], E.S. SUHUBI [1]). Korzystając z (1.31) i (1.34) stwierdzamy, że

relacja (1.33) przyjmuje postać

$$B(\theta) = -[C \cdot A \theta + D \cdot (A \otimes A) \theta^2], \quad (1.35)$$

Ponieważ wzór (1.35) jest słuszny dla każdego podobszaru, więc będzie słuszny dla $\forall x \in V$, stąd ostatecznie

$$B(\theta; x) = - \left\{ C(\theta; x) \cdot A(\theta; x) \theta + D(\theta; x) \cdot [A(\theta; x) \otimes A(\theta; x)] \theta^2 \right\}. \quad (1.36)$$

Założmy, że zależności temperaturowe tensora rozszerzalności termicznej oraz tensorów sprężystości możemy przedstawić w postaci następujących wielomianów

$$A(\theta; x) = \sum_{k=0}^K A_k(x) \theta^k, \quad C(\theta; x) = \sum_{k=0}^L C_k(x) \theta^k, \quad D(\theta; x) = \sum_{k=0}^M D_k(x) \theta^k. \quad (1.37)$$

Stąd, uwzględniając (1.36), tensor B winien mieć postać

$$B(\theta; x) = \sum_{k=0}^N B_k(x) \theta^k, \quad (1.38)$$

gdzie

$$N = \max(L+K+1, M+2K+2);$$

współczynniki B_k otrzymać można przez porównanie wyrażeń znajdujących się przy tych samych potęgach θ , w (1.35). Przykładowo, dla przypadku gdy

$$K = L = M = 0 \quad (1.39)$$

mamy

$$N = 2, \quad B = B_1 \theta + B_2 \theta^2, \quad (1.40)$$

gdzie

$$B_1 = -C \cdot A, \quad B_2 = -D \cdot (A \otimes A).$$

Przejdźmy do przedstawienia zlinearyzowanych równań konstytutywnych i pokazania konsekwencji linearyzacji w równaniach teorii. Konsekwencje wynikają z

faktu, że równanie bilansu ciepła jest sprzężone z równaniem równowagi dynamicznej - pewnym członem wyrażającym zależność naprężenia od temperatury. Ograniczając rozwinięcie funkcji energii swobodnej do tensorów rzędu drugiego, uzyskamy to, że wzór (1.28) przyjmuje postać

$$F(E, T; x) = F(0, T; x) + \bar{B}(T; x) \cdot E + \bar{C}(T; x) \cdot (E \otimes E) \quad (1.41)$$

W konsekwencji równanie konstytutywne (1.31) będzie następujące

$$\bar{S} = \frac{\bar{e}}{e_0} (B + C \cdot E) \quad (1.42)$$

jeżeli ponadto założymy, że tensory A i C nie zależą od temperatury, to równanie (1.35) przyjmie formę

$$B(x) = - C(x) \cdot A(x) \theta \quad (1.43)$$

Powyższe założenia określają naprężeniowe równania konstytutywne fizykalnie liniowej termosprężystości. Relacja (1.43) jest podana m.in. przez E.S. SUHUBIEGO [1] i D.E. CARLSONA [1]. Teraz można przejść do równań równowagi. Wyrażenie S_θ określone równaniem (1.19)₂ przy obecnych założeniach ma następującą postać:

$$S_\theta = - \frac{\bar{e}}{e_0} C(x) \cdot A(x) \quad (1.44)$$

Równanie (1.23) pozostaje w dalszym ciągu nieliniowe ze względu na występowanie temperatury T w trzecim członie strony prawej. W teorii liniowej przyjmuje się małe przyrosty temperatury θ , por. wzór (1.30), stąd temperaturę T przybliża się temperaturą stanu naturalnego T_0 . Ostatecznie równania równowagi fizykalnie liniowej sprzężonej termosprężystości mają postać

$$\bar{\nabla} \cdot (G^{-1} q) + c_e \dot{T} - T_0 \frac{\bar{e}}{e_0} C \cdot A \cdot \dot{E} = W \quad (1.45.1)$$

$$\bar{\nabla} \cdot T - e_0 \ddot{u} + e_0 \dot{f} = 0 \quad (1.45.2)$$

$$GT = (GT)^T \quad (1.45.3)$$

Przyjmując w powyższych równaniach

$$T_0 \frac{\bar{e}}{e_0} C \cdot A \cdot \dot{E} = 0 \quad (1.46)$$

otrzymamy równania niesprężone. Jeśli przyjmiemy, że

$$G = 1, \quad e_0 = \bar{e} \quad (1.47)$$

oraz liniowy tensor odkształcenia, to uzyskamy równania teorii liniowej geometrycznej.

4. Sprężystość

Teorię sprężystości można traktować jako przypadek teorii termosprężystości przy stałej temperaturze. Rozpatrywanie teorii sprężystości w tym aspekcie jest o tyle ogólniejsze, że pozwala na badanie ośrodka dla różnych, lecz stałych temperatur. Dokładniej rzecz ujmując, można badać zachowanie się tego samego ciała w różnych temperaturach. Jeżeli w każdym przypadku procesy będą izotermiczne i odwracalne, to możemy mówić o zakresie sprężystym. Ewentualne różnice w zachowaniu się ośrodka w każdym przypadku wynikną, zgodnie z proponowanymi równaniami konstytutywnymi teorii termosprężystości, z różnych wartości współczynników materiałowych zależnych od temperatury. Przyjmijmy równanie równowagi dynamicznej z teorii termosprężystości, por. (1.24). W związku z tym rozważania dla teorii sprężystości ograniczymy do równań konstytutywnych. Zgodnie z proponowanym podejściem energia swobodna w zakresie sprężystym zależy od tensora odkształcenia i od położenia

$$F(E; x) = F(0; x) + \bar{B}(x) \cdot E + \bar{C}(x) \cdot (E \otimes E) + \bar{D}(x) \cdot (E \otimes E \otimes E) + \dots \quad (1.48)$$

Wstawiając (1.48) do (1.18) otrzymamy analogicznie do (1.31)

$$\bar{S} = \frac{\bar{e}}{e_0} [B + C \cdot E + D \cdot (E \otimes E)] \quad (1.49)$$

gdzie tensory C, D są określone dla pewnej stałej temperatury T_0 . Zakładając istnienie stanu naturalnego (zerowe naprężenia przy zerowym odkształceniu)

wioskujemy, że

$$\mathbf{B} = 0 ,$$

stad równanie konstytutywne nieliniowej sprężystości ma ostatecznie postać

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\bar{e}}{e_0} [\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{D} \cdot (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E})] . \quad (1.50)$$

Przyjmując zależności (1.47) oraz liniowy tensor odkształcenia \mathbf{E} mamy do czynienia z teorią liniową geometrycznie i nieliniową fizycznie. Związek (1.50) ma postać

$$\bar{\mathbf{S}} = [\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{D} \cdot (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E})] \quad (1.51)$$

Przyjmując z kolei

$$\mathbf{D} \equiv 0 \quad (1.52)$$

otrzymamy teorię liniową fizycznie i nieliniową geometrycznie. Związek (1.50) ma wówczas postać

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\bar{e}}{e_0} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} . \quad (1.53)$$

Przyjmując zależności (1.47) oraz liniowy tensor odkształcenia mamy teorię liniową geometrycznie i fizycznie z równaniem konstytutywnym

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} . \quad (1.54)$$

5. Problemy początkowo-brzegowe

Zdefiniujmy następujące warunki początkowe:

$$\theta(\mathbf{x}, t=t_0) = \theta_0(\mathbf{x}) , \quad (1.55.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t=t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) , \quad (1.55.2)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t=t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) , \quad \text{dla } \mathbf{x} \in V , \quad (1.55.3)$$

gdzie V jest obszarem przed odkształceniem (konfiguracja odniesienia) oraz warunki brzegowe, w trzech grupach:

1. Termiczne warunki brzegowe:

$$\text{a) } \theta(\mathbf{x}, t) = f_1(\mathbf{x}, t) , \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_1 \times \mathcal{J} , \quad (1.56.1)$$

$$\text{b) } \mathbf{q}n = f_2(\mathbf{x}, t) , \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_2 \times \mathcal{J} , \quad (1.56.2)$$

$$\text{c) } \mathbf{q}n + \kappa(\theta)\theta = \kappa(\theta)f_3(\mathbf{x}, t) , \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_3 \times \mathcal{J} , \quad (1.56.3)$$

$$\bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i = \partial V , \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset , \quad i \neq j \quad (i, j=1, 2, 3) .$$

gdzie ∂V jest brzegiem rozważanego obszaru, a \mathbf{n} wektorem normalnym, zewnętrznym do brzegu ∂V , natomiast \mathcal{J} jest przestrzenią czasu $[t_0, \infty)$;

2. Przemieszczeniowe warunki brzegowe:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) , \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_4 \times \mathcal{J} ; \quad (1.57)$$

3. Naprężeniowe warunki brzegowe:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) , \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_5 \times \mathcal{J} , \quad (1.58)$$

$$\Gamma_4 \cap \Gamma_5 = \emptyset , \quad \overline{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = \partial V .$$

Problem początkowo brzegowy nieliniowej, anizotropowej, niejednorodnej termosprężystości określają: równania bilansu ciepła (1.23), równowagi dynamicznej (1.24), konstytutywne (1.31), po uwzględnieniu w nich zależności między tensorem naprężeń Cauchy'ego \mathbf{S} a Pioli-Kirchhoffa \mathbf{T} , por. (1.25), oraz warunki początkowo brzegowe (1.55)-(1.58). Problem początkowo brzegowy nieliniowej, anizotropowej, niejednorodnej sprężystości określają: równania, równowagi (1.24), konstytutywne (1.50), po uwzględnieniu w nich zależności między tensorem naprężeń Cauchy'ego \mathbf{S} a Pioli-Kirchhoffa \mathbf{T} , por. (1.25), oraz warunki początkowo brzegowe (1.55.2), (1.55.3) (1.57) i (1.58).

6. Wnioski i uwagi

(a) Znajomość tensora rozszerzalności termicznej oraz tensorów sprężystości drugiego i trzeciego rzędu i ich zależności temperaturowych w postaci funkcji wielomianowych, por. (1.37), pozwala wyznaczyć tensor naprężniowo-temperaturowy, dając kompletne nieliniowe równania konstytutywne termosprężystych, anizotropowych, podobszarami jednorodnych (w sensie materiałowym) przewodników ciepła.

(b) Tensor odkształcenia Almansiego (wyrażony w wielkościach konfiguracji aktualnej) oraz tensor odkształcenia Greena (wyrażony w wielkościach konfiguracji odniesienia), w przyjętym zapisie (por. rys. 1) określone są przez różnicę metryk obu konfiguracji

$$\tilde{E}_{ij}(u_k) = E_{ij}(u_k) = \tilde{g}_{ij} - g_{ij} \quad (1.59)$$

Z powyższej relacji wynika równość współrzędnych kowariantnych tensorów Almansiego i Greena.

ROZDZIAŁ II

RÓWNANIA DLA OŚRODKÓW JEDNORODNYCH I IZOTROPOWYCH W ZAPISIE TENSOROWYM

W rozdziale tym przedstawimy równania nieliniowej i liniowej termosprężystości i sprężystości ośrodków jednorodnych, izotropowych, we współrzędnych konwekcyjnych, w zapisie tensorowym. Zaczniemy od wielkości i równań wspólnych dla termosprężystości i sprężystości. Tensor odkształcenia Greena ma postać (por. np. Cz. WOŹNIAK [1], [2]):

$$2E_{ij}(x,t) = g_{ik} \nabla_j u^k + g_{kj} \nabla_i u^k + g_{kl} \nabla_l u^k \nabla_j u^l \quad (2.1)$$

$$(x,t) \in V \times \mathcal{J} \quad ,$$

gdzie g_{ij} jest tensorem metrycznym konfiguracji odniesienia.

Równania równowagi (1.24) są następujące (por. również Cz. WOŹNIAK [1], [2]):

$$\nabla_j T^{ij} - \rho_0 \ddot{u}^i + \rho_0 f^i = 0 \quad (2.2.1)$$

$$A_i^k T^{il} = A_i^l T^{ik} \quad ,$$

$$T^{ij} = T^{ij}(x,t) \quad , \quad T^{ij} \neq T^{ji} \quad ,$$

gdzie T^{ij} jest (niesymetrycznym) tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, natomiast

$$A_i^k = \delta_i^k + \nabla_i u^k \quad (2.2.2)$$

7. Termosprężystość

7.1. Równania nieliniowej termosprężystości

Równanie bilansu ciepła (1.23), por. T. JEKOT [1], ma postać

$$\nabla_i q^i + c_e \dot{\theta} + (T_0 + \theta) \sigma_T^{ij} \dot{E}_{ij} = W \quad (2.3)$$

gdzie, zgodnie z relacją (1.19)

$$\sigma_T^{ij} = - \frac{e_0}{e} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}^{ij}}{\partial \theta} \right]_e \quad (2.4)$$

gdzie teraz $\bar{\sigma}^{ij}$ oznacza tensor naprężenia Cauchy'ego związany z tensorem Pioli-Kirchhofa relacją następującą (por. (1.25)):

$$\bar{\sigma}^{ij} = \bar{e} T^{il} A_l^j / e_0 \quad (2.5)$$

Równania konstytutywne (1.27), (1.29), dla ośrodków jednorodnych izotropowych, są następujące (por. T. JEKOT [1]):

$$q^i = - \lambda_T g^{ij} \nabla_j \theta \quad (2.6.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{ij} = \frac{e_0}{e} [& - \gamma g^{ij} + \lambda I_1 g^{ij} + 2\mu g^{il} g^{jk} E_{lk} + l I_1^2 g^{ij} - 2m I_2 g^{ij} + \\ & 2m I_1 g^{il} g^{jk} E_{lk} + n ([E_{mn}]^{ij} \det([g^{lk}]))] \quad (2.6.2) \end{aligned}$$

$$I_1 = E_{kk} \quad , \quad I_2 = E_{kl} E_{kl} \quad ,$$

gdzie λ_T jest współczynnikiem przewodnictwa ciepła, $\gamma = \gamma(\theta)$ jest tu modułem naprężeniowo-temperaturowym, $\lambda = \lambda(\theta)$, $\mu = \mu(\theta)$ są współczynnikami sprężystości Lamego (moduły sprężystości drugiego rzędu), I_1 , I_2 są niezmiennikami tensora odkształcenia Greena E_{ij} , $l = l(\theta)$, $m = m(\theta)$, $n = n(\theta)$ są to współczynniki sprężystości F.D. MURNAGHANA [1] (moduły sprężystości trzeciego rzędu), natomiast $([\cdot])^{ij}$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu lj macierzy $[\cdot]$. W literaturze można znaleźć wiele danych dotyczących stałych sprężystości drugiego i trzeciego rzędu, por. A.I. LURIE [1], R.T. SMITH i in. [1], oraz zależności modułów drugiego rzędu od temperatury, LANDOLT-BORNSTAIN [1].

Zależności te będą omówione nieco szerzej w następnym rozdziale. Nie są znane autorowi ogólne opracowania zawierające zależności modułów trzeciego rzędu od temperatury, stąd też proponowana jest następująca wersja równań konstytutywnych:

Zakładamy liniową zależność względem przyrostu temperatury, modułów Lamego oraz współczynnika rozszerzalności termicznej α_T :

$$\lambda = \lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \theta \quad , \quad \mu = \mu(\theta) = \mu_0 + \mu_1 \theta \quad , \quad \alpha_T = \alpha_T(\theta) = \alpha_T^0 + \alpha_T^1 \theta \quad (2.7)$$

W powyższych relacjach λ_0 , μ_0 , α_T^0 są wartościami odpowiednich współczynników w temperaturze stanu odniesienia T_0 . Zakładamy również, że moduły trzeciego rzędu są niezależne od temperatury

$$l = l_0 = \text{const} \quad , \quad m = m_0 = \text{const} \quad , \quad n = n_0 = \text{const} \quad (2.8)$$

Zgodnie z relacjami (1.36) oraz (1.37) i (1.38) moduł $\gamma(\theta)$ będzie miał postać

$$\gamma(\theta) = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \theta^k \quad (2.9)$$

gdzie

$$\gamma_1 = 3K_0 \alpha_T^0 \quad , \quad \gamma_2 = 3K_1 \alpha_T^0 + 3K_0 \alpha_T^1 + L(\alpha_T^0)^2 \quad (2.10)$$

$$\gamma_3 = 3K_1 \alpha_T^1 + 2L \alpha_T^0 \alpha_T^1 \quad , \quad \gamma_4 = L(\alpha_T^1)^2$$

oraz

$$3K_0 = 3\lambda_0 + 2\mu_0 \quad , \quad 3K_1 = 3\lambda_1 + 2\mu_1 \quad , \quad L = 9l + n$$

7.2. Równania liniowej termosprężystości

Równania teorii fizykalnie liniowej uzyskamy przyjmując

$$\lambda = \lambda(\theta) = \lambda_0 \quad , \quad \mu = \mu(\theta) = \mu_0 \quad , \quad \alpha_T = \alpha_T(\theta) = \alpha_T^0 \quad ; \quad (2.11)$$

$$l = l_0 = 0 \quad , \quad m = m_0 = 0 \quad , \quad n = n_0 = 0 \quad ;$$

uwzględniając powyższe równości w równaniach (2.6.2) otrzymamy

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \frac{e_0}{e} [-\gamma_1 g^{ij} + \lambda_0 I_1 g^{ij} + 2\mu_0 g^{il} g^{jk} E_{lk}] , \quad (2.12)$$

gdzie

$$\gamma_1 = 3K_0 \alpha_T^0 , \quad 3K_0 = 3\lambda_0 + 2\mu_0 \quad (2.13)$$

Jeśli przyjmiemy ponadto liniową część tensora odkształcenia Greena (2.1)

$$2e_{ij} = g_{ik} \nabla_j u^k + g_{kj} \nabla_i u^k ; \quad (2.14.1)$$

równanie (2.2.2) w postaci

$$A_i^k = \delta_i^k \quad (2.14.2)$$

oraz równość gęstości ośrodka przed i po deformacji

$$e_0 = \tilde{e} , \quad (2.14.3)$$

to otrzymamy równania Duhamela-Neumanna liniowej termosprężystości

$$\sigma^{ij} = -\gamma_1 g^{ij} + \lambda_0 I_1 g^{ij} + 2\mu_0 g^{il} g^{jk} E_{lk} , \quad (2.15.1)$$

$$I_1 = e_{kk} .$$

Zauważmy, że w tym przypadku zachodzi równość tensorów naprężenia Cauchego $\tilde{\sigma}^{ij}$ i Pioli-Kirchhoffa T^{ij}

$$\sigma^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} = T^{ij} . \quad (2.15.2)$$

8. Sprężystość

8.1. Równania nieliniowej teorii sprężystości

W teorii sprężystości przyjmujemy tensor odkształcenia Greena oraz równanie

równowagi dynamicznej w postaci proponowanej w teorii termosprężystości, por. relacje (2.1) i (2.2). Różnice wystąpią w równaniach konstytutywnych. Dla pewnej stałej temperatury odniesienia T_0 równania (6.6) przyjmą postać

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \frac{e_0}{e} [\lambda_0 I_1 g^{ij} + 2\mu_0 g^{il} g^{jk} E_{lk} + l_0 I_1^2 g^{ij} - 2m_0 I_2 g^{ij} + \\ & + 2m_0 I_1 g^{il} g^{jk} E_{lk} + n_0 ([E_{mn}]^{ij} \det([g^{lk}]))] . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Powyższe równania w układzie kartezjańskim zaproponował F.D. MURNAGHAN [1].

8.2. Równania liniowej teorii sprężystości

Przyjmując

$$l_0 = m_0 = n_0 = 0 \quad (2.17)$$

otrzymamy równania konstytutywne teorii fizycznie liniowej

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \frac{e_0}{e} [\lambda_0 I_1 g^{ij} + 2\mu_0 g^{il} g^{jk} E_{lk}] , \quad (2.18)$$

$$I_1 = E_{kk}$$

Zakładając liniowe związki geometryczne (2.14), dostaniemy równanie konstytutywne klasycznej teorii sprężystości

$$\sigma^{ij} = \lambda_0 I_1 g^{ij} + 2\mu_0 g^{il} g^{jk} e_{lk} , \quad (2.19)$$

$$I_1 = e_{kk}$$

9. Wnioski i uwagi

(a) Dla większości materiałów analizowanych w literaturze (por. A.I. LURIE [1], [i]) dla współczynników określonych wzorami (2.7), (2.8), (2.10), mamy zależności

$$3K_0 > 0, \quad L < 0, \quad |3K_0| \ll |L|, \quad |3K_1| \ll |L| \quad (2.20)$$

Przykładowo, analizując wymienione współczynniki dla stopu aluminium 2S, por. P.M. SUTTON [1], R.T. SMITH i in. [1], otrzymujemy następujące wartości

$$3K_0 = 0,17 \times 10^4 \text{ MN/m}^2, \quad 3K_1 = -0,017 \times 10^4 \text{ MN/m}^2, \\ L = (-320,7 \pm 178,6) \times 10^4 \text{ MN/m}^2 \quad (2.21)$$

Wobec powyższych uwag zasadnicze znaczenie w określeniu współczynników $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, występujących we wzorach (2.10), dla wielu materiałów będzie miała wartość L.

(b) Analizując tabele podające wartości współczynników 3 rzędu, zauważyć można dużą tolerancję wartości, por. wartość L w poprzednim punkcie. Zdaniem autora, przyczynami powodującymi taki rozrzut wyników są niedoskonałości urządzeń mierzących prędkość rozchodzenia się fali w pomiarach akustycznych wymienionych stałych.

ROZDZIAŁ III

WSTĘPNA ANALIZA RÓWNAŃ KONSTITUTYWNYCH I SPRĘŻENIA PÓL PRZEMIESZCZEŃ I TEMPERATURY

W rozdziale tym przeprowadzimy próbę "wstępnego" porównania naprężeń, wynikających z liniowych i nieliniowych równań konstytutywnych termosprężystości i sprężystości, jak również próbę określenia wpływu sprzężenia pól, przemiesczeniowego i temperaturowego. Pod pojęciem "wstępne" rozumiemy tutaj porównanie wielkości przy użyciu jak najprostszego aparatu. Będą to modele termicznie ściskanego sześcianu oraz ściskanego i rozciąganego pręta. Na wstępie określimy naprężenia w różnych wariantach nieliniowych i liniowych teorii termosprężystości i sprężystości.

10. Warianty teorii fizykalnie nieliniowych

Uporządkujmy na wstępie pojęcia różnych wariantów naprężenia w zależności od parametrów konstytutywnych, por. T. JEKOT [4]. Ograniczymy się tutaj do teorii ośrodków jednorodnych i izotropowych, w których możemy wykorzystać określone w praktyce moduły sprężystości i ich zależności od temperatury. Stąd też będziemy bazować na parametrach określonych relacjami (2.7), (2.8) oraz na odpowiadającym tym relacjom module naprężeniowo-temperaturowym określonym związkami (2.9) i (2.10).

10.1. Materiały termosprężyste

Tensor naprężenia określony relacją (2.6.2) nazwiemy termosprężystym, globalnie nieliniowym (oznaczenie tensorów naprężeń pozostawiamy w notacji absolutnej)

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}^k, t; \lambda_0, \lambda_1; \mu_0, \mu_1; \alpha_T^0, \alpha_T^1; l, m, n) = \tilde{\mathbf{S}}_{TN} \quad (3.1)$$

W szczególnych przypadkach wprowadzamy następujące określenia:

a) naprężenie w materiale liniowym:

$$\tilde{S}_L \stackrel{df}{=} \tilde{S}(x^k, t; \lambda_0, 0; \mu_0, 0; \alpha_T^0, 0; 0, 0, 0) ; \quad (3.2)$$

b) naprężenia w materiale nieliniowym, w którym znikają moduły sprężystości trzeciego rzędu:

$$\tilde{S}_{NL} \stackrel{df}{=} \tilde{S}(x^k, t; \lambda_0, \lambda_1; \mu_0, \mu_1; \alpha_T^0, \alpha_T^1; 0, 0, 0) ; \quad (3.3)$$

c) naprężenia w materiale nieliniowym, w którym moduły 2 i 3 rzędu oraz współczynnik rozszerzalności liniowej nie zależą od temperatury

$$\tilde{S}_{N1} \stackrel{df}{=} \tilde{S}(x^k, t; \lambda_0, 0; \mu_0, 0; \alpha_T^0, 0; 1, m, n) ; \quad (3.4)$$

d) naprężenia w materiale nieliniowym, w którym moduły sprężystości 2 rzędu są liniowo zależne od temperatury, podczas gdy moduły 3 rzędu oraz współczynnik rozszerzalności liniowej są niezależne od temperatury

$$\tilde{S}_{N2} \stackrel{df}{=} \tilde{S}(x^k, t; \lambda_0, \lambda_1; \mu_0, \mu_1; \alpha_T^0, 0; 1, m, m) . \quad (3.5)$$

10.2. Materiały sprężyste

Naprężenie określone relacją (2.16) nazwiemy naprężeniem Murnaghana

$$\tilde{S} = \tilde{S}(x^k, t; \lambda_0; \mu_0; 1, m, n) = \tilde{S}_M . \quad (3.6)$$

W przypadku liniowym naprężenie

$$\tilde{S}_H \stackrel{df}{=} \tilde{S}(x^k; \lambda_0; \mu_0; 0, 0, 0) \quad (3.7)$$

nazwiemy naprężeniem Hooke'a.

11. Zależność pomiędzy izotermicznymi a izentropowymi tensorami sprężystości

Ze względu na to, że w pomiarach akustycznych stałych sprężystości otrzymujemy współczynniki materiałowe, które w zasadzie są stałymi izentropowymi, a w

proponowanych równaniach konstytutywnych występują stałe izotermiczne, dokonamy w pewnym przypadku porównania tych stałych. Rozważmy proces izentropowy

$$q = 0 \quad (3.8)$$

dla ośrodka o stałych, niezależnych od temperatury współczynnikach materiałowych. Stosowne naprężenia \tilde{S}_{N1} określa relacja (3.4). Warunki zbliżone do wyżej określonych panują np. przy pomiarach akustycznych stałych sprężystości. Równanie (3.8) zapisane dla przyrostu temperatury (1.30) ma postać

$$c_\epsilon \dot{\theta} - \theta (B_1 + 2B_2 \theta + 2T_0 B_2) \cdot \dot{E} - T_0 B_1 \cdot \dot{E} = 0 , \quad (3.9)$$

gdzie tensory B_1, B_2 określone są relacjami (1.40). Równanie (3.9) ma rozwiązanie iteracyjne postaci

$$\theta_{n+1} = \exp(-\int P_n \cdot \dot{E} dt) \int Q \cdot \dot{E} \exp(\int P_n \cdot \dot{E} dt) dt \quad (3.10)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots ,$$

gdzie

$$P_n = - (B_1 + 2T_0 B_2 + 2B_2 \theta_n) / c_\epsilon ,$$

$$Q = T_0 B_1 / c_\epsilon .$$

Jako θ_0 można przyjąć rozwiązanie równania liniowego, por. D.K. CARLSON [1],

$$c_\epsilon \dot{\theta} - T_0 B_1 \cdot \dot{E} = 0 , \quad (3.11)$$

postaci

$$\theta_0 = T_0 B_1 \cdot E / c_\epsilon . \quad (3.12)$$

W przypadku gdy rozwiązanie θ_0 jest "dobrym" przybliżeniem rozwiązania θ_N , gdzie

$$\theta_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n , \quad (3.13)$$

można łatwo porównać izentropowe \bar{C} , \bar{D} oraz izotermiczne tensory sprężystości.

