

3341/85

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**



40-LECIE
Politechniki Śląskiej

JAN KAŁUSKI

**METODY ANALIZY NIEZAWODNOŚCI
METROLOGICZNEJ**

AUTOMATYKA

**Z. 80
GLIWICE
1985**



P. 3341/85

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 849

JAN KAŁUSKI

**METODY ANALIZY
NIEZAWODNOŚCI
METROLOGICZNEJ**

GLIWICE

1985

OPINIODAWCY

Doc. dr hab. inż. Ernest Czogała

Doc. dr hab. inż. Jan Figurski

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Wiesław Gabzdyl
 REDAKTOR DZIAŁU — Dr inż. Anna Skrzywan-Kosek
 SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Stinzing
 CZŁONKOWIE KOLEGIUM — Prof. dr hab. inż. Adolf Maciejny
 — Prof. dr inż. Stanisław Malzacher
 — Prof. dr hab. inż. Bronisław Skinderowicz

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Mgr Anna Błażkiewicz

Wydano za zgodą
 Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0760

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
 ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 160+85 Ark. wyd. 7,2 Ark. druk. 6,5 Papier offset. kl. III. 70x100,70 g
 Oddano do druku 18.06.85 Podpis do druku 9.08.85 Druk ukończ. w październ. 1985
 Zam. 667/85 K-24 Cena zł 108,-

Skład, fotokopie, druk i oprawę
 wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	Str.
WSTĘP	7
Rozdział 1. NIEZAWODNOŚĆ METROLOGICZNA	11
1.1. Podstawowe definicje i pojęcia	11
1.2. Wskaźniki niezawodności metrologicznej	15
1.3. Nazewnictwo	16
1.4. Uzasadnienie metody analizy niezawodności metrologicznej	19
Rozdział 2. METODA FUNKCJI ZMIENNEJ LOSOWEJ JEDNOWYMIAROWEJ.....	20
2.1. Wyznaczanie procesu zmian dokładności	20
2.2. Wyznaczanie funkcji gęstości trwałości dokładnościowej ...	22
Rozdział 3. METODY PROBABILISTYCZNO-DETERMINISTYCZNE	32
3.1. Związek między teorią czułości i dokładności a teorią niezawodności	32
3.2. Metoda oddziaływań zewnętrznych	37
3.3. Metoda linearyzacji parametryczno-stochastycznej	40
Rozdział 4. ZASTOSOWANIE TEORII PROCESÓW MARKOWA DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ	43
4.1. Metoda równań kinetycznych Fokkera-Plancka-Koźmogorowa ...	43
4.2. Metoda równań całkowo-różniczkowych Pugaczewa	50
4.3. Metoda stanów dokładności wskazań	53
Rozdział 5. KONTROLA OKRESOWA PRZYRZĄDÓW POMIAROWYCH	63
5.1. Analiza jakościowa	63
5.2. Przykład	67
Rozdział 6. METODA BADAŃ STATYSTYCZNYCH W NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ	71
6.1. Integralny wskaźnik dokładności	71
6.2. Parametry próbkowe badań statystycznych	72
6.3. Metoda wyznaczania liczności próbki przyrządów pomiarowych	75
6.4. Metoda wyznaczania liczby pomiarów w punkcie pomiarowym ..	78
6.5. Metoda wyznaczania liczby pomiarów w zależności od błędów przyrządu badanego i wzorcowego	84
ZAKOŃCZENIE	90
LITERATURA CYTOWANA	92
STRESZCZENIA	98

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВСТУПЛЕНИЕ	7
Глава 1. МЕТРОЛОГИЧЕСКАЯ НАДЕЖНОСТЬ	11
1.1. Основные определения	11
1.2. Показатели метрологической надёжности	15
1.3. Терминология	16
1.4. Обоснование метода анализа метрологической надёжности	19
Глава 2. МЕТОД ФУНКЦИИ ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ	20
2.1. Определение процесса изменений точности	20
2.2. Определение функции плотности вероятностей исправной работы по точности	22
Глава 3. ВЕРОЯТНОСТНО-ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ	32
3.1. Связь между теорией чувствительности, точности и теорией надёжности	32
3.2. Метод внешних возмущений	37
3.3. Метод параметрическо-стохастической линеаризации	40
Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К АНАЛИЗУ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ	43
4.1. Метод кинетических уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова	43
4.2. Метод интегро-дифференциальных уравнений Пугачёва	50
4.3. Метод состояний показаний точности	53
Глава 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ПО ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ..	63
5.1. Качественный анализ	63
5.2. Пример	67
Глава 6. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ	71
6.1. Интегральный показатель точности	71
6.2. Параметры выборки для статистических исследований	72
6.3. Метод определения численности выборки измерительных приборов	75
6.4. Метод определения количества измерений в измерительной точке	78
6.5. Метод определения количества измерений в зависимости от ошибок исследуемого и эталлонного приборов	84
ОКОНЧАНИЕ	90
СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	97

CONTENTS

	Page
INTRODUCTION	7
Chapter 1. METROLOGICAL RELIABILITY	11
1.1. Basic definitions	11
1.2. Metrological reliability indices	15
1.3. Terminology	16
1.4. Grounds for the method of metrological reliability analysis	19
Chapter 2. METHOD OF ONEDIMENSIONAL RANDOM VARIABLE FUNCTIONS	20
2.1. Assignment of the process of accuracy changes	20
2.2. Assignment of density function of accuracy durability	22
Chapter 3. PROBABILISTIC-DETERMINISTIC METHODS	32
3.1. Connection of the sensitivity and accuracy theory and the reliability theory	32
3.2. Method of external perturbations	37
3.3. Method of parametric-stochastic linearization	40
Chapter 4. APPLICATION OF MARKOV PROCESSES THEORY TO METROLOGICAL RELIABILITY ANALYSIS	43
4.1. Method of kinetic Fokker-Planck-Kolmogorov equations	43
4.2. Method of differential-integral Pugachev equations	50
4.3. Method of states of accuracy indications	53
Chapter 5. PERIODICAL CONTROL OF MEASUREMENT INSTRUMENTS	63
5.1. Quality analysis	63
5.2. Example	67
Chapter 6. METHODS OF STATISTIC INVESTIGATIONS IN METROLOGICAL RELIABILITY	71
6.1. Integral-accuracy index	71
6.2. Sample parameters of statistic investigations	72
6.3. Method of assignment of measurement instruments sample size	75
6.4. Method of assignment of measurements number in the measurement point	78
6.5. Method of assignment of measurements number in the function of the errors of tested and standard instruments	84
FINAL REMARKS	92
REFERENCES	98

WSTĘP

Niezawodność metrologiczna przyrządów pomiarowych, jako dział jakościowej teorii niezawodności, jest wciąż nowym i mało rozwiniętym kierunkiem badań naukowych. Trudności, jakie epotyka się w analizie, spowodowane są między innymi brakiem jakościowej teorii procesów zmian właściwości metrologicznych przyrządów pomiarowych.

Tak więc do dnia dzisiejszego nie ma uzasadnionej jednolitej teorii, ujmującej metody analizy i modele niezawodności metrologicznej.

Potrzeba badań i opracowań naukowych dotyczących niezawodności przyrządów pomiarowych z uwzględnieniem ich właściwości metrologicznych - w odróżnieniu od innych urządzeń technicznych - została dostrzeżona i uzasadniona w latach sześćdziesiątych przez BRUJEWICZA [16], TOMASZEWSKIEGO [113], OBALSKIEGO [87], TUSZYŃSKIEGO [115], MANDELSZTAMA [75], ARUTIUNOWA [67] oraz TURKELTAUBA [114].

Próby zbudowania modeli niezawodności przyrządów pomiarowych z podaniem metod analitycznych do wyznaczania wskaźników niezawodności metrologicznej, bazujących na procesie zmian dokładności oraz uszkodzeniach metrologicznych uczynili: ABUŁADZE i MANDELSZTAM [2], SAWCZENKO [99], CEJTLIN i CIZIS [17], KEMPINSKI [61], NOWICKI [83-85], FRIDMAN [28,29], TATIJEW-SKI [111], FIRKOWICZ i BUTKIEWICZ [25] oraz autor niniejszej rozprawy w [25, 38, 43, 45-47, 51, 56, 57]. Uzasadnienie modeli i metod analitycznych oparto zarówno na długoletnich badaniach laboratoryjnych, jak i na badaniach teoretycznych [1, 4, 11, 14, 20-22, 28, 30, 33, 35, 37, 39, 40, 43, 50, 52, 54, 70-74, 76, 77, 79, 81, 82, 92, 95, 97, 104, 105, 116-119, 124].

Obecnie coraz bardziej znajduje teoretyczne i praktyczne uzasadnienie fakt, że procesy pojawiania się uszkodzeń są procesami typu dyfuzyjnego. Otwiera to możliwość stosowania do badań niezawodności, jako metody badawczej, dobrze opracowanej już dziś teorii procesów Markowa [18, 24, 26, 36, 60, 63, 67, 94, 107-109, 122].

Rozpatrując z kolei niezawodność metrologiczną jako dziedzinę nauki leżącą na pograniczu ogólnej teorii niezawodności i metrologii teoretycznej, można stwierdzić jakościową odmienność używanych metod analizy i syntezy zjawisk towarzyszących projektowaniu i eksploatacji przyrządów pomiarowych. Uzasadnienie tego faktu można znaleźć w wielu publikacjach [59, 82-84, 88, 117, 123].

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie metod analizy niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych w ujęciu losowych procesów zmian

dokładności wskazań, z podaniem ich teoretycznego i praktycznego uzasadnienia. Drugorzędnym celem jest usystematyzowanie pojęć, definicji i nazewnictwa, dotyczącego niezawodności metrologicznej, gdyż do dnia dzisiejszego, szczególnie w polskim piśmiennictwie z tego zakresu, brak jest szerszych opracowań.

Praca zawiera zasadniczo oryginalne wyniki prac autora, publikowane wcześniej. Składa się z 6 rozdziałów, zakończenie i cytowanej literatury. Numeracja wzorów, rysunków i tablic jest dwuczłonowa i składa się z numeru rozdziału oraz kolejnego numeru w danym rozdziale. Oznaczenia symboli poza głównymi, objaśnionymi w rozdziale 1, są szczegółowo objaśniane w każdym rozdziale. Sporadycznie używane są te same symbole dla różnych wielkości.

W rozdziale 1 podano definicje, nazewnictwo i pojęcie związane z dziedziną niezawodności metrologicznej. Omówiono wymagania stawiane metodom analitycznym, odróżniające je od metod klasycznej teorii niezawodności opartych w głównej mierze na λ - charakterystykach i uszkodzeniach katastroficznych. Wykazano, że podstawą wszystkich metod badawczych niezawodności metrologicznej powinien być odpowiednio rozpoznany losowy proces zmian dokładności wskazań (lub innego charakterystycznego metrologicznego parametru) przyrządów pomiarowych.

W rozdziale 2 opisano i przeanalizowano analityczną metodę wykorzystującą teorię funkcji zmiennej losowej jednowymiarowej. Pozwala ona wyznaczać niektóre wskaźniki niezawodności metrologicznej w przypadku, gdy realizacje losowego procesu zmian dokładności są monotoniczne i przedziałami ciągłe.

W rozdziale 3 omówiono i uzasadniono metody probabilistyczno-deterministyczne oparte na teorii czułości i dokładności przyrządów pomiarowych oraz teorii niezawodności. Bazując na znanym w literaturze ujęciu teorii czułości zbudowano metody, pozwalające na analizowanie niezawodności metrologicznej, z uwzględnieniem zarówno uszkodzeń metrologicznych, jak i katastroficznych oraz elementów struktury niezawodnościowej badanych przyrządów.

W rozdziale 4 uzasadniono stosowanie teorii procesów Markowa w niezawodności metrologicznej. Wychodząc z faktu, że proces zmian dokładności dla bardzo ogólnych warunków może być aproksymowany niestacjonarnym ciągłym procesem Markowa dyfuzyjnego typu, uzasadniono stosowanie metody równań kinetycznych Fokkera-Plancka-Koźmogorowa (FPK) do wyznaczania wskaźników niezawodności metrologicznej. Omówiono metodę funkcji charakterystycznej Pugaczewa, która w szczególnym przypadku prowadzi do równań FPK. Przedstawiono oryginalną metodę stanów dokładności przyrządu pomiarowego, opartą na dyskretnych procesach Markowa.

W rozdziale 5 przedyskutowano problemy związane z kontrolą okresową przyrządów pomiarowych wykorzystując w tym celu teorię odnowienia oraz zagadnienia traktujące o przekroczeniu przez funkcję losową zadanego poziomu.

W rozdziale 6 przeanalizowano podstawowe problemy i metody badań statystycznych w niezawodności metrologicznej. Problemy te dotyczą zarówno nowych wskaźników dokładności wskazań, jak i nowych statystycznych metod badań. Obecnie stosowane metody są zbyt ogólne i nie zawsze mogą być adaptowane do celów metrologii. Stąd też w rozdziale tym szczególną uwagę zwrócono na formułowanie odpowiednich statystyk odzwierciedlających określone właściwości metrologiczne przydatne do badań niezawodności metrologicznej.

Rozdział 1

NIEZAWODNOŚĆ METROLOGICZNA

1.1. PODSTAWOWE DEFINICJE I POJĘCIA

Definicja 1

Przez niezawodność metrologiczną przyrządu pomiarowego będziemy rozumieli jego zdolność do zachowania określonych właściwości metrologicznych w określonych warunkach pracy przy określonych wymaganiach, w czasie t .

Miarą tak zdefiniowanej niezawodności jest odpowiednie prawdopodobieństwo spełnienia postawionego zadania.

W dalszym ciągu pracy, mówiąc o niezawodności metrologicznej, będziemy wyróżniali tylko jedną spośród wielu właściwości metrologicznych, a mianowicie dokładność wskazań przyrządu pomiarowego.

Definicja 2

Wobec powyższego w niniejszej pracy przez niezawodność metrologiczną dokładnościową^{x)} będziemy rozumieli zdolność przyrządu pomiarowego do zachowania określonej dokładności wskazań w określonych warunkach pracy przy określonych wymaganiach, w czasie t .

Miarą tak zdefiniowanej niezawodności jest prawdopodobieństwo zachowania wymaganej dokładności wskazań, w czasie t .

Definicja 3

Przy rozpatrywaniu niezawodności metrologicznej przez stan uszkodzenia metrologicznego będziemy rozumieli zdarzenie polegające na wyjściu wartości wskaźnika dokładności wskazań lub wskazania poza przedział wartości dopuszczalnych, niezależnie od tego, co spowodowało ten stan.

W czasie całego okresu eksploatacji przyrządu pomiarowego bez względu na to, czy jest on użytkowany czy też nie, jego właściwości ulegają ciągłym zmianom. Zmiany te zależą od procesów fizykochemicznych zachodzących w przyrządzie i w określonych warunkach pracy wpływają na zmianę zdolności przyrządu do wykonywania zadania wynikającego z jego przeznaczenia. Procesy fizykochemiczne określają rodzaj zakłóceń, które przeważnie wystę-

^{x)} Termin "niezawodność dokładnościowa" został wprowadzony przez autora w pracy [38].

puję w postaci fluktuacji lub impulsów i w głównej mierze charakteryzują typ uszkodzenia^{x)}. W związku z tym wyróżniamy trzy ich zasadnicze schematy:

1^o Schemat uszkodzeń samousuwalnych - związany jest z występowaniem pojedynczych niesprawności lub zakłóceń, które mogą wywoływać chwilową odnowę w działaniu przyrządu pomiarowego (uszkodzenie chwilowe, przekłamanie, uszkodzenie samousuwalne - pojedyncze wskazania, z błędem większym od dopuszczalnego).

2^o Schemat uszkodzeń stopniowych - polegający na stopniowym narastaniu niesprawności, w wyniku czego otrzymujemy zawsze odmowę w działaniu lub wskazania z błędem większym od dopuszczalnego, bez powrotu przyrządu w stan poprawnej pracy (uszkodzenie trwałe).

3^o Schemat uszkodzeń katastroficznych - polegający na nagłym (mogącym powstać w dowolnej chwili) uszkodzeniu przyrządu, nieodwracalnym w skutkach, bez możliwości dalszego jego użytkowania (uszkodzenie trwałe).

Zwróćmy w tym miejscu uwagę, iż przyjęty przez nas podział uszkodzeń jest czysto umowny i służyć będzie wyłącznie do jakościowej analizy niezawodności metrologicznej. Bowiem z technicznego punktu widzenia do dziś brak jest jakichkolwiek definicji, pozwalających na rozróżnienie omawianych rodzajów uszkodzeń. Często w literaturze spotyka się również podział uszkodzeń na jawne i niejawne. Przy takim podziale uszkodzeń "złamanie się" elementu mechanicznego lub przepalenie elektrycznego będzie uszkodzeniem jawnym, natomiast uszkodzenie metrologiczne - niejawnym. Podział taki jednak nic nie mówi o mechanizmie powstawania uszkodzeń, a fakt zaistnienia uszkodzenia zależy od percepcyjnych właściwości użytkownika.

W niniejszej pracy z natury rzeczy rozpatrywany będzie schemat uszkodzeń stopniowych (metrologicznych). Uszkodzenia te są bezpośrednią przyczyną pogarszania się właściwości metrologicznych przyrządów pomiarowych. Zmiany powstałe podczas uszkodzeń metrologicznych mogą być analizowane na podstawie odpowiednio skonstruowanego i otrzymanego procesu zmian dokładności. Zanim zdefiniujemy ten proces, wprowadźmy następujące formalne oznaczenia:

$X(\tau, x_0) = X(\tau) = X/\tau$ - wskazanie przy pomiarze określonej wartości x_0 wielkości mierzonej X z zakresu pomiarowego $[x_d, x_g]$ dla $\tau \in [0, t]$ ($X(\tau)$ - zmienna losowa),

$\Delta X(\tau) = \Delta X/\tau = X(\tau) - x_0$ - losowy błąd wskazania,

$E[\Delta X(\tau)] = E(\Delta X/\tau) = E[X(\tau)] - x_0$ - błąd systematyczny wskazania ($E[(\cdot)]$ - wartość oczekiwana $[\cdot]$),

$\Delta x \in \Delta X(\tau)$ - realizacja losowego błędu wskazania w chwili τ ,

^{x)} Szerzej ten temat omówiono w pracy [43].

$\sigma_x^2(\tau) = \sigma_{x/\tau}^2 = E\{(X(\tau) - E[X(\tau)])^2\}$ - wariancja wskazań,

$\sigma_x(\tau) = \sqrt{\sigma_x^2(\tau)}$ - odchylenie średnie (standardowe) wskazań,

$m_{2,x}(\tau) = \sigma_{x_0/\tau}^2 = E\{[X(\tau) - x_0]^2\} = \sigma_{x/\tau}^2 + E^2[\Delta X(\tau)]$ - wariancja wskazania (lub błędu wskazania) wzięta względem wartości x_0 (moment zwykły rzędu drugiego zmiennej losowej $X(\tau)$),

$S(\tau) = S\{E[\Delta X(\tau)], \sigma_x^2(\tau), [x_d < X < x_g]\}$ - określony wskaźnik dokładności wskazań jako funkcja wymienionych błędów wskazań i zakresu pomiarowego.

Wobec tego $X(t, x) = X(t)$ oraz $\Delta X(t), E[\Delta X(t)], \sigma_x^2(t), \sigma_x(t)$ i $S(t)$ są procesami losowymi. W dalszym ciągu pracy w zależności od potrzeby będą używane i analizowane wymienione wskaźniki dokładności i procesy losowe.

Definicja 4

Procesem zmian dokładności wskazań będziemy nazywali losowy proces zmian wartości wskazań $X(t)$ lub wartości określonego wskaźnika dokładności wskazań, zadany w postaci stanów chwilowych dokładności lub w postaci zbioru odpowiednich realizacji funkcji zmian wskazań (lub wskaźnika dokładności), w czasie t .

Stany chwilowe charakteryzowane są przez zmienne losowe jednowymiarowe (w przekroju procesu losowego dla ustalonego t):

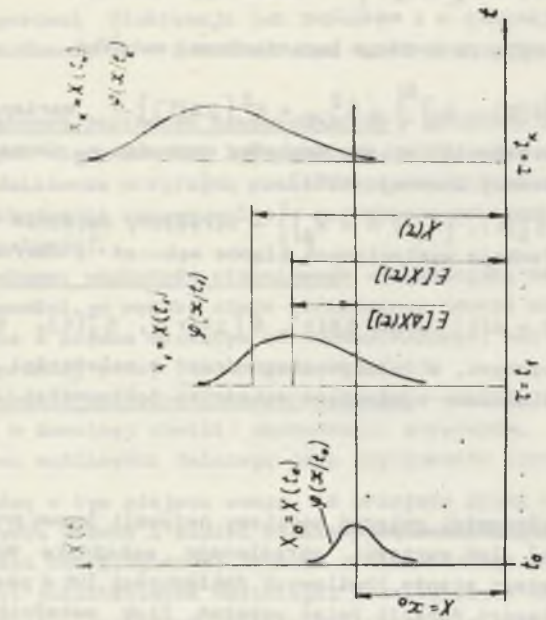
$$X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_k), (t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k)$$

natomiast poszczególne realizacje rozpatrywanego procesu są niezdeterniowanymi funkcjami czasowymi $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, charakteryzującymi zmianę wskazań lub wartości wskaźnika błędu wskazań bądź to całego badanego przyrządu^{x)}, bądź to jego błędu wskazań związanego z określoną wartością wielkości mierzonej.

Omówione wielkości zilustrowano na rys. 1.1a oraz 1.1b dla procesu $X(t)$. Na rys. 1.1a pokazano dwuwymiarową gęstość procesu losowego $X(t, x)$ z wyróżnionymi jednowymiarowymi gęstościami brzegowymi $\psi(x/t=\tau)$ oraz $f(t/X=x)$ (dla przykładu uwidocznione to zostało dla kilku wartości X i t).

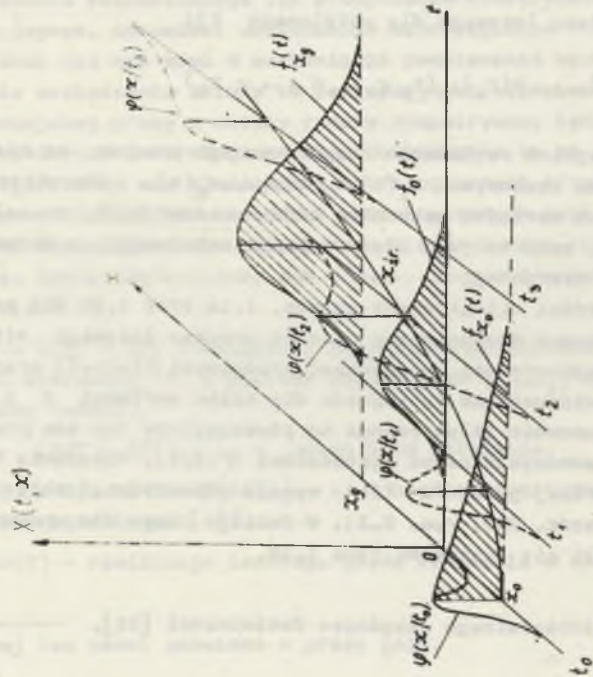
Na rys. 1.1b umownie zilustrowano na płaszczyźnie ten sam proces $X(t, x) = X(t)$ z jego jednowymiarowymi gęstościami $\psi(x/t)$. Pokazanie na tym rysunku jednowymiarowej gęstości $f(t)$ wymaga odpowiednich obliczeń i konstrukcji (zob. rozdz. 2.2, rys. 2.3). W dalszym ciągu dla uproszczenia będziemy posługiwali się rysunkami typu 1.1b.

^{x)} Na przykład - integralnego wskaźnika dokładności [51].



Rys. 1.1b. Proces zmian dokładności wskazań, przedstawiony uownie na płaszczyźnie oraz nie-które wskaźniki dokładności wskazań przy pomiarze wartości $X = x_0$ w chwili $\tau = t_1$

Fig. 1.1b. Process of accuracy changes, presented by convention and some indices of the accuracy during a measurement of a value $X = x_0$ in a moment $\tau = t_1$



Rys. 1.1a. Dwuwymiarowa gęstość losowego procesu zmian dokładności $X(t, x)$

Fig. 1.1a. Two-dimensional density of a random process of accuracy changes $X(t, x)$

Zwróćmy uwagę, że omówione zależności graficzna przedstawiają istotę metod analizy jakościowej niezawodności metrologicznej w ujęciu losowych procesów zmian dokładności.

1.2. WSKAŹNIKI NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ

Spośród wielu wskaźników niezawodności używanych dziś w praktyce i teorii niezawodności, opartej na analizie uszkodzeń katastroficznych [9, 22, 32, 96, 104, 105], a także proponowanych i używanych obecnie wskaźników niezawodności metrologicznej [2, 4, 7, 10, 16, 27, 28, 33, 38, 43, 48, 58, 61, 70, 75, 78, 82-85, 103, 113] zostaną wybrane i zdefiniowane te, które zdaniem autora są najbardziej reprezentatywne i przydatne przy ocenie stanu niezawodności przyrządu pomiarowego, analizowanego ze względu na właściwości metrologiczne.

Przyjmując, że trwałość dokładności jest zmienną losową T , proponuje się następujące wskaźniki:

1^o Funkcja niezawodności metrologicznej $R_d(t)$. Określamy ją w następujący sposób:

$$R_d(t) = P(T \geq t) = P\{D_{\Delta}(T; |\Delta x| \leq \Delta x_{dop}; \mathcal{X}); T \in [0, t]\} = \int_t^{\infty} \int_{-\Delta x_{dop}/2}^{\Delta x_{dop}/2} \varphi(x/\tau) f(\tau) dx d\tau \quad (1.1)$$

gdzie: $D_{\Delta}(T; |\Delta x| \leq \Delta x_{dop}; \mathcal{X})$ - zdarzenie polegające na tym, że przy danym wymaganiu $|\Delta x| \leq \Delta x_{dop}$ i warunkach pracy \mathcal{X} przyrząd jest sprawny w chwili $\tau \in [0, t]$, $[0, t]$ - przedział czasu poprawnej pracy przyrządu pomiarowego, $[-\Delta x_{dop}/2, \Delta x_{dop}/2]$ - przedział wartości dopuszczalnych dla błędów wskazań, $\varphi(x/\tau)$ - jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu błędów wskazań (gęstość chwilowa procesu losowego $X(t)$ - patrz rys. 1.1).

2^o Jednowymiarowa gęstość błędów wskazań dla t, $\varphi(x/t)$. Jest to gęstość brzegowa złożona zmiennej losowej X . Wyznaczamy ją w zależności:

$$\varphi(x/t) = \varphi(x|t) = \int_0^t \varphi(x/\tau) f(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Jest to ważna charakterystyka niezawodności metrologicznej, pozwalająca na wyznaczenie procesu zmian dokładności (patrz rozdz. 2.1).

3° Gęstość trwałości dokładnościowej $f(t)$ (gęstość czasu poprawnej pracy - błędy wskazań są mniejsze od dopuszczalnych).

4° Intensywność uszkodzeń dokładnościowych $\lambda(t)$. Jest to wskaźnik wyrażony stosunkiem liczby przekroczeń dopuszczalnego przedziału Δx_{dop} dla błędów wskazań Δx do całkowitej liczby wskazań w jednostce czasu.

5° Liczba stanów dokładności przyrządu $m(t)$. Liczba ta jest funkcją prawdopodobieństwa występowania stanów dokładności w zakresie pomiarowym przyrządu i pewnego współczynnika, wyrażającego stosunek warunkowych prawdopodobieństw przejść z jednego stanu w drugi. Dla dużej dokładności wskazań liczba m jest duża. W miarę pogarszania się właściwości metrologicznych liczba ta maleje (patrz rozdz. 4.3).

6° Średnia częstotliwość uszkodzeń dokładności $a(t)$. Definiujemy ją jako stosunek liczby uszkodzeń dokładności wskazań do całkowitej liczby wskazań pod warunkiem, że po każdym uszkodzeniu następuje odnowienie dokładności.

7° Okres czasu między kolejnymi sprawdzeniami przyrządu pomiarowego $\Delta t = t_2 - t_1$. Jest to średni czas poprawnej pracy (gdy uśrednione błędy wskazań są mniejsze od dopuszczalnych).

Wyróżnione wskaźniki niezawodności metrologicznej nie stanowią, rzecz jasna, zamkniętego i pełnego zbioru. W zależności bowiem od potrzeb i celu pracy zbiór ten może być rozszerzony lub zawężony. Jednak w takiej czy innej formie przedstawione wskaźniki determinują taką a nie inną jakościową analizę niezawodności metrologicznej. Mogą one również stanowić podstawę tworzenia normatywnych wskaźników niezawodności metrologicznej dla celów praktyki w zależności od zastosowań i klasy przyrządów pomiarowych. Temat ten jednak wykracza poza ramy niniejszej rozprawy.

1.3. NAZEWNICTWO

W literaturze dotyczącej niezawodności przyrządów pomiarowych (patrz literatura cytowana) używane jest następujące nazewnictwo:

- niezawodność metrologiczna (метрологическая надёжность, metrological reliability), stosowany jako ogólny termin dotyczący problematyki niezawodności przyrządów pomiarowych, analizowanej ze względu na własności metrologiczne;
- niezawodność dokładnościowa (точностная надёжность, reliability of accuracy). Jest to niezawodność metrologiczna przyrządów pomiarowych dotycząca procesu zmian określonego wskaźnika dokładności wskazań;
- niezawodność parametryczna (параметрическая надёжность, parametrical reliability). Jest to niezawodność metrologiczna rozpatrywana ze względu na proces zmian wartości parametrów elementów składowych przyrządów pomiarowych. Otrzymanie odpowiedniej niezawodności parametrycznej jest wa-

runkiem koniecznym ale niedostatecznym dla zachowania żądanej niezawodności dokładnościowej [43];

- niezawodność informacyjna (информационная надёжность, informational reliability). Jest to niezawodność metrologiczna charakteryzująca zdolność przyrządu pomiarowego do wydawania (lub przekazywania) odpowiedniej informacji o procesie mierzonym [43, 58, 75].