Wykorzystując (3.12) oraz (1.29), otrzymamy

$$\bar{C} = T_0 B_1 \otimes B_1 / c_\varepsilon + C, \quad \bar{D} = B_2 \otimes B_1 \otimes B_1 (T_0 / c_\varepsilon)^2 + D. \quad (3.14)$$

Relacja (3.14)₁ jest dobrze znana w liniowej termosprężystości (por. Y.C. FUNG [1], J. RYCHLEWSKI [1]).

12. Termiczne ściskanie sześciangu

Rozpatrzmy jednorodny, izotropowy sześciang opisany we współrzędnych kartezjańskich nierównościami

$$0 \leq x_k \leq a \quad (a = \text{const}), \quad k=1,2,3. \quad (3.15)$$

Niech δC oznacza powierzchnię brzegową sześciangu. Wektor przemieszczenia punktów sześciangu określony jest przez

$$u_i = u_i(x_k), \quad (3.16)$$

natomiast tensor odkształcenia dany jest relacją (por. (2.1)):

$$2 E_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j + \nabla_i u_k \nabla_j u_k. \quad (3.17)$$

Założmy, że wszelkie zmiany stanu będą zachodziły w sposób stacjonarny, stąd równania równowagi cieplnej i dynamicznej są następujące

$$\begin{aligned} \nabla_i q_i &= 0, \\ \nabla_j T_{ij} &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$A_{ki} T_{il} = A_{li} T_{lk},$$

gdzie

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \nabla_i u_j.$$

Równania konstytutywne (2.6) przyjmują tu postać

$$q_i = -\lambda_T \nabla_i \theta,$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= e_0 [-\gamma \delta_{ij} + \lambda I_1 \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} + (1I_1^2 - 2mI_2) \delta_{ij} \\ &+ 2mI_1 E_{ij} + n([E_{mn}]^{ij})] / \tilde{e}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdzie

$$\bar{\sigma}_{ij} = \tilde{e} T_{il} A_{jl} / e_0.$$

Jeśli założymy, że brzeg sześciangu jest sztywno zamocowany i utrzymywany w stałej temperaturze, tj.

$$u_i(x_k) \Big|_{\delta C} = 0 \quad (3.20)$$

oraz

$$\theta(x_k) \Big|_{\delta C} = \text{const} = \theta_0 \neq T_0, \quad (3.21)$$

to wówczas znikają przemieszczenia i odkształcenia w każdym punkcie sześciangu, tj.

$$u_i = 0, \quad E_{ij} = 0, \quad (3.22)$$

ponadto

$$A_{ij} = \delta_{ij},$$

natomiast niezerowe składowe naprężenia można zastąpić jedną wielkością

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} \stackrel{df}{=} \bar{\sigma} = -\gamma = -\gamma(\theta), \quad (\theta = \theta_0). \quad (3.23)$$

Zauważmy, że teraz równania równowagi (3.18) będą spełnione tożsamościowo. Zgodnie z określeniami (3.1)-(3.5) możemy napisać

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{TN} &= -3K_0 \alpha_T^0 \theta - [3K_1 \alpha_T^0 + 3K_0 \alpha_T^1 + L (\alpha_T^0)^2] \theta^2 - \\ &- (3K_1 \alpha_T^1 + 2L \alpha_T^0 \alpha_T^1) \theta^3 - L (\alpha_T^1)^2 \theta^4, \end{aligned} \quad (3.24.1)$$

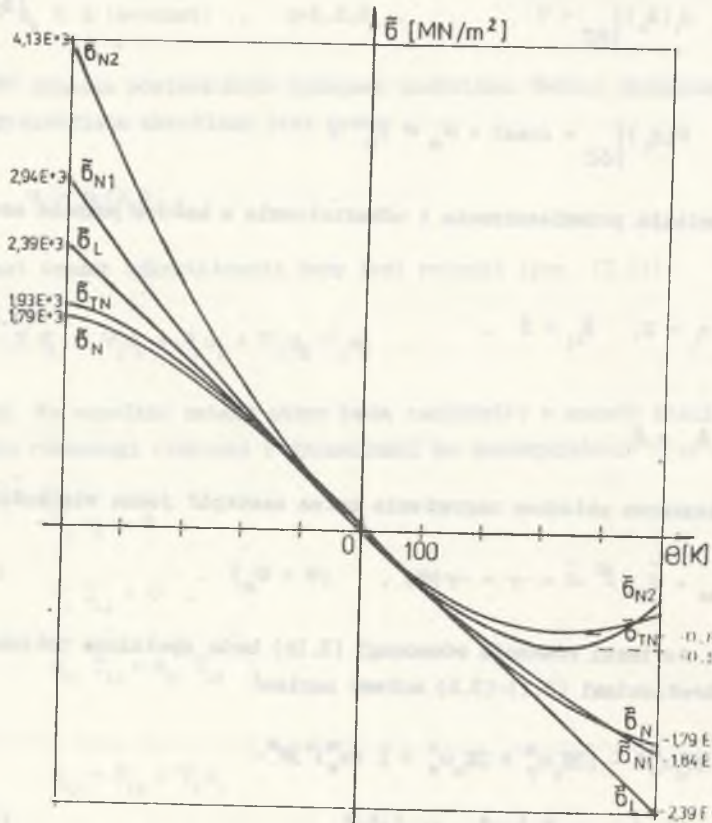
$$\tilde{\sigma}_L = -3K_0 \alpha_T^0 \theta, \quad (3.24.2)$$

$$\tilde{\sigma}_{NL} = -3K_0 \alpha_T^0 \theta - (3K_1 \alpha_T^0 + 3K_0 \alpha_T^1) \theta^2 - 3K_1 \alpha_T^1 \theta^3, \quad (3.24.3)$$

$$\tilde{\sigma}_{N1} = -3K_0 \alpha_T^0 \theta - L(\alpha_T^0)^2 \theta^2, \quad (3.24.4)$$

$$\tilde{\sigma}_{N2} = -3K_0 \alpha_T^0 \theta - [3K_1 \alpha_T^0 + L(\alpha_T^0)^2] \theta^2. \quad (3.24.5)$$

Powyższe związki wskazują, że w przypadku termicznie ściskanego sześciangu różne warianty naprężeń nieliniowych są wielomianami stopnia k względem zmiennej temperatury θ , gdzie $1 \leq k \leq 4$. Obraz funkcji naprężeń wyrażonych związkami (3.24), dla stałych materiałowych stopu aluminium D 54 S (por. tablica 1) zilustrowano na rys. 2.



Rys. 2. Naprężenia w ściskanym termicznie sześciangu
2. Stresses in the thermally compressed cube

Tablica 1
Współczynniki materiałowe dla stopu aluminium D 54 S

λ_0	λ_1	μ_0	μ_1	l	m	n
		[MN/m ²]				
4.9	-0.4	2.6	-0.25	-38.8	-35.8	-32.0
x	x	x	x	x	x	x
10 ⁴	10 ²	10 ⁴	10 ²	10 ⁴	10 ⁴	10 ⁴
$\alpha_T^0 = 24 \times 10^{-6}$ [1/K],		$\alpha_T^1 = 2.4 \times 10^{-8}$ [1/K ²],		$\rho = 2.71$ [kg/m ³],		
$\lambda_T = 19 \times 10^{-5}$ [W/(mK)],		$c_e = 2.38 \times 10^6$ [J/(m ³ K)]				
Skład:		4.5% Mg,	0.5% Mn,	1.0% Cr		

13. Ściskanie-rozciąganie pręta

Zaadaptujmy teraz równania z poprzedniego rozdziału do przypadku rozciągania-ściskania pręta wykonanego z materiału jednorodnego i izotropowego.

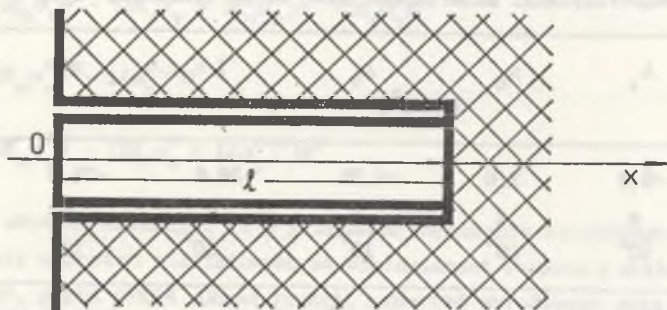
13.1. Efekt termiczny

Na wstępie rozpatrzmy przypadek ściskania-rozciągania pręta powodujący zmianę temperatury. Załóżmy, że pręt znajduje się w osłonie adiabatycznej. Oszacujmy różnicę $\theta_0 - \theta_N$, określając oprócz tego efekt sprzężenia pola przemieszczeń i temperatury, w przypadku liniowych i nieliniowych równań konstytutywnych. Przyjmijmy jednowymiarowy model jednostronnie sztywno zamocowanego pręta, przy założeniu, iż nie występuje utrata stateczności w przypadku występowania sił osiowych ściskających (rys. 3). Ruch punktów pręta opisuje funkcja przemieszczenia

$$u = u(x, t), \quad x \in (0, l). \quad (3.25)$$

Tensor odkształcenia Greena ma jedną składową

$$E(x,t) = u_{,x} + u_{,x}^2 / 2 \quad (3.26)$$



Rys. 3. Model pręta

3. The model of a bar

Równania równowagi (por. Rozdział II) przyjmują postać

$$[(u_{,x} + 1)q]_{,x} + c_\epsilon \dot{\theta} + (T_0 + \theta)(\gamma - 2\zeta\theta)E = 0 \quad (3.27)$$

$$t_{,x} - e_0 \ddot{u} = 0 \quad ,$$

gdzie $q=q(x,t)$, $t=t(x,t)$ są jedynymi niezerowymi składowymi odpowiednio strumienia ciepła i tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa, następnie

$$\gamma = (2\mu + 3\lambda)\alpha_T \quad (3.28)$$

oraz

$$\zeta = (9l+n)\alpha_T^2 \quad (3.29)$$

Założmy, że na jeden koniec pręta działa siła powodująca przemieszczenie wyrażone pewną funkcją $f(t)$,

$$u(x=0,t) = lf(t) \quad , \quad \dot{f}(t) = 0 \quad , \quad (3.30)$$

stąd tensor odkształcenia, por. (3.26), wyrażony jest związkiem następującym

$$E(t) = f(t) + f(t)^2 / 2 \stackrel{df}{=} e(t) \quad (3.31)$$

Zakładając, że pręt znajduje się w osłonie adiabatycznej ($q=0$) oraz uwzględ-

niając związek (3.31), stwierdzamy, że równania równowagi (3.27) przyjmują postać

$$c_\epsilon \dot{\theta} + (T_0 + \theta)(\gamma + 2\zeta\theta)e = 0 \quad , \quad (3.32.1)$$

$$t = t(t) \quad , \quad (3.32.2)$$

gdzie funkcję $t(t)$, ze względu na znane odkształcenie $e(t)$, można wyznaczyć stosując odpowiednie równanie konstytutywne. Równanie (3.32.2) zapisane w postaci

$$c_\epsilon \dot{\theta} + \theta(\gamma + 2\zeta\theta + 2\zeta T_0)e + T_0 \gamma \dot{e} = 0 \quad (3.33)$$

ma rozwiązanie iteracyjne (3.10), które w rozpatrywanym przypadku jest określone przez

$$\theta_{n+1} = T_0 \gamma \left[\exp\left(\frac{\gamma + 2\zeta T_0}{c_\epsilon} e + \frac{2\zeta}{c_\epsilon} \theta_n e\right) - 1 \right] / (\gamma + 2\zeta T_0 + 2\zeta \theta_n) \quad (3.34)$$

Przyjmując stałe materiałowe stopu aluminium D54S, por. R.T. SMITH i in. [1], oraz hipotetyczne wartości stałej $\zeta = \zeta$, $\zeta * 5 * 10^2$, $\zeta * 10^3$, gdzie ζ wyrażone jest wzorem (3.29) porównano wartości θ_n , por. (3.13), oraz $\theta_0 = T_0 \gamma e / c_\epsilon$, dla

$$e = 2 * 10^{-3} \quad , \quad T_0 = 300 \text{ K} \quad (3.35)$$

Wyniki dla powyższych danych przedstawiono na rys. 4.

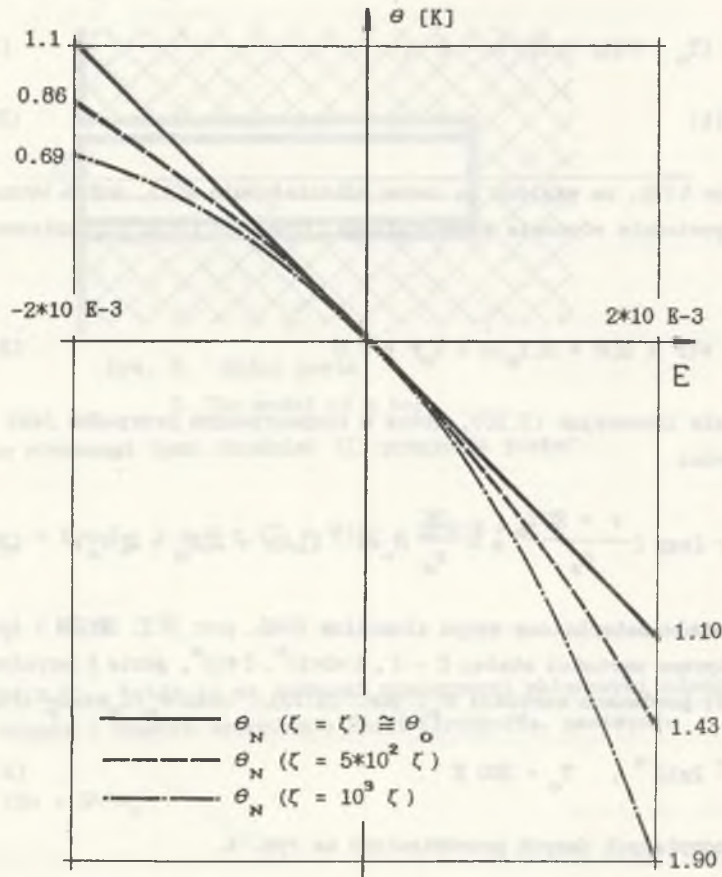
13.2. Efekt mechaniczny

Rozpatrzmy statyczne ścisnięcie-rozciąganie pręta, o jednej składowej wektora przemieszczenia, por. rys. 3.,

$$u = u(x) \quad (3.36.1)$$

Zakładamy, że pręt jest utwierdzony w jednym końcu i na skutek deformacji w każdym punkcie pręta powstaje odkształcenie

$$E = E(x) = \text{const} \quad (3.36.2)$$



Rys. 4. Rozkład temperatury dla ściskanego-rozciąganego pręta
4. Temperature distribution in the compressed-tensioned rod

Równanie równowagi dynamicznej redukuje się do postaci

$$t_{,x} = 0, \quad (3.37.1)$$

gdzie t jest składową tensora Pioli-Kirchhoffa w kierunku osi pręta.

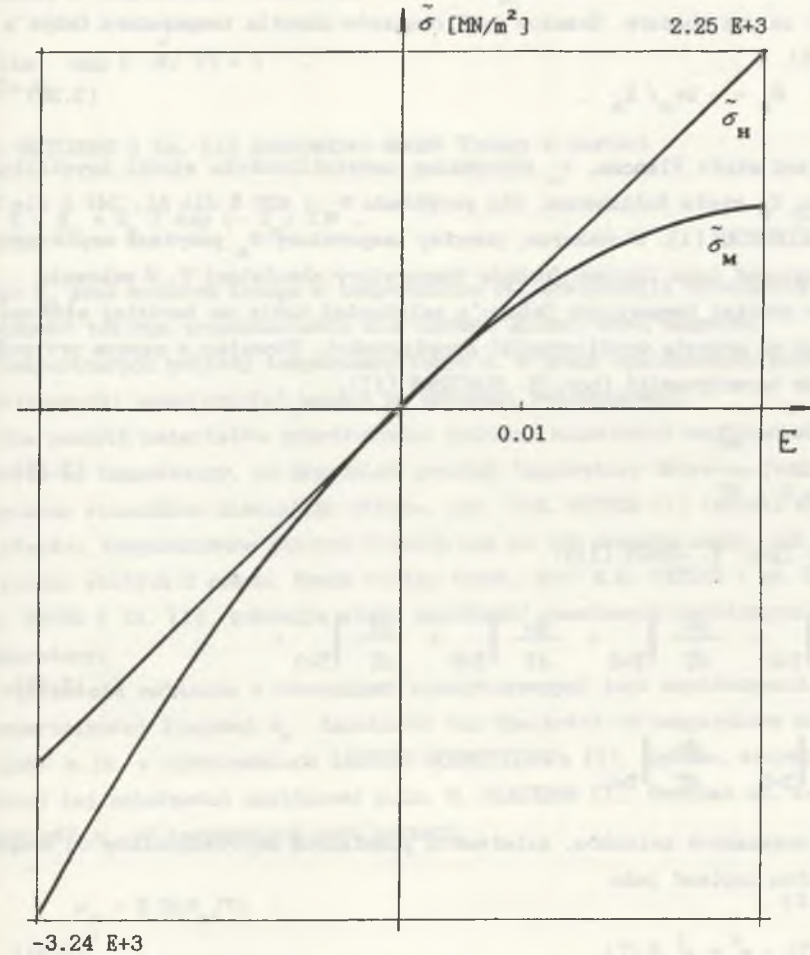
Równanie konstytutywne (2.16) przyjmuje formę

$$\bar{\sigma} = \frac{e_0}{\rho} [(\lambda_0 + \mu_0) E + (1 + 2m) E^2], \quad (3.37.2)$$

gdzie

$$\bar{\sigma} = \bar{e} t (1 + u_{,x}) / e_0. \quad (3.37.3)$$

Porównanie naprężeń liniowych (Hooke'a) (3.7) i nieliniowych (Murnaghana) (3.6) przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Porównanie naprężeń Hooke'a i Murnaghana

5. Comparison of Hook and Murnaghan stresses

14. Temperaturowe zależności współczynników materiałowych analizowane w literaturze

Problem zależności współczynników materiałowych od temperatury jest szeroko rozpatrywany w literaturze. Ogólnie można stwierdzić (por. G. LEIBFRIED [1], M. BLACKMAN [1]), że dla współczynników sprężystości 2 rzędu, współczynnika rozszerzalności liniowej oraz ciepła właściwego wpływ temperatury można podzielić na dwa obszary. Granicę tych obszarów określa temperatura Debye'a θ_D

$$\theta_D = - hv_m / K_B \quad (3.38)$$

gdzie h jest stałą Plancka, v_m maksymalna częstotliwość siatki krystalicznej materiału, K_B stała Boltzmanna. Dla przykładu $\theta_D = 430$ K dla Al, 347 K dla Cu, por. G. LEIBFRIED [1]. W obszarze, powyżej temperatury θ_D powyższe współczynniki można traktować jako liniowe funkcje temperatury absolutnej T . W zakresie temperatur poniżej temperatury Debye'a zależności takie są bardziej złożone. Rozpatrzmy na wstępie współczynniki sprężystości. Stosując w naszym przypadku III zasadę termodynamiki (por. M. BLACKMAN [1]),

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial T} = 0 \quad (3.39)$$

otrzymamy (por. T. JEKOT [1]),

$$\left. \frac{d\gamma}{dT} \right|_{T=0} = \left. \frac{d\lambda}{dT} \right|_{T=0} = \left. \frac{d\mu}{dT} \right|_{T=0} = \left. \frac{dl}{dT} \right|_{T=0} = \quad (3.40)$$

$$= \left. \frac{dm}{dT} \right|_{T=0} = \left. \frac{dn}{dT} \right|_{T=0} = 0$$

Wobec wykazanych związków, zależności powyższych współczynników od temperatury T można zapisać jako

$$a_i(T) = a_i^c + a_i^1 f_i(T) \quad (3.41)$$

gdzie $a_i(T)$ oznaczają kolejno $\gamma, \lambda, \mu, l, m, n$ dla $i=1,2,\dots,6$, a_i^c, a_i^1 są stałymi, a $f_i(T)$ funkcją spełniającą warunki

$$f_i(0) = 0, \quad \left. \frac{df_i}{dT} \right|_{T=0} = 0 \quad (3.42)$$

E. SCHREIBER i in. [1] wykazali, na bazie rozważań termodynamicznych, że zależność modułu ścisłości K od temperatury, w przedziale $(0, \theta_D)$, jest postaci

$$K = K_0 + K_1 T \exp(-\bar{\theta}/T), \quad (3.43)$$

gdzie K_0 jest modułem ścisłości w temperaturze 0 K, a parametr $\bar{\theta}$ jest związany z temperaturą Debye'a relacją $\bar{\theta} = \theta_D/2$. Zauważmy ponadto, że

$$\lim_{T \rightarrow \theta} \exp(-\bar{\theta}/T) = 1 \quad (3.44)$$

J.B. WATCHMAN i in. [1] przyjmując moduł Younga w postaci

$$E = E_0 + E_1 T \exp(-T_0/T), \quad (3.45)$$

gdzie E_0 jest modułem Younga w temperaturze 0K, stwierdzili doświadczalnie zasadność takiego przedstawienia dla tlenków glinu, toru, magnezu, w temperaturach poniżej temperatury Debye'a. W pracy wymienionych autorów współczynniki sprężystości badane są metodami rezonansowymi.

Dla pewnych materiałów przedłużenie liniowej zależności współczynników 2 rzędu od temperatury, na przedział poniżej temperatury Debye'a, jest obarczone stosunkowo niewielkim błędem, por. P.M. SUTTON [1] (wyniki dla Al). Zależności temperaturowe stałych 3 rzędu nie są tak szeroko znane, jak w przypadku stałych 2 rzędu. Prace na ten temat, por. R.O. PETERS i in. [1], J.A. BAINS i in. [1], pokazują słabą zależność omawianych współczynników od temperatury.

Wielkością związaną z równaniami konstytutywnymi jest współczynnik rozszerzalności liniowej α_T . Zależność tej wielkości od temperatury można znaleźć m.in. w opracowaniach LANDOLT-BORNSTEINA'a [1]. Ogólne, teoretyczne postaci tej zależności analizował m.in. M. BLACKMAN [1]. Przyjął on, że zależność α_T od temperatury jest postaci

$$\alpha_T = K D(\theta_D/T), \quad (3.46)$$

gdzie $D(\cdot)$ jest tzw. funkcją Debye'a, por. M. BLACKMAN [1]. W równaniach przewodnictwa ciepła występuje również ciepło właściwe c_e . Przyjmuje się, zgodnie z prawem Debye'a, że w przedziale poniżej θ_D wielkość ta jest proporcjonalna do T^3 . Występujący w równaniach przewodnictwa Fouriera współczynnik przewodnictwa cieplnego λ_T jest wielkością zależną od temperatury

oraz od odkształceń ośrodka. R.N. THURSTON [1] zakłada zależność λ_T od przyrostu energii wewnętrznej oraz składowych gradientu deformacji, natomiast E.S. SUHUBI [1] od gradientu temperatury oraz składowych gradientu deformacji. Zależność λ_T od temperatury jest stabelaryzowana dla wielu materiałów, por. N.B. WARGAFNIK [1]. Brak jest analogicznych opracowań, dotyczących zależności λ_T od stanu deformacji. Temat ten podejmują G.A. SLACK i in. [1], dla CuCl.

15. Wnioski i uwagi

(a) W przypadku termicznie ściskanego sześciemu różnice pomiędzy naprężeniem liniowym, por. (3.24.2) oraz globalnie nieliniowym (3.24.1) są znaczne, nawet dla stosunkowo niewielkich temperatur, rys. 2.

(b) W przypadku rozciągania-ściskania pręta powodującego zmianę temperatury, por. rys. 4, efekty sprzężenia pól przemieszczeń i temperatury są widoczne (przyrost o ok. 1,1 K, przy temperaturze początkowej równej 300 K, co stanowi ok. 0,3%, przy zerowym przyroście temperatury i w przypadku pominięcia efektów sprzężenia) (por. również Y.Y. LI i in. [1]). Różnice pomiędzy sprzężonymi rozwiązaniami, liniowymi i nieliniowymi dla duraluminium D54S są niezauważalne. Zdaniem autora przedstawiony prosty model może z powodzeniem służyć do oceny konieczności uwzględniania efektu sprzężenia dla konkretnych danych materiałowych. Modelowane warunki są "ekstremalne", tzn. przyjęto maksymalną wartość odkształcenia stosowaną w zakresie sprężystym $\epsilon=0,002$ oraz zapewniono całkowitą przemianę energii odkształcenia w ciepło. Wprowadzenie hipotetycznych wartości $\zeta = 5 \cdot 10^2$, 10^3 miało na celu pokazanie, dla jakich wartości tego parametru pojawiają się zauważalne różnice pomiędzy rozwiązaniami liniowymi i nieliniowymi.

(c) Różnice pomiędzy naprężeniami Hooke'a i Murnaghana, por. rys. 5, są niewielkie. Bezwzględne naprężenia Murnaghana są mniejsze od naprężeń Hooke'a przy ściskaniu i większe przy rozciąganiu.

ROZDZIAŁ IV

METODY SPEKTRALNE DLA PROBLEMÓW NIELINIOWYCH

W rozdziale tym prezentujemy uogólnienie metody tau na przypadki nieliniowych równań cząstkowych. Metoda tau jest jedną z wersji metod spektralnych, por. C. CANUTO i in. [1]. Nowe cechy uogólnienia względem przedstawionego w cytowanej monografii podejścia przedstawiono we wstępie do niniejszej pracy.

Prezentowane tutaj uogólnienie odnosi się do układów równań cząstkowych o współczynnikach będących wielomianami zmiennych argumentów występujących w równaniach. W wersji podstawowej uogólnienie dotyczy równań z nieliniowościami stopnia drugiego. Niezależnie od tego, w następnym rozdziale podano sposób rozwiązywania problemów opisanych równaniami z nieliniowościami wyższych rzędów.

Rozważania ograniczymy do problemów, w których funkcje poszukiwane zależne są od dwóch argumentów. Funkcje rozwija się w szeregi względem wielomianów ortogonalnych, por. P.K. SUJETIN [1], S. PASZKOWSKI [1]. Dalej podaje się pewne własności rodzin wielomianów ortogonalnych. Własności te w przypadkach nieliniowych umożliwiają pokonanie trudności związanych z zastosowaniem warunku ortogonalności i prowadzą do układów równań algebraicznych o nieliniowościach drugiego rzędu. Do rozwiązania otrzymanych układów równań algebraicznych proponujemy metodę Newtona-Raphsona oraz metodę siecznych.

16. Określenie typu rozważanych równań

Założmy, że mamy do czynienia z układem L nieliniowych równań cząstkowych z niewiadomymi funkcjami $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_L(x,t)$, $(x,t) \in V = \{(x,t) | x \in [a,b], t \in [c,d]\}$; $u_k \in U$, $k=1,2,\dots,L$, gdzie U jest pewną przestrzenią funkcji różniczkowalnych. Na obecnym etapie nie określamy precyzyjnie przestrzeni U. W szczególnym przypadku będzie ona określona przez warunki zadania, m.in. przez warunki brzegowe. Przypuśćmy, że każde z rozważanych równań może być przekształcone do następującej wersji wariacyjnej (tożsamości całkowitej):

$$(A^k u, w^k)_k = (f^k, w^k)_k \quad (4.1.1)$$

$$k=1, 2, \dots, L$$

gdzie $u = [u_1, u_2, \dots, u_L]$ jest wektorem funkcji niewiadomych, oraz $A^k : U \times U \times \dots \times U \rightarrow U$ są operatorami cząstkowymi, nieliniowymi typu iloczynowego, tzn. produkują iloczyny pochodnych cząstkowych, dowolnych dwóch poszukiwanych funkcji. Ponadto $(\cdot, \cdot)_k$ oznaczają funkcjonały składające się z całek określonych na obszarze V oraz na jego brzegu, δV oraz $w^k(x, t)$ są funkcjami mnożnikowymi, zaś $f^k(x, t)$ są funkcjami zadanymi. Na ogół funkcjonały $(\cdot, \cdot)_k$ można otrzymać przez zastosowanie zasad wariacyjnych lub formalne mnożenie równań cząstkowych

$$A^k u = f_k, \quad (4.1.2)$$

przez funkcje mnożnikowe $w^k(x, t)$ i całkowanie takich iloczynów przez części przy użyciu warunków brzegowych.

17. Opis metody

Założmy, że poszukujemy funkcji niewiadomych w postaci szeregów skończonych w dwuwymiarowych przestrzeniach $V_{NM} = \{P_i(x)\} \times \{R_j(t)\}$ rozpiętych na rodzinach wielomianów ortogonalnych $P_i(x)$, $R_j(t)$. Wielomiany te są ortogonalne odpowiednio na przedziałach $x \in [a, b]$, $t \in [c, d]$ ($i=0, 1, \dots, N$, $j=0, 1, \dots, M$) tj.

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{i,j=0}^{N,M} u_{\alpha ij}^{(N,M)} P_i(x) R_j(t), \quad (4.2)$$

$$\alpha=1, 2, \dots, L,$$

gdzie $u_{\alpha ij}^{(N,M)}$ są niewiadomymi współczynnikami rozwinięcia funkcji poszukiwanych. Podstawiając funkcje niewiadome (4.2) do (4.1.1) oraz funkcję mnożnikową w postaci

$$w_\alpha(x, t) = \omega_p(x) \omega_r(t) P_n(x) R_m(t), \quad \alpha=1, 2, \dots, L \quad (4.3)$$

gdzie $\omega_p(x)$, $\omega_r(t)$ są funkcjami wagowymi wielomianów odpowiednio $P_n(x)$ oraz $R_m(t)$ i poszukując równań algebraicznych na niewiadome współczynniki $u_{\alpha ij}^{(N,M)}$,

napotykamy podstawowe trudności w bezpośrednim zastawianiu warunku ortogonalności:

$$\int_a^b \omega(x) P_{n_1}(x) P_{n_2}(x) dx = \begin{cases} C(n), & n=n_1=n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

gdzie $C(n)$ jest znana funkcja n . Nadmieniamy, że dalej - wszędzie tam, gdzie wzory są analogiczne dla obu rodzin wielomianów, przedstawiamy je dla wielomianów $P_n(x)$ pomijając indeksy $(\cdot)_p(x)$, tj. przyjmując $(\cdot)(x)$. Wymienione wyżej trudności związane są z tym, że:

- współczynniki w równaniach wariacyjnych zawierają potęgi zmiennych x, t ;
- pochodne wielomianów ortogonalnych nie są wielomianami ortogonalnymi;
- współczynniki w równaniach wariacyjnych zawierają pochodne funkcji wagowych;
- w wyrażeniach nieliniowych występują iloczyny, zawierające więcej niż dwa wielomiany ortogonalne.

W przypadku a) i b) warunek ortogonalności (4.4) stosujemy korzystając kolejno z rozwinięć

$$x^i P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+i} A_k^i(n) P_k(x) \quad (4.5)$$

i

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-i} D_k^i(n) P_k(x) \quad (4.6)$$

gdzie $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i (\cdot) \equiv \frac{\partial^i (\cdot)}{\partial x^i}$

Współczynniki powyższych rozwinięć znajdujemy na mocy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Jeżeli dla dowolnej rodziny wielomianów ortogonalnych $\{P_k(x)\}$, ($k=0, 1, \dots$)

znamy rozwinięcie (tzn. znamy współczynniki B_n^k)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n B_n^k x^k, \quad (4.7)$$

to współczynniki $A_r^k(n)$ oraz $D_r^k(n)$ są dane wzorami:

$$A_{m+k}^k(n) = [B_n^m - \sum_{p=m+k+1}^{n+k} A_p^k(n) B_p^{m+k}] / B_{m+k}^{m+k}, \quad \text{dla } m=n, n-1, \dots, 0, \quad (4.8.1)$$

$$A_r^k(n) = - \sum_{p=r+1}^{n+k} A_p^k(n) B_p^r / B_r^r, \quad \text{dla } r=k-1, k-2, \dots, 0, \quad (4.8.2)$$

$$D_{k-1}^k(n) = [B_n^k (k!) - \sum_{r=k-1+1}^{n-1} D_r^k(n) B_r^{k-1}] / B_{k-1}^{k-1}, \quad \text{dla } k=n, n-1, \dots, 1. \quad (4.8.3)$$

Dowód:

Równanie (4.5) można zapisać następująco

$$\sum_{l=0}^n B_n^l x^{l+k} = \sum_{p=0}^{n+k} A_p^k(n) \sum_{r=0}^p B_p^r x^r$$

Porównując współczynniki znajdujące się przy tych samych potęgach zmiennej x (po obu stronach równania), dla $l=n$ otrzymamy:

$$B_n^n x^{n+k} = A_{n+k}^k(n) B_{n+k}^{n+k} x^{n+k};$$

stosując podobne rozumowanie dla $l=m < n$ dostaniemy równanie rekurencyjne (4.8.1)

Natomiast porównując współczynniki przy r -tej potędze x ($r=k-1, k-2, \dots, 0$)

dostaniemy równość

$$0 = \sum_{p=r}^{n+k} A_p^k B_p^r x^r,$$

z której wynika równanie rekurencyjne (4.8.2).

Przekształcając relację (4.6) otrzymamy

$$\sum_{k=0}^n B_n^k \binom{k}{l}! x^{k-l} = \sum_{p=0}^{n-1} D_p^l(n) \sum_{r=0}^p B_p^r x^r.$$

Porównując współczynniki stojące przy $n-1$ tej potędze x dostaniemy

$$D_{n-1}^l(n) = B_n^n (l!) / B_{n-1}^{n-1}.$$

Stosując analogiczne podejście dla $k \leq n$ otrzymamy relację (4.8.3). (cbdo).

W przypadku c) warunek ortogonalności (4.4) może być stosowany do takich wielomianów ortogonalnych, dla których

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \omega(x) = f(x) \omega(x) \quad (4.9)$$

gdzie $f(x)$ jest znana funkcja. Powyższy związek zachodzi dla wielomianów Legendre'a ($\omega = 1$) oraz dla wielomianów Czebyszewa-Laguerre'a ($\omega = x^\alpha e^{-x}$) dla wartości $\alpha=0$, (wówczas funkcja wagowa ma postać $\omega = e^{-x}$). Jeżeli w przyjętym postępowaniu zastosujemy inne niż wyżej wymienione dwie rodziny, to równania wariacyjne nie mogą zawierać pochodnych funkcji wagowych, lecz same wagi. Wiąże się to z taką postacią równań wariacyjnych, w której nie wykonano całkowania przez części i warunki brzegowe są uwzględniane niezależnie. W tym przypadku pojawia się problem ze skonstruowaniem równań w liczbie zgodnej z liczbą niewiadomych, por. C. CANUTO i in.. [1]. Aby zastosować warunek ortogonalności (4.4) w przypadku d), należy znaleźć obiekty $G_{ij}^{zpq}(n)$, określone relacją:

$$L = \int_{-1}^1 x^z \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p a(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q b(x) \omega(x) P_n(x) dx = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i b_j G_{ij}^{zpq}(n), \quad (4.10.1)$$

gdzie $a(x)$ i $b(x)$ są postaci

$$a(x) = \sum_{i=0}^N a_i P_i(x), \quad b(x) = \sum_{j=0}^N b_j P_j(x), \quad (4.10.2)$$

Twierdzenie 2

Obiekty $G_{ij}^{z_1 z_2 p_1 p_2 q_1 q_2}(n)$ określone relacją (4.10), wyrażają się następującym wzorem

$$G_{ij}^{z_1 z_2 p_1 p_2 q_1 q_2}(n) = \sum_{k=0}^{i-p} D_k^p(i) \sum_{l=C}^{j-q} D_l^q(j) \sum_{r=0}^n B_n^r A_k^{r+z}(1) C(k) \quad (4.11)$$

Dowód:

Korzystając ze związków (4.10.2), a także: a) stosując wzory (4.6) na pochodne wielomianów; b) przyjmując $P_n(x)$, w postaci (4.7) oraz c) łącząc potęgi zmiennej x , otrzymamy

$$L = \int_a^b \sum_{i=0}^N a_i \sum_{k=0}^{i-p} D_k^p(i) P_k(x) \sum_{j=0}^N b_j \sum_{l=0}^{j-q} D_l^q(j) P_l(x) \sum_{r=0}^n B_n^r x^{r+z} dx$$

Wykorzystując teraz wzór (4.5) do iloczynu składników x^{r+z} oraz $P_l(x)$ mamy

$$L = \int_a^b \sum_{i=0}^N a_i \sum_{k=0}^{i-p} D_k^p(i) P_k(x) \sum_{j=0}^N b_j \sum_{l=0}^{j-q} D_l^q(j) \sum_{r=0}^n B_n^r \sum_{s=0}^{l+r+z} A_s^{r+z}(1) P_s(x) dx$$

Stosując w powyższej relacji warunek ortogonalności (4.4) dostaniemy

$$L = \sum_{i=0}^N a_i \sum_{j=0}^N b_j \sum_{k=0}^{i-p} D_k^p(i) \sum_{l=0}^{j-q} D_l^q(j) \sum_{r=0}^n B_n^r A_{i-k}^{r+z}(1) C(k)$$

a to daje związek (4.11). (cbdo)

Dla rozważanych funkcji dwuwymiarowych z przestrzeni \tilde{V}_{NM} wprowadźmy funkcjonal

$$L_{nm}^{z_1 z_2 p_1 p_2 q_1 q_2}[u, v] = \int_a^1 \int_b^1 x^{z_1} t^{z_2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p_2} u(x, t) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{q_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{q_2} v(x, t) \omega_p(x) \omega_r(t) P_n(x) R_m(t) dx dt \quad (4.12)$$

Wprowadzając obiekty (4.11) do powyższego funkcjonału otrzymamy:

$$L_{nm}^{z_1 z_2 p_1 p_2 q_1 q_2}[u, v] = \sum_{i,j=0}^N \sum_{k,l=0}^M u_{ij} v_{kl} G_{i,j}^{z_1 p_1 q_1}(n) G_{k,l}^{z_2 p_2 q_2}(m) \quad (4.13)$$

18. Wybrane rodziny wielomianów ortogonalnych

Z twierdzeń sformułowanych w poprzednim punkcie wynika, że obiekty $A_r^k(n)$, $D_r^l(n)$ oraz $G_{ij}^{z_1 p_1 q_1}(n)$ - zależą od dwóch wielkości $C(n)$ oraz B_n^k . W związku z powyższym podamy przykładowo funkcje wagowe, a także wzory określające $C(n)$ oraz B_n^k , dla wybranych rodzin wielomianów ortogonalnych. Dla wielomianów Legendre'a, ortogonalnych na przedziale $[-1,1]$, z wagą $\omega(x) = 1$ mamy następujące relacje:

$$C(n) = 2/(2n+1) ;$$

$$B_n^{n-2p} = \frac{(-1)^p}{n} \binom{n}{p} \binom{2n-2p}{n-2p}, \text{ dla } p=0,1,\dots,[n/2] ; \quad (4.14)$$

$$B_n^i = 0, \text{ dla } i \neq n-2p,$$

gdzie $[n/2]$ jest największą liczbą naturalną, nie większą niż $n/2$. Dla wielomianów Czebyszewa 1 rodzaju, ortogonalnych w $[-1,1]$, z wagą

$$\omega = 1/(1-x^2)^{1/2} \text{ mamy:}$$

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & n > 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases} ;$$

$$B_n^{n-2p} = n \frac{(-1)^p}{n-p} \binom{n-p}{p} 2^{n-2p-1}, \text{ dla } p=0,1,\dots,[n/2] ; \quad (4.15)$$

$$B_n^i = 0, \text{ dla } i \neq n-2p.$$

Dla wielomianów Czebyszewa-Laguerre'a ortogonalnych na $[0, \infty)$, z wagą $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, ($\alpha > -1$) zachodzą związki

$$C(n) = 1/n! \Gamma(\alpha+n+1), \text{ dla } \alpha \neq 0 \text{ oraz } C(n) = 1 \text{ dla } \alpha = 0,$$

gdzie Γ jest funkcją gamma, natomiast

$$B_n^k = (-1)^k / k! \binom{n+\alpha}{n-k}, \text{ dla } \alpha \neq 0 \quad (4.16)$$

19. Metoda Newtona-Raphsona oraz metoda siecznych

Korzystając ze wzorów (4.5), (4.6) oraz (4.12), można zredukować problem znalezienia rozwiązania równań wariacyjnych (4.1.1) do problemu rozwiązania następującego układu nieliniowych równań algebraicznych (o nieliniowościach rzędu dwa):

$$A_i x + x^T L_i x - b_i = 0 \quad i=1,2,\dots,M, \quad (4.17)$$

gdzie:

- A_i - i-ty wiersz macierzy generowanej wyrażeniami liniowymi,
- x - wektor (kolumnowy) niewiadomych x_1, x_2, \dots, x_m ,
- L_i - macierz $M \times M$ generowana wyrażeniami nieliniowymi,
- b_i - składowe kolumny wyrazów wolnych,

Metoda Newtona-Raphsona, dla równań typu (4.17), ma szczególną postać:

$$[A_i + x_n^T (L_i + L_i^T)] \bar{x}_n = -A_i x_n - x_n^T L_i x_n + b_i, \quad n=0,1,\dots \quad (4.18)$$

gdzie:

- $x_{n+1} = x_n + \bar{x}_n$,
- x_{n+1} - to kolejne rozwiązanie iteracyjne,
- \bar{x}_n - wektor kolejnych poprawek.

Powyżej za x_0 przyjmujemy wartość równa zero.

Metoda siecznych w zastosowaniu do (4.17) ma postać

$$A_i x_{n+1} = -x_n^T L_i x_n + b_i, \quad n=0,1,\dots \quad (4.19)$$

Tutaj za x_0 przyjmujemy wartość równa zero, natomiast x_{n+1} to kolejne rozwiązanie iteracyjne.

20. Wnioski i uwagi

(a) Przewaga przedstawionego wariacyjno-rekurencyjnego uogólnienia metody tau- na przypadki nieliniowe, względem prac C. CANUTO i in. [1], [2], D. GOTTLIEB i in. [1], F. IF i in. [1], N. STERNBERG [1], polega na tym, że: 1) uogólnienie dotyczy równań nie tylko o stałych współczynnikach; 2) można w nim stosować dowolną rodzinę wielomianów ortogonalnych o różnych przedziałach ortogonalności. Natomiast przewaga podejścia wariacyjnego, z całkowaniem przez części,

i podstawieniem warunków brzegowych do równań, daje możliwość bezpośredniej konstrukcji układu nieliniowych równań algebraicznych. Odbywa się to bez konieczności redukcji ich liczby w przypadku więcej niż 1-wymiarowym, przy stosowaniu bezpośredniej ortogonalizacji równań i oddzielnie warunków brzegowych, por. C. CANUTO i in. [1].

(b) Budowa obiektów $A_r^k(n)$, $D_r^l(n)$ oraz $G_{ij}^{zpq}(n)$, por. (4.8.1-3), (4.11), jest niezmiennicza ze względu na rodzinę wielomianów ortogonalnych. Dla wielu rodzin tych wielomianów można otrzymać niezależne wzory na obiekty $A_r^k(n)$, $D_r^l(n)$, por. np. S. PASZKOWSKI [1] dla wielomianów Czebyszewa oraz P.K. SUJETIN [1] dla wielomianów Legendre'a. Wzory bezpośrednie, przy bardzo dużych stopniach wielomianów, mogą prowadzić do mniejszych błędów zaokrągleń.

ROZDZIAŁ V

MODEL RAPTOWNIE OGRZANEGO PRĘTA

W prezentowanym rozdziale przedstawiono problem nagle ogrzanego pręta skończonego $0 \leq x \leq l$. Dla $x=0$ temperatura jest liniową funkcją osiągającą stałą wartość w skończonym czasie t_k . Jeśli $t_k \rightarrow 0_+$, to temperatura ta zmierza do funkcji Heavisidea $H(t)$. Również dla $x=0$ znika naprężenie. Natomiast dla $x=l$ znikają zarówno temperatura, jak i przemieszczenie. Ponadto przyjęto liniowe związki geometryczne, liniowe równanie ruchu oraz liniowe prawo Fouriera, natomiast równanie energii i związki konstytutywne są nieliniowe. W równaniach konstytutywnych uwzględniono izotermiczne stałe 3 rzędu, a także przyjęto liniową zależność modułów 2 rzędu oraz współczynnika rozszerzalności cieplnej - od temperatury. Uwzględniono sprzężenie pola temperatur z polem przemieszczeń. Dyskretyzację równań opisujących problem przeprowadzono stosując metodę tau, prezentowaną w poprzednim rozdziale, z zastosowaniem wielomianów Legendre'a; przy czym zmienna czasowa potraktowano tak jak zmienna przestrzenna.

Rozwiązania uogólnione określono za pomocą stowarzyszonych równań rekurencyjno-wariacyjnych. Rozwiązania problemu wyjściowego poszukiwano dwiema metodami. W metodzie pierwszej przybliżono funkcje przemieszczenia i temperatury na całej długości pręta - w kolejnych krokach czasowych. W metodzie drugiej skorzystano z tego, że otoczenie swobodnego brzegu pręta, który został nagle ogrzany, zachowuje się podobnie do otoczenia brzegu swobodnie nagle ogrzanej liniowej półprzestrzeni, por. R.B. HETNARSKI [1], W. NOWACKI [1], J.T. ODEN [1]. W przypadku liniowej półprzestrzeni, gwałtowne jej ogrzanie powoduje propagację fali sprężystej z nieciągłą pierwszą pochodną przemieszczenia na czole fali. Stąd też w drugiej metodzie zastosowano podział obszaru zmienności funkcji poszukiwanych wzdłuż czoła liniowej fali termosprężystej. Pozwoliło to na:

- 1) dość dokładne przybliżenie brzegowej temperatury w postaci funkcji Heaviside'a;
- 2) uwzględnienie nieciągłości naprężeń na czole fali. Problem sensowności obu metod nie jest badany w sposób ogólny. Na wybranych przykładach pokazano m.in. jak zmienia się rozwiązanie przybliżone w zależności od ilości

wyrazów w jego rozwinięciu.

21. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy model pręta, rys.2, z wektorem przemieszczeń u_i o jednej składowej niezerowej

$$u_1 = u = u(x,t), \quad u_2 = u_3 = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty) \quad (5.1)$$

Rozważania ograniczymy do teorii geometrycznie liniowej, na tej podstawie tensor odkształcenia ma postać

$$\epsilon_{11} = u_{,x}, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad (5.2)$$

Równania różniczkowe ruchu i energii przyjmujemy kolejno w postaci (por.

T. JEKOT [1,2]):

$$\sigma_{11,x} = \rho u_{1,tt} \quad (5.3.1)$$

$$q_{,x} + c \epsilon_{,t} + (T_0 + \theta) \sigma_T^1 \epsilon_{11,t} = 0 \quad (5.3.2)$$

gdzie

$$\sigma_T^1 = - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \quad (5.4)$$

Przyjęto równania konstytutywne, zgodnie z punktem 7.1.

$$q = -k \theta_{,x} \quad (5.5)$$

$$\sigma \equiv \sigma_{11} = -\gamma(\theta) + (\lambda + 2\mu) u_{,x} + (1 + 2m) u_{,x}^2 \quad (5.6)$$

$$s \equiv \sigma_{22} = -\gamma(\theta) + \lambda u_{,x} + \mu u_{,x}^2 \quad (5.7)$$

Zakładamy (por. punkt 7.1.), że: a) moduły sprężystości 2 rzędu oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej są liniowymi funkcjami przyrostu temperatury; b) moduły 3 rzędu l, m, n są stałe; na tej podstawie napiszemy

$$\lambda = \lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \theta, \quad \mu = \mu(\theta) = \mu_0 + \mu_1 \theta,$$

$$\alpha_T = \alpha_T(\theta) = \alpha_T^0 + \alpha_T^1 \theta, \quad (5.8.1)$$

$$l = \text{const}, \quad m = \text{const}, \quad n = \text{const},$$

gdzie $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1, \alpha_T^0, \alpha_T^1$ są stałe. Z relacji (5.8.1), por. również punkt 7.1 wynika, że

$$\gamma(\theta) = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \theta^k, \quad (5.8.2)$$

gdzie

$$\gamma_1 = 3K_0 \alpha_T^0, \quad \gamma_2 = 3K_1 \alpha_T^0 + 3K_0 \alpha_T^1 + L(\alpha_T^0)^2,$$

$$\gamma_3 = 3K_1 \alpha_T^1 + 2L\alpha_T^0 \alpha_T^1, \quad \gamma_4 = L(\alpha_T^1)^2 \quad (5.8.3)$$

oraz

$$3K_0 = 3\lambda_0 + 2\mu_0, \quad 3K_1 = 3\lambda_1 + 2\mu_1, \quad L = 9l + n$$

Podstawiając równanie (5.6) do (5.3.1), a także wykorzystując relacje (5.1), (5.2), otrzymamy równanie ruchu (5.3.1) wyrażone w wielkościach u i θ

$$-(\gamma_1 + 2\gamma_2 \theta + 3\gamma_3 \theta^2 + 4\gamma_4 \theta^3) \theta_{,xx} + [\lambda(\theta) + 2\mu(\theta)] u_{,xx} + \quad (5.9)$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1) \theta_{,x} u_{,x} + 2(1 + 2m) u_{,xx} u_{,x} - \rho u_{,tt} = 0, \quad (x,t) \in [0, l] \times [0, \infty).$$

Podstawiając z kolei relacje (5.2), (5.4), (5.5) do równania energii (5.3.2) otrzymamy równanie energii wyrażone w wielkościach u i θ

$$-k \theta_{,xx} + c_e \theta_{,t} + (T_0 + \theta) [\gamma_1 + 2\gamma_2 \theta + 3\gamma_3 \theta^2 + 4\gamma_4 \theta^3 -$$

$$- (\lambda_1 + 2\mu_1) u_{,x}] u_{,x} = 0 \quad (x,t) \in [0, l] \times [0, \infty). \quad (5.10)$$

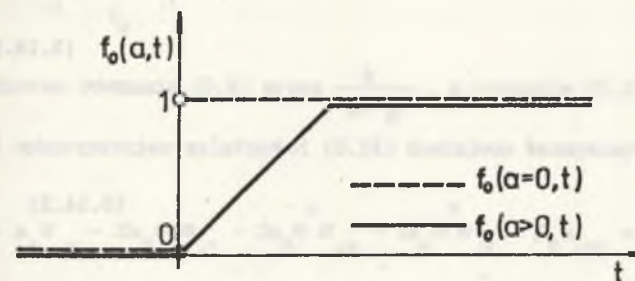
Warunki brzegowe dla funkcji temperatury θ , naprężenia σ i przemieszczenia u przyjmujemy w postaci

$$\theta(a, t) = f_0(a, t) \theta_0 \quad (a \geq 0, \theta_0 = \text{const}), \quad \theta(l, t) = 0,$$

$$\{-\gamma(\theta) + [\lambda(\theta) + \mu(\theta)] u_{,x} + (1 + 2m) u_{,xx}\} \Big|_{x=0} = 0, \quad (5.11)$$

$$u(l, t) = 0,$$

gdzie (por. rys. 6)



Rys. 6. Funkcja określająca warunki brzegowe na temperaturę

6. The function determining boundary conditions for temperature

$$f_0(a, t) = \begin{cases} 0, & (t=0) \\ 1, & (a=0, t>0) \text{ lub } (a>0, t>a) \\ \frac{1}{a} t, & (a>0, 0 \leq t \leq a) \end{cases}; \quad (5.12)$$

można zauważyć, że

$$f_0(a, t) = H(t),$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a. Ponadto zakładamy, że pręt znajduje się w mechanicznie nierozszerzalnej osłonie adiabatycznej (stąd możliwe przemieszczenia jedynie w kierunku osi x , zgodnie z relacją (5.1), oraz brak utraty ciepła na ściankach pręta). Dla $t=0$ przyjmujemy warunki początkowe

$$\theta(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_{,t}(x, 0) = 0, \quad (5.13)$$

Problem początkowo-brzegowy (wymiarowy) raptownie ogrzanego pręta opisany jest równaniami różniczkowymi ruchu (5.9) bilansu energii (5.10) wraz z warunkami początkowo-brzegowymi (5.13) oraz (5.11).