Podkreślimy tu z całym naciskiem, że niezawodność jako zdolność wyrobu do wypełnienia przez ten wyrób zadania (funkcji) zgodnie z przeznaczeniem w określonych warunkach pracy X przy określonych wymaganiach ω w czasie t jest jedna i niepodzielna. Stąd dla dowolnego urządzenia, systemu czy też układu może być ona w pełni określona uporządkowaną trójką $\langle \omega, X; t \rangle$. Poprawnie więc należałoby mówić: niezawodność przyrządów pomiarowych, tak jak się mówi dziś o niezawodności komputera, tokarki, maszyny roboczej, samochodu, niezawodność oprogramowania, harmonogramowania itp.

Jednak zróżnicowanie metod analizy i ocen niezawodności jest dzisiaj w teorii i praktyce tak duże, że dla ukierunkowania rozważań dodaje się do zasadniczego terminu odpowiednią przydawkę. Jest to szeroko praktykowane i nie tylko w teorii niezawodności.

Bardziej frapujące, jak się wydaje, jest rozróżnienie poszczególnych wymienionych rodzajów niezawodności przyrządów pomiarowych. Temat ten wyczerpująco przedyskutowano w pracy autora [43]. Tu pokażemy jedynie schemat zależności między poszczególnymi rodzajami niezawodności (rys. 1.2).

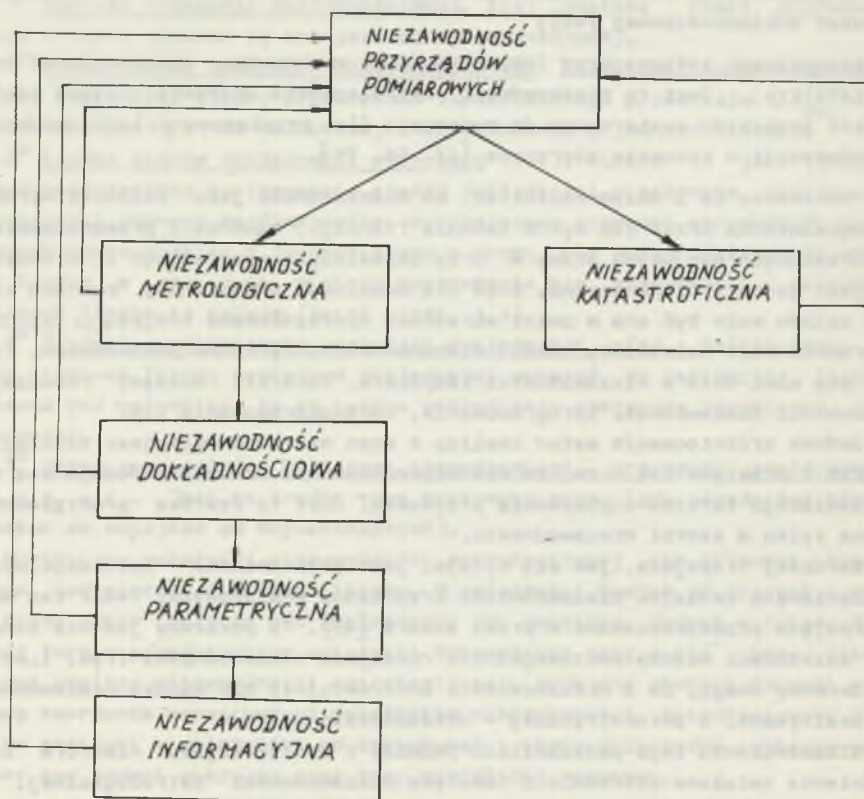
Zwróćmy uwagę, że z niezawodności informacyjnej nie wynika niezawodność parametryczna, z parametrycznej - dokładnościowa itd.

W zakończeniu tego podrozdziału omówimy i uporządkujemy niektóre zagadnienia związane pośrednio z tematyką niezawodności metrologicznej, a mianowicie zależność między stabilnością, dokładnością i niezawodnością przyrządów pomiarowych. Zagadnienia te w literaturze i praktyce często są mylone i stanowią źródło nieporozumień.

Stabilność determinuje zdolność przyrządu do zachowania niezmiennymi parametrów wyjściowych przyrządu. Dlatego też celem analizy stabilności jest określenie tolerancji na parametry wyjściowe przy zadanym prawdopodobieństwie znajdowania się wartości tych parametrów w polu tolerancji. W tym przypadku nie interesuje nas, w jaki sposób zmieniają się wartości parametrów. W tym też sensie analiza stabilności pokrywa się z analizą dokładności, gdzie również wychodzi się z kryterium prawdopodobieństwa zawierania się błędów wskazań, np. przedziale $\pm 3\sigma$ (kryterium "trzy-sigma").

Różnica w analizie stabilności (często mylona jest ona z niezawodnością parametryczną) i dokładności polega na tym, że przy analizie dokładności uwzględnia się również wpływ obiektu mierzonego (procesu mierzonego) na przyrząd pomiarowy.

Analiza niezawodności z uwzględnieniem uszkodzeń metrologicznych tym różni się od analizy stabilności o dokładności, że rozpatruje się proces



Rys. 1.2. Schemat zależności między poszczególnymi rodzajami niezawodności przyrządów pomiarowych

Fig. 1.2. Scheme of relations between special sorts of measurement instruments reliability

zmian właściwości metrologicznych. Ustala się wobec tego kryterium uszkodzenia i wyznacza prawdopodobieństwo spełnienia wymagań jako funkcję czasu t . Przebieg realizacji procesu losowego zmian właściwości metrologicznych w przypadku analizy niezawodności powinien więc być znany. Można powiedzieć, że w tym przypadku mamy do czynienia z odwrotnym zagadnieniem niż przy rozpatrywaniu stabilności i dokładności. Podczas analizy stabilności i dokładności zakłada się zwykle liniową zmianę właściwości, co umożliwia korzystanie z rozwinięcia Taylora i wyznaczenie tolerancji na parametry wyjściowe w zależności od niedużych zmian wartości parametrów elementów składowych i wpływu czynników zakłócających wewnętrznych i zewnętrznych. Analiza ta jednak nie daje podstaw do wnioskowania o niezawodności przy-

rzędu pomiarowego^{x)}. A więc z analizy tej nie można wyznaczyć prawdopodobieństwa spełnienia wymagań w funkcji czasu.

Reasumując, można powiedzieć, że aczkolwiek zagadnienia stabilności, dokładności i niezawodności mają wiele wspólnego, jednak analiza jakościowa w każdym przypadku wymaga innych metod i modeli opisu.

1.4. UZASADNIENIE METODY ANALIZY NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ

W każdej analizie jakościowej tworzy się metody i modele uwzględniające przede wszystkim charakterystyczne właściwości rozpatrywanych systemów, układów lub zjawisk (fizycznych, matematycznych lub biocybernetycznych). W analizie jakościowej niezawodności metrologicznej najbardziej charakterystyczną cechą, ze względu na którą ta analiza winna być prowadzona, jest określona właściwość metrologiczna, na przykład dokładność wskazań, zakres pomiarowy (pasmo przenoszonych częstotliwości), czułość, stabilność wskazań, informacyjność itd.

Dlatego też podstawowym wymaganiem stawianym przyrządom pomiarowym jest wymaganie dotyczące zachowania określonych właściwości metrologicznych.

Fakt ten jednoznacznie wyróżnia przyrządy pomiarowe wśród innych urządzeń technicznych. Stanowi to również podstawę do tworzenia i korzystania z jakościowo innych metod, odmiennych od stosowanych obecnie w teorii i praktyce niezawodności klasycznej, opartej w głównej mierze na λ -charakterystykach^{xx)} i wynikającego z tego faktu ogólnego modelu niezawodności w postaci:

$$R(t) = \left[\exp - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right],$$

który w zależności od $\lambda(t)$ daje różne modele $R(t)$ (patrz na przykład [9, 22, 32, 96, 104, 105]).

Biorąc pod uwagę charakterystyczne właściwości przyrządów najbardziej celowe wydaje się prowadzenie analizy niezawodności w oparciu o identyfikowane teoretycznie lub doświadczalnie procesy zmian właściwości metrologicznych.

Metody zaproponowane i przeanalizowane w niniejszej pracy bazują na losowym procesie zmian dokładności wskazań jako jednej z najbardziej charakterystycznych właściwości metrologicznych przyrządów pomiarowych.

^{x)} Obszerniejszą analizę na temat stabilności można znaleźć w [88,90,100].

^{xx)} Czynnione są próby przeniesienia λ -charakterystyk na grunt niezawodności parametrycznej. Na razie jednak próby te nie dają rezultatu z powodu konieczności wykonania w tym przypadku dużej liczby obliczeń.

Rozdział 2

METODA FUNKCJI ZMIENNEJ LOSOWEJ
JEDNOWYMIAROWEJ

Przebieg funkcji niezawodności $R_d(t)$ przy określonej parze (ω, X) zależy od właściwości fizycznych przyrządu i jego struktury niezawodnościowej. Załóżmy, że znamy właściwości probabilistyczne badanego przyrządu w postaci gęstości błędów wskazań $\varphi(x/\tau)$ dla wybranej chwili $\tau \in [0, t]$ oraz $\varphi(x/\tau + \Delta\tau)$ dla czasu $\tau + \Delta\tau$. Zmiana właściwości przyrządu w czasie $\Delta\tau$ daje w rezultacie zmianę postaci $\varphi(x)$. Przejście od jednej postaci gęstości do drugiej jest zdefiniowanym już wcześniej procesem zmian dokładności.

Znając losowy proces zmian dokładności wskazań $X(t)$ (lub $\Delta X(t)$) możemy określić rozkład $F(t) = P(T < t)$ trwałości dokładnościowej. Z kolei znając lub przyjmując jako znany rozkład $F(t)$ możemy określić losowy proces zmian dokładności. Zagadnienia te możemy rozwiązywać, stosując znane metody funkcji losowej. Są one jednak zbyt ogólne i prawie zawsze wymagają pewnej adaptacji dla każdego konkretnego zastosowania.

Niżej podana zostanie metoda wyznaczania losowego procesu zmian dokładności przy znanym rozkładzie $F(t)$ i odwrotnie - wyznaczenia $F(t)$ przy znanym procesie losowym zmian dokładności i założeniu, że realizacje tego procesu są monotonicznymi przedziałami ciągłymi funkcjami czasu.

2.1. WYZNACZANIE PROCESU ZMIAN DOKŁADNOŚCI [43]

Z definicji procesu zmian dokładności wynika, że w celu określenia jego postaci wystarczy na przykład wyznaczyć funkcję zmian w czasie określonego wskaźnika dokładności wskazań.

Zakładamy, że znamy jednowymiarowe charakterystyki procesu losowego zmian wskazań $X(t)$ w postaci gęstości chwilowej $\varphi(x/\tau)$, tzn. znana jest chwilowa wartość oczekiwana $E(\Delta X/\tau)$ oraz chwilowa wariancja $\sigma_{X/\tau}^2$ dla każdego $\tau \in [0, t]$. Należy wyznaczyć proces zmian wskaźnika dokładności jako funkcję czasową zmian wariancji wskazań $\sigma_X^2(t) = \sigma_{X/t}^2$.

Z definicji wariancji wynika, że:

$$\sigma_{X/t}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x/t) dx - E^2(\Delta X/t) \quad (2.1)$$

Korzystając ze wzoru (1.2) dla $\varphi(x/t)$ otrzymamy:

$$\sigma_{X/t}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \int_0^t \varphi(x/\tau) f(\tau) d\tau dx - E^2(\Delta X/t) \quad (2.2)$$

Po zmianie kolejności całkowania otrzymamy:

$$\sigma_{X/t}^2 = \int_0^t f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x/\tau) dx d\tau - E^2(\Delta X/t) \quad (2.3)$$

Wariancja chwilowego rozkładu o gęstości $\varphi(x/\tau)$ określona jest zależnością

$$\sigma_{X/\tau}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x/\tau) dx - E^2(\Delta X/\tau) \quad (2.4)$$

Przenosząc $E^2(\Delta X/\tau)$ na lewą stronę otrzymamy zależność na całkę wewnętrzną we wzorze (2.3), która jest momentem rzędu drugiego zmiennej losowej $\Delta X/\tau$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x/\tau) dx = \sigma_{X/\tau}^2 + E^2(\Delta X/\tau) = m_{2, X/\tau} \quad (2.5)$$

Stąd ostatecznie:

$$\sigma_{X/t}^2 = \int_0^t f(\tau) \sigma_{X/\tau}^2 d\tau + \int_0^t f(\tau) m_{2, X/\tau} d\tau - E^2(\Delta X/t). \quad (2.6)$$

Przy korzystaniu ze wzoru (2.6) należy pamiętać, że słuszny jest wzór:

$$E(\Delta X/t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x/t) dx = \int_0^t f(\tau) E(\Delta X/\tau) d\tau \quad (2.7)$$

PRZYKŁAD

Niech wartość oczekiwana zmiennej losowej błędów wskazań $\Delta X/t$ o realizacjach $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ (dla poszczególnych wskazań) jako błąd systematyczny wskazania wyraża się zależnością $E(\Delta X/t) = g \cdot t$, g - stały współczynnik.

Gęstość trwałości dokładności ma postać $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$, gdzie λ jest wskaźnikiem intensywności uszkodzeń dokładnościowych.

Po podstawieniu wyrażeń podcałkowych do (2.6) i uwzględnieniu (2.7) otrzymamy czasową zależność wariancji wskazań $\sigma_{x/t}^2$ procesu losowego $X(t)$:

$$\sigma_{x/t}^2 = \exp(-\lambda t) \sigma_{x/t=0}^2 + g^2 \exp(-\lambda t) \left[t^2 + \frac{2t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4} \exp(-\lambda t) (\lambda t + 1) \right]. \quad (2.8)$$

Korzystając z zależności (1.1), (1.2) i własności funkcji Laplace'a $\bar{\phi}(\cdot)$ zależność na niezawodność dokładnościową można zapisać w następującej postaci:

$$R_d(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_{-\Delta x_{dop}/2}^{\Delta x_{dop}/2} \varphi(x/\tau) dx = 2 \bar{\phi} \left(\frac{\Delta x_{dop}}{2\sigma_{x/t}} \right) \quad (2.9)$$

2.2. WYZNACZANIE FUNKCJI GĘSTOŚCI TRWAŁOŚCI DOKŁADNOŚCIOWEJ [43]

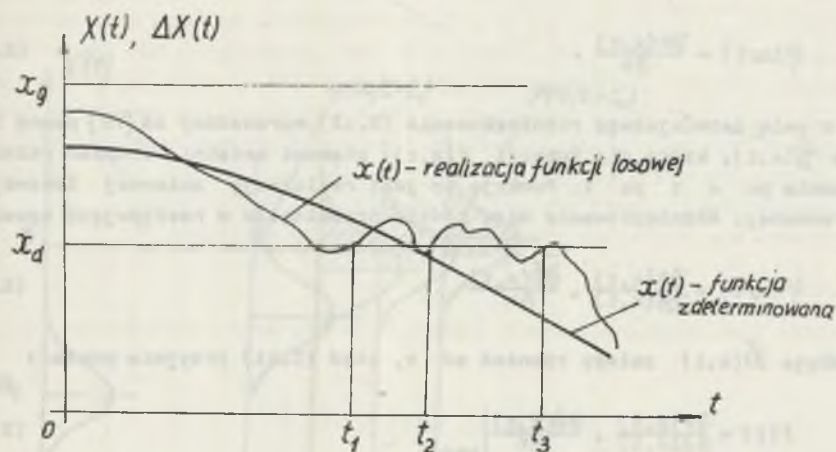
Rozkład trwałości dokładnościowej $F(t)$ a przy spełnieniu założeń o różniczkowalności $F(t)$ - gęstość trwałości $f(t)$ jest wyczerpującą charakterystyką niezawodności przyrządu pomiarowego. Znajomość takiej charakterystyki a priori lub a posteriori jest więc niezbędna przy wyznaczaniu wskaźników niezawodności dokładnościowej - prawdopodobieństwa poprawnej pracy $R_d(t)$ i trwałości dokładnościowej T_d .

Sformułowane przez nas zagadnienie niezawodności dokładnościowej w poprzednich punktach sprowadza problem wyznaczania $F(t)$ lub $f(t)$ albo do określenia funkcji gęstości punktów przewyższenia odpowiedniego poziomu (patrz rys. 2.1) przez losową funkcję $X(t)$, albo do określenia prawdopodobieństwa niewyjęcia funkcji $X(t)$ z przedziału dopuszczalnego $[x_d, x_g]$. W pierwszym przypadku rozpatruje się procesy losowe z wielokrotnym przewyższeniem zadanego poziomu, a statystyczne właściwości, tzn. średnią liczbę przewyższeń w jednostce czasu oraz prawdopodobieństwo przewyższenia zadanego poziomu są obliczone za pomocą dwuwymiarowej gęstości procesu losowego $X(t)$.

W drugim przypadku funkcję $X(t)$ traktuje się jako zdeteterminowaną funkcję czasu (patrz rys. 2.1).

Należy w tym miejscu jednak stwierdzić, że traktowanie funkcji zmian wartości dokładności wskazań Δx w czasie jako zależność zdeteterminowaną jest sprzeczne z sensem prawdopodobnego czasu poprawnej pracy. Stąd też

w dalszej części tego rozdziału funkcję $X(t)$ będziemy uważali za przypadkową funkcję czasu i w tym aspekcie przeanalizujemy wyznaczania $f(t)$.



Rys. 2.1. Przewyższenie przez funkcję $X(t)$ poziomu x_d
Fig. 2.1. Exceeding of a level x_d by a function $X(t)$

Niech znane są jednowymiarowe gęstości $\varphi(x/\tau)$ procesu losowego $X(t)$ lub procesu $\Delta X(t)$ dla każdej chwili $\tau \in [0, t]$ oraz granice przedziału dopuszczalnego dla cechy X (lub ΔX) $[x_d, x_g]$. Wówczas prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$ błąd wskazania będzie zawierał się w granicach $[x_d, x_g]$, wyniesie:

$$f(t) \cdot dt = \left[1 - P(x_d < X < x_g; t + \Delta t) \right] - \left[1 - P(x_d < X < x_g; t) \right] = dF(x, t) \quad (2.10)$$

Stąd

$$f(t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Po zróżniczkowaniu należy napisać różnicę otrzymanego wyniku, podstawiając zamiast x granice x_d i x_g , tzn.:

$$f(t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=x_g} - \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=x_d} \quad (2.12)$$

Czasami różniczkowanie względem t następuje sporo trudności, dlatego celowe jest wyrażenie $f(t)$ przez jednowymiarową gęstość $\varphi(x/t)$ procesu losowego $X(t)$:

$$\varphi(x/t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \quad (2.13)$$

W celu łatwiejszego różniczkowania (2.13) wprowadźmy za [79] pewną funkcję $\mathcal{D}(x,t)$, która dla funkcji $F(x,t)$ stanowi ostatni stopień różniczkowania po x i po t . Funkcja ta jest realizacją zmiennej losowej u-normowanej. Różniczkowanie więc będzie przebiegało w następujący sposób:

$$\varphi(x/t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial \mathcal{D}(x,t)} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}(x,t)}{\partial x} \quad (2.14)$$

Funkcja $\mathcal{D}(x,t)$ zależy również od t , stąd (2.11) przyjmie postać:

$$f(t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial \mathcal{D}(x,t)} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}(x,t)}{\partial t} \Bigg|_{\substack{x=x_g \\ x=x_d}} \quad (2.15)$$

Po wyznaczeniu $\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$ z (2.14) i podstawieniu do (2.15) otrzymamy:

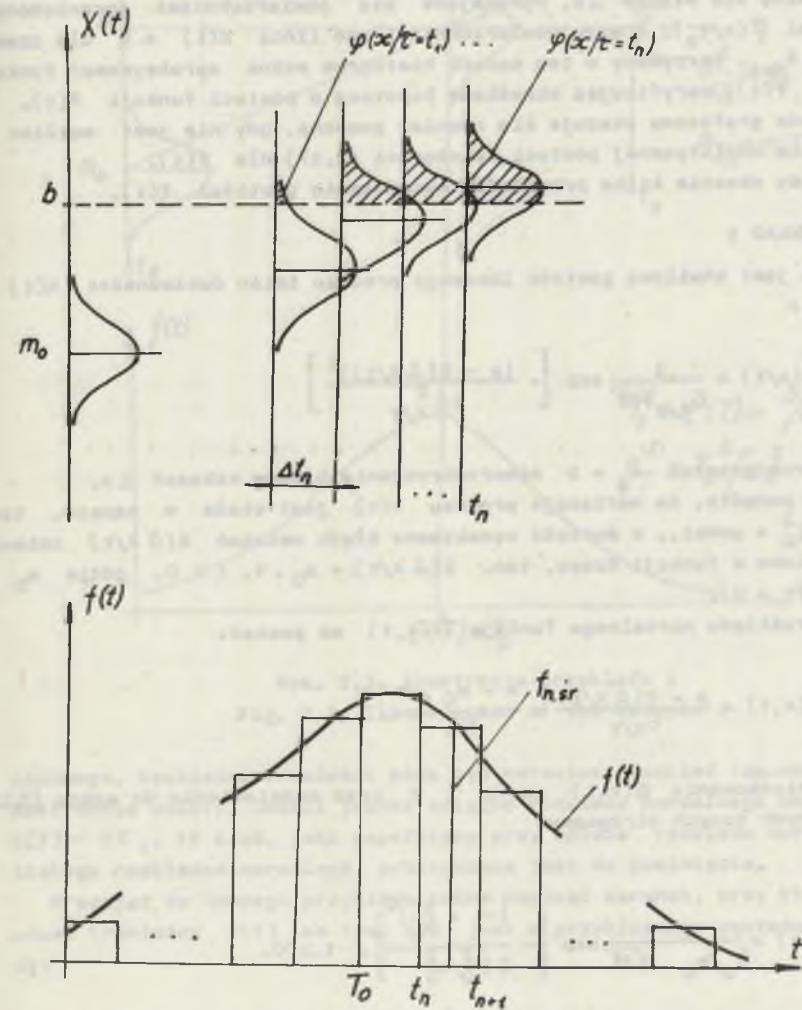
$$f(t) = \varphi(x/t) \frac{\partial \mathcal{D}(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathcal{D}(x,t)} \Bigg|_{\substack{x=x_g \\ x=x_d}} \quad (2.16)$$

Uwzględniając (2.12) i granice x_d i x_g otrzymamy ostatecznie wzór na gęstość rozkładu trwałości dokładnościowej w zależności od gęstości błędów wskaźń:

$$f(t) = \left| \varphi(x/t) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathcal{D}(x,t)} \right|_{\substack{x=x_g \\ x=x_d}} \quad (2.17)$$

W wzorze tym brano się bezwzględne wartości pochodnych funkcji $\mathcal{D}(x,t)$ po x i t .

W celu przybliżonego wyznaczenia postaci funkcji gęstości $f(t)$, przy znanym procesie zmian dokładności $X(t)$, można posłużyć się metodą graficzną. Przedstawiono to na rys. 2.2. W celu wyznaczenia $f(t)$, zgodnie z rys. 2.2, dzielimy oś czasu na jednakowe odcinki Δt i obliczamy odpowiednie częstości średnie $f_{n, \text{sr}}$ dla każdego przedziału według zależności:



Rys. 2.2. Graficzna metoda wyznaczania gęstości trwałości $f(t)$
 Fig. 2.2. Graphic method of assessment of a durability density $f(t)$

$$f_{n, \text{gr.}} = \frac{P_{w,n+1} - P_{w,n}}{\Delta t_n} = \frac{\Delta P_{w,n}}{\Delta t_n} \quad (2.18)$$

gdzie: $P_{w,n+1}$ i $P_{w,n}$ są to prawdopodobieństwa wyjścia poza granicę dopuszczalną dla błędów Δx , wyrażające się powierzchniami ograniczonymi krzywymi $\varphi(x/t_n)$, a więc powierzchniami nad linią $X(t) = b$ dla czasów t_n i t_{n+1} . Otrzymany w ten sposób histogram można aproksymować funkcję ciągłą $f(t)$, weryfikując określoną hipotezę o postaci funkcji $f(t)$.

Metoda graficzna okazuje się również pomocna, gdy nie jest możliwe otrzymanie analitycznej postaci zależności (2.17) dla $f(t)$.

Zróbmy obecnie kilka przykładów wyznaczania gęstości $f(t)$.

PRZYKŁAD 1

Dana jest chwilowa gęstość losowego procesu zmian dokładności $X(t)$ w postaci:

$$\varphi(x/t) = \frac{1}{\sigma_{x/t} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - E(\Delta X/t))^2}{2\sigma_{x/t}^2} \right]$$

oraz górna granica $x_g = b$ nieprzekroczenia błędów wskazań Δx . Wiadomo ponadto, że wariancja procesu $X(t)$ jest stała w czasie, tzn. $\sigma_{x/t}^2 = \sigma_0^2 = \text{const.}$, a wartość oczekiwana błędów wskazań $E(\Delta X/t)$ zmienia się liniowo w funkcji czasu, tzn. $E(\Delta X/t) = m_0 \cdot t$, $t > 0$, gdzie $m_0 = E(\Delta X/t) = 0$.

Dla rozkładu normalnego funkcja $\mathcal{F}(x, t)$ ma postać:

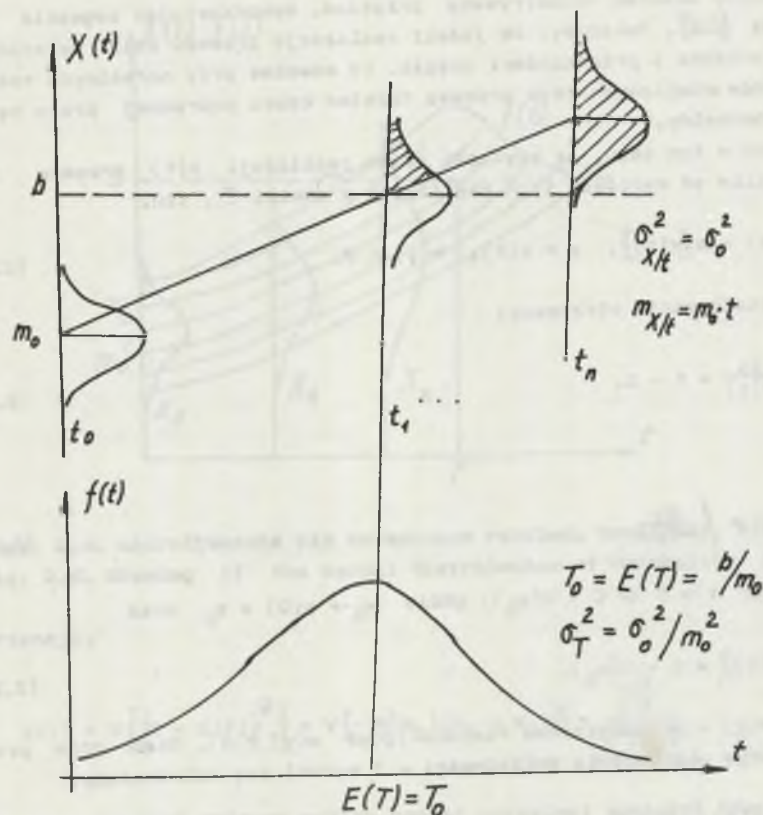
$$\mathcal{F}(x, t) = \frac{x - E(\Delta X/t)}{\sigma_{x/t}} = \frac{x - m_0 \cdot t}{\sigma_0}$$

Po zróżniczkowaniu $\mathcal{F}(x, t)$ po x i t oraz podstawieniu do wzoru (2.17) niezbędnych danych otrzymamy:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_0/m_0 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(-t + \frac{b}{m_0})^2}{2\sigma_0^2/m_0^2} \right], \quad t > 0.$$

Jest to również gęstość rozkładu normalnego, ale już zmiennej losowej T - trwałości dokładności o parametrach; wariancja $\sigma_T^2 = \sigma_0^2/m_0^2$ i wartość oczekiwana $E(T) = b/m_0$. Zostało to pokazane na rys. 2.3.

W zakończeniu tego zadania należy zaznaczyć, że gęstość rozkładu normalnego zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$. Dlatego też, ściśle rzecz biorąc, rozkład normalny nie może być dokładnym modelem trwałości urządzenia tech-



Rys. 2.3. Ilustracja przykładu 1
Fig. 2.3. Illustration of the example 1

nicznego. Rozkładem trwałości może być natomiast rozkład tzw. normalny lewostronnie ucięty. Jeżeli jednak ucięcie rozkładu normalnego następuje przy $E(T) > 36 T$, to błąd, jaki popełniamy przy opisie rozkładu normalnego uciętego rozkładem normalnym, praktycznie jest do pominięcia.

Wracając do naszego przykładu można napisać warunek, przy którym gęstość trwałości $f(t)$ na rys. 2.3 jest w przybliżeniu gęstością normalną:

$$E(T) > 36 T, \quad \text{tzn.} \quad b/m_0 > 3 \frac{\sigma_0}{m_0}$$

lub

$$b > 36 \sigma_0.$$

Powyższy warunek w prawidłowo skonstruowanych i wyregulowanych przyrządach pomiarowych jest zawsze spełniony. Przeważnie $b > 36 \sigma_0$.

Uogólnimy obecnie rozpatrywany przykład, wykorzystując sugestie A.D. Sołowiowa [102]. Pokażemy, że jeżeli realizacje procesu zmian wskazań $X(t)$ są monotoniczne i przedziałami ciągłe, to wówczas przy normalnych rozkładach stanów chwilowych tego procesu rozkład czasu poprawnej pracy będzie również normalny.