22. Równania bezwymiarowe

W celu otrzymania równań bezwymiarowych wprowadzamy wielkości "odniesienia" analogiczne do tych z pracy R.B. HETNARSKIEGO [1]. Za naprężenie odniesienia przyjmujemy

$$\sigma_0 = \mu_0 \quad (5.14.1)$$

za czas odniesienia

$$\tilde{t} = \frac{k}{\rho c_e v^2} \quad (5.14.2)$$

za długość odniesienia

$$l_0 = \frac{k}{\rho c_e v} \quad (5.14.3)$$

gdzie c_e jest ciepłem właściwym liczonym na jednostkę masy; natomiast

$$v = \left(\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad (5.14.4)$$

jest prędkością propagacji liniowych naprężeń podłużnych σ_1 , dla których

$$\lambda_1 = \mu_1 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad l = n = m = 0 \quad (5.15)$$

Za temperaturę odniesienia przyjmujemy temperaturę stanu naturalnego T_0 . Oznaczając przez $(\bar{\cdot})$ wielkości bezwymiarowe otrzymujemy

$$\sigma = \mu_0 \bar{\sigma}, \quad s = \mu_0 \bar{s}, \quad t = \tilde{t}_0 \bar{t}, \quad (5.16)$$

$$\bar{x} = l_0 \bar{x}, \quad u = l_0 \bar{u}, \quad \theta = T_0 \bar{\theta}$$

natomiast dla pochodnych mamy

$$\begin{aligned} u_{,x} &= \bar{u}_{,\bar{x}}, \quad u_{,xx} = l_0^{-1} \bar{u}_{,\bar{x}\bar{x}}, \quad u_{,tt} = \frac{\rho c_e v^3}{k} \bar{u}_{,\bar{t}\bar{t}}, \\ u_{,xt} &= \frac{1}{\tilde{t}_0} \bar{u}_{,\bar{x}\bar{t}}, \quad \theta_{,x} = \frac{T_0}{l_0} \bar{\theta}_{,\bar{x}}, \quad \theta_{,xx} = \frac{T_0}{l_0^2} \bar{\theta}_{,\bar{x}\bar{x}}, \\ \theta_{,t} &= \frac{T_0}{\tilde{t}_0} \bar{\theta}_{,\bar{t}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Mnożąc równanie (5.9) przez $\frac{k}{\mu_0 \rho c_e v}$, a równanie (5.10) przez $\frac{k}{\rho^2 c_e^2 v^2 T_0}$, i wykorzystując zależności (5.14) dostajemy bezwymiarowe równania pola,

$$\begin{aligned} -a_1 \theta_{,x} - 2a_2 \theta \theta_{,x} - 3a_3 \theta^2 \theta_{,x} - 4a_4 \theta^3 \theta_{,x} + \beta_0 u_{,xx} + \beta_1 \theta u_{,xx} + \\ + \beta_1 \theta_{,x} u_{,x} + 2L_0 u_{,x} u_{,xx} - \beta_0 u_{,tt} = 0, \end{aligned} \quad (5.18.1)$$

$$-\theta_{,xx} + \theta_{,t} + (1+\theta)(b_1 + b_2 \theta + b_3 \theta^2 + b_4 \theta^3 - b_5 u_{,x}) u_{,xt} = 0 \quad (5.18.2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{T_0 \gamma_1}{\mu_0}, \quad a_2 = \frac{T_0^2 \gamma_2}{\mu_0}, \quad a_3 = \frac{T_0^3 \gamma_3}{\mu_0}, \quad a_4 = \frac{T_0^4 \gamma_4}{\mu_0} \\ \beta_0 &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\mu_0}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_0}, \quad L_0 = \frac{l + 2n}{\mu_0} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\gamma_1}{c_e}, \quad b_2 = \frac{2\gamma_2 T_0}{c_e}, \quad b_3 = \frac{3\gamma_3 T_0^2}{c_e} \\ b_4 &= \frac{4\gamma_4 T_0^3}{c_e}, \quad b_5 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{c_e} \end{aligned}$$

Uwaga. W równaniach (5.18) i w dalszych opuszczamy kreskę wyróżniającą obiekty bezwymiarowe $(\bar{\cdot})$.

Warunki brzegowe i początkowe dla pól bezwymiarowych zapiszemy analogicznie dla pól wymiarowych (por. relacje (5.11), (5.13))

$$\theta(0,t) = f_0(\bar{a},t) \frac{\theta_0}{T_0}, \quad \theta(\ell/\ell_0,t) = 0; \quad (5.20.1)$$

$$\sigma|_{x=0} = 0; \quad (5.20.2)$$

$$u(\ell/\ell_0,t) = 0; \quad (5.20.3)$$

$$\theta(x,0) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_{,i}(x,0) = 0, \quad (5.20.4)$$

gdzie $\bar{a} = a/t_0$ oraz

$$\sigma = -(a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4) + \beta_0 u_{,x} + \beta_1 \theta u_{,x} + L_0 u_{,x}^2 \quad (5.21)$$

Problem początkowo-brzegowy (bezwymiarowy) raptownie ograniczonego pręta opisany jest równaniami różniczkowymi ruchu (5.18.1) bilansu energii (5.18.2) wraz z warunkami początkowo-brzegowymi (5.20.1-4).

23. Rekurencyjne równania wariacyjne i rozwiązania uogólnione

Określimy teraz rekurencyjne rozwiązanie uogólnione. Podstawę jego określenia stanowią równania wariacyjne. Rekurencyjność rozwiązania będzie polegać na tym, że rozwiązanie w kolejnym kroku czasowym przyjmuje warunki początkowe, które są końcowymi warunkami rozwiązania uzyskanego w poprzednim kroku (zachowano zgodność funkcji temperatury, przemieszczenia oraz pierwszej pochodnej funkcji przemieszczenia po czasie). Wybierzmy na osi czasu kolejne punkty t_k , $k=0,1,2,\dots$, tak aby

$$0=t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots \quad (5.22)$$

Rozważania na obszarze

$$V = \{ x \in (0, \ell/\ell_0), t \in (0, \infty) \} \quad (5.23)$$

zastępujemy rozważaniami na obszarze V^* (przybliżenie w sensie topologicznym obszaru V), który definiujemy następująco:

$$V^* = \bigcup_{k=1} \bar{V}_k, \quad \bar{V}_k = \{ x \in (0, \ell/\ell_0), t \in (t_{k-1}, t_k) \}, \quad (5.24)$$

$k=1,2,\dots$

Równania (5.18) mnożymy odpowiednio przez funkcje $w_k(x,t)$ oraz $v_k(x,t)$ klasy $C^{\infty}(\bar{V}_k)$, $k=1,2,\dots$ i całkujemy w obszarach \bar{V}_k otrzymując

$$\int_0^{\ell/\ell_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\sigma_{,x} - \beta_0 u_{,tt}) w_k(x,t) dx dt = 0, \quad (5.25)$$

$$\int_0^{\ell/\ell_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [-\theta_{,xx} + \theta_{,t} + \tau(x,t)] v_k(x,t) dx dt = 0,$$

$k = 1, 2, \dots$

gdzie σ dane jest wzorem (5.21), natomiast

$$\tau(x,t) = (1+\theta)(b_1 + b_2\theta + b_3\theta^2 + b_4\theta^3 - b_5 u_{,x}) u_{,xt}. \quad (5.26)$$

Całkujemy równania (5.25) przez części wykorzystując: a) warunki brzegowe (5.20.1-3); b) warunki początkowe (5.20.4), które w przyjętym zapisie przyjmują postać

$$\theta_0(x,0) = 0, \quad u_0(x,0) = 0, \quad u_{0,t}(x,0) = 0; \quad (5.27)$$

c) warunki zgodności w punktach t_k :

$$\theta_{k+1}(x, t_k) = \theta_k(x, t_k), \quad u_{k+1}(x, t_k) = u_k(x, t_k), \quad (5.28)$$

$$u_{k+1,t}(x, t_k) = u_{k,t}(x, t_k),$$

gdzie przez u_k oraz θ_k oznaczono funkcje poszukiwane obcięte do obszaru \bar{V}_k ; i otrzymujemy następujące rekurencyjne równania wariacyjne problemu:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \sigma_k(\ell/\ell_0, t) w_k(\ell/\ell_0, t) + \beta_0 u_k(0, t) w_{k,x}(0, t) - \int_0^{\ell/\ell_0} [(\sigma_k - \beta_0 u_{k,x}) w_{k,x} - \right.$$

$$\left. - \beta_0 u_k w_{k,xx} \right] dx \Big\} dt - \beta_0 \int_0^{\ell/\ell_0} [u_{k,t}(x, t_k) w_k(x, t_k) -$$

$$- u_{k-1,t}(x, t_{k-1}) w_k(x, t_{k-1}) - u_k(x, t_k) w_{k,t}(x, t_k) +$$

$$+ u_{k-1}(x, t_{k-1}) w_{k,t}(x, t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} u_k w_{k,tt} dt] dx = 0 ;$$

(5.29)

$$- \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\theta_{k,x}(\ell/\ell_0, t) v_k(\ell/\ell_0, t) - \theta_{k,x}(0, t) v_k(0, t) -$$

$$- f_0(\bar{a}, t) \theta_0 v_k(0, t) + \int_0^{\ell/\ell_0} \theta_k v_{k,xx} dx] dt +$$

$$+ \int_0^{\ell/\ell_0} \{ \theta_k(x, t_k) v_k(x, t_k) - \theta_{k-1}(x, t_{k-1}) v_k(x, t_{k-1}) -$$

$$- \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\theta_k v_{k,t} - \tau_k(x, t) v_k] dt \} dx = 0$$

k=1, 2, ...

OKREŚLENIE

Rekurencyjnym, uogólnionym rozwiązaniem problemu określonego równaniami (5.18) z warunkami początkowo-brzegowymi (5.20) - nazywamy parę funkcji $u(x, t)$, $\theta(x, t)$, której obcięcie do zbioru \bar{V}_k spełnia równania (5.29), dla każdej pary funkcji $w_k, v_k \in C^\infty(\bar{V}_k)$, (k=0, 1, 2, ...)

Można zauważyć, że rozwiązanie klasyczne równań (5.18) jest również rekurencyjnym rozwiązaniem uogólnionym. W celu rozwiązania równań (5.29) metodami spektralnymi, przyjmujemy dla każdego obszaru \bar{V}_k nowe zmienne $x \in [-1, 1]$, $t \in [-1, 1]$, powiązane ze starymi (por. (5.24)) relacjami

$$x = 2\bar{x}d - 1, \quad t = 2b_k(\bar{t} - \bar{t}_k) - 1, \quad (5.30.1)$$

gdzie

$$d = \ell_0/\ell, \quad b_k = 1/(\bar{t}_{k+1} - \bar{t}_k). \quad (5.30.2)$$

Obszarowi \bar{V}_k będzie teraz odpowiadał obszar

$$V_k = \{x \in [-1, 1], t \in [-1, 1]\}$$

Przyjmijmy, że wielkości odnoszące się do nowych obszarów nie będą wyróżnione kreskami. W celu zapisania równań wariacyjnych w nowych zmiennych x, t potrzebna jest znajomość wzorów na transformację pochodnych. Jeżeli mamy funkcję $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})$ określoną w obszarze \bar{V}_k oraz odpowiadająca jej funkcję $f(x, t)$ w obszarze V_k :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = f(x, t),$$

to wzory te są następujące

$$\begin{aligned} \bar{f}_{,x} &= 2df_{,x}, & \bar{f}_{,xx} &= 4d^2f_{,xx}, & \bar{f}_{,t} &= 2b_k f_{,t}, \\ \bar{f}_{,tt} &= 4b_k^2 f_{,tt}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ograniczmy rozważania do przypadku, gdy $0 \leq \bar{a} \leq \bar{t}_1$ (por. (5.12)). Warunki brzegowe, początkowe i zgodności dla nowych obszarów przyjmują postać:

$$\theta_k(-1, t) = f_0(\bar{a}, t, k) \theta_0 \quad (\theta_0 = \text{const}), \quad \theta_k(1, t) = 0,$$

$$\{-\gamma + [\lambda + \mu]u_{k,x} + (1 + 2m)u_{k,x}^2\}|_{x=-1} = 0, \quad (5.32)$$

$$u_k(1,t) = 0,$$

gdzie

$$f_0(a,t,k) = \begin{cases} 0, & (t=-1, k=0) \\ 1, & (t>a, k=0) \text{ lub } (k \geq 1) \\ (t+1)/(a+1), & (a>-1) \end{cases}; \quad (5.33)$$

$a \in [-1, 1]$, oraz

$$\theta_0(x,-1) = 0, \quad u_0(x,-1) = 0, \quad u_{0,t}(x,-1) = 0,$$

$$\theta_{k+1}(x,-1) = \theta_k(x,1), \quad u_{k+1}(x,-1) = u_k(x,1), \quad (5.34)$$

$$u_{k+1,t}(x,-1) = u_{k,t}(x,1), \quad k=1,2,3,\dots$$

Równania wariacyjne (5.29) zapisane w nowych zmiennych, po pomnożeniu ich przez $4\delta_k$, mają następującą postać:

$$\int_{-1}^1 \left\{ \sigma_k(1,t)w_k(1,t) + 2d\beta_0 u_k(-1,t)w_{k,x}(-1,t) - \int_{-1}^1 [2d(\sigma_k - 2d\beta_0 u_{k,x})w_{k,x} - 4d\beta_0 u_k w_{k,xx}] dx \right\} dt - \beta_0 \int_{-1}^1 [2b_k u_{k,t}(x,1)w_k(x,1) - 2b_k u_{k-1,t}(x,1)w_k(x,1) - 2b_k u_k(x,1)w_{k,t}(x,1) + 2b_k u_{k-1}(x,1)w_{k,t}(x,1) + 4b_k \int_{-1}^1 u_k w_{k,tt} dt] dx = 0, \quad (5.35)$$

$$- \int_{-1}^1 [2d\theta_{k,x}(1,t)v_k(1,t) - 2d\theta_{k,x}(-1,t)v_k(-1,t) - f_0(a,t,k)\theta_0 v_k(-1,t) + 4d \int_{-1}^1 \theta_k v_{k,xx} dx] dt +$$

$$+ \int_{-1}^1 \left\{ \theta_k(x,1)v_k(x,1) - \theta_{k-1}(x,1)v_k(x,1) - \int_{-1}^1 [2b_k \theta_k v_{k,t} - \tau_k(x,t)v_k] dt \right\} dx = 0, \quad (5.20)$$

$k=1,2,\dots$

Zanim przystąpimy do poszukiwania przybliżonego rozwiązania równań (5.35), podamy inną metodę przybliżonego rozwiązania problemu wyjściowego (5.18), (5.20).

24. Element z podziałem

24.1. Równania problemu w pierwszym kroku czasowym

Rozważany przypadek gwałtownie ogrzanego pręta nieliniowego jest analogiczny do przypadku gwałtownie ogrzanej liniowej półprzestrzeni (por. R.B. HETNARSKI [1], [2], W. NOWACKI [1], [2]). W przypadku półprzestrzeni następuje utrata ciągłości pierwszej pochodnej przestrzennej przemieszczenia na czole fali, powodując skok naprężenia na tym czole. Prędkość w rozchodzenia się fali w półprzestrzeni dana jest wzorem (5.14.4). Stąd czoło fali w przypadku liniowym opisuje prosta $\bar{x}=\bar{t}$. Ponieważ prędkości podłużne w przypadkach liniowym i nieliniowym dla rozważanego materiału różnią się nieznacznie, por. Uwaga (h) w tym rozdziale, więc nie będziemy ich rozróżniać w obliczeniach i dla znalezienia przybliżonego rozwiązania nieliniowego problemu wyjściowego w pierwszym kroku czasowym przyjmujemy, że czoło fali nieliniowej można identyfikować z czołem fali w liniowej półprzestrzeni. Ograniczenie rozważań do pierwszego kroku czasowego oznacza, że

$$\bar{t} \in [0, \bar{t}_1] \quad (5.36)$$

Przyjmijmy ponadto, że $\bar{t}_1 = l/l_0$, wówczas czoło fali w czasie \bar{t}_1 dochodzi do końca pręta $x=l$. W celu uwzględnienia utraty ciągłości pierwszej pochodnej przemieszczenia, dla $\bar{x}=\bar{t}$, dzielimy interesujący nas obszar zmienności funkcji

$$\bar{V} = \{\bar{x} \in [0, \ell/\ell_0], \bar{t} \in [0, \ell/\ell_0]\}$$

na dwa następujące podobszary:

$$\bar{V}_1 = \{\bar{x} \in [0, \bar{t}], \bar{t} \in [0, \ell/\ell_0]\}, \quad \bar{V}_2 = \{\bar{x} \in [0, \ell/\ell_0], \bar{t} \in [0, \bar{x}]\}$$

Wprowadźmy nowe zmienne $x \in [-1, 1], t \in [-1, 1]$ dla każdego obszaru z osobna, tak aby

$$V_1 = \{x \in [-1, 1], t \in [-1, 1]\}, \quad V_2 = \{x \in [-1, 1], t \in [-1, 1]\}$$

Relacje pomiędzy starymi zmiennymi \bar{x}, \bar{t} a nowymi x, t można dla poszczególnych obszarów zapisać następująco:

$$x = \frac{4d}{t+1} \bar{x} - 1, \quad t = 2d\bar{t} - 1 \quad \text{dla } (x, t) \in V_1 \quad (5.37.1)$$

oraz

$$x = 2d\bar{x} - 1, \quad t = \frac{4d}{x+1} \bar{t} - 1 \quad \text{dla } (x, t) \in V_2, \quad (5.37.2)$$

gdzie d wyrażone jest wzorem (5.30.2). W celu zapisania równań równowagi w obszarach V_1, V_2 w nowych zmiennych x, t potrzebna jest znajomość wzorów na transformację pochodnych. Jeżeli mamy funkcję określoną w obszarze V_1

$$\bar{f}_1(\bar{x}, \bar{t}) = f_1(x, t),$$

to wzory te są następujące

$$\begin{aligned} \bar{f}_{1,x} &= \frac{4d}{t+1} f_{1,x}, \quad \bar{f}_{1,\bar{t}} = -2d \frac{x+1}{t+1} f_{1,x} + 2d f_{1,t}, \\ \bar{f}_{1,xx} &= \frac{16d^2}{(t+1)^2} f_{1,xx}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{1,tt} &= 4d^2 \frac{(x+1)^2}{(t+1)^2} f_{1,xx} + 8d^2 \frac{x+1}{(t+1)^2} f_{1,x} - 8d^2 \frac{x+1}{t+1} f_{1,xt} + \\ &+ 4d^2 f_{1,tt}, \end{aligned}$$

$$\bar{f}_{1,xt} = -8d^2 \left[\frac{x+1}{(t+1)^2} f_{1,xx} + \frac{1}{(t+1)} f_{1,x} - \frac{1}{t+1} f_{1,xt} \right].$$

W powyższych wzorach, zastępując formalnie $f_1; \bar{x}, \bar{t}; x, t$ kolejno przez $f_2; \bar{x}; t, x$ dostaniemy analogiczne transformaty pochodnych dla obszaru V_2 . Funkcje $\bar{\theta}, \bar{u}, \bar{\sigma}$, zależne od bezwymiarowych zmiennych \bar{x}, \bar{t} , zamieniamy na funkcje $\theta_1, \theta_2, u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2$, określone odpowiednio w obszarach V_1, V_2 i zależne od zmiennych x, t , zgodnie z relacjami (5.37). Stosując transformaty pochodnych (5.38) w równaniach równowagi (5.18) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,x} - \beta_0 \left[4d^2 \frac{(x+1)^2}{(t+1)^2} u_{1,xx} + 8d^2 \frac{x+1}{(t+1)^2} u_{1,x} - \right. \\ \left. - 8d^2 \frac{x+1}{t+1} u_{1,xt} + 4d^2 u_{1,tt} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$-\frac{16d^2}{(t+1)^2} \theta_{1,xx} - 2d \left(\frac{x+1}{t+1} \theta_{1,x} - \theta_{1,t} \right) + \tau_1(x, t) = 0, \quad \text{na } V_1;$$

$$\sigma_{2,x} - \beta_0 \frac{16d^2}{(x+1)^2} u_{2,tt} = 0, \quad (5.40)$$

$$-4d^2 \frac{(t+1)^2}{(x+1)^2} \theta_{2,tt} - 8d^2 \frac{t+1}{(x+1)^2} \theta_{2,t} + 8d^2 \frac{t+1}{x+1} \theta_{2,xt}$$

$$-4d^2 \theta_{2,xx} + \frac{4d}{x+1} \theta_{2,t} + \tau_2(x, t) = 0, \quad \text{na } V_2,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_{1,x} &= \frac{4d}{t+1} \theta_{1,x} (-a_1 - 2a_2 \theta_1 - 3a_3 \theta_1^2 - a_4 \theta_1^3) + \frac{16d^2}{(t+1)^2} u_{1,xx} (\beta_0 + \beta_1 \theta_1) + \\ &+ \frac{4d}{t+1} u_{1,x} \left(\beta_1 \frac{4d}{t+1} \theta_{1,x} + 2L_0 \frac{16d^2}{(t+1)^2} u_{1,xx} \right), \end{aligned}$$

$$\tau_1(x,t) = (1+\theta_1)(b_1+b_2\theta_1+b_3\theta_1^2+b_4\theta_1^3-b_5\frac{4d}{t+1}u_{1,x})(-8d^2\frac{x+1}{(t+1)^2}u_{1,xx} - 8d^2\frac{1}{(t+1)^2}u_{1,x} + 8d^2\frac{1}{t+1}u_{1,x,t}), \quad \text{na } V_1; \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,x} = & 2d\frac{t+1}{x+1}(\theta_{2,t} - \theta_{2,x})(a_1 + 2a_2\theta_2 + 3a_3\theta_2^2 + 4a_4\theta_2^3) + \\ & + [4d^2\frac{(t+1)^2}{(x+1)^2}u_{2,t,t} + 8d^2\frac{t+1}{(x+1)^2}u_{2,t} - 8d^2\frac{t+1}{x+1}u_{2,x,t} + \\ & + 4d^2u_{2,xx}][\beta_0 + \beta_1\theta_2 - 4L_0d(\frac{t+1}{x+1}u_{2,t} - u_{2,x})] + \\ & + 4d^2\beta_1\frac{t+1}{x+1}(\theta_{2,t} - \theta_{2,x})(\frac{t+1}{x+1}u_{2,t} - u_{2,x}), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\tau_2(x,t) = -8d^2(1+\theta_2)[b_1 + b_2\theta_2 + b_3\theta_2^2 + b_4\theta_2^3 + 2db_5(\frac{t+1}{x+1}u_{2,t} - u_{2,x})][\frac{t+1}{(x+1)^2}u_{2,t,t} + \frac{1}{(x+1)^2}u_{2,t} - \frac{1}{x+1}u_{2,x,t}], \quad \text{na } V_2. \quad (5.43)$$

Warunki początkowo-brzegowe dla obszarów V_1, V_2 są następujące:

$$\theta_1|_{x=-1} = f_0(a,t)H(t)\theta_0/T_0; \quad \theta_2|_{x=1} = 0, \quad (5.44.1)$$

$$\sigma_1|_{x=-1} = 0, \quad (5.44.2)$$

$$u_2|_{x=-1} = 0, \quad \theta_1|_{t=-1} = 0, \quad \theta_2|_{t=-1}, \quad u_1|_{t=-1} = 0, \quad (5.44.3)$$

$$u_2|_{t=-1} = 0, \quad (5.44.4)$$

gdzie $a \in [-1,1]$ oraz

$$\sigma_1 = -(a_1\theta_1 + a_2\theta_1^2 + a_3\theta_1^3 + a_4\theta_1^4) + \frac{4d}{t+1}u_{1,x}(\beta_0 + \beta_1\theta_1 + \frac{4d}{t+1}L_0u_{1,x}); \quad (5.45)$$

natomiast warunki zgodności temperatury i przemieszczenia na prostej diagonalnej $\bar{x}=\bar{t}$ wyrażają się związkami

$$\theta_1\Big|_{\substack{t=y \\ x=1}} = \theta_2\Big|_{\substack{x=y \\ t=1}}, \quad u_1\Big|_{\substack{t=y \\ x=1}} = u_2\Big|_{\substack{x=y \\ t=1}}, \quad (5.46)$$

$$\left[\frac{4d}{x+1}\theta_{2,t}\right]\Big|_{\substack{x=y \\ t=1}} = -2d\left[\frac{x+1}{t+1}\theta_{1,t} - \theta_{1,x}\right]\Big|_{\substack{t=y \\ x=1}},$$

gdzie y jest zmienna pomocnicza.