Założmy w tym celu, że szybkość zmian realizacji $x(t)$ procesu $X(t)$ zależy tylko od wartości tych realizacji w chwili τ , tzn.

$$\dot{x}(t) = w[x(t)], \quad y = x(t), \quad w(y) \geq 0. \quad (2.19)$$

Stąd po scałkowaniu otrzymamy:

$$\int \frac{dy}{w(y)} = t + C. \quad (2.20)$$

Oznaczmy:

$$W(y) = \int \frac{dy}{w(y)} \quad (2.21)$$

Wówczas dla $t = 0 \Rightarrow C = W(y_0)$, gdzie $y_0 = x(0) = x_0$ oraz

$$W[x(t)] = t + W(x_0). \quad (2.22)$$

Funkcja $W(y)$ - monotonicznie rosnąca (gdyż $w(y) \geq 0$). Stąd czas pracy do pierwszego uszkodzenia dokładności - T wyrazi się zależnością:

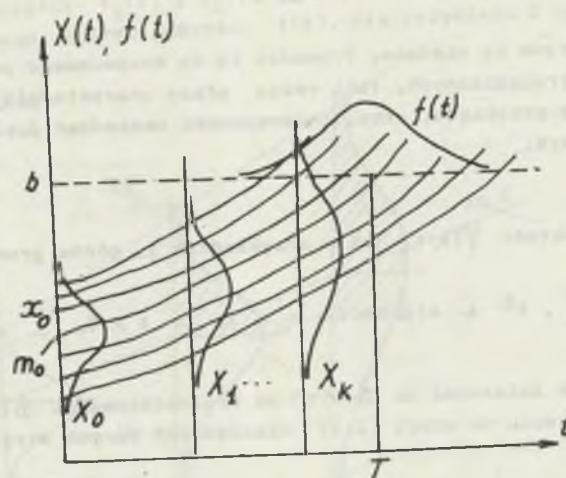
$$T = W(b) - W(x_0). \quad (2.23)$$

$x_0 = x_0$ jest realizacją zmiennej losowej X_0 (patrz rys.2.4) o gęstości $\varphi(x/t=0) = \varphi(x_0)$, będącej gęstością błędów wskazań w chwili $\tau = 0$. Zakładamy dalej, że X_0 ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $E(X_0) = m_0$ i wariancji $V(X_0) = \sigma_0^2$ oraz że dla $\tau = 0$ σ^2 jest małe (zwykle założenie to jest prawdziwe). Wówczas rozwijając funkcję $W(x_0)$ w szereg Taylora w punkcie m_0 i uwzględniając człony liniowe otrzymamy:

$$T = W(b) - W(x_0) \approx W(b) - W(m_0) - W'(m_0)(x_0 - m_0). \quad (2.24)$$

Wynika stąd, że czas poprawnej pracy T ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej:

$$E(T) = E[W(b) - W(x_0)] = W(b) - W(m_0) = \int_{m_0}^b \frac{dy}{w(y)} \quad (2.25)$$



Rys. 2.4. Kształtowanie się normalnego rozkładu trwałości $f(t)$
Fig. 2.4. Shaping of the normal distribution of durability $f(t)$

i wariancji:

$$V(T) = E\{[T - E(T)]^2\} = V[-W'(m_0)(x_0 - m_0)] = \frac{\sigma_0^2}{w^2(m_0)}. \quad (2.26)$$

Można teraz napisać wzór na ogólną postać normalnej gęstości trwałości dokładnościowej $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0 / w(m_0)} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(t - W(b) + W(m_0))^2}{\sigma_0^2 / w^2(m_0)}\right]. \quad (2.27)$$

W szczególnym przypadku pokazanego przykładu 1 otrzymamy:

$$E(T) = W(b) - W(m_0) = \frac{b}{m_0}$$

oraz

$$V(T) = \frac{\sigma_0^2}{w^2(m_0)} = \frac{\sigma_0^2}{m_0^2}$$

Zauważmy, że warunek monotoniczności zmian realizacji $x(t)$ odpowiada takim warunkom pracy przyrządu pomiarowego, dla których zakłócenia zewnętrzne

trzone i wewnętrzne są nieduże. Prowadzi to do stopniowego pogarszania się właściwości metrologicznych. Taki reżim pracy charakteryzuje okres zużycia i starzenia przyrządu, tzn. intensywność uszkodzeń dokładności monotonicznie wzrasta.

PRZYKŁAD 2

Dana jest gęstość $\varphi(x/t)$ jak w przykładzie 1, górna granica b oraz

$$\sigma_{x/t}^2 = \sigma_0^2 \cdot t^2 \quad \text{i} \quad E(\Delta X/t) = m_0 \cdot t, \quad t > 0.$$

Uwzględniając zależność na $\varphi(x/t)$ po zróżniczkowaniu $\varphi(x,t)$ po x i t oraz po podstawieniu do wzoru (2.17) niezbędnych danych otrzymamy:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0 \cdot t} \exp\left[-\frac{(b - m_0 \cdot t)^2}{2\sigma_0^2 \cdot t^2}\right] \left| \frac{b}{\sigma_0 \cdot t^2} \cdot \sigma_0 \cdot t \right|$$

Po odpowiednim przekształceniu zależności na $f(t)$ otrzymamy:

$$f(t) = \frac{b}{m_0 \cdot t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0 / m_0} \exp\left[-\frac{(-t + \frac{b}{m_0})^2}{2\sigma_0^2 / m_0^2}\right].$$

widać, że gęstość rozkładu $f(t)$ jest iloczynem dwóch gęstości: $f_1(t)$, którą w przybliżeniu można aproksymować iloczynem dwóch takich samych gęstości $f_{11}(t)$ rozkładu potęgowego:

$$f_1(t) \approx [f_{11}(t)]^2 = \left(\frac{\delta}{\alpha \delta} \cdot t^{\delta-1}\right)^2,$$

gdzie $\delta \rightarrow 0$ (ale zawsze jest większe od zera) jest parametrem kształtu, natomiast $\alpha > 0$ jest parametrem skali rozkładu potęgowego i wynosi:

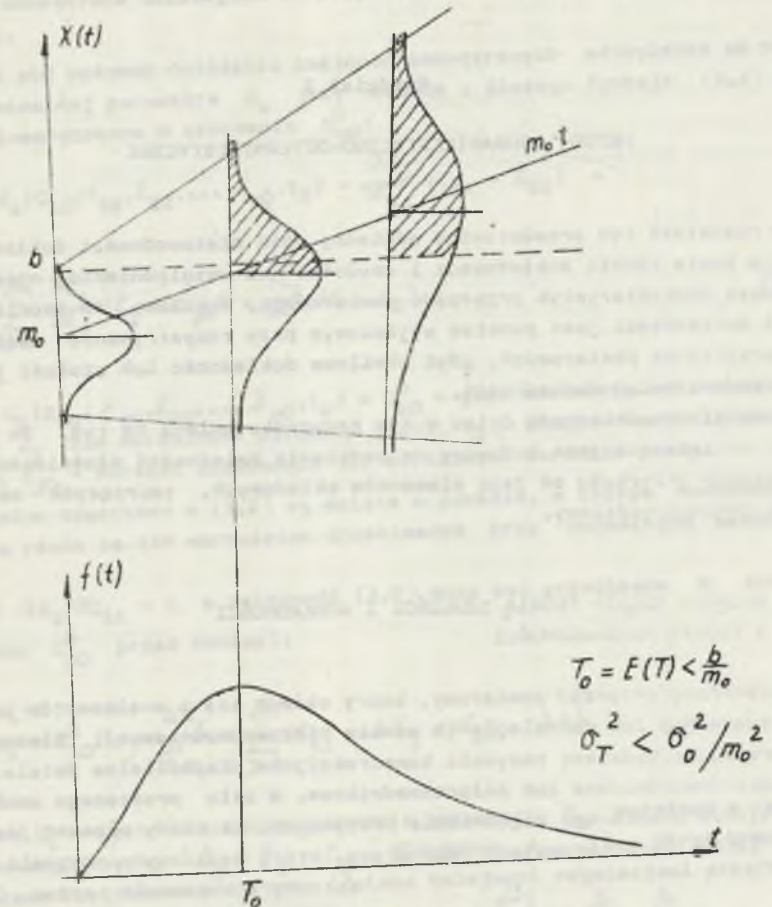
$$\alpha = \left(\sqrt{\frac{m_0}{b}} \delta\right)^{1/\delta},$$

stąd

$$f_1(t) \approx \frac{b}{m_0} \cdot t^{2(\delta-1)}$$

oraz $f_2(t)$, która jest gęstością rozkładu normalnego.

Iloczyn gęstości $f_1(t) \cdot f_2(t)$ nie jest, rzecz jasna, gęstością rozkładu normalnego. Wykres gęstości $f(t)$ dla przykładu 2 pokazuje rys.2.5.



Rys. 2.5. Ilustracja przykładu 2
Fig. 2.5. Illustration of the example 2

Rozdział 3

METODY PROBABILISTYCZNO-DETERMINISTYCZNE

w rozdziale tym przedstawimy odmienny opis niezawodności dokładnościowej na bazie teorii dokładności i czułości^{x)} z uwzględnieniem niezawodnościowych charakterystyk przyrządu pomiarowego. Pokażemy, że teoria czułości i dokładności jest punktem wyjściowym przy rozpatrywaniu niezawodności przyrządów pomiarowych, gdyż chwilowa dokładność lub czułość jest stanem procesu zmian dokładności.

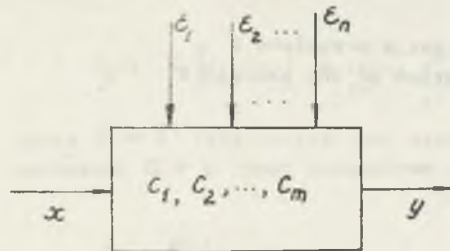
Zasadniczą odmienną w tym przypadku polega na tym, że proces zmian dokładności jest budowany na podstawie zależności właściwości metrologicznych przyrządu od jego elementów składowych, tworzących określony układ niezawodnościowy.

3.1. ZWIĄZEK MIĘDZY TEORIĄ CZUŁOŚCI I DOKŁADNOŚCI
A TEORIĄ NIEZAWODNOŚCI

Rozpatrzmy przyrząd pomiarowy, który składa się z m-elementów połączonych szeregowo lub równolegle (w sensie niezawodnościowym). Elementami w tym przypadku będziemy nazywali konstrukcyjnie niepodzielne detale, zespoły elektromechaniczne lub półprzewodnikowe. W celu prostszego analitycznego ujęcia omawianego zagadnienia przyjmijmy, iż każdy element ma tylko jedną cechę charakteryzującą jego pracę, którą będziemy nazywali cechą istotną i oznaczali przez C_i ($i = \overline{1, m}$). Zmiana wartości wszystkich istotnych cech pod wpływem zewnętrznych i wewnętrznych oddziaływań będzie opisywała zmianę charakterystyk metrologicznych przyrządu, a między innymi zmianę dokładności pomiaru w funkcji czasu.

Element i-ty może być opisany funkcją w postaci:

$$C_i = C_i(C_{1t}; \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, t) \quad (3.1)$$



Rys. 3.1. Schemat blokowy rozważanego przyrządu

Fig. 3.1. Block scheme of the considered instrument

^{x)} O teorii czułości patrz na przykład w [31].

gdzie: C_{1t} - rzeczywista wartość parametru C_1 dla czasu t , ϵ_j - zakłócenia zewnętrzne działające na przyrząd w czasie t , ($j = \overline{1, n}$) (patrz rys. 3.1).

Zwykle pod wpływem działania zakłóceń zewnętrznych odchylenie od wartości nominalnej parametru C_1 jest nieduże i dlatego funkcja (3.1) może być linearyzowana w otoczeniu C_{10}^0 :

$$C_1 = C_1(C_{10}^0; \epsilon_{10}, \epsilon_{20}, \dots, \epsilon_{n0}, t_0) + \frac{\partial C_1}{\partial C_{1t}} (C_{1t} - C_{10}^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial C_1}{\partial \epsilon_j} (\epsilon_j - \epsilon_{j0}) + \frac{\partial C_1}{\partial t} (t - t_0), \quad (3.2)$$

gdzie: $C_1(C_{10}^0; \epsilon_{10}, \epsilon_{20}, \dots, \epsilon_{n0}, t_0) = C_{10}^0$ - jest wartością nominalną parametru C_1 dla normalnych warunków pracy, t_0 - chwila kontroli parametru C_1 , ϵ_{j0} - wartość zakłócenia dla normalnych warunków pracy.

Pochodne cząstkowe w (3.2) są wzięte w punkcie, w którym wartości argumentów równe są ich wartościom oczekiwany przy normalnych warunkach pracy.

Stąd $\partial C_1 / \partial C_{1t} = 1$, a zależność (3.2) może być przepisana w postaci (wynosząc C_{10}^0 przed nawias):

$$C_1 = C_{10}^0 \left(1 + \frac{\Delta C_1}{C_{10}^0} + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \cdot \Delta \epsilon_j + \alpha_{1t} \cdot \Delta t \right), \quad (3.3)$$

gdzie: ΔC_1 - jest tolerancją wykonania parametru C_1 , wyrażoną w jednostkach bezwzględnych, $\Delta \epsilon_j = \epsilon_j - \epsilon_{j0}$ dla czasu t_0 , Δt - okres czasu między dwiema kontrolami przyrządu (dwiema kolejnymi regulacjami przyrządu),

$$\alpha_{1j} = \frac{1}{C_{10}^0} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \epsilon_j} - \text{współczynnik wpływu zakłócenia } \epsilon_j \text{ na parametr } C_1,$$

dla przykładu:

$$\alpha_{1j} = \alpha_{R_1, \vartheta} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial R_1} - \text{rezystancja, } (\vartheta - \text{temperatura}) - \text{temperaturowy współczynnik rezystancji,}$$

$$\alpha_{1t} = \frac{1}{C_{10}^0} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial t} - \text{współczynnik starzenia i-tego elementu.}$$

Z (3.3) widać, że odchylenie wartości nominalnej parametru C_1 (jest podane w metryce wyrobu) dla czasu t składa się z tolerancji wykonania i przyrostu wskutek działania zakłócenia.

Dla rzeczywistych warunków pracy przyrządu $\varepsilon_j, \Delta\varepsilon_j, \Delta t$ są wielkościami przypadkowymi. Stąd współczynniki czułości wpływu α_{1j}, α_{1t} również są wielkościami przypadkowymi.

W ogólnym przypadku dla quasi-stacjonarnego wyjściowego sygnału $y(t)$ funkcję przetwarzania przyrządu można przedstawić w postaci:

$$y = f(x). \quad (3.4)$$

Biorąc małe przyrosty sygnału wejściowego Δx - co pozwoli linearyzować (3.4) - otrzymamy znaną zależność:

$$y = k \cdot x \quad (3.5)$$

gdzie: k - współczynnik liniowego wzmocnienia.

Błąd pomiaru można wyrazić zależnością:

$$\Delta y = y - y_0 = x \cdot (k - k_0), \quad (3.6)$$

gdzie: k_0 - nominalna wartość współczynnika k przy normalnych warunkach pracy.

Wiadomo, że współczynnik k jest funkcją przypadkowych argumentów C_1, \dots, C_m oraz E_n - energii zasilania. Stąd:

$$k = k(C_1, \dots, C_m; E_n). \quad (3.7)$$

Linearyzując (3.7) wokół punktu, gdzie wartości argumentów C_1 równe są ich nominalnym wartościom C_{10}^0 i uwzględniając (3.1), (3.2) i (3.7) otrzymujemy:

$$k = k_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial k}{\partial C_{ij}} \cdot \alpha_{ij} \cdot C_{10}^0 \cdot \Delta \varepsilon_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial k}{\partial C_{i1}} \cdot \alpha_{i1} \cdot C_{10}^0 \cdot \Delta t + \frac{\partial k}{\partial E_n} \cdot \Delta E_n. \quad (3.8)$$

Wyznamy wartość oczekiwaną wyrażenia (3.6):

$$E(\Delta Y) = E(Y - Y_0) = E[X(k - k_0)] = E(X) \cdot E(k - k_0). \quad (3.9)$$

Literą E oznaczono operator wartości oczekiwanej zmiennej losowej X i Y (i innych).

Znajdując z (3.8) $E(k - k_0)$ i podstawiając do (3.9) otrzymamy:

$$E(\Delta Y) = E(X) \cdot \left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial k}{\partial C_{ij}} E(\alpha_{ij}) \cdot C_{10}^0 \cdot E(\Delta \varepsilon_j) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial k}{\partial C_{i1}} E(\alpha_{i1}) \cdot E(\Delta T) + \frac{\partial k}{\partial E_n} E(\Delta E_n) \right]. \quad (3.10)$$

Zależność (3.10) wyznacza błąd systematyczny przyrządu pomiarowego przy zmianie nominalnych wartości zakłóceń. Wartość tego błędu zależy od czasu, stąd będzie nas interesować drugi człon wzoru (3.10), który zmienia się w czasie i przedstawia błąd systematyczny pochodzący od zużycia i starzenia się.

Wielkość $E(\Delta T)$ jest średnią wartością czasu między dwoma kolejnymi sprawdzeniami przyrządu pomiarowego. Na podstawie (3.10) czas ten wynosi:

$$E(\Delta T) = \frac{\frac{E(\Delta Y)}{E(X)} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial k}{\partial C_{ij}} E(\alpha_{ij}) \cdot C_{10}^0 \cdot E(\Delta \varepsilon_j) - \frac{\partial k}{\partial E_n} E(\Delta E_n)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial k}{\partial C_{i1}} E(\alpha_{i1})}. \quad (3.11)$$

Wyznamy obecnie wariancję sygnału wyjściowego. Na podstawie (3.6) znajdujemy:

$$V(\Delta Y) = V(Y) = k^2 \cdot V(X) + x^2 \cdot V(k). \quad (3.12)$$

Pierwszy człon określa związek między zmianami współczynnika wzmocnienia i wariancją tej samej wielkości mierzonej. Obliczając kolejno wariancję k od różnych przyczyn otrzymamy:

1) wariancję k od tolerancji wykonania na parametry C_1 , ($i = \overline{1, m}$)

$$V(k)_{\Delta C_1} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial k}{\partial C_{i1}} \right) \cdot V(C_1) \quad (3.13)$$

2) wariancję k od współczynnika α_{1j}

$$v(k)_{\alpha_{1j}} = \sum_1^m \sum_j^n \left[\frac{\partial k}{\partial C_1} \cdot C_{10}^0 \cdot E(\Delta \varepsilon_j) \right]^2 \cdot v(\alpha_{1j}), \quad (3.14)$$

3) wariancję k od zakłóceń ε_j

$$v(k)_{\varepsilon_j} = \sum_j^n \left[\sum_1^m \frac{\partial k}{\partial C_1} \cdot C_{10}^0 \cdot E(\alpha_{1j}) \right]^2 \cdot v(\varepsilon_j), \quad (3.15)$$

4) wariancję k od fluktuacji energii E_n

$$v(k)_{E_n} = \left[\frac{\partial k}{\partial E_n} \right]^2 \cdot v(E_n), \quad (3.16)$$

5) wariancję k od zużycia i starzenia elementów

$$v(k)_t = \sum_1^m \left(\frac{\partial k}{\partial C_1} \right)^2 (C_{10}^0)^2 \cdot E^2(\Delta T) \cdot v(\alpha_{1t}) + \left[\sum_1^m \frac{\partial k}{\partial C_1} \cdot C_{10}^0 \cdot E(\alpha_{1t}) \right]^2 \cdot v(T), \quad (3.17)$$

$\sqrt{v(T)}$ oznacza tu odchylenie standardowe czasu $\Delta t = t - t_0$ - różnicy czasu między momentami sprawdzenia t i t_0 , $t > t_0$.
 $v(T)$ obliczamy z zależności:

$$v(T) = \int_0^t \tau^2 f(\tau) d\tau - E^2(T), \quad (3.18)$$

gdzie: $f(t)$ jest gęstością trwałości T - czasu poprawnej pracy przyrządu. Sumując wariancje od (3.13-3.17) otrzymamy wariancję całkowitą od działania wyszczególnionych przyczyn.

Reasumując, można stwierdzić, że błąd przyrządu pomiarowego może być interpretowany jako błąd składający się z błędów niezależnego od czasu i błędów będącego funkcją czasu. Błąd ten różni się z czasem wskutek nieodwracalnych zmian powodowanych zużyciem i starzeniem. Można więc zapisać, że:

$$v(k) = v(k)_{const} + v(k)_t \quad (3.19)$$

3.2. METODA ODDZIAŁYWAŃ ZEWNĘTRZNYCH

Przy normalnej pracy przyrządu jego sygnał wyjściowy y jest funkcją $G(x)$ - funkcji sygnału wejściowego oraz zakłóceń zewnętrznych ε_j , $j=1, n$. W tym przypadku przy normalnej pracy, a więc, gdy wartości parametrów elementów C_1 są bliskie nominalnym C_{10}^0 , zależność sygnału wyjściowego y od elementów przyrządu (rozpatrywana m.in. w poprzednim punkcie) nie ma istotnego znaczenia. Wobec powyższego możemy napisać, że:

$$Y = Y[G(x); \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] \quad (3.20)$$

Przepiszmy wzór (1.1) przy ustalonych warunkach pracy. Otrzymamy:

$$R_d(t) = P\left\{ D_\Delta(\tau; |\Delta x| \leq \Delta x_{dop}, \mathcal{X}); \tau \in [0, t] \right\} = P\left\{ |\Delta x| \leq \Delta x_{dop}; \tau \in [0, t] \right\}. \quad (3.21)$$

Zakładamy w tym przypadku, że uszkodzenie dokładności przyrządu pomiarowego może odbywać się wskutek uszkodzeń katastroficznych elementów i jednocześnie wskutek niedopuszczalnych zmian wartości parametrów C_1 przyrządu pomiarowego. Zakładamy dalej również, że przyczyny te są niezależne i, nieskorelowane. Wówczas (3.21) przyjmie postać:

$$R_d(t) = P(|\Delta x| \leq \Delta x_{dop}) \cdot P(0 \leq \tau \leq t) \quad (3.22)$$

Zagadnienie pomiaru wielkości x z zadanym błędem Δx sprowadza się w tym przypadku do zachowania odpowiedniego prawdopodobieństwa znajdowania się wyjściowego sygnału przyrządu Y w granicach $E(Y) - \Delta y \leq Y \leq E(Y) + \Delta y$ w czasie od 0 do t .
 Prawdopodobieństwo to wynosi:

$$P(|\Delta x| \leq \Delta x_{dop}) = P(|E(Y) - \Delta y| \leq y) = \int_{E(Y) - \Delta y}^{E(Y) + \Delta y} f(y) dy \quad (3.23)$$

gdzie $f(y)$ jest gęstością rozkładu wielkości wyjściowej Y .
 Wariancja wielkości Y wyniesie:

$$v(Y) = \left(\frac{\partial y}{\partial G} \right)^2 \cdot v(G) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_j} \right)^2 \cdot v(\varepsilon_j) \quad (3.24)$$

w myśl twierdzenia o wariancji nieskorelowanych zmiennych losowych. Z drugiej strony wariancja $V(Y)$ jako wynik zmiany wielkości X może być zapisaana w postaci:

$$V(Y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \cdot V(X). \tag{3.25}$$

Stąd po uwzględnieniu (3.24) i (3.25) otrzymamy:

$$V(X) = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial G}\right)^2 \cdot V(G) + \sum_j \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon_j}\right)^2 \cdot V(\epsilon_j)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}. \tag{3.26}$$

Pierwiastek z $V(X)$ jest, jak wiadomo, odchyleniem standardowym zmiennej losowej X . Odchylenie to ma taki sam wymiar jak i wielkość mierzona. Wobec tego można znaleźć taką liczbę z , która by spełniała następującą równość:

$$z \cdot \sqrt{V(X)} = \Delta x \tag{3.27}$$

tzn. błąd pomiaru jest zawsze krotnością odchylenia standardowego. Możemy więc napisać wzór na Δx w postaci:

$$\Delta x = z \cdot \frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial G}\right)^2 \cdot V(G) + \sum_j \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon_j}\right)^2 \cdot V(\epsilon_j)\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{\partial y}{\partial x}} \tag{3.28}$$

a stąd otrzymamy:

$$z = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \Delta x}{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial G}\right)^2 \cdot V(G) + \sum_j \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon_j}\right)^2 \cdot V(\epsilon_j)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.29}$$

Warto zauważyć, że z ma sens fizyczny, gdyż licznik (3.29) przedstawia przyrost sygnału wyjściowego przy zmianie x o wartość Δx , natomiast mianownik przedstawia błąd pomiaru zależny od charakteru funkcji $G(x)$ oraz od zewnętrznych zakłóceń ϵ_j . Stąd też z odzwierciedla stosunek wartości sygnału do wartości szumu. Im będzie większy z , tym większe powinno być prawdopodobieństwo poprawnej pracy.

Reasumując, prawdopodobieństwo poprawnej pracy przyrządu zależy od wartości fluktuacji funkcji $G(x)$ i zakłóceń ϵ_j .

Dla przykładu, jeżeli $f(y)$ jest gęstością rozkładu normalnego, wówczas:

$$P(|\Delta x| \leq \Delta x_{\text{dop}}) = 2\Phi(z), \tag{3.30}$$

gdzie: $\Phi(z)$ - funkcja Laplace'a.

Rozpatrując drugi składnik niezawodności dokładnościowej we wzorze (3.22) - prawdopodobieństwo $P(0 \leq T \leq t)$ - można napisać:

$$P(0 \leq T \leq t) = P(T \geq t) = R(t) \tag{3.31}$$

co jest niezawodnością tzw. katastroficzną (od uszkodzeń katastroficzych).

Rozpatrzmy teraz ogólny przypadek, nie czyniąc żadnych założeń co do zależności uszkodzeń parametrycznych i katastroficzych. Wzór (3.23) przyjmuje wówczas postać:

$$Y(t) = Y[G(x(t)); \epsilon_1(t), \dots, \epsilon_n(t), t] \tag{3.32}$$

A więc sygnał wyjściowy jest losową funkcją czasu. Zależy od losowego sygnału wejściowego $G(x(t))$ i losowych zakłóceń ϵ_j . Postępując podobnie jak w pierwszym przypadku, biorąc skończone przyrosty czasowe $dt \equiv \Delta t$ otrzymamy przybliżony wzór na wariancję funkcji losowej $Y(t)$

$$V[Y(t)] \approx \left(\frac{\partial y}{\partial G}\right)^2 \cdot V(G) + \sum_j \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon_j}\right)^2 \cdot V(\epsilon_j) + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \cdot V(T). \tag{3.33}$$

Wzór (3.33) otrzymano na podstawie następujących związków

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial G} \cdot \frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \sum_j \frac{\partial y}{\partial \epsilon_j} \cdot \frac{d\epsilon_j}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t} - \text{ pochodna substancjonalna,}$$

przy założeniu skończonych przyrostów $d \equiv \Delta$ oraz że:

$$V[F(x)] = [F'(x)]^2 \cdot V(x); \quad V(a_0 + \sum_j a_j \cdot x_j) = \sum_j a_j^2 V(x_j).$$

W rezultacie wzór (3.29) przybierze postać:

$$z(t) = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \Delta x(t)}{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial G}\right)^2 \cdot v(G) + \sum_j^n \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_j}\right)^2 \cdot v(\xi_j) + \left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)^2 \cdot v(T) \right]^{1/2}}, \quad (3.34)$$

a wzór (3.30) postać:

$$R_d(t) = P \left\{ (|\Delta x| \leq \Delta x_{dop}); \tau \in [0, t] \right\} = 2\Phi [z(t)]. \quad (3.35)$$

W tym przypadku otrzymaliśmy zależność dla niezawodności dokładnościowej, nie rozbijając jej na parametryczną i katastroficzną, gdyż funkcja losowa $Y(t)$ jako sygnał wyjściowy przyrządu jest funkcją zależną od działania wszelkich zakłóceń w czasie pracy przyrządu - katastroficznym i parametrycznym.

Dla obliczeń praktycznych zależność (3.22) na niezawodność dokładnościową jest prosteza w stosowaniu. Umożliwia ona również rozgraniczenie procesu konstrukcyjnego na dwa etapy.

Pierwszy - polegający na ustaleniu schematu ideowego przyrządu bez podania konkretnych elementów. Określa się wówczas tylko funkcję przetwarzania przyszłego przyrządu. Dobiera się parametry istotne i określa się wpływ różnych czynników destabilizujących pracę przyrządu. Etap ten zwykle powinien kończyć się obliczeniem prawdopodobieństwa $P(|\Delta x| \leq \Delta x_{dop})$, gdyż mamy ku temu wszelkie dane.

W następnym etapie konstruowania przystępujemy do fizycznej realizacji schematu ideowego - dobieramy elementy do zrealizowania funkcji przetwarzania przyrządu. Na tym etapie, dysponując wybranymi elementami, możemy już obliczyć prawdopodobieństwo $P(T \geq t)$. W ten sposób określamy $R_d(t)$ jako iloczyn prawdopodobieństwa $P(|\Delta x| \leq \Delta x_{dop}) \cdot P(T \geq t)$.

Wyznaczenie niezawodności dokładnościowej według (3.35) wymaga odmiennego podejścia. Potrzebna tu już jest znajomość różnych procesów losowych a priori. Problem ten częściowo może być rozwiązany przez zastosowanie metod symulacji cyfrowej w celu otrzymania procesów losowych $Y(t)$, $X(t)$ i $\xi_j(t)$ dla określonych warunków pracy.

3.3. METODA LINEARYZACJI PARAMETRYCZNO-STOCHASTYCZNEJ

Warunki poprawnej pracy (pomiaru z odpowiednią dokładnością) przyrządu można przedstawić w postaci nierówności:

$$y_0(1 - \mu_d) \leq Y \leq y_0(1 + \mu_g) \quad (3.36)$$

gdzie: y_0 - wartość nominalna parametru Y ; $\mu_d, \mu_g \in [0, 1]$.

Niezawodność dokładnościową w tym przypadku można określić wzorem:

$$R_d(t) = P \left\{ y_0(1 - \mu_d) \leq Y \leq y_0(1 + \mu_g) \right\} \quad (3.37)$$

(patrz również wzór (3.32)). $Y(t)$ jest w tym przypadku jednak inaczej zdefiniowana, niż to podaje wzór (3.32), a mianowicie:

$$Y(t) = Y [C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t)] \quad (3.38)$$

oraz $Y_0 = Y(0) = 0$.

Stąd:

$$R_d(t) = P \left\{ \left| \frac{Y(t) - Y(0)}{Y(0)} \right| \leq \mu \right\}, \quad \mu = \mu_d = \mu_g. \quad (3.39)$$

W celu wykorzystania zależności (3.39) do dalszych obliczeń zakładamy, że w pierwszym przybliżeniu zmiana parametrów C_i , ($i = \overline{1, m}$) w czasie ma postać:

$$C_i(t) = (C_{i0}^0 \pm \Delta C_{i0}^0) (1 + \xi_i \cdot t), \quad (3.40)$$

gdzie: ξ_i - zmienna losowa (losowy współczynnik zmienności parametru C_i) o gęstości f_{ξ_i} , ΔC_{i0}^0 - przyrost wartości parametru spowodowany błędnym ustawieniem parametru C_i oraz jego zmianę pod wpływem czynników destabilizujących.

W związku z tym, że zachodzi:

$$\Delta C_{i0}^0 \ll C_{i0}^0 \quad \text{oraz} \quad \xi_i \cdot t \ll 1,$$

to

$$Y(t) = Y [C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t)] = Y_0 + \sum_{i=1}^m (C_{i0}^0 \cdot \xi_i \cdot t \pm \Delta C_{i0}^0) \cdot B_i, \quad (3.41)$$

gdzie:

$$B_i = \frac{\partial Y(C_{10}^0, C_{20}^0, \dots, C_{m0}^0)}{\partial C_i} \quad (3.42)$$

Stąd otrzymamy, że:

$$P \left\{ \left| \frac{Y(t) - Y_0}{Y_0} \right| \leq \mu \right\} = P \left\{ |U| < \frac{\mu - \Delta U}{t} \right\}, \quad (3.43)$$

gdzie przez U oznaczono:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{C_{10}^0 \cdot B_1}{Y_0} \cdot \xi_1 \quad - \text{zmienna losowa} \quad (3.44)$$

oraz

$$\Delta U = \sum_{i=1}^n \left| \frac{B_1 \cdot \Delta C_{10}^0}{Y_0} \right| \quad (3.45)$$

(patrz wzór (3.41)).

Niezawodność dokładnościową można teraz wyrazić następującą zależnością:

$$R_d(t) = \frac{\mu - \Delta U}{t} \int_{-\frac{\mu - \Delta U}{t}}^{\frac{\mu - \Delta U}{t}} f(u) du \quad (3.46)$$

gdzie: $f(u)$ jest gęstością zmiennej losowej U , zależnej od zmiennej losowej ξ_1 .

ZASTOSOWANIE TEORII PROCESÓW MARKOWA DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ

A.N. Kołmogorow w swojej już klasycznej dziś pracy [63] podał po raz pierwszy założenia teoretyczne oraz metody analityczne dla rozwiązywania niektórych zagadnień teorii prawdopodobieństwa, opisywanych ciągłymi procesami Markowa. Na gruncie zastosowań praktycznych metody te zostały przeniesione m.in. przez PUGACZEWA [94], CHAZENA [18] oraz SWIESZNIKOWA [107, 108].

W pracach tych rozważono zagadnienie wyznaczania prawdopodobieństwa znajdowania się wartości określonego parametru wyjściowego układu technicznego oraz wyznaczanie gęstości chwilowej losowego ciągłego procesu Markowa (i nie tylko Markowa) w oparciu o równania kinetyczne Fokkera-Plancka-Kołmogorowa (FPK) i metodę funkcji charakterystycznej Pugaczewa. Metody te, w odróżnieniu od już rozpatrywanych w rozdziale 2, pozwalają na wyznaczenie charakterystyk procesów losowych w przypadku, gdy ich realizacje są niemonotonicznymi nieróżniczkowanymi funkcjami czasu (na przykład procesy dyfuzyjne).

Biorąc pod uwagę, że proces zmian dokładności $S(t)$ przyrządów pomiarowych może być aproksymowany niestacjonarnym ciągłym procesem Markowa dyfuzyjnego typu [25, 45] w [56, 57] uzasadniono zastosowanie teorii ciągłych procesów Markowa do wyznaczania wskaźników niezawodności metrologicznej. W [43] oraz [47] pokazano zastosowanie teorii dyskretnych procesów Markowa do wyznaczania stanów dokładności przyrządu pomiarowego.

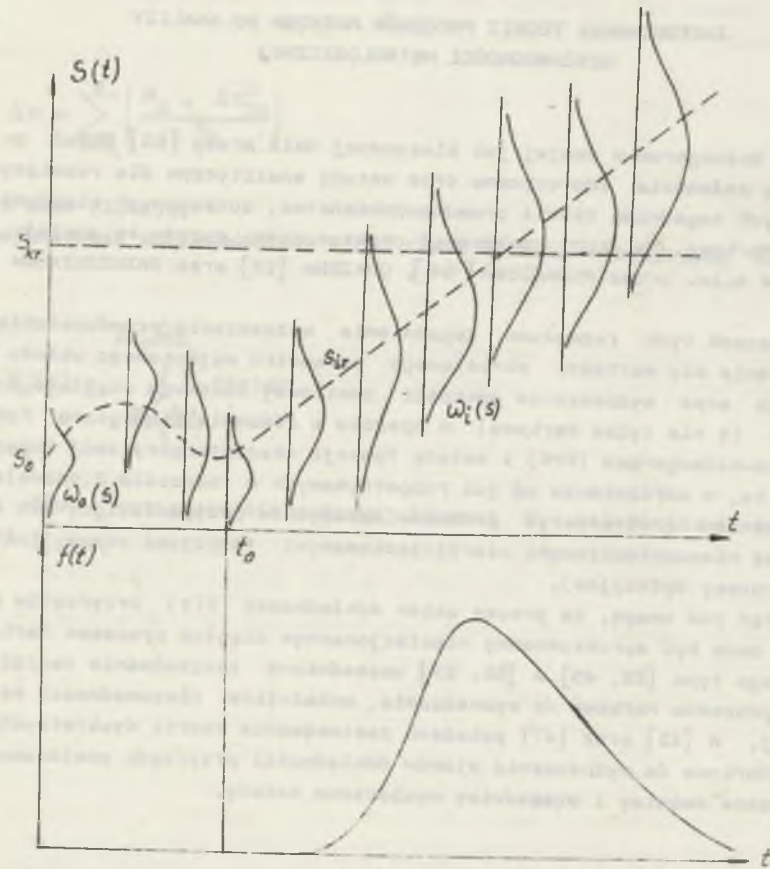
Obecnie omówimy i uzasadnimy wymienione metody.

4.1. METODA RÓWNAŃ KINETYCZNYCH FPK [57]

Podczas badania niezawodności przyrządów pomiarowych ich stan sprawności metrologicznej jest określany poprzez ustalenie wartości parametru uogólnionego (np. dokładności) w stosunku do wcześniej przyjętych ograniczeń na ten parametr. Zwykle jest to górna granica nieprzekroczenia wartości tego parametru w określonym czasie t . Model uszkodzeń w tym przypadku konstruuje się na podstawie analizy uszkodzeń dokładności w rozpatrywanym czasie pracy przyrządu. Analiza ta może dotyczyć statystycznych wyników badań reprezentatywnej próbki losowej określonych przyrządów pomiarowych, jak to zrobiono w [25]. Można również zbudować model uszkodzeń

na podstawie analizy kinetyki uogólnionego parametru badanych przyrzadzów pomiarowych.

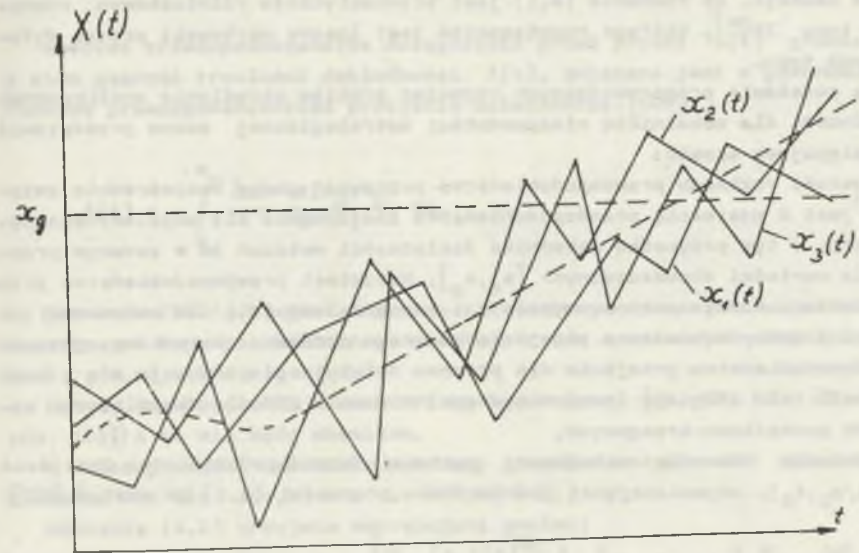
Rozpatrzmy odpowiadajacy unormowanemu reżimowi pracy wyidealizowany proces S(t), którego wartość średnia i wariancja rosną z czasem (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Proces zmian dokladności wskazan S(t)
Fig. 4.1. Process of accuracy changes S(t)

Proces ten pokazuje przefiltrowany (złagodzony) przebieg poszczególnych realizacji wyjściowego procesu X(t), którego realizacje losowo przekraczają granicę x_g. Czas trwania takiego przekroczenia w początkowej fazie procesu X(t) jest krótki (czas pojedynczego wskazania). Taki stan, rzecz jasna, nie może być uważany jako stan trwałego uszkodzenia dokładności wskazań. Można jednak zauważyć, że z czasem strumień pojedynczych wskazań z niedokładnością przewyższającą granicę górną x_g stale rośnie wskutek

przyrostu wartości oczekiwanej i wariancji błędów. Pokazano to na rys.4.2, gdzie uwidoczniono trzy przykładowe realizacje losowego procesu zmian wskazań X(t).



Rys. 4.2. Losowy proces zmian wskazań X(t)
Fig. 4.2. Random process of indications changes X(t)

Biorąc pod uwagę ten fakt oraz to, że proces S(t) może być aproksymowany procesem markowskim, można przyjąć, że kinetyka badanego procesu zmian dokładności dla bardzo ogólnego przypadku może być opisana stochastycznym różniczkowym równaniem pierwszego rzędu o postaci:

$$dS(t) = a(t)dt + b(t)d\epsilon(t). \tag{4.1}$$

a(t) i b(t) są to pewne deterministyczne funkcje, charakteryzujące zmianę wartości średniej i intensywność procesu Wienera. Funkcja losowa epsilon(t) powstała w wyniku sumowania się wielu nieskorelowanych lub słabo skorelowanych mechanoelektrycznych i fizykochemicznych procesów towarzyszących na przykład tarcia i starzeniu, przepływowi prądu oraz działaniu pól magnetycznych i elektrostatycznych. Jako uogólnione procesy, które mogą być związane z powstawaniem błędów przyrządów pomiarowych można wymienić następujące: mechaniczne procesy (deformacje) w warstwach poszczególnych elementów, zmiany na powierzchni metali powstałe wskutek działania obciążeń stałych i cyklicznych (mechanicznych, elektrycznych i cieplnych), procesy dyfuzyjne, przemieszczanie się i rozmnażania dyslokacji, procesy elektrolityczne i inne.

Różnorodność i liczba statystycznie sumujących się fluktuacji tworzących proces $\mathcal{E}(t)$ pozwala przyjąć, że ma on rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i wariancji liniowo rosnącej z czasem. Zakładamy również, że $\mathcal{E}(t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych. Z uwagi na powyższe można założyć, że równanie (4.1) jest stochastycznym różniczkowym równaniem typu $It\tilde{\omega}^x$, którego rozwiązaniem jest losowy markowski proces dyfuzyjnego typu.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań problem określenia analitycznych zależności dla wskaźników niezawodności metrologicznej można przedstawić w następujący sposób:

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa poprawnej pracy bezpośrednio związana jest z gęstością prawdopodobieństwa znajdowania się uogólnionego parametru, w tym przypadku wskaźnika dokładności wskaźnika S w zadanym przedziale wartości dopuszczalnych $[s_d, s_g]$. Natomiast prawdopodobieństwo przekroczenia zadanego poziomu wyraża się znaną zależnością dla warunkowej gęstości prawdopodobieństwa przejścia badanego procesu. Warunkową gęstość prawdopodobieństwa przejścia dla procesu dyfuzyjnego otrzymuje się z rozwiązania tzw. drugiego (prospektywnego) równania FPK dla określonych warunków początkowo-brzegowych.

Równanie FPK dla warunkowej gęstości prawdopodobieństwa przejścia $\omega(s, t/s_0, t_0)$, odpowiadającej jednorodnemu procesowi (4.1) ma postać [107]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} [a(t, s) \cdot \omega] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [b(t, s) \cdot \omega]}{\partial s^2} = 0, \quad (4.2)$$

gdzie: $a(t, s)$ - współczynnik przenoszenia, $b(t, s)$ - współczynnik dyfuzji, $\omega = \omega(s, t/s_0, t_0)$ - jest to gęstość warunkowa przejścia ze stanu $S(t_0) = s_0$ w chwili $\tau = t_0$ do stanu $S(t) = s$ w chwili $\tau = t$.

Warunki początkowo-brzegowe dla rozwiązania równania ruchu strumienia prawdopodobieństwa przejścia określone są na podstawie ograniczeń fizycznych badanego procesu. W ogólnym przypadku jako warunek początkowy można przyjąć:

$$\omega(s, t/s_0, t_0) = \omega_0(s), \quad \tau = t_0 \quad (4.3)$$

Dla gęstości $\omega_0(s)$ powinien być spełniony warunek unormowania.

Warunki brzegowe odpowiadające badanemu procesowi zmian dokładności $S(t)$ analitycznie można wyrazić w następującej postaci

$$\frac{\partial \omega(s, t/s_0, t_0)}{\partial s} = 0, \quad s = 0 \quad (4.4)$$

^{x)}Może to być również równanie Stratanowicza. W omawianym przypadku równania te mają identyczną budowę ze względu na niezależność intensywności od stanu układu [125].

oraz

$$\omega(s, t/s_0, t_0) = 0, \quad s = s_g. \quad (4.5)$$

Gęstość prawdopodobieństwa osiągnięcia przez proces $S(t)$ granicy s_g , a więc gęstość trwałości dokładności $f(t)$, związana jest z gęstością warunkową prawdopodobieństwa przejścia zależnością [107]:

$$f(t) = - \int_{s_d}^{s_g} \frac{\partial \omega(s, t/s_0, t_0)}{\partial t} ds. \quad (4.6)$$

Równanie FPK (4.2) jest liniowym różniczkowym równaniem o pochodnych cząstkowych typu parabolicznego drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach $a(t, s)$ i $b(t, s)$.

Metody rozwiązywania równań FPK są znane (por. [36, 63, 67, 91, 107-109, 122]) i tu nie będą omawiane.

W dalszej części rozdziału pokażemy przykład znajdowania rozwiązania równania FPK dla $a(t, s) = m$ i $b(t, s) = \sigma^2$.

Równanie (4.2) przyjmie następującą postać:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \frac{m \partial \omega}{\partial s} + \frac{\sigma^2 \partial^2 \omega}{2 \partial s^2}. \quad (4.7)$$

Przez podstawienie [63]^{x)}:

$$\omega = \omega^x \cdot e^{\frac{m}{\sigma^2} (s-s_0) - \frac{m^2 t}{2 \sigma^2}} \quad (4.8)$$

równanie (4.7) daje się sprowadzić do postaci równania przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{\partial \omega^x}{\partial t} - \frac{\sigma^2 \partial^2 \omega^x}{2 \partial s^2} = 0, \quad (4.9)$$

gdzie: ω^x - nowa zmienna zależna.

^{x)}Zwykle do rozwiązania tego typu równań stosuje się metodę Fouriera [107].

Rozwiązaniem szczególnym równania (4.9), jak wiadomo, jest gęstość normalna:

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp \left[-\frac{(s-s_0)^2}{2(t-t_0)} \right] \quad (4.10)$$

Przekształćmy warunki brzegowe (4.4) i (4.5) zgodnie z (4.8). Otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \omega^* &= \omega_0^*(s), \quad t = t_0, \\ \frac{\partial \omega^*}{\partial s} + \frac{m}{6^2} \cdot \omega^* &= 0, \quad s = 0, \\ \omega^* &= 0, \quad s = s_g. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Dalej dla uproszczenia obliczeń przyjmujemy $t_0 = 0$ oraz $s_0 = 1$, wówczas rozwiązanie ogólne równania (4.9) wyrazi się wzorem:

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot t} \int_0^{\infty} \left\{ \omega_0(\alpha) \left[\exp \left[-\frac{(\alpha-s)^2}{2t} \right] - \exp \left[-\frac{(\alpha-s-2)^2}{2t} \right] \right] + \right. \\ \left. + \omega_0^*(-\alpha) \left[\exp \left[-\frac{(\alpha+s)^2}{2t} \right] - \exp \left[-\frac{(\alpha+s+2)^2}{2t} \right] \right] \right\} d\alpha \quad (4.12)$$

Kładąc $\omega_0(s) = \delta(s)$ - delta - funkcja Diraca, dla $s_0 = 0$ po pewnych przekształceniach, uwzględniając (4.8) oraz znaną zależność dla funkcji zmiennych losowych w postaci:

$$\omega(s, t/s_0, t_0) = \omega^*(s, t/s_0, t_0) \cdot \left| \frac{\partial \beta(s, t)}{\partial s} \right| \quad (4.13)$$

gdzie: $\beta(s, t) = s^*$, $t^* = \beta(t)$, $\beta(\cdot)$ funkcja odwrotna do (4.8), otrzymamy:

$$\omega(s, t/0, 0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \left\{ \exp \left[-\frac{(s-s_0)^2}{2t} \right] - \exp \left[-\frac{(s-2)^2}{2t} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2m}{6^2} \right\} - \frac{2m}{6^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{mt-s}{6\sqrt{t}} \right) - \frac{2m}{6^2} \exp \left[\frac{2m}{6^2} (s-1) \right] \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{mt+s+2}{6\sqrt{t}} \right) \quad (4.14)$$

gdzie: $\int_0^{\infty} (\cdot)$ - funkcja Laplace'a.

Gęstość trwałości dokładnościowej $f(t)$ nietrudno już obliczyć ze wzoru (4.6) (całkując dla uproszczenia w granicach od 0 do 1):

$$f(t) = \frac{1+mt}{26 \cdot t \sqrt{2\pi} \cdot t} \exp \left[-\frac{(1-mt)^2}{26^2 \cdot t} \right] - \frac{m^2}{26^2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1-mt}{6\sqrt{t}} \right) \quad (4.15)$$

Jeżeli uwzględnimy tylko górną granicę dla procesu $S(t)$, otrzymamy:

$$f(t) = \frac{1}{6 \cdot t \sqrt{2\pi} \cdot t} \exp \left[-\frac{(1-mt)^2}{26^2 \cdot t} \right] \quad (4.16)$$

Dla jednorodnego procesu Markowa z niemonotonicznymi realizacjami prawdopodobieństwo niewyjścia uogólnionego parametru z przedziału dopuszczalnego, a więc prawdopodobieństwo poprawnej pracy, otrzymamy ze wzoru (4.15):

$$R_d(t) = P(S < s) = P(T \geq t) = \int_0^1 \left(\frac{1-mt}{6\sqrt{t}} \right) - e^{-\frac{2m^2}{6^2}} \cdot \int_0^1 \left(-\frac{1-mt}{6\sqrt{t}} \right) \quad (4.17)$$

Drugi człon we wzorze (4.17) zwykle można pominąć, wówczas:

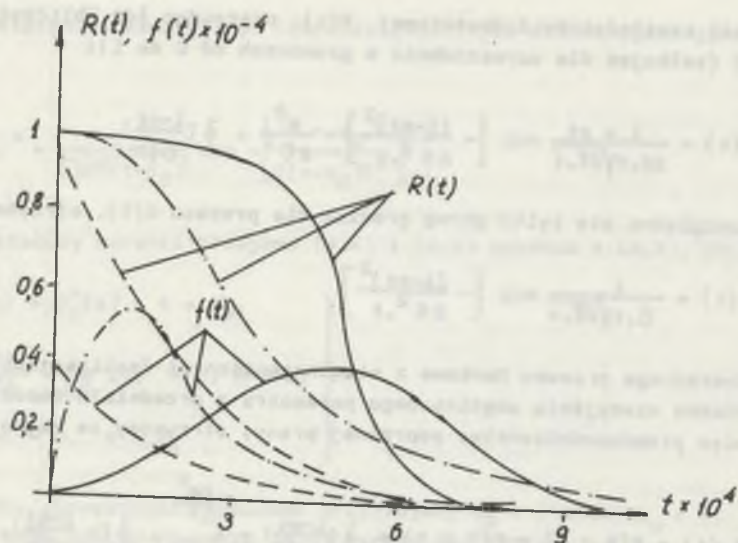
$$R_d(t) \approx \int_0^1 \left(\frac{1-mt}{6\sqrt{t}} \right) \quad (4.18)$$

W szczególnym przypadku, jak widać, otrzymaliśmy rozkład dyfuzyjny. Na rysunku 4.3 pokazany został jakościowy charakter funkcji $R_d(t)$ oraz $f(t)$ dla rozkładu dyfuzyjnego w porównaniu z rozkładem normalnym i wykładniczym.

Nie wspomnieliśmy tu nic o jednowymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(s/t)$ losowego procesu $S(t)$. Można ją jednak łatwo wyznaczyć ze wzoru:

$$\varphi(s/t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(s) \cdot \omega(s, t/s_0, t_0) ds \quad (4.19)$$

Podsumowując rozważania tego punktu, można powiedzieć, że jedną z metod pozwalających na wyznaczanie wskaźników niezawodności metrologicznej może być metoda równań kinetycznych FPK w zastosowaniu do analizy markowskich procesów dyfuzyjnego typu, będących modelami procesów zmian dokładności wskazań. Niezbędne są przy tym opisane w pracy założenia i uproszczenia, dotyczące procesu $\mathcal{E}(t)$.



Rys. 4.3. Wykres gęstości $f(t)$ i prawdopodobieństwa $R_d(t)$ dla rozkładu normalnego (—), wykładniczego (---), dyfuzyjnego (-.-.-)

Fig. 4.3. Graph of density $f(t)$ and probability $R_d(t)$ for normal (—), exponential (---), diffusion (-.-.-) distributions

Stosowanie równań FPK dla rozwiązywania podobnego problemu, gdy wymiarowość $n > 1$, napotyka na znaczne trudności, gdyż dla równań FPK w postaci:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (a_i \cdot \omega)}{\partial s_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 (b_{ij} \cdot \omega)}{\partial s_i \cdot \partial s_j} = 0 \quad (4.20)$$

do dziś nie otrzymano rozwiązania ogólnego. Można jednak w tym przypadku korzystać z metod numerycznych.

4.2. METODA RÓWNAŃ CAŁKOWO-RÓZNICZKOWYCH PUGACZEWA

W dalszym ciągu będziemy rozważali losowy proces zmian dokładności $S(t)$. Jednowymiarowa funkcja charakterystyczna tego procesu określana jest zależnością:

$$g(\psi/\tau) = E[e^{i\psi S(\tau)}], \quad (4.21)$$

gdzie: E - operator wartości oczekiwanej, natomiast iloczyn $\psi \cdot S(t)$ należy rozumieć jako iloczyn skalarny.

W ogólnym przypadku ψ i $S(t)$ mogą być wektorami. Wówczas:

$$\psi \cdot S(\tau) = \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot s_i(\tau). \quad (4.22)$$

Wprowadźmy układ równań różniczkowo-całkowych otrzymany w pracy Pugaczewa [94] dla jednowymiarowej funkcji charakterystycznej procesu losowego:

$$\frac{\partial g(\psi/\tau)}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\psi s} \cdot F(\psi/\tau, s) \cdot \varphi(s/\tau) ds \quad (4.23)$$

oraz

$$\varphi(s/\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqs} \cdot g(q/\tau) dq. \quad (4.24)$$

gdzie:

$$F(\psi/\tau, s) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[e^{i\psi \Delta S(t)/s}] - 1}{\Delta t}, \quad (4.25)$$

$$\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Na funkcję $F(\cdot)$ nie nakłada się w zasadzie żadnych ograniczeń. Zwykle jednak przyjmuje się, że jest ona wielomianem lub określoną funkcją składowych wektora $S(t)$.

Wykorzystując równania (4.23) i (4.24) otrzymamy równania różniczkowo-całkowe dla jednowymiarowych charakterystyk procesu $S(t)$:

$$\frac{\partial g(\psi/\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\psi(q-s)} \cdot F(\psi/\tau, s) \cdot g(q/\tau) dq \quad (4.26)$$

dla jednowymiarowych funkcji charakterystycznych oraz

$$\frac{\partial \varphi(s/\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\psi(q-s)} \cdot F(\psi/\tau, q) \cdot \varphi(q/\tau) dq \quad (4.27)$$

dla jednowymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa procesu $S(t)$.

Jeżeli funkcja $\mathcal{F}(\psi/t, s)$ jest przedstawiona za pomocą wielomianu lub funkcji o składowych wektora $1, \psi$, to wzór (4.27) może być zapisany w formie operatorowej:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(s/t)}{\partial t} = \mathcal{F}^x \left(\frac{\partial}{\partial s}; t, s \right) \cdot \varphi(s/t). \quad (4.28)$$

Można pokazać [94], że szczególnym przypadkiem wzoru (4.28) jest równanie perspektywne FPK w postaci^{x)}:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(s/t)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} [a_i(t, s) \cdot \varphi(s/t)] + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} [b_{ij}(t, s) \cdot \varphi(s/t)]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Stochastyczne równanie różniczkowe opisujące losowy proces zmian dokładności wskazań w tym przypadku może mieć postać:

$$dS(t) = \psi [t, S(t)] dt + \mathcal{Z}(t) dt, \quad (4.30)$$

gdzie: $\psi [t, S(t)]$ - określona funkcja zmiennych t i $S(t)$, natomiast $\mathcal{Z}(t)$ - losowa funkcja zakłóceń.

Rozwiązaniem tego równania jest losowy proces Markowa dyfuzyjnego typu. Całkując równanie (4.30) w granicach $[t, t + \Delta t]$ przy założeniu, że $S(t) = s$, otrzymamy:

$$\Delta S(t) = \psi(t, s) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{Z}(\tau) d\tau + o(\Delta t), \quad (4.31)$$

gdzie: $o(\Delta t)$ - mała rzędu wyższego.

Wykorzystując teraz wzór (4.25) oraz (4.31) można dla konkretnego przypadku obliczyć funkcję $\mathcal{F}(\psi/t, s)$. Podstawiając dalej tę funkcję do wzorów (4.26) i (4.27) po pewnych przekształceniach i założeniach co do charakteru procesu $\mathcal{Z}(t)$ oraz $\psi(t, s)$ można zagadnienie wyznaczania jednowymiarowych charakterystyk procesu $S(t)$ sprowadzić do omówionego w punkcie 4.1 rozwiązania równania FPK o postaci (4.29).

Podsumowując obie pokrewne metody analizy procesu $S(t)$ można zauważyć, że pełny stochastyczny opis procesu zmian dokładności może być otrzymany za pomocą równań kinetycznych FPK w postaci:

^{x)} Porównaj ze wzorem (4.20).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial s}, \underline{a} \cdot \varphi \right) + \left(\frac{\partial}{\partial s}, \left(\frac{\partial}{\partial s}, \underline{b} \cdot \varphi \right) \right) \quad (4.32)$$

lub równań różniczkowo-całkowych Pugaczewa odnośnie do funkcji charakterystycznej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} = & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\psi-s) \cdot s} [i(\psi, \underline{a}) + \\ & - (\psi, \underline{b} \cdot \psi)] g(s/t) ds. \end{aligned} \quad (4.33)$$

gdzie w obu wzorach w nawiasach pokazano mnożenie skalarne wektorów; \underline{a} - wektor współczynników przenoszenia, \underline{b} - macierz współczynników dyfuzji, ψ, s - wektorowe argumenty funkcji charakterystycznej.

W celu pełnego zapisu równań (4.32) i (4.33) niezbędna jest znajomość współczynników \underline{a} i \underline{b} . Bezpośrednie jednak korzystanie z równań dla funkcji charakterystycznej i jej przekształcenia Fouriera dla jednowymiarowej gęstości jest uciążliwe. Opracowano szereg metod upraszczających obliczenia. Metodę taką można znaleźć np. w [60].

4.3. METODA STANÓW DOKŁADNOŚCI WSKAZAŃ [48]

Zewnętrzny przejaw pracy przyrządu jest określone wskazanie analogowe lub cyfrowe przy pomiarze określonej wartości wielkości mierzonej. Przy wielokrotnym pomiarze tej samej wartości mierzonej otrzymamy na ogół różne wskazania. Wskazania te będą charakteryzowały określoną niedokładność pomiaru. W czasie pracy przyrządu niedokładności wskazań mogą ulegać zmianie. Zmiany te będą zależały od procesów fizycznych zachodzących w przyrządzie wskutek współpracy elementów składowych oraz związanych z tym zakłóceń wewnętrznych, takich jak: zużycie i starzenie oraz zakłóceń zewnętrznych.