24.2. Równania wariacyjne problemu

W celu otrzymania równań wariacyjnych mnożymy równania (5.39)₁ i (5.39)₂ odpowiednio przez $(t+1)^3 w_1$ oraz $(t+1)^3 v_1$, a równania (5.40)₁ i (5.40)₂ odpowiednio przez $(x+1)^3 w_2$ oraz $(x+1)^3 v_2$, gdzie

$$w_1 = w_1(x,t), \quad v_1 = v_1(x,t), \quad (x,t) \in V_1,$$

$$w_2 = w_2(x,t), \quad v_2 = v_2(x,t), \quad (x,t) \in V_2.$$

Otrzymane w ten sposób równania całkujemy w obszarach odpowiednio V_1 i V_2 . Stosujemy dalej całkowanie przez części. Wykorzystując warunki początkowo-brzegowe (5.44) oraz warunki zgodności (5.46) otrzymamy

$$\int_{-1}^1 (t+1)^3 \sigma_1 w_1 \Big|_{x=1} dt - \iint_{V_1} (t+1)^3 \sigma_1 w_{1,x} dx dt - \beta_0 \{4d^2 \int_{-1}^1 4(t+1)u_{1,x} dx\}$$

$$w_1 \Big|_{x=1} dt - \int_{-1}^1 4(y+1)u_2 \Big|_{t=1} w_{1,x} \Big|_{x=1} dy + \iint_{V_1} (x+1)^2 (t+1)u_{1,xx} dx dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + 8d^2 \iint_{V_1} [(x+1)(t+1)u_{1,x} - (x+1)(t+1)^2 u_{1,xt}] w_1 dxdt + \\
 & + 4d^2 \int_{-1}^1 [8u_{1,t} w_1 \Big|_{t=1} - u_1(12w_1 + 8w_{1,t}) \Big|_{t=1}] dx + \iint_{V_1} u_1 [6(t+1)w_1 + \\
 & + 6(t+1)^2 w_{1,t} + (t+1)^3 w_{1,tt}] dxdt = 0, \tag{5.47}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 16d^2 \left\{ \int_{-1}^1 [-(y+1)\theta_{2,t} + 1/2(y+1)^2 \theta_{2,x}] \Big|_{x=y}^{v_1} \Big|_{t=y}^{x=1} dy + \right. \\
 & - \int_{-1}^1 (y+1)\theta_2 \Big|_{x=y}^{v_1, x} \Big|_{t=y}^{x=1} dy + \iint_{V_1} (t+1)\theta_1 v_{1,xx} dxdt \left. \right\} - \\
 & - 2d \left\{ \iint_{V_1} [-(t+1)^3 \theta_1 v_{1,t} + (x+1)(t+1)^2 \theta_{1,x} v_1] dxdt + \int_{-1}^1 8\theta_1 v_1 \Big|_{t=1} dx \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\int_V \int (t+1)^3 v_1 \tau_1(x,t) dxdt = 0, \tag{5.48}$$

$$\iint_{V_2} (x+1)^3 [\sigma_{2,x} w_2 - 4\beta_0 d^2 u_{2,xx}] w_2 dxdt + 4\beta_0 d^2 \left[\int_{-1}^1 8u_{2,x} w_2 \Big|_{x=1} dt - \right.$$

$$\left. \iint_{V_2} u_2 [6(x+1)w_2 + 6(x+1)^2 w_{2,x} + (x+1)^3 w_{2,xx}] dxdt \right\} -$$

$$- 16\beta_0 d^2 \left[\int_{-1}^1 (x+1)u_{2,t} w_2 \Big|_{t=1}^{x=1} dx - \int_{-1}^1 (y+1)u_1 \Big|_{x=1} w_{1,t} \Big|_{t=1}^{x=y} dy + \right.$$

$$\left. + \iint_{V_2} (x+1)u_2 w_{2,tt} dxdt \right\} = 0; \tag{5.49}$$

$$- 4d \left\{ \int_{-1}^1 [4(y+1)\theta_{1,x} + 2(y+1)^2 \theta_{1,t}] \Big|_{x=y}^{v_2} \Big|_{t=y}^{x=1} - 4(y+1)\theta_1 \Big|_{x=y}^{(v_2+v_2,t)} \Big|_{t=y}^{x=y} \right.$$

$$\left. + \iint_{V_2} (x+1)\theta_2 [2v_2 + 4(t+1)v_{2,t} + (t+1)v_{2,tt}] dxdt \right\} -$$

$$- 8d^2 \iint_{V_2} [(x+1)(t+1)\theta_{2,t} v_2 - (x+1)^2 (t+1)\theta_{2,xt} v_2] dxdt -$$

$$- 4d^2 \int_{-1}^1 [8\theta_{2,x} v_2 \Big|_{x=1} - \theta_2(12v_2 + 8v_{2,x}) \Big|_{x=1}] dt + \tag{5.50}$$

$$\left. + \iint_{V_2} [-4d^2 (x+1)^3 \theta_2 v_{2,xx} + 4d(x+1)^2 \theta_{2,t} v_2 + (x+1)^3 \tau_2(x,t)v_2] dxdt = 0. \right.$$

25. Zastosowanie metod spektralnych

Aby rozwiązać równania wariacyjne 1 metody (równania (5.35)) lub równania wariacyjne 2 metody (równania (5.47)-(5.48) i równania (5.49)-(5.50)) stosujemy metody spektralne. Funkcje niewiadome poszukujemy w postaci szeregów skończonych w dwuwymiarowych przestrzeniach V_{NM} wielomianów ortogonalnych Legendre'a $P_i(x), P_j(t)$ $x \in [-1,1], t \in [-1,1]$ ($i=0,1,\dots,N, j=0,1,\dots,M$), tj.

$$u_{\alpha}(x,t) = \sum_{l,j=0}^{N,M} u_{\alpha l j} P_l(x) P_j(t), \quad u_{\alpha}(x,t) \equiv u_{\alpha}^{(N,M)}(x,t), \quad u_{\alpha l j} \equiv u_{\alpha l j}^{(N,M)} \tag{5.51}$$

$$\theta_{\alpha}(x,t) = \sum_{l,j=0}^{N,M} \theta_{\alpha l j} P_l(x) P_j(t) \quad \text{dla } \alpha = 1,2$$

$$\theta_{\alpha}(x,t) \equiv \theta_{\alpha}^{(N,M)}(x,t), \quad \theta_{\alpha i j} \equiv \theta_{\alpha i j}^{(N,M)},$$

gdzie $u_{\alpha i j}, \theta_{\alpha i j}$ są niewiadomymi współczynnikami rozwinięcia funkcji poszukiwanych, natomiast N i M nazwiemy stopniami rozwinięcia funkcji. W równaniach (5.35) dla $\alpha=1$ lub w równaniach (5.47)-(5.48) przyjmujemy funkcje niewiadome w postaci (5.51) oraz funkcje mnożnikowe w postaci

$$w_{\alpha}(x,t) = P_n(x)P_m(t), \quad v_{\alpha}(x,t) = P_n(x)P_m(t), \quad \alpha=1,2$$

$$w_{\alpha}(x,t) \equiv w_{\alpha}^{(N,M)}(x,t), \quad v_{\alpha}(x,t) \equiv v_{\alpha}^{(N,M)}(x,t).$$

W celu zmniejszenia liczby rozwiązywanych równań stosujemy następującą procedurę: Równania wariacyjne (5.35) lub (5.47)-(5.48) rozwiązujemy iteracyjnie ze względu na temperaturę, tzn. realizujemy etapy:

krok (0): rozwiązujemy niesprężone równania równowagi cieplnej;

krok (1): rozwiązujemy równania równowagi dynamicznej, z temperaturą znaną w kroku zerowym;

krok (2): otrzymane przemieszczenia wstawiamy do sprzężonych równań bilansu ciepła, itd.

Powyższa procedura prowadzi do równań, w których występują iloczyny czynników zawierające więcej niż dwie niewiadome funkcje temperatury. Ponieważ przedstawiona w rozdziale IV procedura dopuszcza jedynie iloczyny dwóch niewiadomych funkcji bądź ich pochodnych, to stosując operacje opisaną wzorem (4.13) wprowadzamy nowe funkcje $T_1^2(x,t), T_2^2(x,t), T_1^3(x,t), T_2^3(x,t), T_1^4(x,t), T_2^4(x,t)$ z przestrzeni V_{NM} , które odpowiadać będą kwadratowi, trzecim i czwartym potęgom funkcji temperatury w obszarach V_1 i V_2 . Współczynniki rozkładu tych funkcji w przestrzeni V_{NM} wyrażają się wzorami:

$$T_{\alpha nm}^2 = L_{nm} \quad [\theta_{\alpha}, \theta_{\alpha}],$$

$$T_{\alpha nm}^3 = L_{nm} \quad [T_{\alpha}^2, \theta_{\alpha}], \quad (5.52)$$

$$T_{\alpha nm}^4 = L_{nm} \quad [T_{\alpha}^2, T_{\alpha}^2], \quad \alpha = 1, 2,$$

Zastosowanie operacji opisanych wzorami (4.5), (4.6) oraz (4.13) przy rozwiązywaniu równań wariacyjnych (5.35) lub (5.47)-(5.48) prowadzi do układów nieliniowych równań algebraicznych (o nieliniowościach rzędu dwa), które

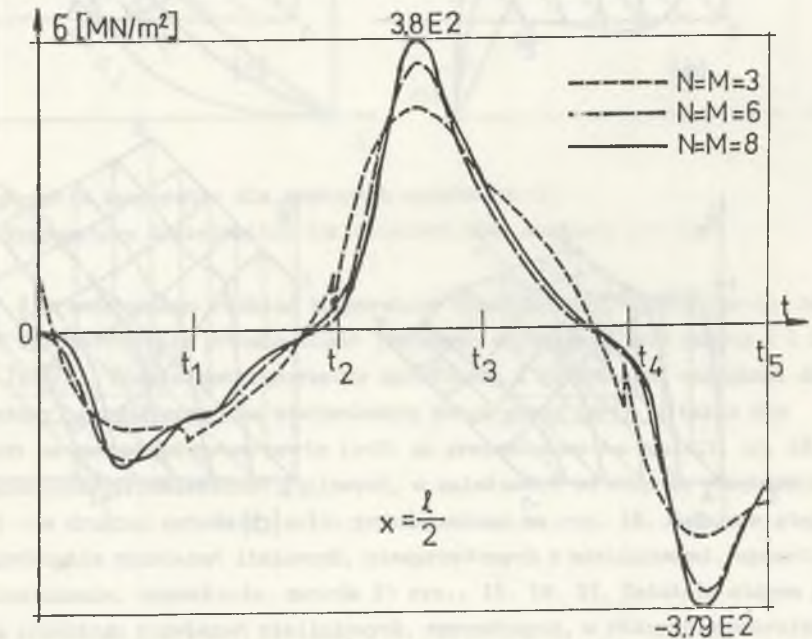
rozwiązujemy metodą Newtona-Raphsona.

26. Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono dla pręta wykonanego ze stopu aluminium D 54 S, (por. R.T. SMITH i in. [1], T. JEKOT [2]) dla wartości $d=1/2$, por. (5.30.2) oraz dla przyrostu temperatury brzegowej $\theta_0=200K$ (przy temperaturze odniesienia $T_0 = 273K$). Wykresy 7-19 przedstawiają temperaturę oraz przemieszczenia bezwymiarowe, natomiast naprężenia są wielkościami wymiarowymi. W pierwszej metodzie przedział czasowy dzielimy na pięć równych części:

$$\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = \dots = \bar{t}_5 = \ell / \ell_0, \quad (5.53)$$

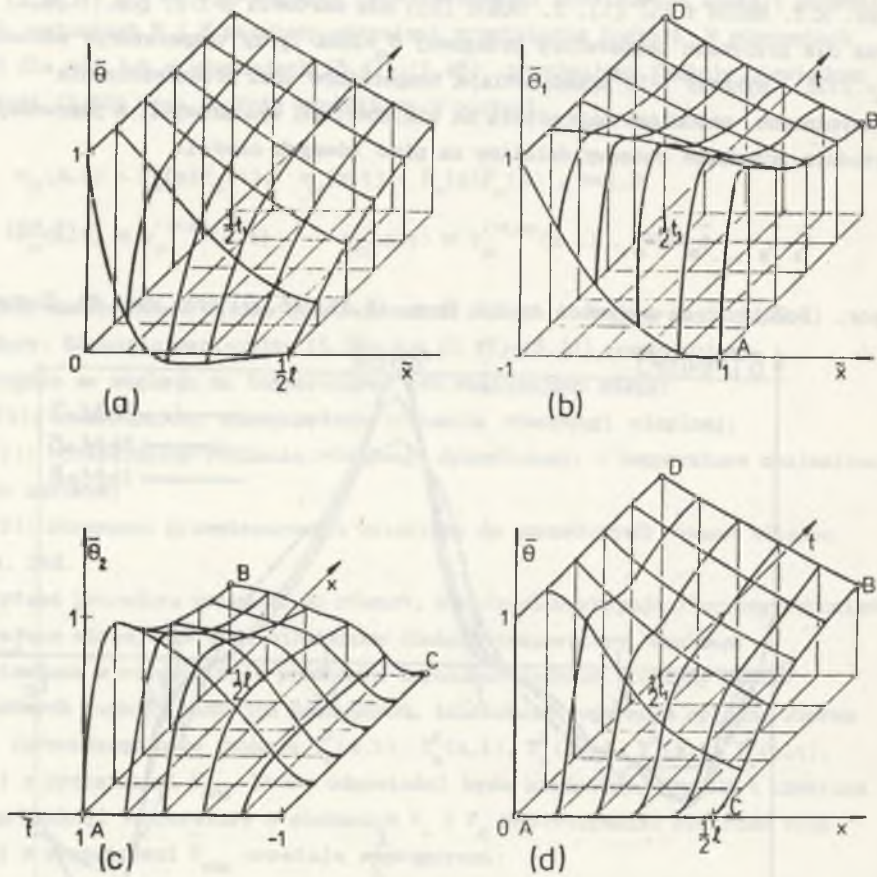
(por. (5.22)); oraz wartości $a=-1,1$ (por. (5.12) (5.33) oraz rys. 6). Zauważmy,



Rys. 7. Porównanie naprężeń liniowych dla różnych stopni przybliżenia funkcji, ($a=1, x=l/2$), metoda 1

7. The comparison of linear stresses for three different approximations, ($a=1, x=l/2$) the method 1

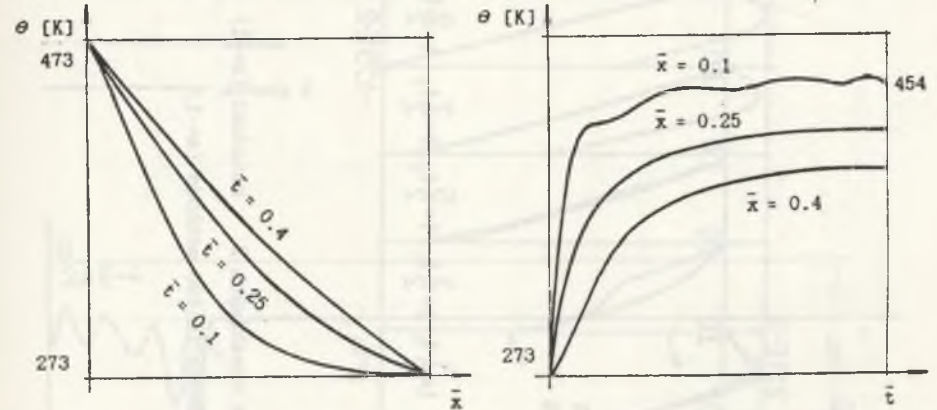
że czoło fali osiąga koniec pręta w każdym kroku czasowym. W chwilach, o indeksie nieparzystym, odbija się od utwierdzonego końca pręta. Na rys. 7 porównujemy rozkład naprężeń liniowych (3.2) w zależności od stopnia rozwinięcia



Rys.8. Rozkład temperatury uzyskanych 1 metoda (a), 2 metoda w obszarach po podziale (b)-(c) oraz po sklejeniu rozwiązania (d), (a=-1)

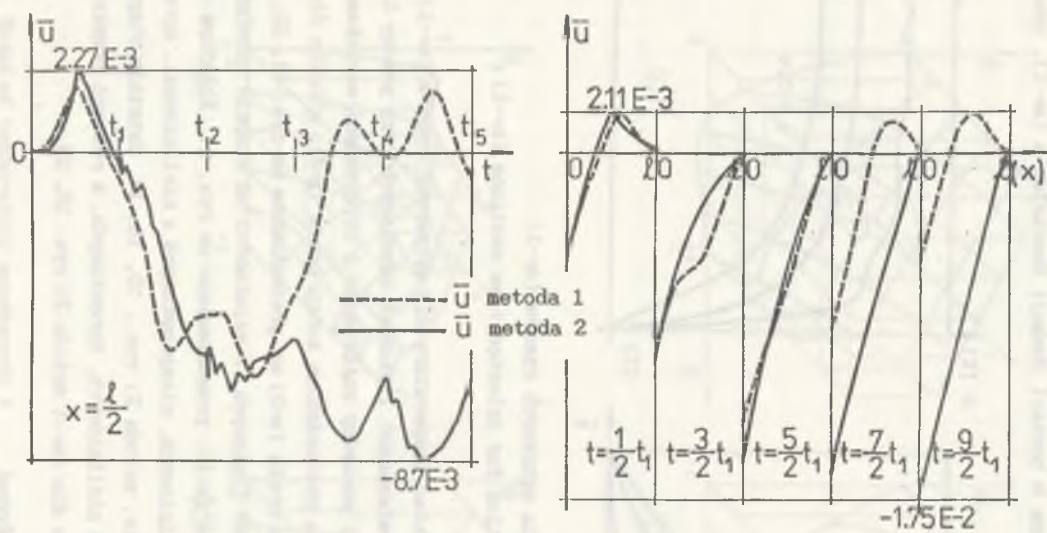
8. The temperature distribution in the method 1 (a), in the method 2 in areas after splitting (b)-(c) and ultimately after gluing the solutions (d), (a=-1)

funkcji, por. (5.51), przyjęto tam $N=M$. Dalej poszukujemy rozwiązania 2 metoda. Na przykładzie funkcji temperatury przedstawiamy ideę dzielenia obszaru i następnie uzyskiwania temperatury "sklejonej"; porównujemy też temperaturę "sklejona" z temperaturą uzyskaną za pomocą 1 metody, w przypadku gdy temperatura brzegowa jest dana w postaci funkcji Heaviside'a (a=-1), rys. 8.



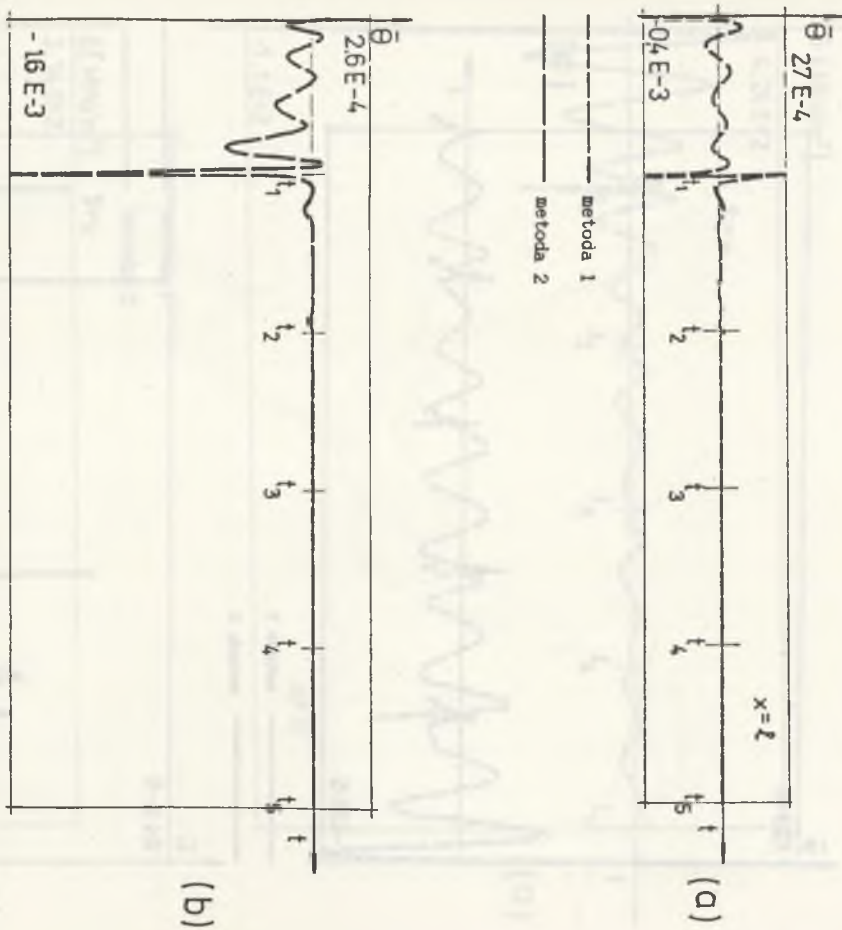
Rys.9. Rozkład temperatur dla wybranych czasów (a=-1)
Temperature distribution for selected time sections (a=-1)

Na rys. 9 przedstawiono rozkład temperatury dla wybranych czasów (a=-1), na rys. 10 zaś porównanie przemieszczeń liniowych uzyskanych przy pomocy 1 i 2 metody ($x=l/2$). Rozbieżności pomiędzy założonymi i otrzymanymi warunkami dla temperatury przemieszczeń na utwierdzonym końcu pręta ($x=l$), a także dla naprężeń na swobodnym końcu pręta ($x=0$) są prezentowane na rys. 11, 12, 13. Obraz graficzny przemieszczeń liniowych, w zależności od stopnia rozwinięcia funkcji - w drugiej metodzie (a=1), przedstawiono na rys. 14. Kolejnym etapem jest porównanie rozwiązań liniowych, niesprzężonych z nieliniowymi, sprzężonymi (przemieszczenie, naprężenie, metoda 2) rys., 15, 16, 17. Ostatnim etapem jest analiza przebiegu rozwiązań nieliniowych, sprzężonych, w różnych przekrojach pręta, dla wybranych czasów dla (a=-1 metoda 2) rys. 18, 19.



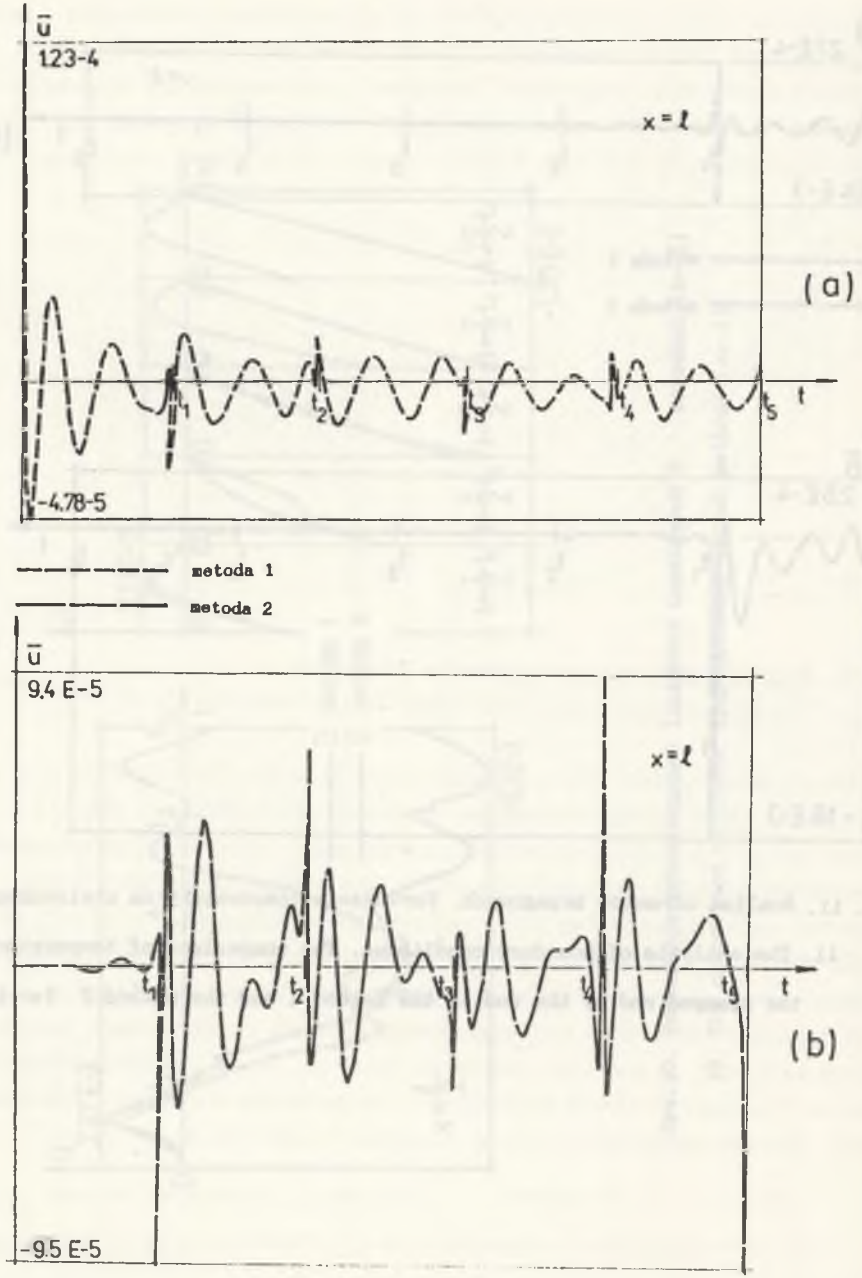
Rys.10. Porównanie przemieszczeń liniowych uzyskanych 2 metodami ($a=-1$)

10. The comparison of linear displacements in two methods ($a=-1$)

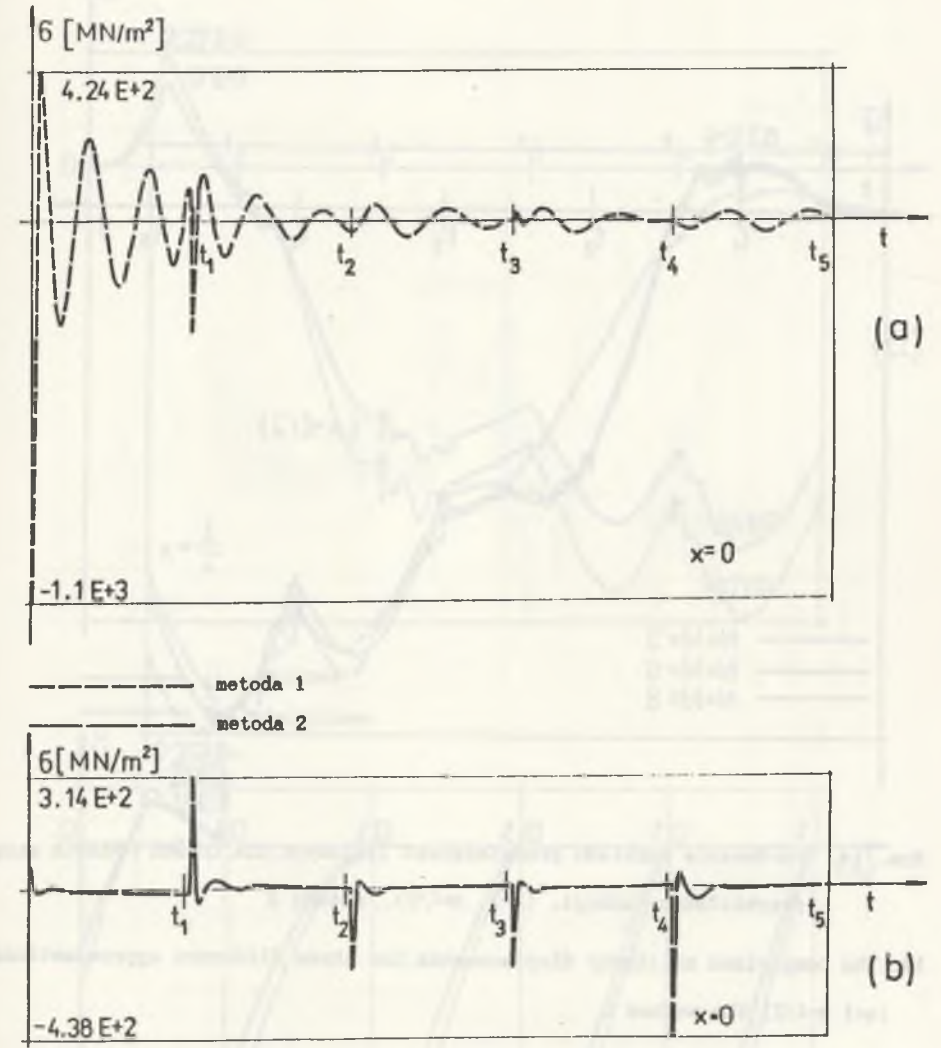


Rys. 11. Analiza warunków brzegowych. Porównanie temperatury na utwierdzonym

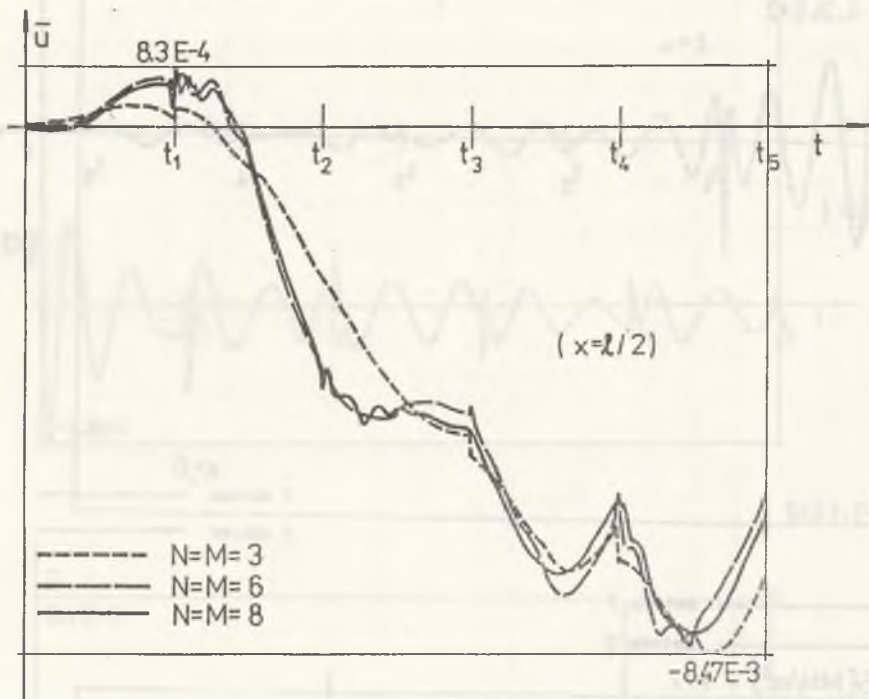
11. The analysis of boundary conditions. The comparison of temperature on the clamped end of the rod in the method 1 and the method 2 ($a=-1$)