Uogólniając, można powiedzieć, że charakter procesów zależy od właściwości metrologicznych i niezawodnościowych.

Z powyższego widać, że informacja o procesach zachodzących w przyrządzie w określonym czasie zawarta jest we wskazaniach przyrządu, a ściślej - niedokładnościach towarzyszących tym wskazaniom. W ten sposób, opisując zachowanie się niedokładności wskazań w czasie, pośrednio opisujemy fizyczny proces zmian zachodzących w rzeczywistym układzie.

Można założyć, że w procesie pomiaru - przy każdym kolejnym pomiarze tej samej wartości - możliwe jest takie wskazanie, które różni się od poprzedniego o pewną stałą wartość δ lub jest takie samo, tzn. z dokładnością do δ nie różni się od poprzedniego wskazania.

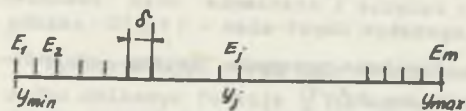
Opisany proces, jak wiadomo, związany jest z określoną rozdzielczością lub inaczej - ziarnistością wskazań. Praktycznie rzecz biorąc, mając przyrząd wzorcowy o rozdzielczości równej δ , można wykazać zmiany stanów (zmiany wskazań), badanego przyrządu przy kolejnych powtórzeniach nim pomiaru stałej wartości mierzonej.

Rozważmy obecnie przyrząd, w którym ciągle zachodzi zmiana stanów. Zmiany te obserwujemy na przyrządzie wzorcowym w postaci wskazań. Należy tu podkreślić, że zmiana stanów przyrządu badanego zachodzi ciągle w czasie bez względu na to, czy dokonujemy aktualnie pomiaru czy też nie. Pomiar służy jedynie do stwierdzenia zaistnienia zmiany stanu^{x)}.

Zmiana stanów przyrządu badanego odbywa się przypadkowo i zależy od procesów fizycznych zachodzących w nim oraz od zewnętrznych warunków pracy.

Podczas dokonywania pomiaru następuje przekształcenie wielkości mierzonej X na wielkość wyjściową Y , przy czym przyrząd traci część energii, która zużywa się na pokonanie oporów ruchu mechanicznego i elektromagnetycznego. Opory ruchu implikują zakłócenia, stąd przy pomiarze stałej wartości wielkości X wskazania przyrządu będą obciążone błędem losowym. Jak wykazuje praktyka, rozkład tych błędów nie zawsze jest normalny i nie zawsze jest symetryczny. Niesymetrię rozkładu objaśnia się niejednakową czułością dy/dx przyrządu przy pomiarze różnych wartości $x \in X$ z zakresu pomiarowego. Oznacza to, że każdorazowo podczas kolejnego pomiaru ustali się takie wskazanie, które spowoduje mniejszą stratę energii. Mniej energii przyrząd zużyje przy wskazaniach w przypadku większej czułości.

Powiedzieliśmy, że przy pomiarze stałej wartości wielkości X w przyrządzie zachodzi ciągle zmiana stanów (wskazań). Jest oczywiste, że możliwa liczba stanów, różniących się o błąd rozdzielczości, jest ograniczona zakresem pomiarowym przyrządu. Niech dla całego zakresu pomiarowego jest $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ różnych stanów, gdzie: E - zbiór możliwych stanów - wskazań, $j = \overline{1, m}$. Każdemu stanowi E_j odpowiada określone wskazanie przyrządu wzorcowego (różniące się o δ). Numerację stanów przyrządu badanego pokazuje rys. 4.4, tamże oznaczono odpowiednie wskazania przyrządu wzorcowego.



Rys. 4.4. Numeracja stanów dokładności przyrządu badanego

Fig. 4.4. Numeration of accuracy states for the considered instrument

Poszczególne wskazania przyrządu wzorcowego różnią się o K krotność wartości δ , czyli:

$$|y_{j+1} - y_j| \geq K \cdot \delta, \quad K = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Rzecz jasna, wskazanie y_{\min} odpowiada najmniejszej wartości wielkości mierzonej, zaś wskazanie y_{\max}

^{x)} Zakładamy tu, że sam pomiar nie wpływa na zmianę właściwości metrologicznych przyrządu badanego i wzorcowego.

odpowiada największej wartości wielkości mierzonej, którą można mierzyć na danym przyrządzie badanym. Stany E_1 i E_m są w związku z tym stanami skrajnymi (granicznymi) dla rozpatrywanego przyrządu badanego.

Założmy dalej, że dla całego zakresu pomiarowego przyrządu badanego czułość monotonicznie rośnie ze wzrostem wartości wielkości X . W związku z tym przy wielokrotnym pomiarze określonej wartości x , częstość wskazań o wartości większej niż wskazanie odpowiadające rzeczywistej wartości mierzonej będzie większa niż częstość wskazań o wartości mniejszej od rzeczywistej wartości mierzonej. Można to jeszcze inaczej ująć. Przypuśćmy, że dokonujemy pomiaru stałej wartości $X = x_{0j}$. Wskazanie rzeczywiste jest y_{0j} (wskazanie przyrządu wzorcowego). Wskutek procesów fizycznych, zachodzących w przyrządzie badanym przy następnym pomiarze tej samej wartości x_{0j} , wskazanie przyrządu wzorcowego będzie na ogół inne. Po dużej liczbie powtórzeń pomiarów wartości x_{0j} otrzymamy rozkład wskazań przyrządu wzorcowego. Rozkład tych wskazań będzie zależał od rzeczywistej wartości mierzonej $x_{0j} \in X$ i właściwości przyrządu badanego. A więc przy przyjętym założeniu, że czułość dy/dx przyrządu badanego jest rosnącą funkcją x , prawdopodobieństwo zdarzenia $Y > y_{0j}$ jest większe od prawdopodobieństwa zdarzenia $Y < y_{0j}$.

Niech teraz dla danego przyrządu pomiarowego jest:

$$\left. \begin{aligned} P(Y > y_j) &= P(E_{j+1}/E_j) = P_{jj+1} = \alpha \\ P(Y < y_j) &= P(E_{j-1}/E_j) = P_{jj-1} = \gamma \\ P(Y = y_j) &= P(E_j/E_j) = P_{jj} = \beta \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Z założenia wynika, że $\alpha > \gamma$ oraz $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Dla uproszczenia założymy, że dla każdej wartości x_{0j} , ($j = \overline{1, m}$) postać rozkładu wskazań jest taka sama. Wtedy α, β, γ nie zależą od j i są stałe w całym zakresie pomiarowym przyrządu badanego. Biorąc pod uwagę powyższe założenia, otrzymamy w ten sposób, że stany tego przyrządu $\{E_j\}$, ($j = \overline{1, m}$) tworzą proces Markowa z czasem dyskretnym t_j , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, gdzie n jest liczbą powtórzeń pomiarów stałej wartości $x_{0j} \in X$.

Oznaczmy warunkowe prawdopodobieństwo przejścia ze stanu E_j do E_k , podczas jednego pomiaru (w jednym kroku), przez $P_{jk}(1) = P_{jk}$, natomiast prawdopodobieństwo tego samego przejścia, ale w n krokach - przez $P_{jk}(n)$. Łańcuch Markowa jest jednoznacznie określony jego stochastyczną macierzą przejść w jednym kroku $\mathcal{P} = \{P_{jk}(1)\}$ i rozkładem stanu początkowego $P_k(0) = \{P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0m}\}$.

Dla rozpatrywanego przez nas przyrządu macierz przejść w jednym kroku będzie miała postać:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & \beta + \gamma \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Pierwszy wiersz macierzy (4.36) pokazuje, że dokonując pomiaru $X = x_{\max}$ z prawdopodobieństwem γ jest możliwe przejście do stanu E_2 lub pozostawienie w stanie E_1 z prawdopodobieństwem $\alpha + \beta$. Prawdopodobieństwo $P_{11} = \alpha + \beta$ określane jest następująco:

Z prawdopodobieństwem β , przy pomiarze $X = x_{\max}$ przyrząd znajduje się w stanie E_1 . Z tego stanu układ mógłby oczywiście przejść z prawdopodobieństwem α do stanu E_{1+1} , brak jednak takiego stanu w przyrządzie powoduje, że prawdopodobieństwo pozostania w stanie E_1 zwiększa się o α .

Dla pozostałych prawdopodobieństw przejść elementy pierwszej wiersza macierzy (4.36) $P_{1k} = 0$ dla $k = \overline{3, m}$, co wynika z założenia. W drugim i kolejnych $m-1$ wierszach macierzy znajdują się warunkowe prawdopodobieństwa przejść przy pomiarze $X = x_{0j}$, $j = 2, 3, \dots, m$ lub, inaczej mówiąc, stanami wyjściowymi są stany E_2, E_3, \dots, E_m . Jeżeli wyjściowym stanem będzie stan E_m , a więc dokonujemy pomiaru $X = x_{\min}$, to analogicznie do sytuacji przy stanie wyjściowym E_1 otrzymamy $P_{mm} = \beta + \gamma$ i $P_{m, m-1} = \alpha$.

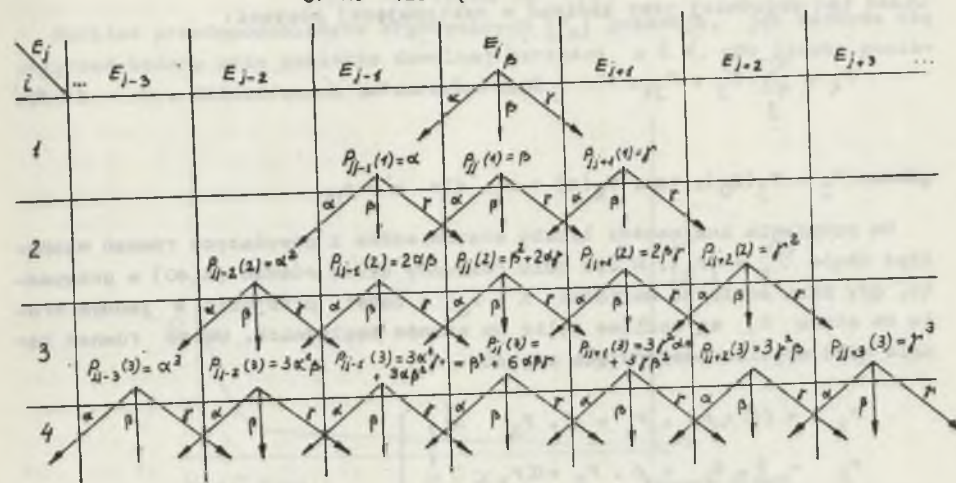
Przy powtarzających się pomiarach (krokach) stały wartości x_{0j} powstaje możliwość przejścia układu z pewnego stanu E_j w dowolny inny stan z m możliwych. Zauważmy, że istnieje określone prawdopodobieństwo przejścia ze stanu E_j do odległego od E_j stanu w jednym kroku, nie mniej jest ono bardzo małe i dopiero po większej liczbie kroków jest możliwe takie przejście.

Na rys. 4.5 pokazano, w jakich stanach i z jakimi prawdopodobieństwami może znaleźć się przyrząd po n pomiarach, jeżeli wyjściowym był stan E_j . Prawdopodobieństwa te przy danych α, β, γ można obliczyć z zależności:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^n = \sum_{0 \leq i+j \leq n} C_n(i, j) \alpha^i \cdot \beta^j \cdot \gamma^{n-i-j} \quad (4.37)$$

gdzie: $C_n(i, j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$ są współczynnikami w trinominalnym rozwinięciu.

STANY PRZYRZĄDU BADANEGO



Rys. 4.5. Schemat obliczeń prawdopodobieństw $P_{jk}(n)$
Fig. 4.5. Scheme of probability calculations ($P_{jk}(n)$)

Po każdym pomiarze $\sum_j P_{jk}(n) = 1$, zatem ze wzrostem liczby pomiarów i przy nieograniczonej liczbie stanów układu, prawdopodobieństwa $P_{jk}(n) \rightarrow 0$ [24].

W naszym przypadku liczba stanów przyrządu badanego jest skończona i wynosi m , a więc dla dowolnych j i n oraz przynajmniej jednego k zachodzi następująca równość:

$$P_{jk}(n) = \frac{1}{m} \quad (4.38)$$

Stąd nie wszystkie prawdopodobieństwa będą dążyły do zera.

W związku z powyższym rozpatrywany przez nas proces zmian wskazań przyrządu można opisywać nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa, z niecyklicznymi powrotnymi i niezerowymi stanami [24]. Łańcuch taki ma właściwości ergodyczne. Jest więc prawdziwa zależność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}(n) = P_k, \quad \sum_k P_k = 1, \quad (4.39)$$

gdzie: P_k - ergodyczne prawdopodobieństwo zajęć poszczególnych stanów.

Zbiór $\mathcal{P}_k = \{P_k\}$ możemy określić z następujących równań:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_k \cdot \Pi = \mathcal{P}_k \\ \sum_k P_k = 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

Układ ten dogodniej jest zapisać w następującej postaci:

$$P_k = \sum_j P_j \cdot P_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.41)$$

gdzie: $P_j = P_j(n_0)$, tzn. $P_k(n) = P_k$ dla $n \geq n_0$.

Na podstawie znajomości liczby stanów można z powyższych równań wyznaczyć zbiór $\{P_k\}$. W tym celu rozważmy układ równań (4.40) w przypadku, gdy przy pomiarze wartości $X = x_{0j} = \text{const}$, przejścia w jednym kroku ze stanu E_j są możliwe tylko do stanów sąsiednich. Układ równań będzie miał wówczas następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= (\alpha + \beta) \cdot P_1 + \alpha \cdot P_2 \\ P_2 &= \gamma \cdot P_1 + \beta \cdot P_2 + \alpha P_3 \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{m-1} &= \gamma \cdot P_{m-2} + \beta \cdot P_{m-1} + \alpha \cdot P_m \\ P_m &= \gamma \cdot P_{m-1} + (\beta + \gamma) \cdot P_m \end{aligned} \right\}$$

$$\sum_{j=1}^m P_j = 1$$

oraz

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (4.43)$$

Z układu równań (4.42), uwzględniając (4.43), otrzymujemy zależność rekurencyjną:

$$P_m = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot P_{m-1}. \quad (4.44)$$

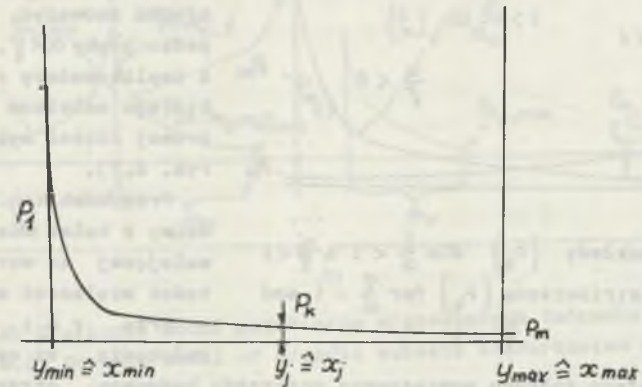
Po nieskomplikowanych przekształceniach otrzymamy ostatecznie:

$$P_m = \frac{r^{m-1}(1-r)}{1-r^m}, \quad r = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (4.45)$$

a w przypadku znanego zbioru $\{P_k\}$ liczbę stanów układu otrzymamy z (4.45):

$$m = \left[\frac{\log \frac{P_m}{\frac{1}{r} - 1 + \frac{P_m}{r^m}}}{\log r} \right] \quad (4.46)$$

Rozkład prawdopodobieństw ergodycznych $\{P_k\}$ pokazuje, jak zachowa się przyrząd badany przy pomiarze dowolnej wartości $x \in X$, gdy liczba pomiarów $n \rightarrow \infty$. Zilustrowano to na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Rozkład prawdopodobieństw $\{P_k\}$ w funkcji rosnącej liczby stanów
Fig. 4.6. Probability distribution $\{P_k\}$ in the function of increasing states

Założmy, że przeprowadzamy pomiar wartości $x_{0j} = x_{\min} \neq 0$ i niech liczba pomiarów $n \rightarrow \infty$. Wtedy, jak widać z rys. 4.6, z określonym prawdopodobieństwem P_m zajdzie zdarzenie $Y = y_{\max}$, tzn. w miarę zwiększania się n prawdopodobieństwo $Y > y_{\min}$ rośnie i przy $n = 1/P_m$ teoretycznie możemy otrzymać wskazanie y_{\max} przy pomiarze x_{\min} . Z kolei założmy, że dokonujemy pomiaru wartości $x_{0j} = x_{\max}$. W tym przypadku przy wzrastającej liczbie pomiarów będzie rosło prawdopodobieństwo zdarzenia $Y < y_{\max}$ i przy $n = 1/P_m$ otrzymamy wskazanie y_{\min} .

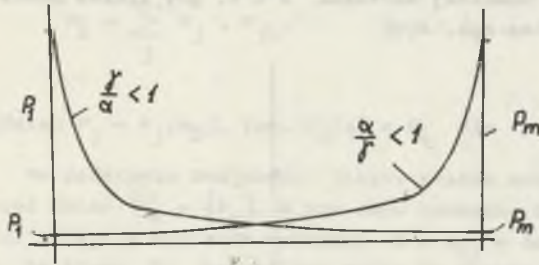
Przy pomiarze dowolnej wartości $x_{\min} < x_{0j} < x_{\max}$ otrzymamy następujące zależności:

a) po $n = \frac{1}{P_k}$ pomiarach możemy otrzymać wskazanie y_{\max} ,

b) po $n = \frac{P_k - P_m}{P_k \cdot P_m}$ pomiarach - wskazanie y_{\min} .

Z powyższych różnych sytuacji, w jakich mogą znajdować się wskazania przyrządu pomiarowego, można wyciągnąć następujący wniosek: przy pomiarze dowolnej stałej wartości $x_{0j} \in [x_{\min}, x_{\max}]$ rozkład prawdopodobieństw ergodycznych przy $n \rightarrow \infty$ nie zależy od wartości mierzonej i jest stały. Widać, że wartość średnia wskazań \bar{x}_{0j} przy pomiarze x_{0j} zmienia się w funkcji n , a więc w funkcji czasu. Ustalając więc na przyrządzie badawym wartość $x_{0j} = \text{const}$ i odczytując wskazania przyrządu wzorcowego po

$n \rightarrow \infty$ odczytalibyśmy wskazania średnie \bar{y}_j , odpowiadające średniej wartości określonej rozkładem prawdopodobieństw $\{P_k\}$.



Rys. 4.7. Rozkłady $\{P_k\}$ dla $\frac{\gamma}{\alpha} < 1$ i $\frac{\alpha}{\gamma} < 1$
 Fig. 4.7. Distributions $\{P_k\}$ for $\frac{\gamma}{\alpha} < 1$ and $\frac{\alpha}{\gamma} < 1$

Powodem tego jest założenie, że $r = \gamma/\alpha < 1$. Nie trudno zauważyć, że w przypadku gdyby $\alpha < \gamma$, to $\alpha/\gamma < 1$ i implikowałoby rozkład, dla którego maksimum byłoby w prawej części wykresu (patrz rys. 4.7).

Przypadek ten byłby prawdziwy z kolei dla czułości malejącej ze wzrostem wartości wielkości mierzonej.

Przy $r = 1$, a więc przy założeniu, że czułość jest

stała dla całego zakresu pomiarowego przyrządu badanego, otrzymalibyśmy, że dla danej liczby stanów m , $P_k = 0$ ($k = \overline{1, m}$) przy $n \rightarrow \infty$.

Można więc dla pewnych przedziałów zakresu pomiarowego wyróżnić tendencje, przy których $r < 1$ dla $\gamma/\alpha < 1$ lub $r > 1$ dla $\alpha/\gamma < 1$. Wtedy sytuacja opisana wyżej obrazowałaby zachowanie się wskazań przyrządu dla poszczególnych przedziałów (przy pomiarze wartości z tych przedziałów). Rozpatrzmy to bliżej.

Niech $m_1 < m$ możliwych stanów wskazań ma $r_1 = \gamma_1/\alpha_1 < 1$, $m_2 < m$ - ma $r_2 = \gamma_2/\alpha_2$ itd. przypadkowo rozmieszczonych wzdłuż zakresu pomiarowego i niech tych przedziałów będzie l . Oczywiście $m = \sum_{\gamma=1}^l m_\gamma$, ($\gamma = \overline{1, l}$).

Wtedy przy pomiarze stałej wartości $x_{j\gamma}$ z przedziału o długości m_γ mieliśmyby γ -tą klasę - podzbiór ergodyczny łańcucha Markowa - z rozkładem ergodycznym prawdopodobieństw $\{P_k\}_\gamma$. Graficzny model takiego łańcucha przedstawiono na rys. 4.8, oznaczając symbolami:

$P_{m_\gamma, \min}$ - minimalne prawdopodobieństwo ergodyczne dla przedziału m_γ ,

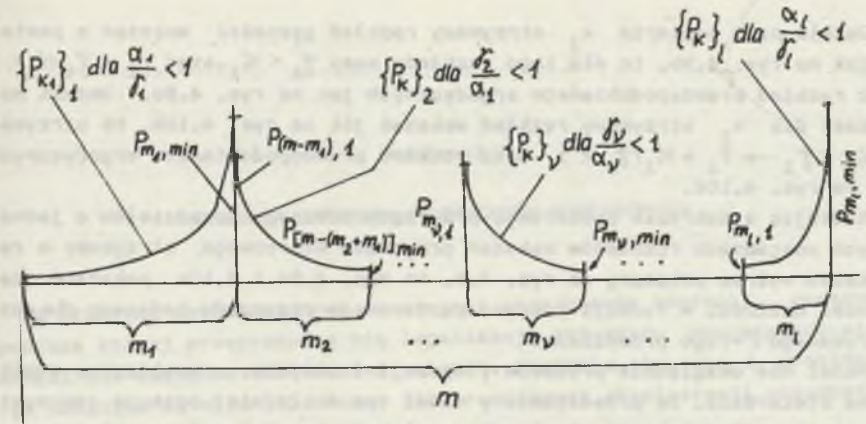
$P_{m_\gamma, 1}$ - maksymalne prawdopodobieństwo ergodyczne dla przedziału m_γ ,

$m_{\gamma, m} = m - \sum_{\gamma} m_\gamma + m_\gamma$ - lewa granica przedziału m_γ ,

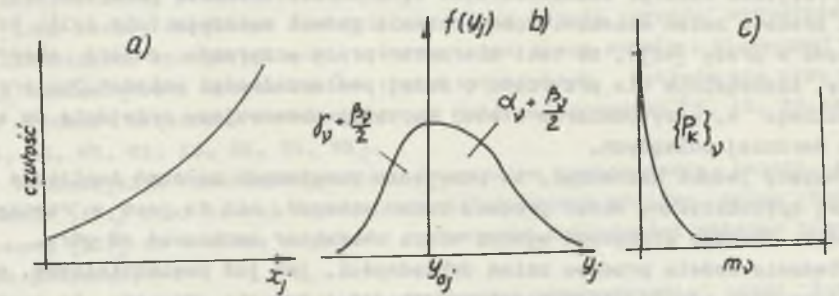
$m_{\gamma, 1} = m - \sum_{\gamma} m_\gamma$ - prawa granica przedziału m_γ .

Przytoczone rozważanie nie zmniejsza wartości metody dla ciągłej postaci funkcji czułości, gdyż może być zastosowana do każdego podzbioru $\{m_\gamma\}$ charakteryzującego się malejącą lub rosnącą funkcją czułości.

Wyznaczanie w praktyce przedziałów o długości m_γ może odbywać się na podstawie n pomiarów przeprowadzonych dla każdej wartości x_j i stwierdzenia, jaką postać ma rozkład wskazań Y_j przyrządu wzorcowego.

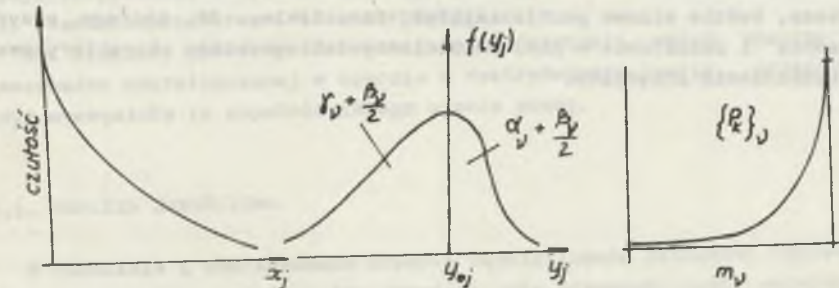


Rys. 4.8. Graficzny model podzbiorów ergodycznych łańcucha Markowa
 Fig. 4.8. Graphic model of ergodic subsets of Markovian chain



Rys. 4.9. Funkcja gęstości wskazań i rozkład prawdopodobieństw ergodycznych dla rosnącej funkcji czułości

Fig. 4.9. Density function of indications and ergodic probability distribution for increasing sensitivity function



Rys. 4.10. Funkcja gęstości wskazań i rozkład prawdopodobieństw ergodycznych dla malejącej funkcji czułości

Fig. 4.10. Indications density function and ergodic probabilities distribution for decreasing sensitivity function

Jeżeli przy pomiarze x_j otrzymamy rozkład gęstości wskazań o postaci jak na rys. 4.9b, to dla tego rozkładu mamy $\gamma_1 < \alpha_1$, stąd $r_1 = \gamma_1/\alpha_1 < 1$ oraz rozkład prawdopodobieństw ergodycznych jak na rys. 4.9c. Jeżeli natomiast dla x_j otrzymamy rozkład wskazań jak na rys. 4.10b, to otrzymamy $\alpha_1 < \gamma_1 \rightarrow r_1 = \alpha_1/\gamma_1 < 1$ oraz rozkład prawdopodobieństw ergodycznych jak na rys. 4.10c.

Szukając w zakresie pomiarowym przyrządu badanego przedziałów o jednokowych postaciach rozkładów wskazań przyrządu wzorcowego otrzymamy w rezultacie wykres pokazany na rys. 4.8. Na rys. 4.9a i 4.10a pokazano zależność czułości w funkcji zakresu pomiarowego przyrządu badanego dla rozpatrywanego γ -tego przedziału.

Model nie uwzględnia procesów adaptacji i zużycia. Analizując wyniki można stwierdzić, że przedstawiony model tym dokładniej opisuje rzeczywisty proces zmian wskazań, im liczba możliwych stanów m jest mniejsza, co wynika bezpośrednio z założenia o możliwości przejść w jednym kroku tylko do stanów sąsiednich.

Przyjęcie takiego założenia może wydawać się znacznie upraszczające model procesu zmian wskazań. Doświadczenia jednak wskazują (nie tylko to opisane w pracy [43]), że taki charakter pracy przyrządu często obserwujemy, szczególnie dla przyrządu o dużej powtarzalności wskazań. Dopiero dla znacznego n , przy pomiarze stałej wartości obserwujemy przejścia do stanów bardziej odległych.

Należy jednak zaznaczyć, że przyjęcie powyższych założeń implikuje bardziej optymistyczny model procesu zmian wskazań, niż to jest w rzeczywistości. Dlatego otrzymane wyniki noszą charakter oszacowań od góry.

Badania modelu procesu zmian dokładności, jak już powiedzieliśmy, prowadzono przy pominięciu procesów adaptacji i zużycia. Procesy te powodują, że łańcuch Markowa jest niestacjonarny. Można sądzić, że przy uwzględnieniu tylko procesu zużycia zależności na prawdopodobieństwa ergodyczne będą pokazywały, jak przyrząd zachowa się po dość dużej liczbie pomiarów.

Stan przyrządu, dla którego ergodyczne prawdopodobieństwo będzie największe, będzie stanem pochłaniającym, tzn. takim, do którego przyrząd "wpadnie" i pozostanie w nim. Zbistnienie takiego stanu charakteryzowałoby uszkodzenie przyrządu.

Rozdział 5

KONTROLA OKRESOWA PRZYRZĄDÓW POMIAROWYCH

W praktyce metrologicznej znane jest zagadnienie kontroli okresowej, podczas której przeprowadza się legalizację przyrządu pomiarowego między innymi pod względem dokładności wskazań. Kontrola okresowa i problemy z tym związane są niezwykle ważne dla prawidłowej eksploatacji urządzeń pomiarowych.

W rozdziale 3 przy dyskusowaniu metod probabilistyczno-deterministycznych wyprowadzono zależność na wartość oczekiwaną $E(\Delta T)$ dla średniego czasu poprawnej pracy przyrządu pomiarowego.

Inne metody dotyczące kontroli okresowej bazują przede wszystkim na zależnościach statystycznych, wykorzystując znane modele z klasycznej teorii niezawodności oparte na λ -charakterystykach. Zakłada się przy tym, że strumień uszkodzeń metrologicznych jest poissonowski [5, 15, 23, 34, 64, 66, 68, 69, 81, 85, 86, 89, 93].

W niniejszym rozdziale pokażemy oryginalne zastosowanie teorii odnowienia [101] oraz teorii "przewyższenia" zadanego poziomu przez funkcję losową [107] do analizy zagadnień odnawiania dokładności wskazań przyrządów pomiarowych.

Należy w tym miejscu zauważyć, że teoria przewyższania przez funkcję losową zadanego stałego poziomu lub określonej zdeterminowanej funkcji znajduje obecnie coraz szersze zastosowanie. Znaczące wyniki w tej dziedzinie otrzymał B. Skalmierski [100] (zob. również literaturę do tej pozycji), wychodząc z dystrybucyjnego (nie teorio-wnościowego) ujęcia teorii prawdopodobieństwa i klas abstrakcji.