Rys.12. Analiza warunków brzegowych. Porównanie przemieszczeń w utwierdzonym końcu pręta w metodzie 1 i w metodzie 2 ($a=-1$)
 The analysis of boundary conditions. The comparison of displacement on the clamped end of the rod in the method 1 and the method 2 ($a=-1$)

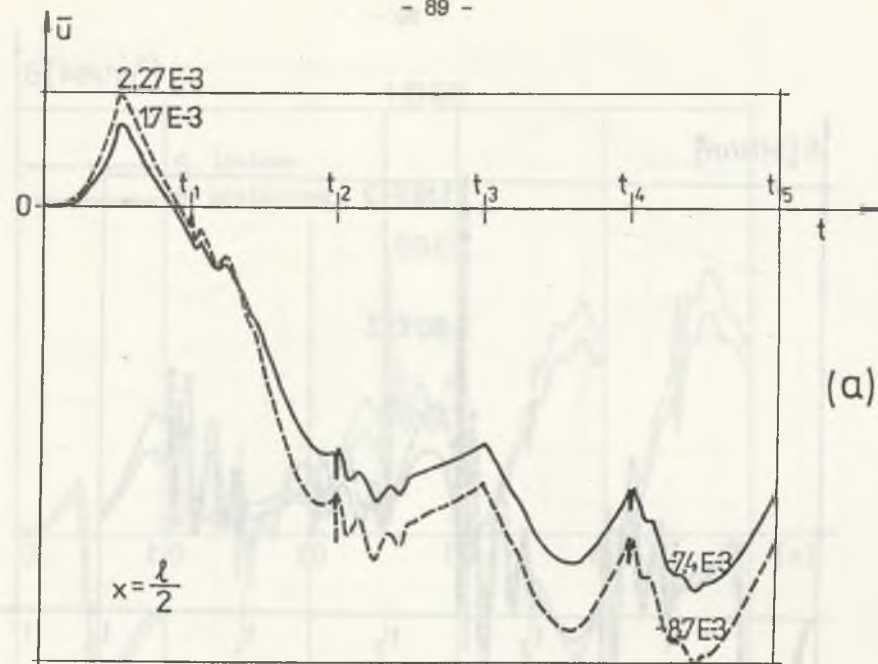


Rys.13. Analiza warunków brzegowych. Porównanie naprężeń na swobodnym końcu pręta w metodzie 1 i w metodzie 2 ($a=-1$)
 The analysis of boundary conditions. The comparison of stresses on the free end of the rod in the method 1 and the method 2 ($a=-1$)

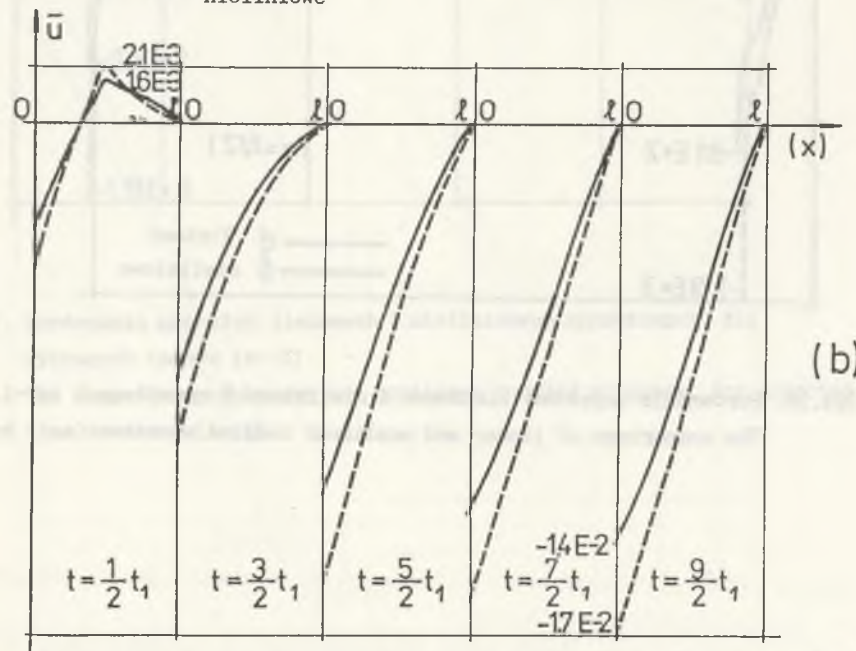


Rys. 14. Porównanie rozkładu przemieszczeń liniowych dla trzech różnych stopni przybliżenia funkcji, ($a=1, x=l/2$), metoda 2

14. The comparison of linear displacements for three different approximations, ($a=1, x=l/2$) the method 2

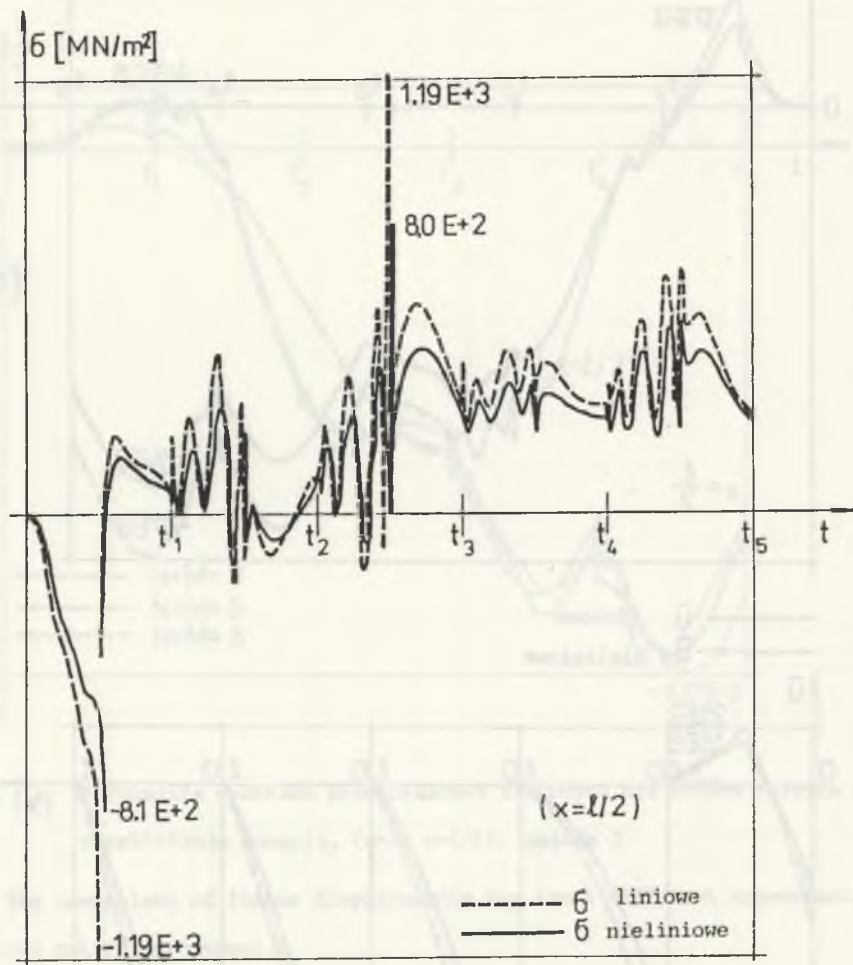


--- \bar{u} liniowe
 — \bar{u} nieliniowe

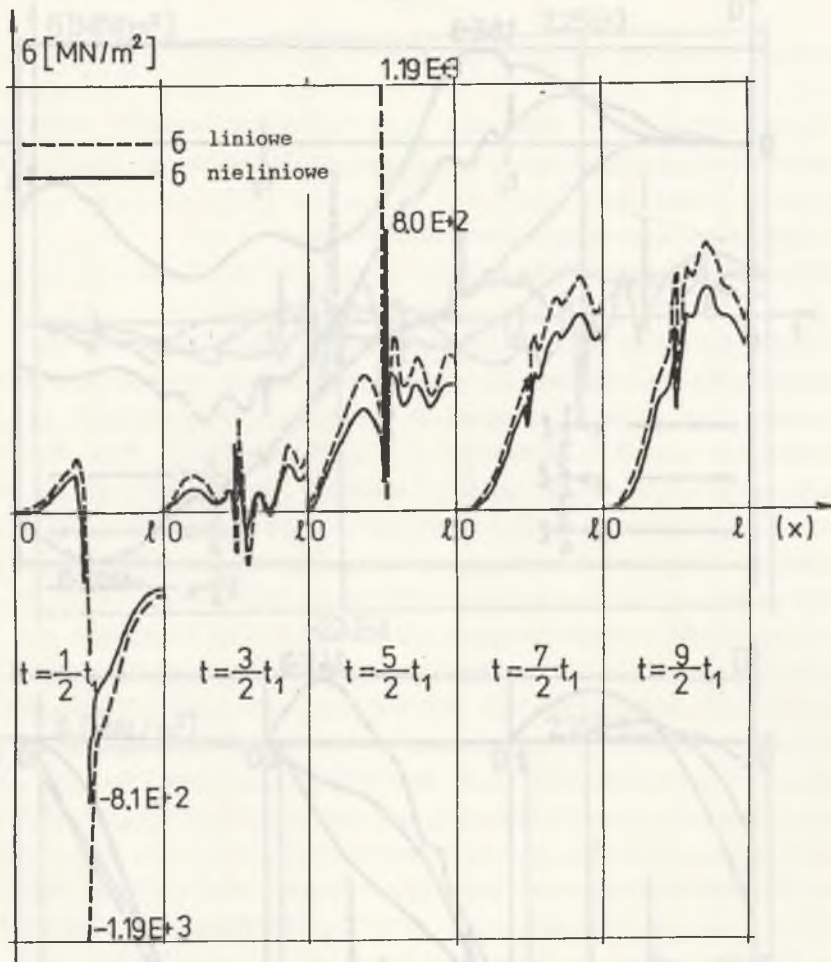


Rys. 15. Porównanie przemieszczeń liniowych i nieliniowych sprzężonych, ($a=-1$)

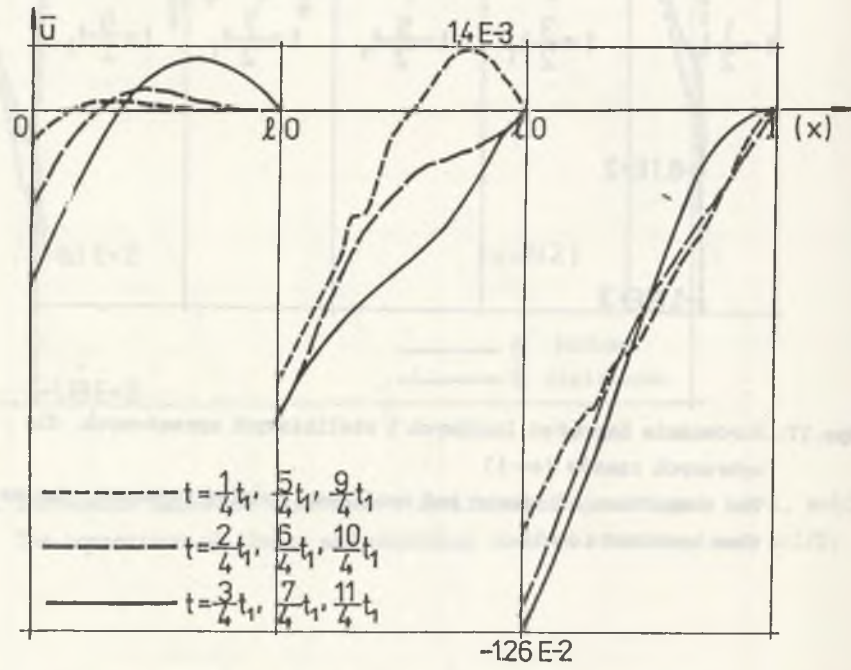
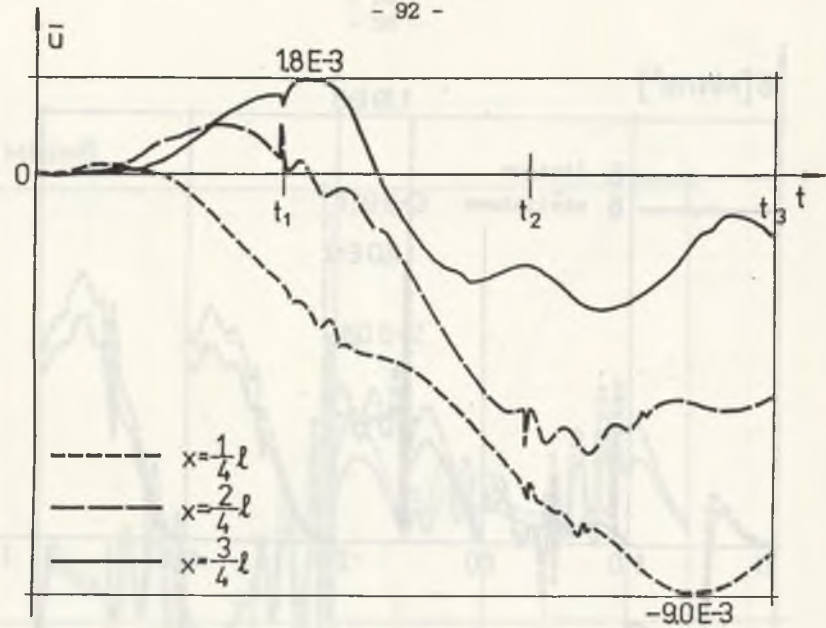
15. The comparison of linear and nonlinear coupled displacements ($a=-1$)



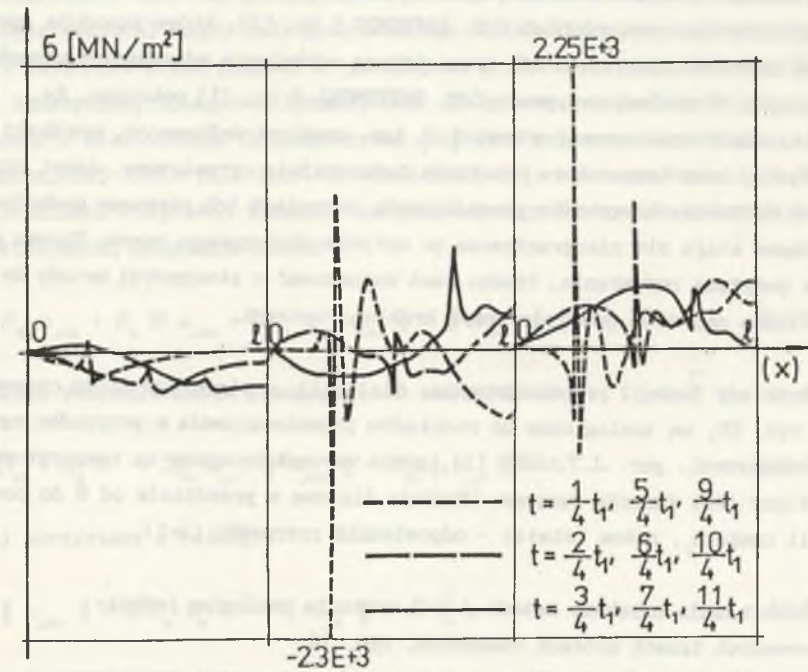
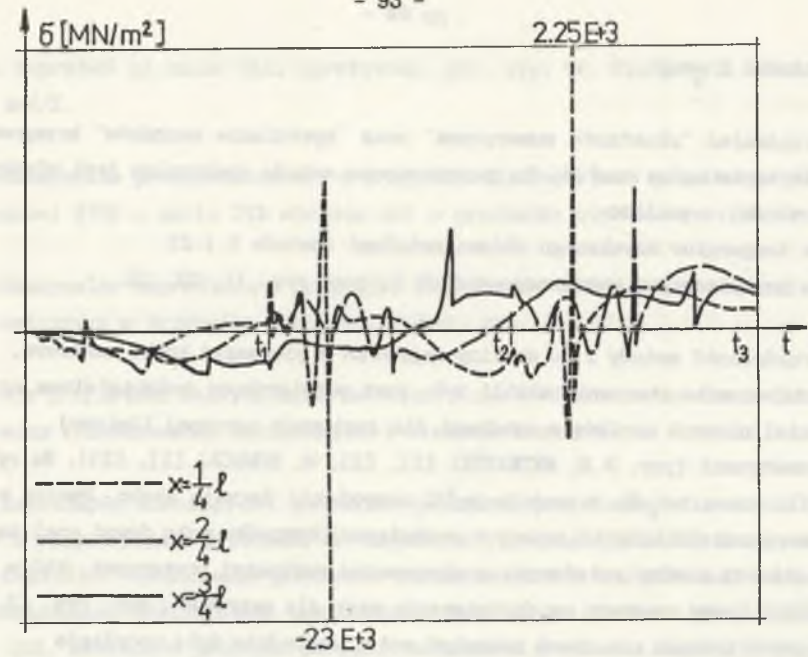
Rys.16. Porównanie naprężeń liniowych i nieliniowych sprzężonych ($a=-1$, $x=l/2$)
The comparison of linear and nonlinear coupled stresses ($a=-1$, $x=l/2$)



Rys.17. Porównanie naprężeń liniowych i nieliniowych sprzężonych, dla
wybranych czasów ($a=-1$)
The comparison of linear and nonlinear coupled stresses, for selected
time sections ($a=-1$)



Rys.18. Rozkład przemieszczeń nieliniowych dla wybranych przekrojów pręta oraz wybranych czasów ($a=0$)
The nonlinear displacement distributions for selected space and time sections ($a=0$)



Rys.19. Rozkład naprężeń nieliniowych dla wybranych przekrojów pręta oraz wybranych czasów ($a=0$)
The nonlinear stress distributions for selected space and time sections ($a=0$)

27. Wnioski i uwagi

(a) Przyjmując "zbieżność numeryczna" oraz "spełnianie warunków" brzegowych jako kryteria można uważać, że zaproponowana metoda spektralna jest efektywna jeśli chodzi o analizę:

- pola temperatur uzyskanego obiema metodami (metoda 1 i 2)
- pola przemieszczeń uzyskanego metoda 2, por. rys. 11, 12, 13.

(b) Przydatność metody 2 do analizy naprężeń w pierwszym kroku czasowym, wyłączając małe otoczenie chwili $t=0$ jest potwierdzona podobieństwem uzyskanych nieliniowych wyników z wynikami dla raptownie ogrzanej liniowej półprzestrzeni (por. R.B. HETNARSKI [1], [2], W. NOWACKI [1], [2]). Na rys. 17, w chwili czasu $t=t_1/2$, w punkcie $x=l/2$ naprężenia doznają skoku. Pewien pogląd na numeryczną dokładność metody w rozważanym przypadku może dawać analiza rozbieżności między założonymi a otrzymanymi warunkami brzegowymi, które w pierwszym kroku czasowym są dostatecznie małe dla naprężeń, por. rys. 13. W następnych krokach czasowych zauważyć można względnie duże oscylacje przemieszczeń (zachodzą tutaj raptowne zmiany pochodnej przestrzennej funkcji przemieszczenia, por. również C.M. DAFERMOS i in. [1], które powodują gwałtowne zmiany naprężeń, por. rys. 16) oraz większe odchylenia od zadanych warunków brzegowych. W wymienionej pracy C.M. DAFERMOSA i in. [1] pokazano, że rozwiązanie równań termosprężystości, tzn. gradient deformacji, prędkość fali sprężystej oraz temperatura pozostają jednostajnie ograniczone, nawet przy dużych wartościach warunków początkowych, natomiast ich pierwsze pochodne cząstkowe stają się nieograniczone po upływie skończonego czasu. Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, trudno jest wnioskować o słuszności metody do określania naprężeń poza pierwszym krokiem czasowym.

(c) Rozkłady funkcji przemieszczenia, dla $(a=1)$, w pierwszym kroku czasowym, por. rys. 15, są analogiczne do rozkładów przemieszczenia w przypadku ogrzewanej półprzestrzeni, por. J.T. ODEN [1], gdzie warunek brzegowy na temperaturę określony jest funkcją rampową (funkcja liniowa w przedziale od 0 do pewnej chwili czasu t_p , potem stała) - odpowiednik przypadku $(a=1)$.

(d) Rozwiązania uzyskane metoda 1 i 2 wykazują analogię jedynie w pierwszych trzech krokach czasowych, rys. 10.

(e) Zastosowanie 2 metody prowadzi do rozwiązania dobrze przybliżającego skokowy warunek brzegowy dla temperatury, por. rys. 8, oraz uwzględniającego

skok naprężeń na czole fali sprężystej, por. rys. 16. dla $t=t_1/2$, oraz rys. 17 dla $x=l/2$.

(f) Maksymalne przemieszczenie, w przypadku liniowym jest przy temperaturze brzegowej 473K o około 31% większe niż w przypadku nieliniowym (por. rys. 15).

(g) Maksymalne naprężenia w przypadku liniowym są o około 49 % większe od analogicznych w przypadku nieliniowym (por. rys. 16, 17).

(h) Dla przyjętych stałych materiałowych stopu D54S nie ma istotnej różnicy pomiędzy rozwiązaniami sprzężonymi i niesprzężonymi.

(i) Zakładając nieciągłość pierwszej pochodnej przemieszczenia na czole fali mamy w rozpatrywanym problemie do czynienia z propagacją fali silnej nieciągłości. Wyznaczenie prędkości rozchodzenia się czoła takiej fali, dla prezentowanego nieliniowego zagadnienia, jest bardzo złożone, por. Z. WESOŁOWSKI [1], 362. Złożoność problemu potęguje zależność prędkości tej fali od odkształcenia. Fakt ten powoduje, że problem podziału elementu wzdłuż linii charakteryzującej czoło fali jest złożony. Tylko dla półprzestrzeni liniowej czoło fali jest linią prostą. W tym miejscu przeprowadzimy analizę prędkości fali akustycznej (ciągłość funkcji oraz ich pierwszych pochodnych) w przypadku liniowym i nieliniowym. Oznaczmy przez $\| \cdot \|$ skok pola na powierzchni wyznaczającej czoło fali (por. Z. WESOŁOWSKI [1]) wówczas równanie (5.18.1) - po uwzględnieniu ciągłości funkcji, ich pierwszych pochodnych oraz współczynników materiałowych, przyjmuje postać;

$$\| \beta_0 u_{,xx} + \beta_1 \theta_{,xx} + 2L_0 u_{,x} u_{,xx} \| - \| \beta_0 u_{,tt} \| = 0 \quad (5.54)$$

Powyższe równanie można przekształcić następująco

$$(\beta_0 + \beta_1 \theta_{,x} + 2L_0 u_{,x}) \| u_{,xx} \| - \beta_0 \| u_{,tt} \| = 0 \quad (5.55)$$

Dalej korzystamy z relacji

$$\| u_{,xx} \| = A N_x N_x, \quad \| u_{,tt} \| = A v_n^2 \quad (5.56)$$

(por. Z. WESOŁOWSKI [1]), gdzie A jest tutaj amplitudą, N_x jest składową wektora normalnego do powierzchni rozchodzenia się fali w kierunku x, natomiast v_n jest prędkością fali. Ponieważ w rozważanym przypadku $N_x = 1$, przeto uwzględniając

(5.56) w (5.55) i dzieląc przez A dostajemy wzór na prędkość (bezwymiarowa), dla przypadku nieliniowego

$$v_n^2 = 1 + \beta_1/\beta_0 \theta + 2L/\beta_0 u_{,x} \quad (5.57)$$

która przy wartościach $\theta = \pm 1$, $u_{,x} = 0.002$ różni się od prędkości liniowej bezwymiarowej $v_l = 1$, (por. wzór (5.14.4) dla prędkości wymiarowej), o około $\pm 10\%$. Można zauważyć, że decydujący wpływ na zmianę prędkości ma tutaj temperatura.

ROZDZIAŁ VI

MODEL UDERZENIA PRĘTA

W niniejszym rozdziale zajmiemy się problemem osiowego uderzenia pręta przy założeniu, że jest on wykonany z materiału Murnaghana, por. (2.16). Zakłada się tutaj dwa rodzaje brzegowego naprężenia na końcu pręta: pierwszy wyrażony jest przez funkcję schodkową różną od zera w pierwszym kroku czasowym, natomiast drugi - przez funkcję reprezentującą liniowy wzrost od zera do wartości jeden oraz spadek do wartości zero. Dyskretyzację problemu przeprowadzono przy użyciu pokazanej wcześniej metody tau z zastosowaniem wielomianów Legendre'a. Układ nieliniowych równań algebraicznych rozwiązano metoda siecznych. Z formalnego punktu widzenia przedstawiony w tym rozdziale problem jest analogiczny do problemu termicznego udaru pręta, rozpatrywanego w poprzednim rozdziale. Równania tu pokazane (por. również T. JEKOT [8]) powstają z równań z poprzedniego rozdziału, po przyjęciu zerowej temperatury oraz odmiennych warunków brzegowych.

2B. Równania problemu

Rozważamy, analogiczny do poprzedniego rozdziału, model pręta, w którym występują: składowe przemieszczenia $u_i(x,t)$, por. rys. 2 oraz - odkształcenia ϵ_{ij} , określone przez

$$u_1 = u = u(x,t), \quad u_2 = u_3 = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad t \in (0, \infty); \quad (6.1)$$

$$\epsilon_{11} = u_{,x}, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0. \quad (6.2)$$

Równania równowagi, por. (5.3.1), są postaci

$$\sigma_{11,x} = \rho u_{1,tt}; \quad (6.3)$$

Równania konstytutywne F.D. MURNAGHANA [1], por. (2.16), w rozważanym przypadku przyjmują postać

$$\sigma = \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)u_{,x} + (1 + 2m)u_{,x}^2, \quad (6.4)$$

$$s = \sigma_{22} = \lambda u_{,x} + \mu u_{,x}^2. \quad (6.5)$$

Wstawiając (6.4) do (6.3) oraz stosując (6.1) i (6.2) otrzymamy przemieszczeniowe równanie dynamiki pręta

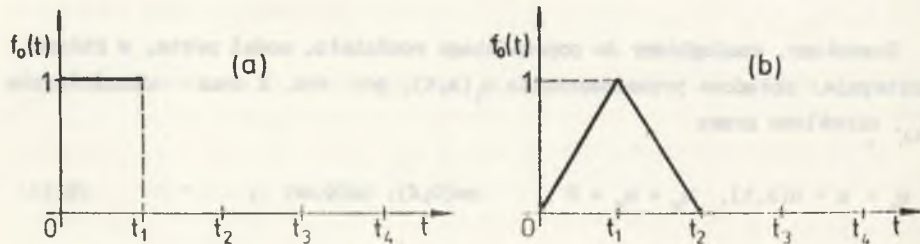
$$(\lambda + 2\mu)u_{,xx} + 2(1 + 2m)u_{,xx}u_{,x} - \rho u_{,tt} = 0, \quad (x, t) \in (0, \ell) \times (0, \infty). \quad (6.6)$$

Warunki brzegowe przyjmujemy w postaci

$$\sigma(0, t) = \sigma_0 f_0(t); \quad t \in [0, \infty), \quad (6.7)$$

$$u(\ell, t) = 0; \quad t \in [0, \infty), \quad (6.8)$$

gdzie funkcja $f_0(t)$ opisuje postać naprężenia na brzegu. Rozważmy dwa rodzaje naprężenia brzegowego na swobodnym końcu pręta. Pierwszy z nich jest wyrażony wzorem



Rys.20. Funkcja określająca warunki brzegowe dla naprężeń
The function determining boundary conditions for stresses

$$f_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, t_p), \\ 0, & t \in [t_p, \infty), \end{cases} \quad (6.9)$$

a drugi przez następującą funkcję (por. rys. 20):

$$f_0(t) = \begin{cases} t/t_p, & t \in [0, t_p), \\ (t-t_r)/(t_p-t_r), & t \in [t_p, t_r], \\ 0, & t \in (t_r, \infty), \end{cases} \quad (6.10)$$

gdzie $p = 1, r = 2$.

Warunki początkowe są postaci

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \ell]. \quad (6.11)$$

29. Równania bezwymiarowe

W celu otrzymania bezwymiarowych równań pola wprowadzamy, analogicznie do poprzedniego rozdziału, wielkości

$$\sigma_0 = \mu_0, \quad (6.12)$$

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{e v^2}, \quad (6.13)$$

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{e v}, \quad (6.14)$$

gdzie v jest prędkością propagacji liniowych naprężeń podłużnych, por. (5.14.4). Mnożąc równania (6.6) przez $1/\mu_0 v$, a także korzystając z wzorów punktu 22 - na bezwymiarowe pochodne cząstkowe, dostaniemy bezwymiarowe równania pola (kreskę nad wielkościami bezwymiarowymi opuszczamy wszędzie tam, gdzie nie powoduje to niejednoznaczności):

$$\beta u_{,xx} + 2L u_{,x} u_{,xx} - \beta u_{,tt} = 0, \quad (6.15.1)$$

gdzie

$$\beta = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad L = \frac{1 + 2n}{\mu}. \quad (6.15.2)$$

Bezwymiarowe warunki początkowe i brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} \sigma(0,t) &= \bar{f}_0(t), \quad t \in (0, \infty), \\ u(\ell/\ell_0, t) &= 0, \quad t \in (0, \infty), \\ u(x,0) &= 0, \quad u_{,t}(x,0) = 0, \quad x \in (0, \ell/\ell_0). \end{aligned} \quad (6.16)$$

30. Rekurencyjne równania wariacyjne i rozwiązanie uogólnione (metoda 1)

Analogicznie do punktu 23, wybieramy na osi czasowej punkty

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots \quad (6.17)$$

i rozważania na obszarze

$$\bar{V} = \{ x \in (0, \ell/\ell_0), t \in (0, \infty) \} \quad (6.18)$$

zastępujemy rozważaniami na podobszarze V^* określonym następująco

$$V^* = \cup_{k=1}^{\infty} \bar{V}_k, \quad \bar{V}_k = \{ x \in (0, \ell/\ell_0), t \in (t_{k-1}, t_k) \}, \quad (6.19)$$

$$k=1, 2, \dots$$

Niech $w_k(x,t)$, będzie funkcja klasy $C^{\infty}(\bar{V}_k)$, $k=1, 2, \dots$. Mnożąc równanie (6.15) przez $w_k(x,t)$ i całkując po obszarze \bar{V}_k dostaniemy

$$\int_0^{\ell/\ell_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\sigma_{,x} - \beta u_{,tt}) w_k(x,t) dx dt = 0 \quad (6.20)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

gdzie $\sigma = \beta u_{,xx} + L (u_{,x})^2$.

Całkując równania (6.20) przez części, podstawiając warunki początkowo-brzegowe (6.16) jak również warunki zgodności przemieszczeń w punktach t_k :

$$\begin{aligned} u_{k+1}(x, t_k) &= u_k(x, t_k), \\ u_{k+1,t}(x, t_k) &= u_{k,t}(x, t_k), \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.21)$$

gdzie u_k oznacza nieznanne przemieszczenie obcięte do \bar{V}_k , rekurencyjne równania wariacyjne mają postać:

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \sigma_k(\ell/\ell_0, t) w_k(\ell/\ell_0, t) - \sigma_0 f_0(t) w_k(0, t) + \beta u_k(0, t) w_{k,x}(0, t) - \right. \\ \left. - \int_0^{\ell/\ell_0} [(\sigma_k - \beta u_{k,x}) w_{k,x} - \beta u_k w_{k,xx}] dx \right\} dt - \\ - \beta \int_0^{\ell/\ell_0} [u_{k,t}(x, t_k) w_k(x, t_k) - \\ - u_{k-1,t}(x, t_{k-1}) w_k(x, t_{k-1}) - u_k(x, t_k) w_{k,t}(x, t_k) + \\ + u_{k-1}(x, t_{k-1}) w_{k,t}(x, t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} u_k w_{k,tt} dt] dx = 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$k=1, 2, \dots$$

OKREŚLENIE

Rekurencyjnym rozwiązaniem uogólnionym problemu opisanego równaniami

(6.15)-(6.16) jest funkcja $u(x,t)$, której obcięcie do \bar{V}_k spełnia równania

(6.22) dla każdej funkcji $w_k \in C^{\infty}(\bar{V}_k)$, $k=1,2,\dots$

Można pokazać, że każde klasyczne rozwiązanie równania (6.15.1) z warunkami (6.16) jest rekurencyjnym rozwiązaniem uogólnionym.

W celu zastosowania metod spektralnych dla każdego obszaru \bar{V}_k wprowadzamy zmienne $x \in [-1,1]$ oraz $t \in [-1,1]$, por. (5.30.1),

$$x=2d\bar{x}-1, \quad t=2b_k(\bar{t}-\bar{t}_k)-1, \quad (6.23)$$

gdzie dla przypomnienia

$$d = \ell_0/\ell, \quad b_k = 1/(\bar{t}_{k+1} - \bar{t}_k),$$

$$V_k = \{x \in (-1,1), t \in (-1,1)\}$$

Warunki początkowo-brzegowe, oraz warunki zgodności obcięte do zbiorów V_k mają postać

$$\{[\lambda + \mu]u_{k,x} + (1 + 2m)u_{k,x}^2\}_{x=-1} = \sigma_0 f_0(t), \quad (6.24)$$

$$u_k(1,t) = 0,$$

Ustalmy w tym miejscu wartości funkcji $f_0(t)$ dla kolejnych przedziałów czasu, por. (6.9), (6.10)

$$f_0(t) = \begin{cases} 1, & k=1, t \in (-1,1), \\ 0, & k \neq 1, \forall t; \end{cases} \quad (6.25)$$

$$f_0(t) = \begin{cases} (t+1)/2, & k=1, t \in [-1,1], \\ (1-t)/2, & k=2, t \in (-1,1), \\ 0, & k > 2, \forall t, \end{cases} \quad (6.26)$$

$$u_0(x,-1) = 0, \quad u_{0,t}(x,-1) = 0,$$

$$u_{k+1}(x,-1) = u_k(x,1) \quad u_{k+1,t}(x,-1) = u_{k,t}(x,1), \quad k=1,2,3,\dots$$

Równanie (6.22) zapisane dla nowych zmiennych, po pomnożeniu przez $4db_k$, przyjmuje formę

$$\int_{-1}^1 \left\{ \sigma_k(1,t)w_k(1,t) - \sigma_0 f_0(t)w_k(-1,t) + 2d\beta u_k(-1,t)w_{k,x}(-1,t) - \int_{-1}^1 [2d(\sigma_k - 2d\beta u_{k,x})w_{k,x} - 4d\beta u_k w_{k,xx}] dx \right\} dt - \beta \int_{-1}^1 [2b_k u_{k,t}(x,1)w_k(x,1) - 2b_k u_{k-1,t}(x,1)w_k(x,1) - 2b_k u_k(x,1)w_{k,t}(x,1) + 2b_k u_{k-1}(x,1)w_{k,t}(x,1) + 4b_k \int_{-1}^1 u_k w_{k,tt} dt] dx = 0 \quad (6.27)$$

31. Element z podziałem (metoda 2)

31.1. Równania problemu w pierwszym kroku czasowym

W rozważanym problemie możemy spodziewać się, że udar spowoduje falę silnej nieciągłości, tzn. na czole fali nastąpi utrata nieciągłości pierwszej pochodnej przestrzennej funkcji przemieszczenia. W rezultacie naprężenie na czole fali dozna skoku. Tak jak w poprzednim rozdziale identyfikujemy czoła nieliniowe z liniowym, tj. zakładamy równanie czoła $\bar{x}=\bar{t}$. W tym punkcie ograniczymy rozważania do pierwszego kroku czasowego:

$$\bar{t} \in [0, t_1], \quad \text{dla } t_1 = \ell/\ell_0 \quad (6.28)$$

Dzieląc obszar

$$\bar{V} = \{x \in [0, l/l_0], t \in [0, l/l_0]\},$$

wzdłuż linii $\bar{x} = \bar{t}$ na dwa podobzary

$$\bar{V}_1 = \{\bar{x} \in [0, \bar{t}], \bar{t} \in [0, l/l_0]\}, \quad \bar{V}_2 = \{\bar{x} \in [0, l/l_0], \bar{t} \in [0, \bar{x}]\}$$

i dalej wprowadzając zmienne $x \in [-1, 1]$ i $t \in [-1, 1]$ transformujemy \bar{V}_1, \bar{V}_2 na V_1 i V_2 zgodnie z relacjami

$$V_1 = \{x \in [-1, 1], t \in [-1, 1]\}, \quad V_2 = \{x \in [-1, 1], t \in [-1, 1]\},$$

gdzie relacje między zmiennymi dane są wzorami (5.37). Korzystając z wzorów na transformację (5.38) stwierdzamy, że równania równowagi przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sigma_{1,x} - \beta \left[4d^2 \frac{(x+1)^2}{(t+1)^2} u_{1,xx} + 8d^2 \frac{x+1}{(t+1)^2} u_{1,x} \right. \\ \left. - 8d^2 \frac{x+1}{t+1} u_{1,xt} + 4d^2 u_{1,tt} \right] = 0, \end{aligned} \quad \text{na } V_1 \quad (6.29)$$

$$\sigma_{2,x} - \beta \frac{16d^2}{(x+1)^2} u_{2,tt} = 0, \quad \text{na } V_2$$

gdzie

$$\sigma_{1,x} = \beta \left(\frac{16d^2}{(t+1)^2} u_{1,xx} + 2L \frac{4d}{t+1} u_{1,x} - \frac{16d^2}{(t+1)^2} u_{1,xx} \right),$$

$$\sigma_{2,x} = \left[4d^2 \frac{(t+1)^2}{(x+1)^2} u_{2,tt} + 8d^2 \frac{t+1}{(x+1)^2} u_{2,t} - 8d^2 \frac{t+1}{x+1} u_{2,xt} + \right.$$

$$\left. + 4d^2 u_{2,xx} \right] \left[\beta - 4L_0 d \left(\frac{t+1}{x+1} u_{2,t} - u_{2,x} \right) \right].$$

Natomiast warunki początkowo-brzegowe są następujące:

$$\sigma_1 \Big|_{x=-1} = 0,$$

$$u_2 \Big|_{x=-1} = 0, \quad u_1 \Big|_{t=-1} = 0, \quad (6.30)$$

$$u_2 \Big|_{t=-1} = 0,$$

gdzie

$$\sigma_1 = \frac{4d}{t+1} u_{1,x} \left(\beta + \frac{4d}{t+1} L u_{1,x} \right). \quad (6.31)$$

Warunki zgodności przemieszczenia na linii styku $V_1 \cap V_2$, reprezentującej czołło fali można wyrazić związkami

$$u_1 \Big|_{\substack{t=y \\ x=1}} = u_2 \Big|_{\substack{x=y \\ t=1}}, \quad (6.32)$$

gdzie y jest parametrem pomocniczym.

31.2. Równania wariacyjne problemu

W celu otrzymania równań wariacyjnych, w pierwszym kroku czasowym, należy równanie (6.29)₁ przemnożyć przez $(t+1)^3 w_1$, a równanie (6.29)₂ przez $(x+1)^3 w_2$, gdzie

$$w_1 = w_1(x, t), \quad (x, t) \in V_1 \quad w_2 = w_2(x, t), \quad (x, t) \in V_2.$$

Całkując tak otrzymane równania kolejno w obszarach V_1 i V_2 , a następnie korzystając z całkowania przez części, warunków początkowych i brzegowych (6.30) oraz warunków zgodności (6.32) otrzymamy równania wariacyjne, w elemencie podzielonym, w pierwszym kroku czasowym

$$\int_{-1}^1 (t+1)^3 \sigma_1 w_1 \Big|_{x=1} dt - \iint_V (t+1)^3 \sigma_1 w_{1,x} dx dt - \beta \{ 4d^2 \int_{-1}^1 4(t+1) u_{1,x} w_1 \Big|_{x=1} dt - \int_{-1}^1 4(y+1) u_2 \Big|_{t=1} w_{1,x} \Big|_{x=y} dy + \iint_V (x+1)^2 (t+1) u_{1,xx} w_1 dx dt \} + 8d \iint_V [(x+1)(t+1) u_{1,x} - (x+1)(t+1)^2 u_{1,xt}] w_1 dx dt + 4d^2 \int_{-1}^1 [8 u_{1,t} w_1 \Big|_{t=1} - u_1 (12 w_1 + 8 w_{1,t}) \Big|_{t=1}] dx + \iint_V u_1 [6(t+1) w_1 + 6(t+1)^2 w_{1,t} + (t+1)^3 w_{1,tt}] dx dt \} = 0, \quad (6.33)$$

$$\iint_V u_2 [6(x+1) w_2 + 6(x+1)^2 w_{2,x} + (x+1)^3 w_{2,xx}] ddt - 16\beta d^2 \left[\int_{-1}^1 (x+1) u_{2,t} w_2 \Big|_{t=-1}^{t=1} dx - \int_{-1}^1 (y+1) u_1 \Big|_{t=y} w_{1,t} \Big|_{x=y} dy + \iint_V (x+1) u_{2,tt} w_2 dx dt \right] = 0.$$

32. Rozwiązanie problemu

W celu rozwiązania równań wariacyjnych (6.33), zapisanych dla dowolnej liczby kroków czasowych, zakładamy, że funkcja przemieszczenia u jest rozwinięta w szereg względem wielomianów ortogonalnych Legendre'a $P_i(x) \cdot P_j(t)$, $x \in [-1, 1]$, $t \in [-1, 1]$ ($i=0, 1, \dots, N$, $j=0, 1, \dots, M$), które generują przestrzeń V_{NM} , tj. zakładamy, że

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{i,j=0}^{N,M} u_{\alpha ij} P_i(x) P_j(t), \quad u_\alpha(x, t) \equiv u_\alpha^{(N,M)}(x, t) \quad (6.34)$$

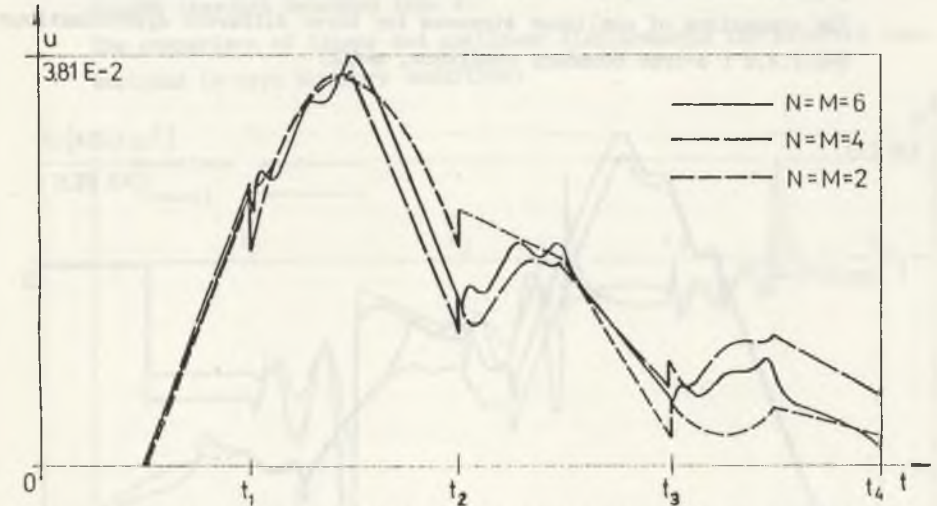
gdzie $u_{\alpha ij}$ są nieznanymi współczynnikami rozwinięcia funkcji u_α . W równaniach (6.33) przyjmujemy funkcje mnożnikowe w_α w postaci

$$w_\alpha(x, t) = P_n(x) P_m(t), \quad w_\alpha(x, t) \equiv w_\alpha^{(N,M)}(x, t), \quad \alpha=1, 2 \quad (6.35)$$

Algebraiczny układ równań nieliniowych rozwiązujemy metoda stycznych (por. (4.19)).

33. Wyniki obliczeń

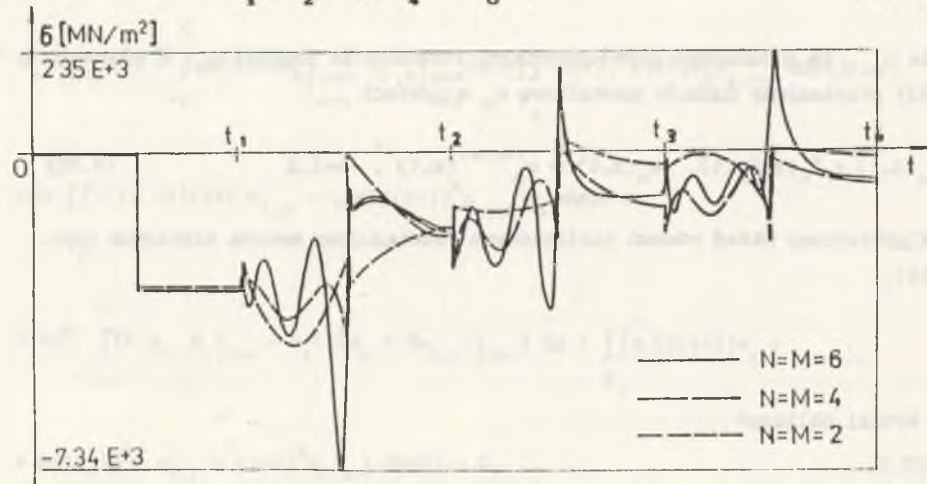
Analogicznie do poprzedniego rozdziału, do obliczeń przyjmujemy stop aluminium D545, wartość $d=1/2$ oraz naprężenie brzegowe $\sigma_0 = -2500$ [MN/m²]. Na rys. 21-28 przedstawiono wykresy bezwymiarowych funkcji przemieszczeń oraz



Rys.21. Porównanie rozkładu nieliniowych przemieszczeń dla trzech różnych stopni przybliżenia funkcji, $N=M=2, 4, 6$ (warunek brzegowy typu a, $x=l/2$)
The comparison of nonlinear displacements for three different approximation orders $N=M=2, 4, 6$ (a-type boundary condition, $x=l/2$)

wymiarowych funkcji naprężeń, w elemencie, z podziałem w czterech krokach czasowych

$$t_1 = t_2 = \dots = t_4 = \ell / c_0 \quad (6.36)$$

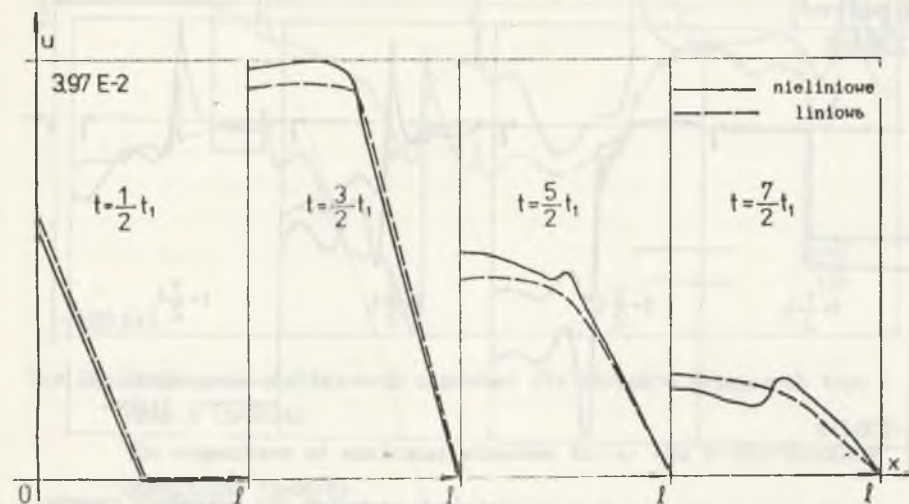


Rys.22. Porównanie rozkładu nieliniowych naprężeń dla trzech różnych stopni przybliżenia funkcji, $N=M=2,4,6$ (warunek brzegowy typu a, $x=\ell/2$)
The comparison of nonlinear stresses for three different approximations $N=M=2,4,6$ (a-type boundary condition, $x=\ell/2$)

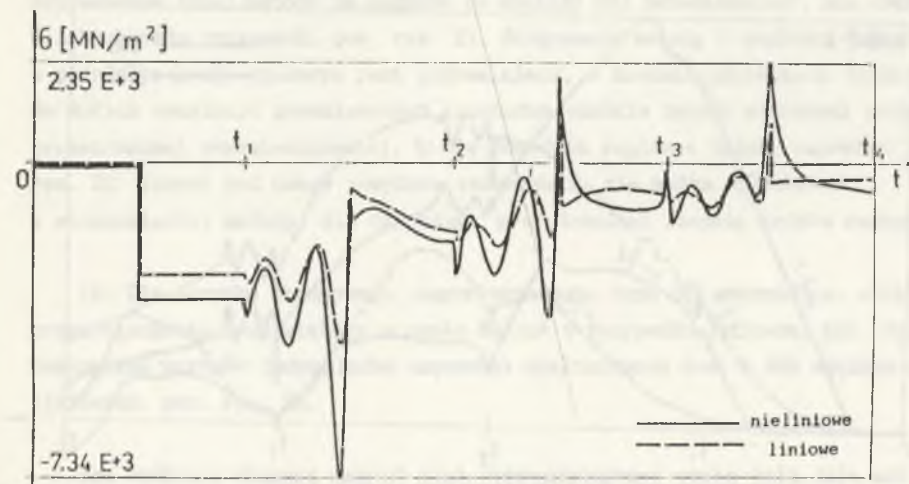


Rys.23. Porównanie przemieszczeń liniowych i nieliniowych (warunek brzegowy typu a, $x=\ell/2$)
The comparison of linear and nonlinear displacements (a-type boundary condition, $x=\ell/2$)

(por. (6.17)). Front fali osiąga koniec pręta w każdym kroku czasowym. W chwilach o indeksie nieparzystym fala odbija się od utwierdzonego końca pręta. Na rys. 21, 22 porównano przemieszczenia i naprężenia, ze względu na stopień przybliżenia niewiadomych funkcji, por. (6.35), dla $N=M=2,4,6$. Na rys. 23-26

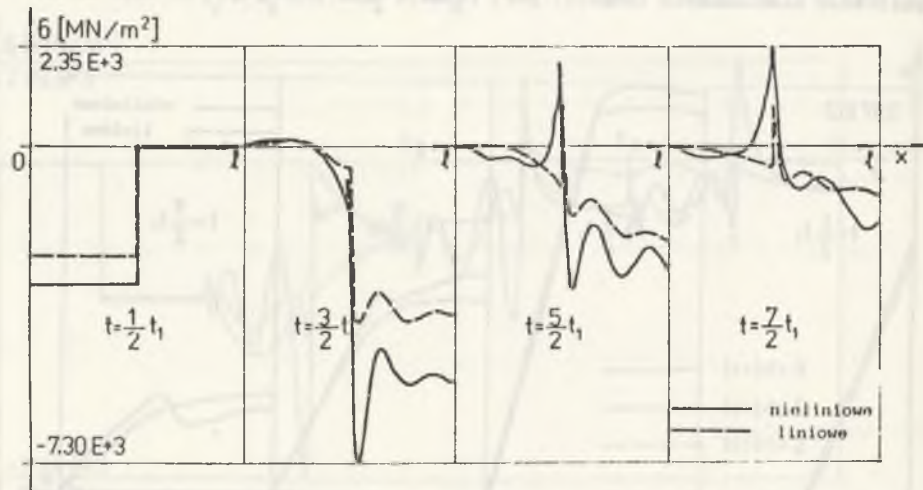


Rys.24. Porównanie liniowych i nieliniowych przemieszczeń, dla wybranych czasów (warunek brzegowy typu a)
The comparison of linear and nonlinear displacements for selected time sections (a-type boundary condition)

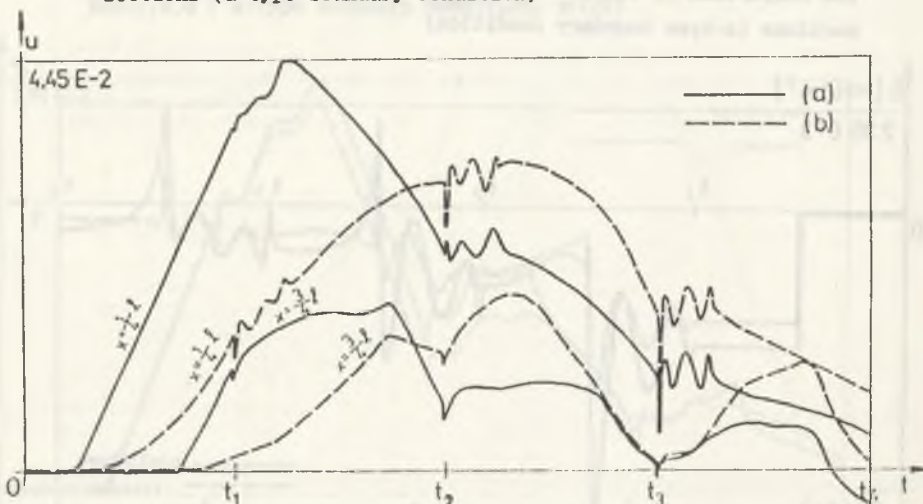


Rys.25. Porównanie liniowych i nieliniowych naprężeń, (warunek brzegowy typu a $x=\ell/2$)
The comparison of linear and nonlinear stresses (a-type boundary condition $x=\ell/2$)

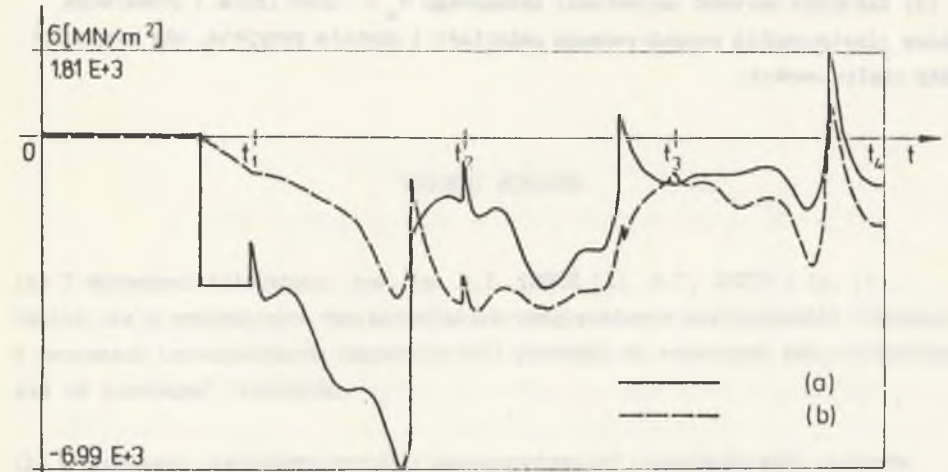
analizowane są liniowe i nieliniowe rozwiązania, dla $x=l/2$, i dla wybranych czasów. Wreszcie na rys. 27, 28 porównano rozwiązania dla obu typów warunków brzegowych.