Nie będziemy jednak w niniejszej pracy rozwijać metod analizy niezawodności metrologicznej w oparciu o dystrybucyjną teorię przekroczeń, gdyż wymagałoby to zupełnie innego ujęcia pracy.

5.1. ANALIZA JAKOŚCIOWA

W rozdziale 1 zdefiniowano średnią częstotliwość uszkodzeń dokładności $a(t)$. Praktycznie $a(t)$ można określić jako stosunek liczby uszkodzonych pod względem dokładności urządzeń pomiarowych w jednostce czasu do ich całkowitej liczby N pod warunkiem, że każdy uszkodzony przyrząd jest zastępowany nowym. Stąd liczbę uszkodzeń w czasie dt można zapisać w postaci:

$$N \cdot a(t) \cdot dt, \tag{5.1}$$

gdzie $a(t) \cdot dt = P(dt)$ jest prawdopodobieństwem uszkodzenia.

Uszkodzenie, rzecz jasna, może wystąpić tylko wskutek jakiegoś zakłócenia. Stąd prawdopodobieństwo uszkodzenia będzie zależało od prawdopodobieństwa wystąpienia takiego zakłócenia, którego wartość przewyższy określony poziom, np. x_g . Prawdopodobieństwo przewyższenia x_g przez funkcję losową $X(t)$ w ciągu czasu dt można wyrazić następującą zależnością [107]:

$$P[x_g - v(t)dt < X(t) < x_g] = dt \int_0^{\infty} f(x_g, v/t) v \cdot dv, \tag{5.2}$$

gdzie: v - prędkość funkcji losowej $X(t)$, $v(t)dt = x(dt)$, $f(x_g, v/t)$ - dwuwymiarowa gęstość funkcji losowej $X(t)$ i jej prędkości dla chwili t .

Skoro prawdopodobieństwo wystąpienia przewyższenia określa prawdopodobieństwo uszkodzenia, to oba prawdopodobieństwa muszą być sobie równe.

A więc:

$$P(dt) = P[x_g - v(t)dt < X(t) < x_g]. \tag{5.3}$$

Stąd biorąc pod uwagę (5.2), otrzymamy:

$$a(t) = \int_0^{\infty} f(x_g, v/t) v \cdot dv. \tag{5.4}$$

Powyższa zależność jest pożyteczna przy doświadczalnym wyznaczaniu częstości uszkodzeń przyrządu pomiarowego.

Prawa strona (5.4) określa średnią liczbę przewyższeń L_{x_g} poziomu x_g w jednostce czasu, stąd:

$$a(t) = L_{x_g}$$

Wyprowadziliśmy zależność dla funkcji $a(t)$, rozpatrując uszkodzenie jako skutek działania zakłócenia, a jako model analityczny wykorzystaliśmy jedną z metod funkcji losowych, traktując o tzw. zagadnieniu "o przewyższeniu zadanego poziomu przez funkcję losową" [107].

Dla tak określonej funkcji $a(t)$ niezawodność metrologiczną (dokładnościową) można wyznaczyć z następującej zależności:

$$R(t) = 1 - \frac{\int_0^T \int_{x_g}^{\infty} \varphi(x/\tau) dx d\tau}{T}. \tag{5.6}$$

Dla stacjonarnego procesu $X(t)$ zależność (5.6) uprości się do postaci:

$$R(t) = P(x) = 1 - \int_{x_g}^{\infty} \varphi(x) dx. \tag{5.7}$$

Funkcję $a(t)$ można również określić jako intensywność odnowienia dokładności. Wówczas:

$$\int_0^t a(\tau) d\tau = A(t) \tag{5.8}$$

będzie średnią liczbą odnowień dokładności. Oczywiście:

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = a(\tau). \tag{5.9}$$

Przy tym uważać będziemy, że odnowienie dokładności przywraca w pełni określone właściwości metrologiczne narzędzia pomiarowego. Dla takiego przypadku można więc założyć, że zastępujemy uszkodzony przyrząd nowym.

W celu określenia zależności między funkcjami $a(t)$ i $f(t)$ wyznaczmy liczbę odnowień (zamian) dokonanych w czasie $[t, t + \Delta t]$. Według definicji funkcji $a(t)$ liczba ta z jednej strony wynosi $a(t) \Delta t$, z drugiej zaś strony przyrząd, który zaczął pracę w chwili $t = 0$, średnio w przedziale $[t, t + \Delta t]$ uszkodzi się $f(t) \cdot \Delta t$ razy. Oprócz uszkodzenia się wymienionego przyrządu, w tym samym przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$ mogą również uszkadzać się przyrządy, które rozpoczęły pracę w przedziale $[\tau, \tau + \Delta \tau]$, $\tau < t$. Liczba takich przyrządów wyniesie $a(\tau) \cdot \Delta \tau$. Spośród tych przyrządów średnio $a(t) \cdot \Delta t \cdot f(t - \tau) \cdot \Delta \tau$ przyrządów uszkodzi się w przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$. Stąd:

$$a(t) \cdot \Delta t = f(t) \cdot \Delta t + \Delta t \int_0^t a(\tau) f(t - \tau) \Delta \tau. \tag{5.10}$$

gdzie sumowanie w tym przypadku obejmuje wszystkie przedziały $[\tau, \tau + \Delta \tau]$ od 0 do t . W granicy otrzymamy równanie całkowe Volterry II rodzaju z ję-drem splotowym:

$$a(t) = f(t) + \int_0^t a(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad (5.11)$$

które nazywa się równaniem odnowienia lub gęstością odnowienia.

Można pokazać, że słuszna jest następująca zależność:

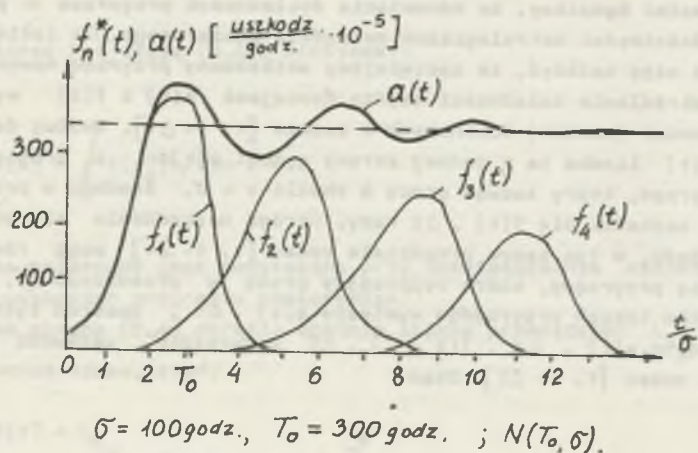
$$a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(t), \quad (5.12)$$

gdzie:

$$f_n^*(t) = \int_0^t f_{n-1}^*(t-\tau) \cdot f(\tau)d\tau \quad (5.13)$$

oznacza n-krotny spłot gęstości $f(t)$; $f_1(t)$ jest gęstością czasu do pierwszego uszkodzenia, $f_2^*(t)$ - drugiego itd.

Stąd znając gęstość $f_1(t)$ do pierwszego uszkodzenia i obliczając według (5.13) gęstość $f_n^*(t)$, można przez zwykłe dodawanie współrzędnych tych gęstości otrzymać funkcję gęstości odnowy $a(t)^x$. Pokazano to na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Przykładowy wykres funkcji $a(t)$ dla normalnej gęstości $f_1(t)$
 Fig. 5.1. Exemplary graph of the function $a(t)$ for the normal density $f_1(t)$

^{x)}Tu i dalej rozpatrywany jest "czysty" proces odnowienia.

Wyznaczenie gęstości $f_n^*(t)$ według (5.13) nie zawsze jest możliwe i zwykle nastęrcza dużo pracy obliczeniowej. Najprościej przedstawia się to dla rozkładu normalnego lewostronnie uciętego (gdyż sam rozkład normalny nie może być modelem gęstości zmiennej losowej dodatniej, w tym przypadku czasu). Gęstość do pierwszego uszkodzenia $f_1(t)$ ma więc postać:

$$f_1(t) = \frac{C_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2}\right],$$

a n-krotny spłot:

$$f_n^*(t) = \frac{C_n}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \exp\left[-\frac{(t-nT_0)^2}{2\sigma^2 \cdot n}\right],$$

gdzie: C_n - stała rozkładu normalnego uciętego wyznaczana z warunku

$$\int_0^{\infty} f_n^*(t)dt = 1,$$

$$C_n = \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{nT_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^{-1},$$

gdzie: $\Phi(\cdot)$ - stabilaryzowana funkcja Laplace'a.

Dla innych gęstości $f(t)$ otrzymanie funkcji $a(t)$ jest bardzo uciążliwe i praktycznie w takich przypadkach korzystamy z metod numerycznych [49].

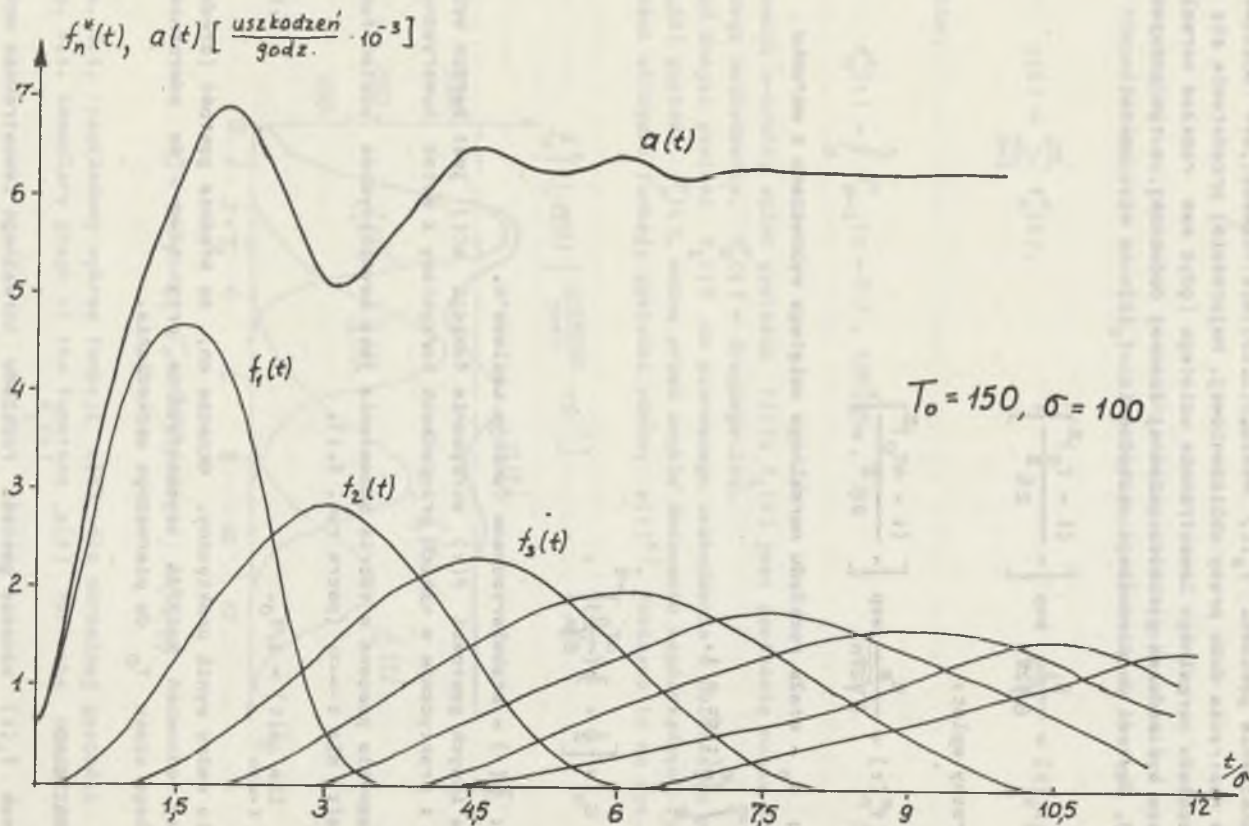
Niezwykle pomocna w teorii odnowienia jest asymptotyczna postać funkcji $a(t)$ dla $t \rightarrow \infty$ (patrz rys. 5.1).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 1/T_0. \quad (5.14)$$

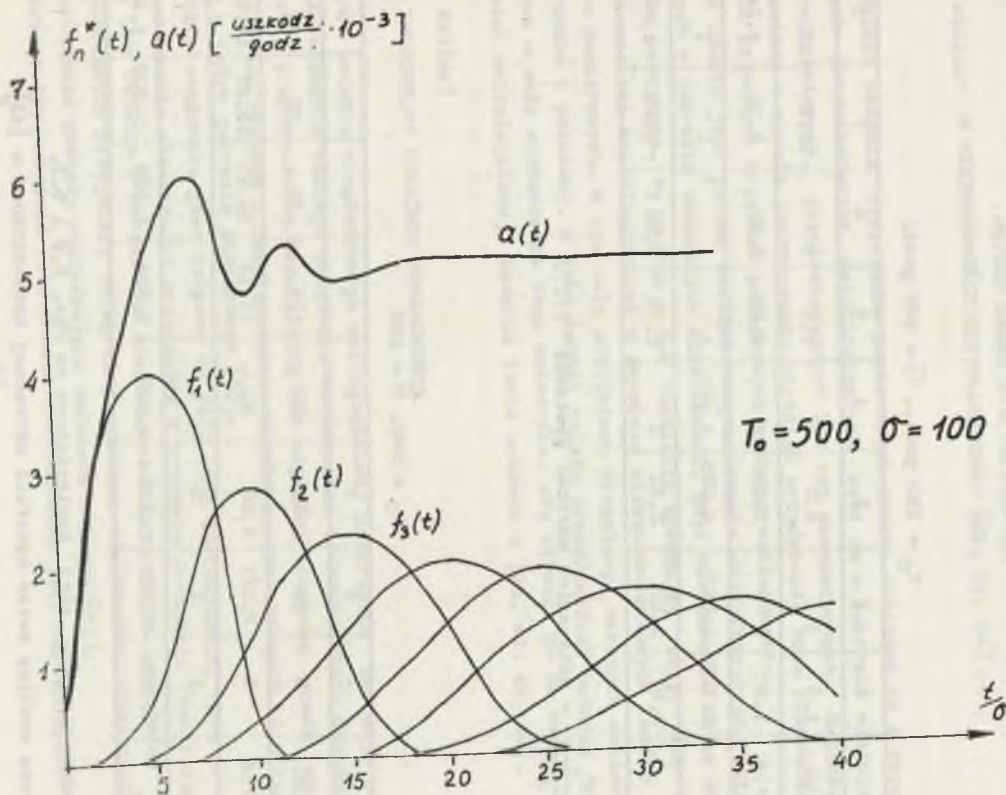
Jest to ważny wynik praktyczny. Oznacza on, że średnia gęstość (średnia liczba) odnowień zmierza asymptotycznie przy $t \rightarrow \infty$ do odwrotności średniego czasu T_0 do pierwszego uszkodzenia.

5.2. PRZYKŁAD

Niech $f_1(t)$ oznacza gęstość rozkładu normalnego lewostronnie uciętego dla $T_0/\sigma = 1,5; 2; 5; 10$. Korzystając z wcześniej wyprowadzonych zależności dla tego rozkładu można otrzymać funkcję gęstości odnowy w postaci:



Rys. 5.2. Wykres funkcji $a(t)$ dla $T_0/\sigma = 1,5$
 Fig. 5.2. Graph of the function $a(t)$ for $T_0/\sigma = 1,5$



Rys. 5.3. wykres funkcji $a(t)$ dla $T_0/\sigma = 5$
 Fig. 5.3. Graph of the function $a(t)$ for $T_0/\sigma = 5$

$$a(t) = \sum_{n=1}^8 \frac{c_n}{6\sqrt{2\pi n}} \cdot \exp\left[-\frac{(t - nT_0)^2}{26^2 \cdot n}\right]$$

Gotowe dane do obliczeń funkcji $a(t)$ pokazane są w tablicach 5.1 i 5.2.

Tablica 5.1

$T_0 = 150$ godz., $\sigma = 100$ godz.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(T_0 \cdot n)/6$	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12
$(T_0 \cdot n)/6$	1,5	2	2,59	3	3,25	3,67	3,96	4,24
c_n	1,172	1,017	1,005	1,001	1	1	1	1
f_m	4,67	2,87	2,31	2	1,78	1,63	1,51	1,40

$$f_m = \frac{c_n}{6\sqrt{2\pi n}} - \text{maksymalna wartość gęstości } f(t).$$

Tablica 5.2

$T_0 = 500$, $\sigma = 100$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(T_0 \cdot n)/6$	5	10	15	20	25	30	35	40
$(T_0 \cdot n)/6$	5	7,071	8,66	10	11,18	12,25	13,23	14,14
c_n	1	1	1	1	1	1	1	1
f_m	3,989	2,821	2,303	1,995	1,784	1,628	1,508	1,41

Odpowiednie wykresy $a(t)$ zamieszczono na rys. 5.2 i 5.3.

Szerszą analizę metod kontroli okresowej zamieszczono w [43].

Rozdział 6

METODY BADAŃ STATYSTYCZNYCH W NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ [43, 51, 54]

Wezwanie badania przyrządów pomiarowych zawsze związane są z określeniem ich charakterystyk metrologicznych bądź to w zakresie właściwości niezawodnościowych, eksploatacyjnych lub też ekonomicznych. Badania takie powinny w sposób jednoznaczny określać przydatność nowo produkowanych lub już używanych urządzeń pomiarowych w danym zastosowaniu.

Nie zawsze jest jednak możliwe rozgraniczenie charakterystyk metrologicznych w zakresie omawianych właściwości, gdyż właściwości te są ściśle ze sobą powiązane. My jednak w tym rozdziale spróbujemy zająć się tylko właściwościami metrologicznymi w aspekcie niezawodnościowych badań przyrządów pomiarowych. W tym celu przyjmiemy określony wskaźnik dokładności przyrządów i pokażemy, w jaki sposób należy przeprowadzać badania statystyczne w celu wyznaczenia tego wskaźnika, aby używać go do badań niezawodności metrologicznej. Badania takie opisano w [25, 43, 45, 50].

6.1. INTEGRALNY WSKAŹNIK DOKŁADNOŚCI

Przy badaniu niezawodności metrologicznej przyrządów istnieje potrzeba zastosowania takiego wskaźnika dokładności wskazań, który dawałby najbardziej prawdopodobną bezwzględną lub względną liczbową ocenę wartości dokładności wskazań z uwzględnieniem błędów systematycznych i przypadkowych w całym zakresie pomiarowym [51].

Wybór wskaźnika jest zależny od celu jego zastosowania. Może on służyć do porównania właściwości przyrządów w procesie produkcji (kontrola jakości) lub badania i określenia niezawodności przyrządów. Do badań niezawodnościowych przyjmiemy integralny wskaźnik dokładności. Właściwości tego wskaźnika zostały wyczerpująco omówione w pracy [51].

Integralny wskaźnik dokładności zdefiniowany jest następująco:

$$Q = \int_a^b \alpha(x_0) E\left\{ [x(x_0) - x_0]^2 \right\} dx_0 \quad (6.1)$$

gdzie:

$$E\left\{[X(x_0) - x_0]^2\right\} = \int_a^b [X(x_0) - x_0]^2 dF[X(x_0)] = m_2(x_0)$$

jest momentem rzędu drugiego zmiennej losowej wskazań $X(x_0)$ względem stałej wartości mierzonej x_0 , a $F[X(x_0)]$ jest dystrybuantą zmiennej losowej $X(x_0)$.

We wzorze (6.1):

$$\int_a^b \alpha(x_0) dx_0 = 1. \quad (6.2)$$

Wskaźnik Q jest całką w przedziale $[a, b]$ z sumy kwadratu błędu przypadkowego i kwadratu błędu systematycznego z uwzględnieniem wagi $\alpha(x_0)$.

Oszacowanie wskaźnika ma postać:

$$Q^* = \sum_{j=1}^k \alpha(x_j) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\Delta x_i(x_j)]^2 \cdot \Delta x_j. \quad (6.3)$$

gdzie: k - jest liczbą wartości mierzonych w zakresie $[a, b]$ przyrządu badanego, n - liczbą powtórzeń stałych sygnałów pomiarowych x_j , $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, n}$.

Jeżeli zbadano m -liczbową próbkę losową prostą przyrządów i dla każdego przyrządu wyznaczono względem wzoru (6.3) oszacowanie Q_1^* , ($l = \overline{1, m}$), to za oszacowanie wskaźnika Q rozpatrywanego typu przyrządów pomiarowych można przyjąć wartość średnią z próbki:

$$Q^* = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m Q_l. \quad (6.4)$$

Wyznaczenie wartości liczbowej integralnego wskaźnika dokładności może odbywać się za pomocą komputerowego systemu pomiarowego. System taki został opisany w [40].

6.2. PARAMETRY PRÓBKOWE BADAŃ STATYSTYCZNYCH

Wskaźnik dokładności ma charakter probabilistyczny, etap wyznaczenia jego oszacowania przeprowadza się w warunkach wielokrotnego powtarzania

sygnałów pomiarowych dla określonej próbki badanych przyrządów pomiarowych.

W takich badaniach, które dalej będziemy nazywali badaniami statystycznymi, ważne jest określenie przed badaniem parametrów próbkowych. Przez parametry próbkowe w badaniach statystycznych przyrządów pomiarowych będziemy rozumieli:

- 1) liczbę przyrządów pomiarowych w badanej próbce,
- 2) liczbę punktów pomiarowych w zakresie pomiarowym przyrządu badanego,
- 3) liczbę powtórzeń pomiarów stałej wartości wielkości mierzonej dla każdego punktu pomiarowego.

Przy badaniach statystycznych przyrządów w celu oceny wskaźnika dokładności zakładamy, że:

- 1) badanie będzie polegało na porównywaniu wskazań poszczególnych przyrządów badanych z próbki losowej prostej ze wskazaniem odpowiednio dobranego przyrządu wzorcowego,
- 2) rozkład błędów wskazań przyrządów badanych i przyrządu wzorcowego jest normalny o niekoniecznie zerowej wartości oczekiwanej (tzn. błąd systematyczny wskazań może być różny od zera),
- 3) wskazania poszczególnego przyrządu badanego i wzorcowego są niezależne,
- 4) błąd przyrządu wzorcowego jest znany i niepomijalny.

Przyjmujemy następujące ważniejsze oznaczenia:

- N - liczebność próbki losowej prostej badanych przyrządów pomiarowych,
- k - liczba punktów pomiarowych w zakresie pomiarowym badanego przyrządu,
- n - liczba powtórzeń pomiarów tej samej wartości wielkości mierzonej w danym punkcie pomiarowym,
- β - poziom ufności, na którym chcemy wyznaczyć przedział ufności dla nieznannej wartości wskaźnika dokładności,
- u - błąd w % wyznaczenia wartości określonego wskaźnika dokładności przy ustalonej liczebności N próbki przyrządów badanych i ustalonym poziomie ufności,
- ξ - błąd w % wyznaczenia wartości określonego wskaźnika dokładności przy ustalonej liczbie n powtórzeń pomiarów wartości wielkości mierzonej i ustalonym poziomie ufności,
- x_{1j} - wskazanie l -tego przyrządu badanego w j -tym punkcie przy l -tym pomiarze (z ienna losowa)

$$(l = \overline{1, N}), (j = \overline{1, k}), (i = \overline{1, n}).$$

Y_{1ji} - wskazanie przyrządu wzorcowego przy badaniu l-tego przyrządu badanego w jego j-tym punkcie pomiarowym przy i-tym pomiarze (zmienna losowa)

$$l = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, k}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$Z_{1ji} = X_{1ji} - Y_{1ji} \text{ - zmienna losowa,}$$

$$V(X_{1j}) = \sigma_{X_{1j}}^2, \quad V(Y_{1j}) = \sigma_{Y_{1j}}^2, \quad V(Z_{1j}) = \sigma_{Z_{1j}}^2 \text{ - wariancje odpowiednich zmiennych losowych,}$$

$$m_{X_{1j}}, \quad m_{Y_{1j}} \quad \text{ i } \quad m_{Z_{1j}} \text{ - oczekiwane wartości odpowiednich zmiennych losowych,}$$

$$\left. \begin{aligned} m_{2, X_{1j}} &= \sigma_{Y_{1j}}^2 + m_{X_{1j}}^2 \\ m_{2, Y_{1j}} &= \sigma_{Y_{1j}}^2 + m_{Y_{1j}}^2 \end{aligned} \right\} \text{ - momenty rzędu drugiego odpowiednich zmiennych losowych}$$

$$\sigma_{Z_{1j}}^2 = \sigma_{Y_{1j}}^2 + \sigma_{X_{1j}}^2$$

$$m_{Z_{1j}} = m_{X_{1j}} - m_{Y_{1j}}$$

$$Q_{Y,1j} = \sigma_{X_{1j}}^2 + \sigma_{Y_{1j}}^2 + (m_{X_{1j}} - m_{Y_{1j}})^2 = \sigma_{Z_{1j}}^2 + m_{Z_{1j}}^2 \text{ - punktowy wskaźnik}$$

dokładności wskazań w j-tym punkcie pomiarowym l-tego przyrządu badanego względem wskazań przyrządu wzorcowego, uwzględniający błędy systematyczne i przypadkowe l-tego przyrządu badanego i przyrządu wzorcowego dla j-tego punktu pomiarowego,

$Q_{Y,j}$ - punktowy wskaźnik dokładności wskazań przyrządów pomiarowych (dla j-tego punktu pomiarowego).

Jest jasne, że punktowy wskaźnik dokładności wskazań $Q_{Y,1j}$ l-tego przyrządu pomiarowego w j-tym punkcie pomiarowym zależy od właściwości metrologicznych tego przyrządu i wartości wielkości mierzonej odpowiadającej temu punktowi. Stąd dla każdego punktu pomiarowego danego badanego przyrządu będzie on na ogół inny.

Można, przyjmując taki właśnie punktowy wskaźnik dokładności wskazań przyrządów pomiarowych, zbudować na jego podstawie kompleksowy wskaźnik, który mógłby służyć do oceny dokładności wskazań jednego przyrządu lub określonej zbiorowości przyrządów w całym zakresie pomiarowym. W niniejszej jednak pracy ograniczymy się do wyznaczenia tych dwóch parametrów próbkowych, a mianowicie N i n, przyjmując, że liczba punktów pomiarowych k została wcześniej wyznaczona. Wobec tego dalsze rozważania będą dotyczyły tylko określonego j-tego punktu pomiarowego przyrządów i wskaźnika $Q_{Y,j}$.

6.3. METODA WYZNACZANIA LICZNOŚCI PRÓBKII PRZYRZĄDÓW POMIAROWYCH

Wskaźnik $Q_{Y,j}$ jest wskaźnikiem dokładności wskazań przy pomiarze w j-tym punkcie pomiarowym ($j = \overline{1, k}$).

Aby ocenić wartość liczbową tego wskaźnika, należy zbadać N-liczbową losową próbkę prostą rozpatrywanych przyrządów pomiarowych. Badanie będzie polegało na porównywaniu wskazań poszczególnego l-tego przyrządu badanego ($l = \overline{1, N}$) w j-tym punkcie pomiarowym ze wskazaniem przyrządu wzorcowego. Można wykazać, że jeżeli zbadano N-liczbową próbkę przyrządów pomiarowych w ten sposób, że w j-tym punkcie pomiarowym poszczególnego l-tego przyrządu dokonano n-niezależnych pomiarów stałej wartości wielkości mierzonej (na ogół jest ona różna dla każdego l-tego przyrządu w jego j-tym punkcie), to oszacowanie wskaźnika $Q_{Y,j}$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$Q_{Y,j}^* = \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^n (x_{1l} - y_{1l})^2 \tag{6.5}$$

We wzorze tym x_{1l} i y_{1l} jest odpowiednio i-tym wskazaniem l-tego badanego przyrządu i przyrządu wzorcowego przy pomiarze wielkości mierzonej odpowiadającej j-temu punktowi l-tego przyrządu badanego. Otrzymana ocena $Q_{Y,j}^*$ ($j = \overline{1, k}$) jest zaobserwowaną realizacją statystyki:

$$\hat{Q}_{Y,j} = \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^n (x_{1l} - y_{1l})^2 \tag{6.6}$$

będącej estymatorem wskaźnika $Q_{Y,j}$, gdy znany jest błąd systematyczny i przypadkowy przyrządu wzorcowego.

Statystyka $\hat{Q}_{Y,j}$ jest dla każdego naturalnego N i każdego $n \geq 2$ estymatorem zgodnym i asymptotycznie nieobciążonym wskaźnika dokładności $Q_{Y,j}$.

Wartość oczekiwana tej statystyki wynosi:

$$E(\hat{Q}_{Y,j}) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N E(\hat{Q}_{Y,l_j}) \quad (6.7)$$

oraz wariancja:

$$V(\hat{Q}_{Y,j}) = \frac{1}{N^2} \sum_{l=1}^N V(\hat{Q}_{Y,l_j}). \quad (6.8)$$

We wzorach tych:

$$E(\hat{Q}_{Y,l_j}) = \mu_{Z_{l_j}} \quad (6.9)$$

$$V(\hat{Q}_{Y,l_j}) = \sigma_{Z_{l_j}}^2 \quad (6.10)$$

Zauważmy, że na mocy centralnego twierdzenia granicznego Lapunowa i centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Fellera statystyka $\hat{Q}_{Y,j}$ ma w przybliżeniu rozkład normalny, gdyż jest ona średnią arytmetyczną z N niezależnych statystyk $\hat{Q}_{Y,1_j}, \hat{Q}_{Y,2_j}, \dots, \hat{Q}_{Y,l_j}, \dots, \hat{Q}_{Y,N_j}$.