Rys.26. Porównanie liniowych i nieliniowych naprężeń dla wybranych czasów, (warunek brzegowy typu a)
The comparison of linear and nonlinear stresses for selected time sections (a-type boundary condition)



Rys.27. Porównanie nieliniowych przemieszczeń dla warunków brzegowych typu a oraz b ($x=l/4$, $x=3l/4$)
The comparison of nonlinear displacements for a- and b-type boundary conditions ($x=l/4$, $x=3l/4$)



Rys.28. Porównanie nieliniowych naprężeń dla warunków brzegowych typu a oraz b ($x=3l/4$)
The comparison of nonlinear stresses for a- and b-type boundary conditions ($x=3l/4$)

34. Wnioski i uwagi

(a) Przyjmując zbieżność numeryczną jako kryterium, można uważać proponowaną tutaj metodę za dogodną do analizy pól przemieszczeń, dla dowolnej liczby kroków czasowych, por. rys. 21. Stosowanie metody w analizie naprężeń, w pierwszym kroku czasowym jest zadowalające; w krokach następnych dochodzi już do dużych oscylacji przemieszczeń (zachodzą szybkie zmiany pierwszej pochodnej przestrzennej przemieszczenia), które powodują raptowne zmiany naprężeń, por. rys. 22. Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, nie można wnioskować o stosowalności metody, dla naprężeń, przy dowolnej liczbie kroków czasowych.

(b) Dla warunku brzegowego, naprężeniowego, typu /a/ maksymalne, nieliniowe przemieszczenie jest większe o około 6% niż w przypadku liniowym, por. rys. 23. Maksymalna wartość bezwzględna naprężeń nieliniowych jest o 40% większa niż liniowych, por. rys. 25.

(c) Rozbicie obszaru wzdłuż linii reprezentującej czoło fali daje możliwość uwzględnienia skoku naprężeń na tej linii, por. rys. 25 dla $x=l/4$, oraz rys. 26 dla $x=l/2$.

(d) Założona wartość naprężenia brzegowego $\sigma_0 = -2500$ [MN/m²] przekracza granicę plastyczności rozpatrywanego materiału i została przyjęta, aby uwypuklić efekty nieliniowości.



WNIOSKI KONCOWE

(a) Z dostępnej literatury, por. np. A.I. LURIE [1], R.T. SMITH i in. [1], wynika, że w wymienionych tam materiałach uwzględnianie nieliniowości fizycznej w procesach izotermicznych (sprężystość) prowadzi do rozwiązań mało różniących się od rozwiązań liniowych.

(b) W procesach nieizotermicznych (termosprężystość) uwzględnienie członów nieliniowych w proponowanych przez autora równaniach konstytutywnych ma w ogólności istotny wpływ na różnice pomiędzy rozwiązaniami liniowymi i nieliniowymi.

(c) Dla rozpatrywanego stopu aluminium D54S rozwiązanie szczególnego problemu nieliniowego analizowanego w pracy, w którym uwzględnia się sprzężenia pola przemieszczeniowego z polem temperatury, różni się nieznacznie od analogicznego rozwiązania liniowej niesprężonej termosprężystości.

(d) Ogół zastosowań metod spektralnych znanych w literaturze dotyczy problemów związanych z mechaniką płynów, por. C. CANUTO i in. [1], [2], S. GAUTHIER [1], D. GOTTLIEB i in. [1], M.R. KHORRAMI i in. [1]. Niniejsza praca pokazuje możliwość stosowania proponowanego tu uogólnienia metody tau w iteracyjnej, wariacyjnej wersji dla szerokiej klasy nieliniowych, dynamicznych problemów początkowo-brzegowych tak sprężystości, jak i termosprężystości.

SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ WYSTĘPUJĄCYCH W TEKSCIE

- c_ϵ = względna pojemność cieplna objętościowa (ciepło właściwe przy ustalonej deformacji liczone na jednostkę objętości); [$J/(m^3 K)$]
- λ_T = współczynnik przewodzenia ciepła; [$W/(m K)$]
- l, m, n = moduły sprężystości 3 rzędu; [N/m^2]
- u_1, u_2, u_3 = składowe wektora przemieszczenia; [m]
- q = gęstość powierzchniowa strumienia ciepła (strumień ciepła); [W/m^2]
- T_{ij} = niesymetryczny (pierwszy) tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa; [N/m^2]
- α_T = współczynnik rozszerzalności termicznej; [$1/K$]
- $\gamma(\theta)$ = moduł naprężeniowo-temperaturowy; [N/m^2]
- K_{ij} = tensor odkształcenia Greena ($i, j=1, 2, 3$); [1]
- ϵ_{ij} = liniowa składowa tensora odkształcenia Greena ($i, j=1, 2, 3$); [1]
- θ = przyrost temperatury mierzony od temperatury stanu naturalnego T_0 ; [K]
- λ, μ = moduły sprężystości 2 rzędu; [N/m^2]
- ρ_0, ρ = gęstość masy (masa właściwa) ośrodka przed i po deformacji; [kg/m^3]
- σ_{ij} = składowe tensora naprężenia Cauchy'ego; [N/m^2]
- (RC) - równania cząstkowe

Powyższe wielkości wprowadzono zgodnie z oracowaniem J.M. MASALSKIEGO i in. [1].
Opisy podane w nawiasach (...) można spotkać m.in. w pracy W. NOWACKIEGO [1].

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

- ALIC, M., On nonlinear boundary value problem in elasticity, Glas. mat., Ser., 1, 11, 1976, 31-36.
- ARON M., On the uniqueness of solutions in finite elasticity, Rend. Ist. Lombardo, Acad. Sci. e. lett., 2, 100, 1975, 424-432.
- BAILLEY P. B., CHEN P. J., Thermodynamic influences on one dimensional shock waves and induced discontinuities in thermoelastic bodies and second order effects, Int. J. Solids Structures, vol. 22, No. 5, 1986, 485-495.
- BAINS J. A. jr, BREAZEALE M. A., Third-order elastic constants of germanium between 300 and 3K, Phys. Rev. 13B, 1976, 3623-3630.
- BALL J. M., Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity Arch. Rat. Mech Anal., 4, 63, 1977, 337-403.
- BLACKMAN M., The Specific Heat of Solids, Handbuch der Physik, VII/1, Springer-Verlag, Berlin 1955.
- BLAND D.R., Nonlinear Dynamic Elasticity, Blaisd. Publ. Comp., Mass * Toronto * London 1969.
- BLAND D.R., The role of heat conduction in finite elastodynamics, w: Nielin. Volny deform. T.1. Tallin 1978, 11-25.
- [1] BORKOWSKI Sz., Dynamical equations of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci Tech., 9, 24, 1976, 33-40.
- [2] BORKOWSKI Sz., Variational principles in physically nonlinear thermoelasticity, ibid., 9, 25, 1977, 73-78.
- [3] BORKOWSKI Sz., Physically and geometrically nonlinear thermomechanics of

- elastic shells. I. Constitutive equations of the problem. II. Variational equation of the problem, *ibid.*, 1-2, 28, 1980, 1-4, 5-10.
- [1] CANUTO C., HUSSAINI M. Y., QUARTERONI A., ZANG T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [2] CANUTO C., QUARTERONI A., On the Boundary Treatment in Spectral Methods for Hyperbolic Systems, *J. Computational Physics* vol 71, No. 1, 1987.
- CARLSON D. E., *Linear thermoelasticity*, w *Encyclopedia of Physics*, vol. IVa/2, Springer-Verlag, Berlin 1972.
- [1] CHIRITĂ S., Uniqueness and continuous dependence results for the incremental thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, 2, 5, 1982, 161-172.
- [2] CHIRITA S., Continuous data dependence in the dynamical theory of nonlinear thermoelasticity on unbounded domains, *J. Thermal Stresses*, 1, 11, 1988, 57-72.
- DAFERMOS C. M., HSIAO L., Development of singularities in solution of the equations of nonlinear thermoelasticity, *Quart. Appl. Math.*, 3, 44, 1986, 463-474.
- DEMKOWICZ L., *Adaptacyjne metody elementów skończonych. Teoria i zastosowania*. Politechnika Krakowska 1986 (praca habilitacyjna).
- DILLON O. W. jr, A nonlinear thermoelasticity theory, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 10, 1962, 123-131.
- DUNN J. E., FOSDIC R. L., Steady structural shock waves, p. 1, *Thermoelastic materials*, ARMA vol. 104, No 4, 1988, 295-365.
- DŻURAJEW U.M., SABODASZ P.F., *Rasprostraneniye odnometriykh nelinejnykh termouprugich voln*, *Izd. A N Uz. SSR, Ser. Techn. N.*, 6, 1987, 26-28.
- FUNG Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- GAUTHIER S., A Spectral Collocation Method for Two-dimensional Compressible Convection, *J. Computational Physics* vol 75, No. 1, 1988, 217-235.
- GODUNOW G. K., *Elementy mechaniki splosznoj sriedy*, Nauka, Moskwa 1978.

- GOTTLIEB D., ORSZAG S. A., *Numerical analysis of spectral methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- GRYBOS R., *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, IPPT PAN, PWN, Warszawa 1969.
- HADDOW J. B., LORIMER S. A., TAIT R. J., Nonlinear combined axial and torsional shear wave propagation in an incompressible hyperelastic solid, *Int. J. Non-linear Mechanics*, vol. 22, No 4, 1987, 297-306.
- HERRMANN G. On Second-Order Thermoelastic Effects, *ZAMP*, Vol.15, 1964, 253-262.
- HETNARSKI R. B., Coupled thermoelastic problem for the half-space, *Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Tech.*, 1, 12, 1964, 49-57.
- HETNARSKI R. B., The fundamental solution of the coupled thermoelastic problem for small times, *Arch. Mech. Stos.* 1, 16, 1964, 23-31.
- IF F., BERG P., CHRISTIANSEN P. L., SKOVGAARD O., Split-Step Spectral Method for Nonlinear Schrodinger Equation with Absorbing Boundaries, *J. Computational Physics* vol 72, No. 2, 1987, 501-503.
- [1] IGNACZAK J., Note on the propagation of thermal stresses in a long metallic rod, *Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Tech.*, 5, 7, 1959, 309-314.
- [2] IGNACZAK J., Linear dynamic thermoelasticity - A survey, *Shock Vibr. Dig.* vol. 13, No 9, 3-8, 1981.
- [1] JEKOT T., Nonlinear thermoelastic problems of homogeneous and isotropic media under great temperature gradients, *Arch. Mech. Stos.* vol. 1, 1984, 33-47.
- [2] JEKOT T., The comparison of thermal stresses in metallic materials in cases of linear and nonlinear constitutive equations of thermoelasticity, *Proc. Int. Symp. Calculation of Internal Stresses in Heat Treatment of Metallic Materials*, Linköping University, Linköping, Szwecja 1984, 73-79.
- [3] JEKOT T., Constitutive equations of nonlinear anisotropic nonhomogeneous thermoelasticity, *Proc. Int. Conference on Nonlinear Mechanics*, Shanghai, Chiny, 1985.

- [4] JEKOT T., Numerical analysis of thermal stresses in a nonlinear thermoelastic thick cylindrical shell and cube, *J. Thermal Stresses*, 1, 1986, 59-68.
- [5] JEKOT T., Constitutive equations of nonlinear anisotropic nonhomogeneous thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, 2, 1987, 101-112.
- [6] JEKOT T., Spectral methods for nonlinear thermoelastic D54S aluminium rod rapidly heated, *Proc. Int. Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials*, Chongqing, Chiny, 1989 (przełożona na czerwiec 1990).
- [7] JEKOT T., Spectral methods for nonlinear coupled thermoelastic rapidly heated rod, *J. Thermal Stresses*, (w druku) 1990.
- [8] JEKOT T., Recurrent variational spectral method for a problem of impact of the nonlinear rod, artykuł przyjęty na NUMETA 90, *Int. Conf. Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*, Swansea UK, 7-11.01.1990.
- KHORRAMI M. R., MALIK M. R., ASH R. L., Application of Spectral Collocation Techniques to the Stability of Swirling Flows, *J. Computational Physics* vol 81, No. 1, 1989.
- KONDAUROW W. I., O diwergentnoej formie urawnienij nielinieijnoej termouprugosti, *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, vol.3, 1982, 132-140.
- KORCZAK K. Z., PATERA A. T., An Isoparametric Spectral Element Method for Solution of the Navier-Stokes Equations in Complex Geometry, *J. Computational Physics* vol 62, No. 2, 1986, 361-382.
- KU H. C., HIRSH R. S., TAYLOR T. D., A Pseudospectral Method for Solution of the Three-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, *J. Computational Physics* vol 70, No. 2, 1987, 439-462.
- LANDOLT-BORNSTEIN, *Zahlenwerte und Funktionen aus Physik-Chemie-Astronomie-Geophysic und Technik*, 1967.
- LEIBFRIED G., *Kristallphysik, Handbuch der Physik*, VII/1, 104, Berlin, Springer 1955.
- LEONOV K.Ja., MUCHANLINSKI F.D., O nelinejnych načalno-krajevych zadačach dla

- sistem uravnenij termouprugosti i termovjaskouprugosti, *Dokl. A.N. Az. SSR*, 3, 44, 1988, 3-5.
- LI Y. Y., GHONEIM H., CHEN Y., A numerical method in solving a coupled thermoelasticity equation and some results, *J. Thermal Stresses*, 6, 1983, 253-280.
- LURIE A. I., *Nielinieijnaja teorija uprugosti*, Nauka, Moskwa 1980.
- MASALSKI J.M., STUDNICKI J., *Legalne jednostki miar i stałe fizyczne*, PWN Warszawa 1988.
- MÜLLER I., The Coldness a Universal Function in Thermoelastic Bodies, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 41, 1971, 319-332.
- MURNAGHAN F. D., *Finite deformation of an elastic solid*, New York 1951.
- [1] NOWACKI W., *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN Warszawa, 1966.
- [2] NOWACKI W., *Thermoelasticity*, wyd II, tłum. na angielski H. Zorski, Pergamon Press, Oxford-Elmsford N.Y.; PWN - Pol. Sc. Publ., Warszawa 1986.
- [3] NOWACKI W., *Dynamic Problems of Thermoelasticity*, Noordhoff, Leyden and PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw 1975.
- [1] ODEN J. T., *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill Book Company 1972.
- [2] ODEN J. T., Existence Theorems for a Class of Problems in Nonlinear Elasticity *J. Mathematical Analysis and Applications*, 69, 1979, 51-83.
- PASZKOWSKI S., *Zastosowanie numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, PWN, Warszawa 1975.
- PETERS R. O., Breazeale M. A., Pare V. K., Ultrasonic Measurement of the Temperature Dependence of the Nonlinear Parameters of Cooper, *Phys. Rev. B* 1, 68, 1970, 3245-3250.
- RYCHLEWSKI J., On thermoelastic constants, *Arch. Mech. Stos.*, vol. 36, No. 1, 1984, 77-96.
- SCHREIBER E., ANDERSON O., L., SOGA M., *Elastic Constants and Their Measurement* 1970.

- SLACK G. A., ANDERSON P., Pressure and temperature effects on the thermal conductivity of CuCl , *Phys. Rev. B* 26, 1982, 1873-1884.
- SLEMROD M., Global existence, uniqueness and asymptotic stability of classical smooth solutions in one dimensional non-linear thermoelasticity, *Arch. Rat. Mech. a. Anal.*, 2, 76, 1981, 97-133.
- SMITH R. T., STERN R., STEPHENS P. W., Third order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic measurements, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 40, N5, pp.1002-1008, 1966.
- SUHUBI E. S., *Continuum Physics*, pod redakcją A. C. Eringen, Princeton, New Jersey, 1975.
- SUJETIN P. K., *Klasiczeskije ortogonalnyje mnogoczlieny*, Nauka, Moskwa 1978.
- SUTTON P. M. The Variation of the Elastic Constants of Crystalline Aluminum with Temperature between 63 K and 773 K. *Phys. Rev.* 91, 1953, 816-821.
- STERNBERG N., A Spectral Method for Nonlinear Wave Equation, *J. Computational Physics* vol 72, No. 2, 1987, 422-434.
- THURSTON R. N., Ultrasonic Data and the Thermodynamics of Solids, *Proc. of IEEE* vol. 53, No 10, 1320, 1965, 1320-1336.
- TIEHU Q., The global smooth solution of second order quasilinear hyperbolic equations with dissipative boundary conditions, *Chin. Ann. of Math.* 3B, (3), 1988, 251-269.
- [1] TRUESDELL C., *A first course in rational continuum mechanics*, New York Academic Press 1977.
- [2] TRUESDELL C., NOLL W., *The non-linear field theory*, w: *Encyclopedia of Physics*, vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin 1965.
- [3] TRUESDELL C., TOUPIN R. A., *The Classical Field Theories*, w: *Encyclopedia of Physics*, vol. III/1, Springer-Verlag, Berlin 1960.
- TORRISI M., Sulla velocità in termoelasticità finita, 3-4, 69, 1980/81, 154-160.
- VALENT T., *Boundary value problems of finite elasticity: Local theorems on existence, uniqueness and analytical dependence on data*, N.Y., Springer 1988.

- VILKE V.G., O suščestvovanii i jedinstvennosti rešenij nekatorych klassov dinamičeskich zadač nelinejnoj teorii uprugosti, *Prikl. Mat. Mech.*, 1, 43, 1979, 124-132.
- WATCHMAN J. B. jr, TEFTT W. E., LAM D. G. jr, APSTEIN C. S., Exponential Temperature Dependence of Young's Modulus for several Oxides, *Phys. Rev.* 122, 1961, 1754-1759.
- WARGAFNIK N. B., *Termofiziceskije sfojstwa materialow*, GEV, Moskwa, 1956.
- WESOŁOWSKI Z. Nieliniowa teoria sprężystości. W pracy: *Mechanika techniczna*, t. IV, *Sprężystość*, pod redakcją M. Sokołowskiego, PWN, Warszawa 1978.
- WHEELER L., NACHLINGER R. R., Uniqueness theorems for finite elastodynamics *J. of Elasticity*, vol. 4, No 1, 1974, 27-36.
- WILMAŃSKI K., *Thermoelastic materials*, w pracy: *Recent Developments in Termomechanics of Solid*, pod redakcją G. Lebona, P. Perzyny, Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [1] WOŹNIAK Cz., *Mechanika ośrodków ciągłych*. W: *Mechanika techniczna, Podstawy mechaniki*, PWN, Warszawa 1985, pod redakcją H. Zorskiego.
- [2] WOŹNIAK Cz., *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*, PWN Warszawa 1969.
- [i] *Notes on Applied Science* No. 30, Use in industry of elasticity measurements in metals with the help of mechanical vibrations, Dept. of Scientific and Industry Research, 1964.

ZASTOSOWANIE METOD SPEKTRALNYCH W NIELINIOWEJ SPRĘŻONEJ TERMOSPĘŻYSTOŚCI

STRESZCZENIE

Praca jest propozycją nowych równań konstytutywnych nieliniowej termosprężystości. Przedstawia również pewne uogólnienie metod spektralnych obejmujące nieliniowe równania dynamiki ciał sprężystych i termosprężystych. Przedstawiono układy równań pola dla ośrodka niejednorodnego i anizotropowego oraz jednorodnego i izotropowego dla nieliniowej termosprężystości i teorii sprężystości. Zaproponowano tezę o wielomianowej reprezentacji tensora naprężeniowo-temperaturowego względem temperatury absolutnej. Analizę równań konstytutywnych oraz wpływu sprzężenia przedstawiono na przykładach rozwiązań prostych statycznych oraz dynamicznych problemów tej teorii. Zaproponowano wariacyjną rekurencyjną postać metody tau obejmującą równania nieliniowe o zmiennych współczynnikach. Metodę zastosowano do rozwiązania jednowymiarowego problemu początkowo-brzegowego nagle ogrzanego pręta oraz do problemu osiowego uderzenia pręta. Przyjęto, że pręt jest wykonany ze stopu aluminium D54S. Porównanie rozwiązań liniowych niesprężonych z nieliniowymi sprzężonymi zilustrowano wykresami. Można stwierdzić, że uwzględnianie nieliniowości fizycznej w procesach izotermicznych ma mały wpływ na zmiany względem rozwiązań liniowych. W procesach nieizotermicznych uwzględnienie członów nieliniowych w proponowanych równaniach konstytutywnych ma istotny wpływ na różnice pomiędzy rozwiązaniami liniowymi i nieliniowymi. Dla rozpatrywanego stopu aluminium D54S wpływ sprzężenia jest znikomy.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

РЕЗЮМЕ

В диссертации предлагаются новые определяющие уравнения нелинейной термоупругости. Она содержит также некоторое обобщение спектральных методов включающие нелинейные уравнения динамики упругих и термоупругих сред. Изображены системы уравнений поля для неоднородной анизотропной а также однородной и изотропной среды в нелинейной термоупругости и теории упругости. Предложено тезис о многочленной репрезентации упруго-температурного тензора относительно абсолютной температуры. Анализ определяющих уравнений и влияния связи представлены на примерах решений простых статических и динамических проблем представленной теории. Предложено вариационный рекуррентный вариант метода τ который решает нелинейные уравнения с непостоянными коэффициентами. Метод был применен для решения одномерной начально-краевой задачи внезапно нагретого стержня и задачи осевого удара стержня. Принято, что стержень был выполнен из сплава алюминия D54S. Сравнение линейных несвязанных с нелинейными связанными решениями дается на графиках. Можно констатировать, что учитывание физической нелинейности в изотермических процессах оказывает небольшое влияние на изменения по отношению к линейным решениям. В неизотермических процессах учет нелинейных членов, в предлагаемых определяющих уравнениях существенно влияет на разницы между линейными и нелинейными решениями. Для рассматриваемого сплава алюминия D54S влияние связи уничтожно малое.

APPLICATION OF SPECTRAL METHODS IN NONLINEAR COUPLED THERMOELASTICITY

S U M M A R Y

New constitutive equations of nonlinear thermoelasticity are proposed in the dissertation. A generalization of spectral methods to include nonlinear dynamic equations of elasticity and thermoelasticity is presented as well. A system of field equations of nonhomogeneous anisotropic and homogeneous isotropic medium in nonlinear thermoelasticity and elasticity is presented. A thesis of polynomial representation of stress-temperature tensor in relation to absolute temperature is suggested. There is an analysis of constitutive equations and coupling influence on simple examples of static and dynamic problems of theories considered. Variational recurrent version of tau method which includes equations with nonconstant coefficients is generalized. The method is applied to solve one dimensional initial-boundary value problem of a rapidly heated rod and coaxial compact of a rod. The rod is made of D54S aluminum alloy. The comparison of linear uncoupled and nonlinear coupled solutions is illustrated on graphs. One can infer that nonlinearity in isothermal processes has small influence on solutions in relation to linear problem. In nonisothermal processes considering nonlinear terms in proposed nonlinear constitutive equations has an important influence differences between linear and nonlinear solutions. For considered D54S aluminum alloy an influence of coupling is negligible.



BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P.3359 / 90 / 63