Wykorzystując przybliżenie rozkładu dokładnego statystyki $\hat{Q}_{Y,j}$ rozkładem normalnym $N[E(\hat{Q}_{Y,j}), V(\hat{Q}_{Y,j})]$ oraz biorąc pod uwagę, że statystyka ta jest średnią arytmetyczną z N niezależnych statystyk \hat{Q}_{Y,l_j} ($l = \overline{1, N}$), można wykazać, że zmienna losowa:

$$\frac{\hat{Q}_{Y,j} - E(\hat{Q}_{Y,j})}{\sqrt{V(\hat{Q}_{Y,j})}} \cdot \sqrt{N} \quad (6.11)$$

ma w przybliżeniu rozkład standaryzowany normalny $N(0,1)$. W przypadku nieznannej wariancji $V(\hat{Q}_{Y,j})$ statystyki $\hat{Q}_{Y,j}$, ale przy znanym estymatorze $\hat{V}^*(\hat{Q}_{Y,j})$ tej wariancji i znanej wartości oczekiwanej $E(\hat{Q}_{Y,j})$ zmienna losowa

$$\frac{\hat{Q}_{Y,j} - E(\hat{Q}_{Y,j})}{\sqrt{\hat{V}^*(\hat{Q}_{Y,j})}} \cdot \sqrt{N-1} \quad (6.12)$$

ma w przybliżeniu centralny rozkład t-Studenta

Na podstawie powyższych uwag i wzoru (6.12) dla każdego poziomu ufności ($0 < \beta < 1$) spełniona jest równość:

$$P(\hat{Q}_{Y,j} \leq E(\hat{Q}_{Y,j}) + \frac{\sqrt{V^*(\hat{Q}_{Y,j})}}{\sqrt{N-1}} \cdot t_{N-1, \beta}) = \beta. \quad (6.13)$$

przy czym $t_{N-1, \beta}$ jest kwantylem rzędu β statystyki t-Studenta o $N-1$ stopniach swobody, a $V^*(\hat{Q}_{Y,j})$ jest wartością $\hat{V}^*(\hat{Q}_{Y,j})$.

Uwzględniając, że centralny rozkład t-Studenta jest symetryczny względem wartości zero, a zatem dla każdego $0 < \beta < 1$ i każdego naturalnego N jest $t_{N-1, \beta} = -t_{N-1, 1-\beta}$, otrzymamy wzory na granice dwustronnego przedziału ufności dla nieznannej wartości $Q_{Y,j}$ w postaci:

$$Q_{Y,jdd} = Q_{Y,j}^* + \frac{\sqrt{V^*(\hat{Q}_{Y,j})}}{\sqrt{N-1}} \cdot t_{N-1, \frac{1+\beta}{2}} \quad (6.14)$$

dla granicy dolnej dwustronnego przedziału ufności oraz

$$Q_{Y,jdg} = Q_{Y,j}^* + \frac{\sqrt{V^*(\hat{Q}_{Y,j})}}{\sqrt{N-1}} \cdot t_{N-1, \frac{1-\beta}{2}} \quad (6.15)$$

dla granicy górnej dwustronnego przedziału ufności.

Korzystając ze wzorów na granice dwustronnego przedziału ufności dla nieznannej wartości $Q_{Y,j}$ wymaganie co do dokładności oceny $Q_{Y,j}$ można zapisać w postaci długości dwustronnego przedziału ufności:

$$\Delta Q_{Y,j} = Q_{Y,jdg} - Q_{Y,jdd} \leq \frac{\sqrt{V^*(\hat{Q}_{Y,j})}}{\sqrt{N-1}} \cdot (t_{N-1, \frac{1-\beta}{2}} - t_{N-1, \frac{1+\beta}{2}}). \quad (6.16)$$

Wyznaczanie z tej zależności N przy zadanej dokładności bezwzględnej $\Delta Q_{Y,j}$ i nieznanym oszacowaniu $V^*(\hat{Q}_{Y,j})$ nie jest możliwe. Czasem jednak eksperymentator nie wymaga dokładności wyznaczenia wartości nieznanego parametru w postaci dwustronnego przedziału ufności na ten parametr, lecz poprzestaje na wymaganiu, by stosunek długości tego przedziału do nieznanego empirycznego odchylenia średniego tego parametru był nie większy od pewnej, z góry zadanej, dodatniej liczby u .

W przypadku takiego wymagania możemy więc żądać, by

$$\frac{\Delta Q_{Y,j}}{\sqrt{V^*(\hat{Q}_{Y,j})}} \leq u, \quad u > 0. \quad (6.17)$$

W tym przypadku u . 100% będzie dokładnością względną oceny nieznanego wskaźnika dokładności $Q_{Y,j}$ dla j-tego punktu pomiarowego. Biorąc pod uwagę nierówność (6.16) oraz to, że dwustronny przedział ufności dla nieznanego wartości $Q_{Y,j}$ jest symetryczny względem zera, otrzymamy wzór na wyznaczenie odpowiedniej liczności N próbki losowej prostej przyrządów pomiarowych danego typu:

$$N \geq \left(\frac{t_{N-1, (1-\beta)/2} - t_{N-1, (1+\beta)/2}}{2u} \right)^2 + 1. \quad (6.18)$$

Wykorzystując (6.18) i tablice kwantyli rozkładu t-Studenta, gdy dane są u i β , otrzymamy zawsze tylko jedną taką liczbę N_0 , że $N \geq N_0$ spełnia warunek (6.18). Tablica 6.1 podaje wyznaczone wartości N_0 dla ustalonych u . 100% i β .

Tablica 6.1

β u. 100%	0,80	0,90	0,95	0,99
100	3	5	8	11
50	9	13	18	30
40	14	19	28	46
30	25	32	46	78
20	56	70	109	200
10	206	312	420	510

6.4. METODA WYZNACZANIA LICZBY POMIARÓW W PUNKCIE POMIAROWYM

Liczba n pomiarów w dowolnym j-tym punkcie pomiarowym badanych przyrządów zależy od rozkładu wskazań X_{1ji} przyrządu badanego i Y_{1ji} przyrządu wzorcowego. Wobec powyższego, dla określenia odpowiedniej liczby n pomiarów będziemy korzystali za statystyki $\hat{Q}_{Y,1j}$ w postaci:

$$\hat{Q}_{Y,1j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{1ji} - Y_{1ji})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{1ji}^2 \quad (6.19)$$

Można wykazać [51], że statystyka $\frac{1}{\sigma_{Z_1}^2} \cdot n \cdot \hat{Q}_{Y,1j}$ ma rozkład niecentralny χ^2 o n stopniach swobody i parametrze niecentralności:

$$\tau_{1j} = \frac{1}{\sigma_{Z_1j}} \sum_{i=1}^n m_{Z_1j}^2.$$

Zmienna losowa Z_{1j} ma dla każdego $i = \overline{1, n}$ rozkład normalny $N(m_{Z_1j}, \sigma_{Z_1j})$.

Wobec czego zmienna losowa:

$$\eta_{1ji} = \frac{Z_{1ji} - m_{Z_1j}}{\sigma_{Z_1j}} \quad (6.20)$$

ma rozkład standaryzowany normalny $N(0,1)$. Stąd więc statystykę $\hat{Q}_{Y,1j}$ można zapisać w następujący sposób:

$$\hat{Q}_{Y,1j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{Z_1j} \cdot \eta_{1ji} + m_{Z_1j})^2. \quad (6.21)$$

Podnosząc do kwadratu i uwzględniając, że zmienna losowa $\sum_{i=1}^n \eta_{1ji}^2$ ma rozkład centralny χ^2 o n stopniach swobody oraz że zmienna losowa $\sum_{i=1}^n \eta_{1ji}$ ma rozkład normalny $N(0, \sqrt{n})$, otrzymamy statystykę $\hat{Q}_{Y,1j}$ w postaci:

$$\hat{Q}_{Y,1j} = \frac{1}{n} \sigma_{Z_1j}^2 \cdot \chi_n^2 + \frac{2}{n} \cdot \sigma_{Z_1j} \cdot m_{Z_1j} \cdot U_n + m_{Z_1j}^2. \quad (6.22)$$

Dzieląc obie strony wzoru (6.22) przez wartość wskaźnika $Q_{Y,1j} = \sigma_{Z_1j}^2 + m_{Z_1j}^2$ dla l-tego przyrządu w j-tym punkcie pomiarowym otrzymamy:

$$\frac{\hat{Q}_{Y,1j}}{Q_{Y,1j}} = \frac{\sigma_{Z_1j}^2}{\sigma_{Z_1j}^2 + m_{Z_1j}^2} \cdot \chi_n^2 + \frac{2 \sigma_{Z_1j} \cdot m_{Z_1j}}{n(\sigma_{Z_1j}^2 + m_{Z_1j}^2)} \cdot U_n + \frac{m_{Z_1j}^2}{\sigma_{Z_1j}^2 + m_{Z_1j}^2}. \quad (6.23)$$

Wprowadźmy następujące bezwymiarowe współczynniki:

$$\frac{\sigma_{z_{1j}}^2}{\sigma_{z_{1j}}^2 + m_{z_{1j}}^2} = a_{1j} \quad (6.24)$$

$$\frac{\sigma_{z_{1j}} \cdot m_{z_{1j}}}{\sigma_{z_{1j}}^2 + m_{z_{1j}}^2} = b_{1j} \quad (6.25)$$

$$\frac{m_{z_{1j}}^2}{\sigma_{z_{1j}}^2 + m_{z_{1j}}^2} = c_{1j} \quad (6.26)$$

Podstawiając współczynniki a, b i c do wzoru (6.23) otrzymujemy:

$$\frac{\hat{Q}_{Y,1j}}{Q_{Y,1j}} = \frac{1}{n} \cdot a_{1j} \cdot \chi_n^2 + \frac{2}{n} \cdot b_{1j} \cdot U_n + c_{1j} \quad (6.27)$$

Można wykazać, że dla danej wartości stosunku $\sigma_{z_{1j}}^2 / m_{z_{1j}}^2$ otrzymamy zawsze określoną trójkę współczynników a_{1j} , b_{1j} i c_{1j} . Tablica 6.2 podaje wartości tych współczynników w zależności od stosunku $\sigma_{z_{1j}}^2 / m_{z_{1j}}^2$.

Tablica 6.2

$\sigma_{z_{1j}}^2 / m_{z_{1j}}^2$	0	0,11	0,250	0,428	0,666	1,00	1,50	2,33	4,0	9,0	∞
a_{1j}	0	0,1	0,2	0,3	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
b_{1j}	0	0,3	0,4	0,458	0,489	0,5	0,489	0,458	0,4	0,3	0
c_{1j}	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Wartości tego stosunku dobrano w taki sposób, aby współczynniki a_{1j} , b_{1j} i c_{1j} były wielokrotnościami liczby 10^{-1} .

Uwzględniając wzór (6.27) na rozkład statystyki $\hat{Q}_{Y,1}/Q_{Y,1}$ dla każdego poziomu ufności β ($0 < \beta < 1$), statystyka ta spełnia następującą nierówność:

$$P[\hat{Q}_{Y,1j} \leq Q_{Y,1j} \cdot (\frac{1}{n} \cdot a_{1j} \cdot \chi_{n,\beta}^2 + \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot b_{1j} \cdot u_\beta + c_{1j})] = \gamma \geq \beta^{2^{xx}} \quad (6.28)$$

przy czym $\chi_{n,\beta}^2$ jest kwantylem rzędu β rozkładu centralnego χ_n^2 , a u_β jest kwantylem standaryzowanego normalnego rozkładu $N(0,1)^{xx}$.

Uwzględniając, że rozkład centralny χ_n^2 jest niesymetryczny wg wartości zero oraz że dla przypadku niezależności wskaźników przyrządu badanego i wzorcowego wartość wskaźnika $Q_{Y,1j} = m_{2,X_{1j}} + m_{2,Y_{1j}}$, otrzymamy na poziomie ufności nie niższym niż β^2 wzory na granicy dwustronnego przedziału ufności $[Q_{Y,1j,dd}, Q_{Y,1j,dg}]$ dla nieznannej wartości $Q_{Y,1j}$:

$$Q_{Y,1j,dd} = \frac{m_{2,X_{1j}}^* + m_{2,Y_{1j}}^*}{\frac{1}{n} \cdot a_{1j} \cdot \chi_{n,(1+\beta)/2}^2 + \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot b_{1j} \cdot u_{(1+\beta)/2} + c_{1j}} \quad (6.29)$$

dla granicy dwustronnej dolnej oraz

$$Q_{Y,1j,dg} = \frac{m_{2,X_{1j}}^* + m_{2,Y_{1j}}^*}{\frac{1}{n} \cdot a_{1j} \cdot \chi_{n,(1-\beta)/2}^2 + \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot b_{1j} \cdot u_{(1-\beta)/2} + c_{1j}} \quad (6.30)$$

dla górnej granicy tego przedziału. We wzorach tych $m_{2,X_{1j}}^*$ i $m_{2,Y_{1j}}^*$ są ocenami momentów $m_{2,X_{1j}}$ i $m_{2,Y_{1j}}$.

^{x)} Przy ustalonych β dla χ_n^2 i u_β jest oceną poziomu ufności dla nieznannej wartości Q_Y , gdy dane jest:

$$Q_{Y,1j} (\frac{1}{n} \cdot a_{1j} \cdot \chi_n^2 + \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot b_{1j} \cdot u_\beta + c_{1j}) [51].$$

^{xx)} Stąd $2/\sqrt{n}$ a nie $2/n$ (patrz wzór (6.28) i wcześniej).

Długość $\Delta Q_{Y,1j} = Q_{Y,1j,dg} - Q_{Y,1j,dd}$ dwustronnego przedziału ufności $[Q_{Y,1j,dd}; Q_{Y,1j,dg}]$ jest swego rodzaju wskaźnikiem dokładności przy wyznaczeniu wartości wskaźnika $Q_{Y,1j}$. Wyznaczenia liczby n pomiarów dla oceny nieznanego wskaźnika $Q_{Y,1j}$ z zadaną dokładnością bezwzględną w postaci $\Delta Q_{Y,1j}$ nie jest jednak możliwe, gdyż nie znamy oceny $m_{2,x_{1j}}^*$. Zakładamy w tym przypadku tak, jak to czyniliśmy w punkcie 6.3, że wymagania co do dokładności wyznaczenia jest wymaganiem w postaci błędu względnego, zdefiniowanego w tym przypadku jako:

$$\frac{\Delta Q_{Y,1j}}{m_{2,x_{1j}}^* + m_{2,y_{1j}}^*} \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (6.31)$$

Przy takim wymaganiu zależność między niezbędną liczbą n pomiarów a dokładnością względną ϵ dla poziomu ufności nie niższego niż β^2 , będzie miała postać:

$$\epsilon \geq \frac{\frac{1}{n} \cdot a_{1j} \cdot \chi_{n,(1-\beta)/2}^2 + \frac{2 \cdot b_{1j}}{\sqrt{n}} \cdot u_{(1-\beta)/2} + c_{1j}}{\frac{1}{n} \cdot a_{1j} \cdot \chi_{n,(1+\beta)/2}^2 + \frac{2 \cdot b_{1j}}{\sqrt{n}} \cdot u_{(1+\beta)/2} + c_{1j}} \quad (6.32)$$

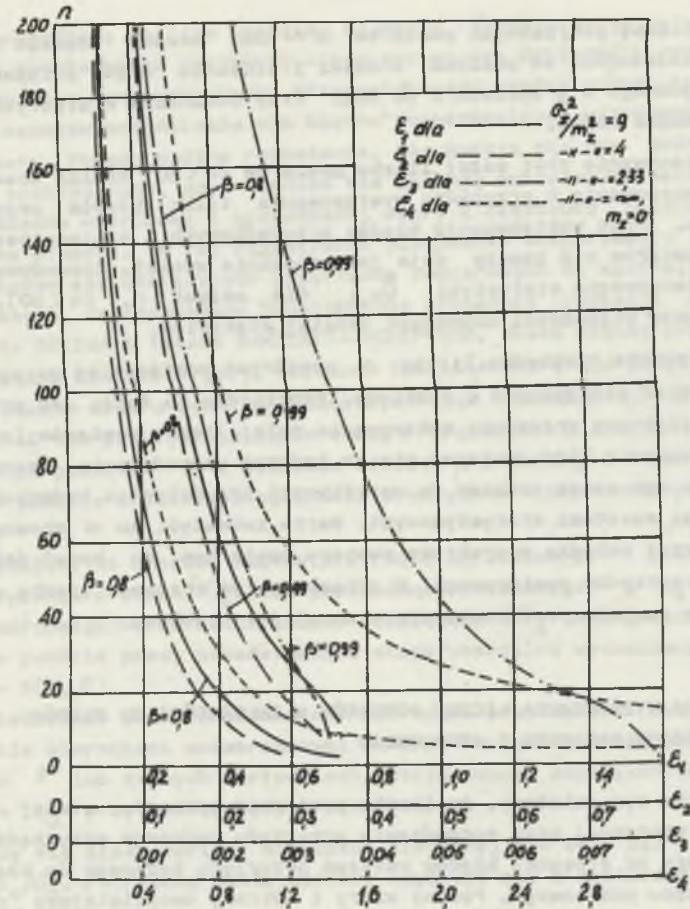
Dla przypadku szczególnego, gdy błędy systematyczne pomiaru $m_{2,x_{1j}}^*$ są równe zero, otrzymujemy następującą zależność dla $n = n(\epsilon, \beta)$:

$$n \geq \frac{\epsilon}{\frac{1}{\chi_{n,(1-\beta)/2}^2} - \frac{1}{\chi_{n,(1+\beta)/2}^2}} \quad (6.33)$$

(co łatwo widać ze wzoru (6.32) i tablicy 6.2).

Korzystając z tablic kwantyli rozkładu χ^2 i standaryzowanego rozkładu normalnego można wyznaczyć liczbę $n_0 = n(\epsilon, \beta, a_{1j}, b_{1j}, c_{1j})$.

Na rys. 6.1 pokazano wykresy funkcji $n_0 = n(\cdot)$ dla niektórych wartości ϵ i β oraz niektórych wartości współczynników a_{1j}, b_{1j}, c_{1j} .



Rys. 6.1. Wykresy funkcji $n_0 = n(\epsilon, \beta; a, b, c)$
Fig. 6.1. Graph of the function $n_0 = n(\epsilon, \beta; a, b, c)$

Podsumowując otrzymane wyniki można powiedzieć, że:

1. Przypadek, gdy występują tylko błędy przypadkowe przyrządu, jest najbardziej niekorzystny. Potrzebna liczba pomiarów do oszacowania tego błędu jest wówczas największa.

2. W świetle uzyskanych wyników wydaje się niecelowe eliminowanie błędów systematycznych przyrządów pomiarowych podczas oceny ich dokładności wskażeń. Występujący błąd systematyczny jako składowa część ogólnego błędu pomiarowego przyrządu pozwala wydatnie zmniejszyć potrzebną liczbę pomiarów przy ocenianiu błędów pomiarowych przyrządów.

3. Dokładność uzyskanych w ten sposób oszacowań (patrz rys. 6.1) jest wystarczająca dla celów praktycznych. Ograniczając się do największej prak-

tycznie liczby potrzebnych pomiarów $n \sim 200$, możemy uzyskać dokładność oceny w zależności od poziomu ufności i stosunku błędu przypadkowego do systematycznego w granicach 1 do 50%. Przy badaniach statystycznych jest to dokładność dobra.

4. Wykonywanie zbyt małej liczby pomiarów ($n < 10$) zaniża znacznie dokładność szacowania w przypadku występowania tylko błędów przypadkowych przyrządu. Przy występowaniu błędów przypadkowych i systematycznych mała liczba pomiarów nie zawsze daje jednoznacznie wyniki. Spowodowane to jest niedostatecznością statystyki $Q_{Y,1}$ dla małych n , ($n < 10$). Jest to zresztą wadą większości używanych dzisiaj statystyk.

5. Otrzymane niezbędne liczby n powtórzeń pomiarów są na ogół o wiele większe od stosowanych w praktyce. Potwierdza to fakt, że przyjęta obecnie w praktyce procedura wykonywania małej liczby pomiarów ($n \sim 2-5$) w celu wyznaczenia błędów wskazań nie ma żadnego uzasadnienia teoretycznego i nie daje tym samym podstaw do weryfikacji przydatności badanych przyrządów znanymi metodami statystycznymi. Warto zauważyć, że w obecnej dobie coraz szerzej wchodzi w praktykę systemy pomiarowe do badań dokładności wskazań przyrządów pomiarowych. W związku z tym znaczna liczba powtórzeń pomiarów w punkcie pomiarowym nie stanowi już problemu.

6.5. METODA WYZNACZANIA LICZBY POMIARÓW W ZALEŻNOŚCI OD BŁĘDÓW PRZYRZĄDU BADANEGO I WZORCOWEGO

W punkcie tym pokażemy, że liczba powtórzeń pomiarów stałej wartości wielkości mierzonej przy sprawdzaniu przyrządu badanego przyrządem wzorcowym zależy od stosunku błędów wskazań przyrządu badanego do błędów wskazań przyrządu wzorcowego. Podamy wzory i wykresy umożliwiające dla danego poziomu ufności i stosunku błędów obu przyrządów (badanego i wzorcowego) wyznaczyć odpowiednią liczbę pomiarów podczas sprawdzania.

Przy sprawdzaniu przyrządów pomiarowych przyrządem wzorcowym zachodzi konieczność doboru przyrządu wzorcowego, a więc jego klasy dokładności oraz określenia liczby n powtórzeń pomiarów, których należy dokonać, aby na danym poziomie ufności β wyznaczyć przedział ufności dla nieznannej wartości błędów wskazań przyrządu sprawdzanego.

Dotychczas dla wyznaczenia wartości tego błędu nie ustalono zależności między odpowiednią liczbą pomiarów n , dokładnością względną q , zdefiniowaną jako stosunek błędów przyrządu sprawdzanego do błędów przyrządu wzorcowego oraz poziomem ufności β .

Istniejące zalecenia norm orientacyjnie podają stosunek błędów przyrządu sprawdzanego i wzorcowego jako $q \geq 4$, nie podając przy tym niezbędnej liczby pomiarów i poziomu ufności, co praktycznie pozwala na dowolne interpretowanie zalecanych reguł. Doprowadza to do nieuzasadnionego zawyżania dokładności przyrządów wzorcowych przy wzorcowaniu. W literaturze [65,

80] przeprowadzono analizę rozkładu błędów w hierarchicznym układzie miar od wzorca podstawowego począwszy - poprzez wzorce dokładne i mniej dokładne - do miar tzw. roboczych. Przeanalizowano między innymi zagadnienie doboru stosunków przedziałów dla błędów dopuszczalnych wzorcowej i sprawdzanej miary. Podano ogólne rozważania. Nie nadają się one jednak do zastosowań praktycznych, gdyż również nie ukazują powiązań stosunków przedziałów błędów wzorcowej i sprawdzanej miary z niezbędną liczbą pomiarów i poziomem ufności. W [8] rozpatrzono planowanie eksperymentu przy atestacji błędów systematycznych przyrządów pomiarowych do kontroli produktów naftowych. Zaproponowano dwustopniową procedurę atestacji opartą na procedurze STEINA i teście BARTLETTA-SCHEFFEGO. Nieco więcej praktycznych zaleceń można znaleźć w [19]. Omówiono tam literaturę (24 pozycje), dotyczącą sposobów doboru punktów pomiarowych oraz stosunku q . Stwierdzono, że stosunek ten praktycznie zawiera się w przedziale $(1,3 \text{ do } 1,8) \leq q \leq (7 \text{ do } 10)$. Brak jednak powiązań q z poziomem ufności β i liczbą n powtórzeń pomiarów w punkcie pomiarowym ogranicza praktyczne zastosowanie podanych zaleceń.

Przyjmując, że mierami błędów przyrządu sprawdzanego i wzorcowego są ich odchylenia średnie σ_s (dla przyrządu sprawdzanego) i σ_w (dla przyrządu wzorcowego) oraz że określono dokładność $\Delta \sigma_s$ wyznaczenia σ_s , w niniejszym punkcie pracy przedstawiono eksperymentalne wyznaczenie zależności $n = n(q, \beta)$.

Doświadczenie przeprowadzono nad wybranymi przyrządami pomiarowymi, a mianowicie miernikami uniwersalnymi UM-58 o znanych wartościach odchyleń średnich σ lub znanych wartościach skorygowanych empirycznych odchyleń średnich σ_0 przy następujących założeniach:

1^o Mierzy się stałą wartość wielkości mierzonej $U = 20 \text{ V}$ dla wszystkich $q = \sigma_s / \sigma_w$. Potrzebną stałą wartość uzyskuje się z zasilacza stabilizowanego klasy 0,01.

2^o Przyjmuje się, że rozkład błędów wskazań przyrządu (sprawdzany, wzorcowy) jest normalny oraz że błędy systematyczne są do pominięcia.

3^o Określa się błędy wskazań przyrządu sprawdzanego o znanym błędzie $\sigma_s = 0,2 \text{ V}$ przyrządami wzorcowymi, mającymi $\sigma_{w1} = 0,2 \text{ V}$, $\sigma_{w2} = 0,1 \text{ V}$, $\sigma_{w3} = 0,04 \text{ V}$, $\sigma_{w4} = 0,02 \text{ V}$ i $\sigma_{w5} = 0,01 \text{ V}$.

A więc: $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 5$, $q_4 = 10$ i $q_5 = 20$.

4^o Dla danego q , i $\Delta \sigma_s$ wyznacza się minimalną liczbę pomiarów n_{\min} za pomocą odpowiednio skonstruowanego algorytmu.

Algorytm wyznaczania n_{\min}

1. Dokonuje się n powtórzeń pomiarów stałej wartości wielkości mierzonej $U = 20 \text{ V}$ ustawianej na przyrządzie sprawdzanym i odczytuje się wskazania x_1, x_2, \dots, x_n przyrządu wzorcowego.

2. Dla wskazzeń $n = h, 2h, 4h, \dots$ przyrządu wzorcowego, gdzie $h \geq 2$ jest długością kroku próbkowania, oblicza się kolejno empiryczne skorygowane odchylenie średnie s_{0n} według zależności:

$$s_{0n} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.34)$$

gdzie:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

3. Na poziomie ufności β wyznacza się dwustronny przedział ufności $[s_{s,dd}, s_{s,dg}]$ dla nieznannej wartości s_s według zależności:

$$s_{s,dd} = \frac{s_{0n}}{\sqrt{\xi_{n-1, (1+\beta)/2}}}$$

oraz

$$s_{s,dg} = \frac{s_{0n}}{\sqrt{\xi_{n-1, (1-\beta)/2}}}$$

(6.35)

gdzie: $\xi_{n-1, (1+\beta)/2}$ i $\xi_{n-1, (1-\beta)/2}$ - kwantyle statystyki χ^2_{n-1} .

4. Wyznaczenie s_{0n} prowadzi się tak długo, by co najmniej trzy kolejno wyznaczone dwustronne przedziały ufności $[s_{s,dd}, s_{s,dg}]$ spełniały warunek:

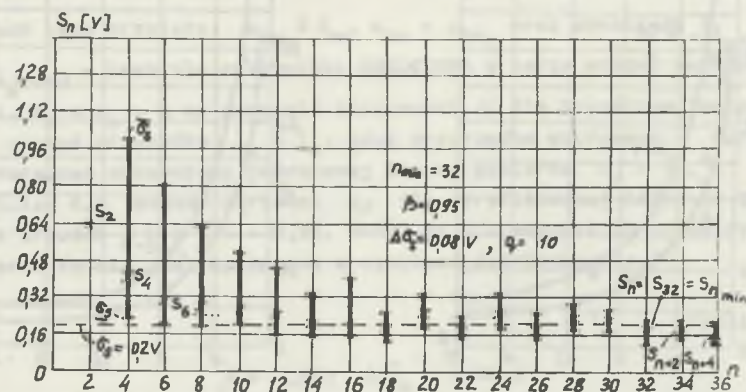
$$s_{s,dg} - s_{s,dd} \leq \Delta s_s \quad (6.36)$$

5. Jako n_{min} wybiera się pierwszą wartość $n = n_1$, przy której spełniony jest warunek (6.36).

Rysunek 6.2 szczegółowo przedstawia sposób wyznaczania n_{min} wg powyższego algorytmu dla $q = 10$, $\beta = 0,95$, $\Delta s_s = 0,08$ V oraz $h = 2$ z jednej serii pomiarów.

Względna dokładność δ_n wyznaczenia n_{min} zależy od długości kroku próbkowania h przy obliczeniu wartości s_{0n} , liczby k serii pomiarów i może być obliczona z zależności:

$$\delta_n = \frac{\Delta n}{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (n_{min})_j} = \frac{h}{\frac{2}{k} \sum_{j=1}^k (n_{min})_j} \quad (6.37)$$



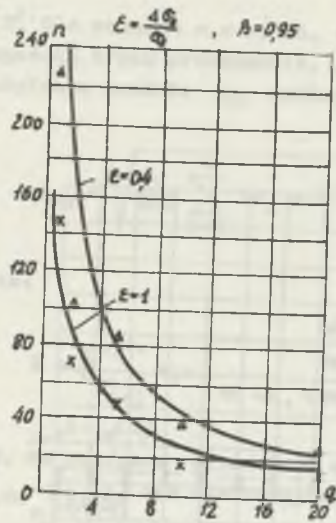
Rys. 6.2. Wyznaczenie n_{min} według podanego algorytmu
Fig. 6.2. Assessment of n_{min} according to the presented algorithm

W celu wyznaczenia n_{min} z jednakową dokładnością względną dla wszystkich rozpatrywanych q , krok próbkowania dobierano w zależności od q . W doświadczeniu wartości h w zależności od q wyznaczone drogą kolejnych prób, obliczając uprzednio wartości s_0 dla $n = 2, 4, 6, \dots$, a więc przyjmując dla wszystkich q stały krok próbkowania $h = 2$ pomiaru. Biorąc pod uwagę, że najmniejszy bezwzględny błąd w określaniu n_{min} wynosi $\Delta n = \pm 1$ pomiar, przeto dla wyznaczonej wartości $n_{min} = 32$, odpowiadającej $q = 10$, błąd względny w % wyniesie $\delta_n = 3\%$.

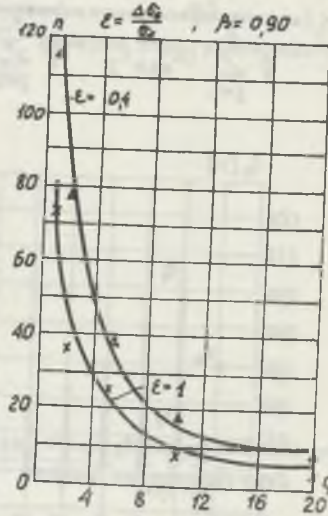
W tabelicy 6.3 podano wyznaczone wartości $n_{min} \pm \Delta n$ przy tej samej dokładności względnej $\delta_n = 3\%$.

Ciągłe aproksymacje zależności $n = n(q, \beta)$ dla $\beta = 0,95$ i $\Delta s_s = 0,08$ V oraz $\Delta s_s = 0,2$ V z uzyskanych wyników doświadczeń pokazano na rys. 6.3, zaś dla $\beta = 0,9$ i tych samych Δs_s - na rys. 6.4. Dla wygody funkcje $n = n(q, \beta)$ podano dla ustalonych wartości $\epsilon = \frac{\Delta s_s}{s_s}$.

Przystępując do doświadczenia w rzeczywistości nie znamy dokładnej wartości s_s i s_w , a więc przypuszczenie, że $q = 1, 2, \dots$, ma określone prawdopodobieństwo β . Stąd, ściśle rzecz biorąc, operujemy nie wartościami q , lecz q_p . Należy więc zweryfikować hipotezę co do wartości q , a mianowicie, że $q = s_s / s_w$. Hipotezę taką można weryfikować za pomocą testu F-FISCHERA-SNEDECORA. Z testu tego wynika, że na danym poziomie istotności $\alpha = 1 - \beta$ weryfikowaną hipotezę należy odrzucić na rzecz nierówno-



Rys. 6.3. Zależność liczby pomiarów $n = n(q, \beta)$ dla $\beta = 0,95$
 Fig. 6.3. Function of measurements number $n = n(q, \beta)$ for $\beta = 0,95$



Rys. 6.4. Zależność liczby pomiarów $n = n(q, \beta)$ dla $\beta = 0,9$
 Fig. 6.4. Function of measurements number $n = n(q, \beta)$ for $\beta = 0,9$

ści $\sigma_s > q \cdot \sigma_w$, jeżeli dla skorygowanych wariancji empirycznych s_{Os}^2 i s_{Ow}^2 jest:

$$\frac{s_{Ow}^2 \cdot q^2}{s_{Os}^2} \geq f_{l_w, l_s, 1-\alpha} \text{ przy } s_{Ow} \cdot q_\beta > s_{Os} \quad (6.38)$$

a na rzecz nierówności $\sigma_s < \sigma_w \cdot q$, jeżeli jest:

$$\frac{s_{Os}^2}{s_{Ow}^2 + q^2} \geq f_{l_s, l_w, 1-\alpha} \text{ przy } s_{Os} > s_{Ow} \cdot q_\beta \quad (6.39)$$

W przeciwnym przypadku brak jest podstaw do kwestionowania słuszności tej hipotezy, a zaobserwowaną nierówność $s_{Ow} \cdot q \neq s_{Os}$ należy uznać za przypadkową. Z (6.38) i (6.39) otrzymujemy:

$$q_\beta \geq \frac{s_{Os} \cdot \sqrt{f_{l_w, l_s, 1-\alpha}}}{s_{Ow}} \quad (6.40)$$

oraz

$$q_\beta \leq \frac{s_{Os}}{s_{Ow} \cdot f_{l_s, l_w, 1-\alpha}} \quad (6.41)$$

We wzorach tych przyjęto: $s_{Ow} \approx \sigma_w$, $s_{Os} = s_{On_1}$ oraz oznaczono $f_{l_w, l_s, 1-\alpha}$ i $f_{l_s, l_w, 1-\alpha}$ - kwantyle statystyki SNEDECORA o parze stopni swobody $l_w = n_w - 1$, $l_s = n_s - 1$ na poziomie istotności α dla kryterium jednostronnego. W naszym przypadku $l_w = l_s$, gdyż przyrządem wzorcowym i sprawdzanym każdorazowo dokonujemy jednakowej liczby pomiarów $n_s = n_w$.

W tabelicy 6.3 podano wartości q_β dla weryfikowanej hipotezy $q = q_\beta$ na poziomie ufności $\beta = 1 - \alpha = 0,95$. Widać, że dla wszystkich rozpatrywanych q hipoteza ta nie jest sprzeczna w wynikami doświadczenia.

Tabela 6.3

$\beta = 0,95$; $\Delta \sigma_s = 0,08$ V

Lp.	$\sigma_s \approx s_{Os}$	$\sigma_w \approx s_{Ow}$	s_{O, n_1}	$\sigma_{s, dd}$	$\sigma_{s, dg}$	$n_{min} \pm \Delta n$	$q = \frac{\sigma_s}{\sigma_w}$	q_β
1	0,200	0,200	0,16	0,169	0,203	250 ± 7	1	0,98
2	0,200	0,100	0,160	0,137	0,228	100 ± 3	2	1,87
3	0,200	0,040	0,224	0,192	0,272	85 ± 2	5	5,60
4	0,200	0,020	0,156	0,124	0,204	32 ± 1	10	9,98
5	0,200	0,010	0,161	0,139	0,218	28 ± 1	20	18,67

W zakończeniu warto zauważyć, że z charakteru przebiegu krzywej $n = n(q, \beta)$, aproksymującej wyniki doświadczenia, widać, że dąży ona asymptotycznie ze wzrostem $q \rightarrow \infty$ do pewnej wartości stałej $n_\beta = n_0$. Wartość ta jest niezbędną liczbą pomiarów stałej wartości mierzonej w przypadku, gdy $\sigma_w = 0$ (przyrząd wzorcowy jest bezbłędny), pozwalającą na poziomie ufności β wyznaczyć dwustronny przedział ufności $[\sigma_{s, dd}, \sigma_{s, dg}]$ dla nieznannej wartości błędu σ_s przyrządu sprawdzanego.

Dla określonej dokładności względnej $\Delta \sigma_s / s_{On}$ wyznaczenia odchylenie średniego σ_s oraz ustalonego poziomu ufności β wartość n można oszacować z zależności [51]:

$$\Delta \sigma_s / s_{On} = \frac{1}{\sqrt{\xi_{n-1, (1-\beta)/2}}} - \frac{1}{\sqrt{\xi_{n-1, (1+\beta)/2}}} \quad (6.42)$$

7. ZAKOŃCZENIE

W niniejszej pracy zaprezentowano analityczne metody niezawodności przyrządów pomiarowych, rozpatrywanej ze względu na wymagania metrologiczne. Metody dyskutowano w ujęciu losowych procesów zmian dokładności wskazań. Ujęcie takie pozwoliło na jednolite potraktowanie metod jakościowej analizy niezawodności metrologicznej, wypełniając w ten sposób lukę istniejącą od dawna w tej dziedzinie.

Przedstawiono nowe, uzasadnione metody statystyczne do eksperymentalnego badania w niezawodności metrologicznej. Dotychczas problemy te nie były rozważane w literaturze.

Wychodząc z jednolitego ujęcia metod probabilistycznych i statystycznych usystematyzowano pojęcia i nazewnictwo w dziedzinie niezawodności metrologicznej.

Zastosowanie i uzasadnienie teorii procesów Markowa, w tym równań kinetycznych Fokkera-Plancka-Koźmogorowa, do analizy niezawodności przyrządów pomiarowych jest nowym i oryginalnym spojrzeniem na procesy uszkodzeń metrologicznych jako procesy typu dyfuzyjnego.

Nowe ujęcie znanych przesłanek teorii czułości pozwoliło na zbudowanie metod probabilistyczno-deterministycznych, wykorzystujących zdeterminowane elementy struktury funkcjonalnej i niezawodnościowej, jak i ilościowy proces zmian dokładności, zachodzący w obecności tej struktury.

Wszędzie tam, gdzie było to konieczne, zwracano uwagę na fakt, że metody teorii niezawodności w ogóle są ściśle związane i budowane ze względu na stawiane wymagania. W niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych wymagania dotyczące właściwości metrologicznych jednoznacznie determinują jakościowy charakter analizy. Taka jakościowa analiza została przedstawiona w niniejszej pracy.

Metody klasycznej teorii niezawodności wykorzystujące przeważnie modele i metody budowane w oparciu o λ -charakterystyki (funkcje intensywności uszkodzeń) jak na razie nie znalazły szerokiego zastosowania w niezawodności metrologicznej. Aktualny stan metod teorii niezawodności jest przedstawiony w najnowszych opracowaniach A.D. Sołowiowa i B.W. Gniedenko. Są tam również pokazane próby analizy z zastosowaniem procesów zmian określonego uogólnionego parametru (por. [102] ss. 15-17, [121] ss. 15-17, 316-320, zob. również [96] ss. 248-256).

W pracy ograniczono się do rozpatrywania metod analizy w oparciu o losowe procesy zmian dokładności wskazań przyrządów pomiarowych. Jako aparatu matematycznego użyto probabilistyki w ujęciu teorio-mnościowym

(koźmogorowskim). Ponadto ze względu na ograniczoną objętość pracy zrezygnowano z rozwiązania niektórych problemów. W związku z tym warto wymienić zarysowujące się kierunki dalszych badań:

1. Metody analizy niezawodności metrologicznej oparte na dystrybucyjnej teorii przekroczeń (w oparciu o probabilistykę w ujęciu dystrybucyjnym i klas abstrakcji);

2. Zastosowanie metody λ -charakterystyk w niezawodności metrologicznej;

3. Zastosowanie włożonych procesów Markowa do rozwiązywania problemów odnawiania dokładności przyrządów pomiarowych;

4. Analityczne modele procesów zmian dokładności i metody statystyczne do ich identyfikacji.

LITERATURA CYTOWANA

- [1] Abuładze J.W., Bielajewskij A.J.: Ocena funkcji wlijanija wniesznich faktorow na pogriesznost' elektroizmieritel'nogo pribora. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1973, No 6, ss. 9-12.
- [2] Abuładze J.W., Mandelsztam S.M.: Mietrologičeskaja nadziežnost'. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1975, No 2, ss. 29-30.
- [3] Abuładze J.W., Modiagin J.W., Szterenberg M.J.: Wybor dopuskow pri kontrole mietrologičeskich charakteristik priborow. Mietrologija, 1977, No 3, ss. 69-73.
- [4] Abuładze J.W.: Opisanije mietrologičeskoj nadziežnosti sriedstw izmierienij statisticzeskimi metodami oceniwania. Mietrologija, 1977, No 9, ss. 28-36.
- [5] Aranawiczus B.M.: O wyborze racjonalnoj strategii obsluziwania radioizmeritel'nych priborow. Mietrologija, 1980, No 3, ss. 24-29.
- [6] Arutiunow A.S. i inni: Problema i spiecifika nadziežnosti izmeritel'nych ustrojstw. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1963, No 3.
- [7] Arutiunow A.S.: Soderżanije i osnovnyje zadaczi sowriemiennoj mietrologii. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1967, No 9, ss. 3-11.
- [8] Bachtiriow W.S., Wołodin I.N.: Płanirowanije eksperimienta pri atiestaczi i ispolzowanii standartnych obrazcow. Wierojatnostnyje metody i kibiernetika, 1971, No 9.
- [9] Barlow R.E., Proschan F.: Mathematical theory of reliability. John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1965 (tłumaczenie rosyjskie "Sow. Radio", Moskwa 1969).
- [10] Bałaszow W.P. i inni: Awtomatizacja radioizmierienij. Moskwa, Izd. "Sow. Radio", 1966.
- [11] Biegiarian W.C., Kondraszkowa G.A.: Obiespiczenije stabilnosti i mietrologičeskoj nadziežnosti magnitoelektrzeskogo pribora putiom optimizaczi jego paramietrow. Mietrologija, 1977, No 3, ss. 60-64.
- [12] Bołdina E.A. i inni: Effiektiwnost' rasczota na EWM indywidualnych powierok sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 10, ss. 48-57.
- [13] Brewer R.: Niezawodność - podstawowy czynnik w produkcji przyrządów w Wielkiej Brytanii. PAK, 1968, Nr 7, ss. 294-295.
- [14] Broniukajtis R.K.: Sistiemnyj podchod k analizu i obiespiczeniju nadziežnosti radioizmeritel'nych priborow. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 25-29.
- [15] Broniukajtis R.K. i inni: Ocienka i obiespiczenije mieżpowierocznych interwałow radioizmeritel'nych priborow. Mietrologija, 1980, No 3, ss. 32-38.
- [16] Brujewicz N.G., Grabowieckij W.N.: Ob osnovnych naprawlenijach teorii nadziežnosti. Priborostrojienije, 1963, No 8.
- [17] Cejtlin W.G., Cizis A.C.: Intiegralnyj rasczot mietrologičeskoj nadziežnosti sriedstw izmierienij. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1974, No 3, ss. 12-13.
- [18] Chazen E.M.: Opriedielenije płotnosti raspriedialenija wierojatnostiej dla szuczajnych processow w sistiemach s nieliniejnostiami kusoczno-liniejnogo tipa. Izwiestija ANSSSR, OTN Energietika i Awtomatika, No 3, 1961, ss. 58-72.
- [19] Chromow A.W., Semeniuk A.L.: O wyborze obrazcowych sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 3.
- [20] Czetwiertakow S.A., Tiukow B.W.: Model issledowanija stabilnosti sriedstw izmierienija. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 41-45.
- [21] Czelcow A.W., Lindenbaum J.M.: Mietrologičeskaja nadziežnost' izmeritel'nych ustrojstw i kaczestwo pieriarabotki niefti. Mietrologija, 1977, No 3, ss. 64-69.
- [22] Drużynin G.W.: Nadiežnost' ustrojstw awtomatiki. "Energija", Moskwa, Leningrad, 1964.
- [23] Jekimow A.W., Riawanow M.J.: Opriedielenije prodołżitel'nosti mieżpowierocznych interwałow sriedstw izmierienij s uczotom dwuch widow otkazow. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1983, No 8, ss. 17-18.
- [24] Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1969, t. I i II.
- [25] Firkowicz Sz., Butkiewicz J., Kałuski J.: Markowski process kak model izmienienij tocznosti izmeritel'nogo pribora. ACTA IMECO VI, Section 1, Dresden, 1973, ss. 173-183.
- [26] Fomin J.A.: Wierojatnostnyje charakteristiki wriemieni priebyjevanija stacionarnogo szuczajnogo processa w zadannoj obłasti. Izwiestija wuzow. "Radiotiejchnika", 1969, No 1.
- [27] Fridman A.E.: Model sootnoszenij mieżdu stabilnost'ju, nadziežnoet'ju i tocznost'ju sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 65-72.
- [28] Fridman A.E.: Apriornaja ocenka paramietra potoka mietrologičeskich otkazow sriedstwa izmierienij. Mietrologija, 1977, No 10, ss. 60-64.
- [29] Fridman A.E.: Metod rasczota mietrologičeskoj nadziežnosti sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1980, No 2, ss. 16-24.
- [30] Gabinow B.N.: Metod obnarużenija istocznikow otkazow tocznosti sortirowocznych awtomatow. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1970, No 11, ss. 20-23.
- [31] Geher K.: Theory of network tolerances. Budapest, Akademiai Kiado, 1971.
- [32] Gniedenko B.W., Bielajew J.N., Sołowiow A.D.: Matematičeskije metody w teorii nadziežnosti. Moskwa, Nauka, 1965.
- [33] Goldrin W.M., Jastriebienickij M.A.: Mietrologičeskaja nadziežnost' sriedstw izmierienij ASYTP. Mietrologija, 1980, No 2, ss. 12-15.
- [34] Gurewicz J.Z. i inni: Metodika rasczota indywidualnych powierok bolszogo parka sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 10, ss. 44-47.
- [35] Iwanow B.S., Swieczarnik D.W.: Swiaz' mieżdu tocznost'ju i nadziežnost'ju niekotorych tieploenergietičeskich priborow. Izmeritel'naja Tiejchnika, 1970, No 5, ss. 76-78.
- [36] Jewłanow Ł.G.: Metody analiza dinamiczeskich sistiem soderżaszczije szuczajnyje paramietry. Awtomatika i Tiejlemechanika, 1968, No 8, ss. 31-39.
- [37] Kałuski J.: Badanie błędu selekczi awtomatu do selekczi wielogrupowej. ZN Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, nr 15, Gliwice 1970, ss. 77-87.
- [38] Kałuski J.: Niektóre zagadnienia niezawodności pracy awtomatow kontrolno-selekczyjnych. PAK, 1970, nr 12, ss. 524, 529-530.
- [39] Kałuski J.: Sposób zwiękazenia niezawodności dokładnościowej awtomatow kontrolno-selekczyjnych. PAK, 1972, Nr 4, ss. 168-170.
- [40] Kałuski J.: System pomiarowy do badania dokładności i niezawodności przyrządow pomiarowych przy użyciu EMC. Kwartalnik PAN "Zagadnienia Eksploataczi Maszyn", z. 3/27/1976, ss. 331-338.
- [41] Kałuski J.: Dobór przyrządu wzorcowego oraz estymacja odpowiedniej liczby pomiarow przy wzorcowaniju. PAK, 1978, Nr 9.

- [42] Kałuski J.: Polemika na łamach PAK. PAK, 1979, Nr 5.
- [43] Kałuski J.: Niezawodność metrologiczna przyrządów pomiarowych. Skrypt Politechniki Śląskiej nr 1143, Gliwice 1983.
- [44] Kałuski J.: Niecentralny rozkład χ^2 i jego zastosowanie. ZN Politechniki Śląskiej, s. Fizyka i Matematyka (w druku).
- [45] Kałuski J.: Badanie procesu zmian dokładności przyrządu pomiarowego. Materiały Jubileuszowej Konferencji Naukowej Wydziału Automatyki i Informatyki Politechniki Śląskiej, Gliwice 1973, sekcja B, ss. 367-385.
- [46] Kałuski J.: Niezawodność dokładnościowa przyrządów pomiarowych. Seminarium Urzędzeń i Układów Automatyki, referat nr 137, Gliwice 1975.
- [47] Kałuski J.: Model matematyczny procesu zmian wskazań wybranej klasy przyrządów pomiarowych. Seminarium Urzędzeń i Układów Automatyki, Gliwice 1976.
- [48] Kałuski J.: Probabilistyczny model zmian wskazań przyrządów pomiarowych. Materiały III konferencji "Metody i środki projektowania automatycznego", Warszawa 1981.
- [49] Kałuski J. i inni: Laboratorium rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Praca zbiorowa pod red. J. Kałuskiego, skrypt Politechniki Śląskiej Nr 1172, Gliwice 1984.
- [50] Kałuski J.: Metodyka i wyniki badań niezawodności niektórych typów mierników wskazówkowych produkowanych przez MERA-LUMEL w Zielonej Górze. Seminarium Urzędzeń i Układów Automatyki, referat nr 165, Gliwice 1976.
- [51] Kałuski J.: Integralny wskaźnik dokładności wybranej klasy przyrządów pomiarowych. Praca doktorska, Gliwice 1977.
- [52] Kałuski J.: Statystyczne badania przyrządów pomiarowych. Materiały IV Krajowej Konferencji SKJ, Poznań 1977.
- [53] Kałuski J.: Integralny wskaźnik dokładności przyrządów pomiarowych. Materiały sympozjum "Metrologii wielkości mechanicznych i kontrola jakości produkcji", Warszawa 1978.
- [54] Kałuski J.: Calibration device choice and estimation of adequate measurement number during statistical identification of the measurement devices accuracy. ACTA IMECO, Moskwa 1979.
- [55] Kałuski J.: Niezawodność metrologiczna sprzętu (na przykładzie przyrządów pomiarowych). Seminarium "Jakości i niezawodności", OPT NOT, Warszawa 1981.
- [56] Kałuski J.: Zastosowanie równań Fokkera-Plancka-Koźmogorowa do wyznaczania niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych. Materiały XIII konferencji "Zastosowania matematyki", Sielcia k. Kielc, 1984, ss. 27-28 (komunikat).
- [57] Kałuski J.: Zastosowanie równań Fokkera-Plancka-Koźmogorowa do wyznaczania niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych. ZN Politechniki Śląskiej, s. Automatyka (w druku).
- [58] Kawalerow G.J., Mandelsztam S.M.: Wprowadzenie do teorii pomiarów. PWN, Warszawa 1983.
- [59] Kawos W.P., Orzesznikow W.W.: Powyższenie nadzieźności elektroizmieritelnych przyborow. Priborostrojennie, 1963, No 6, ss. 6-10.
- [60] Kazakow J.E.: Opriedielenije zakonow raspriedielenija pieriemiennych nieliniejnoj stochastycznej sietiemy. Awtomatika i Tielemechanika, Tom XXVI, 1965, No 11, ss. 1926-1937.
- [61] Kempinskij M.M.: Tocznost' i nadzieźnost' izmieritelnych przyborow. Mszinostrojennie, Leningrad 1972.
- [62] Kołesnikow Ł.P., Broniukajtis R.K.: Analiz nadzieźności wysokostabilnych radioizmieritelnych przyborow. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 29-34.

- [63] Koźmogorow A.N.: Uber die analitischen Methoden in der Warscheinlichkeitsrechnung. Mathemat. Ann. 104, 1931, ss. 415-458 (tłumaczenie rosyjskie: Ob analiticzeskich metodach w teorii wieroźatnostiej. Uspechi Matematycznych Nauk, V, 1938, ss. 5-41).
- [64] Kowylew J.I., Bogorodskaja N.A.: Opriedielenije optimalnoj pierieodiczności pługnowych powierok raboczich sriedstw izmierienija. Mietrologija, 1980, No 3, ss. 3-7.
- [65] Krawczenko S.A.: Nieobchodimyj zapas toczności mieźdu stupieniami powierocznoj schiemy w obłasti fazowych izmierienij. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1973, No 1.
- [66] Kreszczuk W.W.: Opriedielenije wieroźatności rabotosposobnogo sostojanija kontrolirujemogo obiektu s wosstanowlenijem. Mietrologija, 1978, No 5, ss. 9-13.
- [67] Kruglikow W.K.: Racjonalizacija wyczislenija ocenki nadzieźności funkcjonirowanija ustrojstw analogowego tipa. Priborostrojennie, 1972, No 2, ss. 70-73.
- [68] Kudrickij W.D.: Metodika rasczota srokow obiazatelnoj powierki izmieritelnych przyborow. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1965, No 9.
- [69] Kudrickij W.D., Diatłow G.J., Ped'ko A.W.: Opriedielenije mieźpowierocznych intierwałow s ucetom faticzeskogo sostojanija sriedstw izmierienij. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1983, No 8, ss. 18-20.
- [70] Lejfer Ł.A., Iłkarionow A.J.: Ocenka nadzieźności izmieritelnych ustrojstw, opisujemych sietiemoj zawisimych paramietrow. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1973, No 1, ss. 12-14.
- [71] Łabuniec W.S. i inni: Sootnoszenija faticzeskój i normirujemój nadzieźności sriedstw izmieritelnoj tiechniki. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1973, No 6, ss. 6-7.
- [72] Łabuniec W.S. i inni: Izmienienije nadzieźności elektroizmieritelnych przyborow pri ich dlitelnoj eksploatacji. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1974, No 3, ss. 59-60.
- [73] Łabuniec W.S.: Issledowanije wieroźatnostnych charakteristik potoka miatrológiczeskich otkazow elektroizmieritelnych przyborow. Mietrologija, 1980, No 3, ss. 19-24.
- [74] Łabuniec W.S.: Issledowanije raspriedielenija miatrológiczeskich otkazow w raznych uczastkach diapazona izmierienija pogrieszności przybora. Mietrologija, 1980, No 2, ss. 45-50.
- [75] Mandelsztam S.M.: Informacjonnaja nadzieźnost'. Awtomatika i Tielemechanika, 1966, No 5, ss. 167-171.
- [76] Metrologia Aplicata, V.XXV (serie noua-IV), No 4, 1978, pp. 97-125, (w języku rumuńskim).
- [77] Mielnickaja Z.S.: Ocenka sroka słuźby elektroizmieritelnych przyborow po dannym ispytanija i eksploatacjonnoj statistike. Sbornik "Woprosy nadzieźności elektroizmieritelnych przyborow", Moskwa, ONTIPRI-BOR, 1965.
- [78] Mielnickaja Z.S., Nowickij P.W.: Ob osnovnych eksploatacjonnych pokazatelach kaczestwa sriedstw izmierienij. Priборы i Sietiemy uprawlenija, 1973, No 4, ss. 16-17.
- [79] Michajłow A.W.: Eksploatacjonnyje dopuski i nadzieźnost' w radioelektronnoj apparaturie. Izd. "Sowietakoje Radio", Moskwa, 1970.
- [80] Moskwičzenkowa T.S., Szyłow A.M.: Analiz obiespiečzenija toczności izmieritelnych ustrojstw. Mietrologija, 1974, No 9, ss. 11-18.
- [81] Niemirowskij A.S., Nikonow W.S.: Statisticeskij metod ustanowlenija mieźpowierocznych intierwałow. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1965, No 9.
- [82] Nowickij P.W. i inni: Normirowanije pokaziteliej nadzieźności sriedstw elektroizmieritelnoj tiechniki. Izmeritelnaja Tiejchnika, 1974, No 10, ss. 20-21.

- [83] Nowickij P.W.: Zadaczi obiespieczenia mietrologiczeskiej nadzieznosti sriedstw izmierienij. Izmeritielnaja Tiechnika, 1977, No 2, ss.17-18.
- [84] Nowickij P.W.: O naprawlenii rabot po mietrologiczeskiej nadzieznosti sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 6-9.
- [85] Nowickij P.W. i inni: Metodika normirovanija, ocenki i kontrola mietrologiczeskiej nadzieznosti priborow. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 9-25.
- [86] Nowickij P.W., Gorielnikow N.J., Mielnickaja Z.S.: Metody rasczota i korriektirovki miezpowierocznych intierwalow sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 10, ss. 38-44.
- [87] Obaleki J.: Przegląd aktualnych zagadnień teoretycznej metrologii. PAK, 1967, nr 2.
- [88] Ornatskij P.P., Pampuro W.J.: Stabilnost' i nadzieznost' izmeritielnych priborow. Mietrologija, 1980, No 2, ss. 7-12.
- [89] Paderno P.J., Fridman A.E.: Algoritmizacija poiska miezpowierocznych intierwalow sriedstw izmierienija s uczotom ich stabilnosti. Mietrologija, 1977, No 10, ss. 64-67.
- [90] Pampuro W.J.: Prognozirowanije stabilnosti informacjonnych ustrojstw. Izd. "Kijew", Technika 1978.
- [91] Piezczek K.: Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1982.
- [92] Poletajew W.P.: Modeli processa izmienienija mietrologiczeskiej nadzieznosti pri eksploatacji sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 60-65.
- [93] Poletajew W.P.: Planirovanije optimalnych miezpowierocznych intierwalow raboczich sriedstw izmierienij w usłowjach massowogo proizwodstwa. Mietrologija, 1977, No 10, ss. 27-33.
- [94] Pugaczew W.S.: Primienienije teorii markowskich processow k analizu tocznosti awtomatycznych sistem. Izd. ANSSSR, OTN, Energiatika i Awtomatika, No 3, 1961.
- [95] Redkina W.: Metody i wyniki badań laboratoryjnych i oceny niezawodności elektrycznych przyrządów pomiarowych. PAK, 1968, Nr 4, ss.180-182.
- [96] Reliability Handbook. W. Grant Ireson Editor-in CHIEF. New York, 1966 (tłumaczenie rosyjskie: Sprawoznik po nadzieznosti. Izd. "Mir", Moskwa, 1969), tom I i II.
- [97] Rollis T.J., Martin D.T.: APC - Assured Performance Calibration. ISA Journal, 1965, 12, No 11.
- [98] Rosenkwit E.J., Narkiewicz W.W.: Metody opriedialenija pieriodiczności kontrola. Mietrologija, 1974, No 9, ss. 54-64.
- [99] Sawczenko G.W.: Zawisimost' pogrieszności izmeritielnogo ustrojstwa ot wriemieni eksploatacji. Izmeritielnaja Tiechnika, 1970, No 11, ss. 17-19.
- [100] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów. PWN, Warszawa 1983, ss. 389-403.
- [101] Smith W.L.: Teorija wosstanowlenija i smieznije s niej woprosy. Matematika, 1961, No 3 (tłumaczenie z angielskiego).
- [102] Sołomow A.D.: Analityczne metody w teorii niezawodności. WNT, Warszawa 1983.
- [103] Sretenskij W.N. i inni: Ischodnyje położenija teorii i praktiki prikladnoj mietrologii. Izmeritielnaja Tiechnika, 1965, No 5, ss.6-10.
- [104] Sotekow B.S.: Niezawodność elementów i urządzeń automatyki. WNT, Warszawa 1973.
- [105] Sotekow B.S.: Nadieznost' awtomatycznych ustrojstw i sistem. Jejo obiespieczenie i metody ocenki. Pribory i Sistemy Uprawlenija, 1973, No 4, ss. 10-13.

- [106] Sulejmanow N.T. i inni: K rasczotu parametriczeskiej nadzieznosti izmeritielnych priobrazowatelej s postojannymi magnitami. Priborostrojenije, 1977, No 1, ss. 117-121.
- [107] Swiesznikow A.A.: Prikładnyje metody teorii słuczajnych funkcji. Nauka, Moskwa 1968, wydanie II.
- [108] Swiesznikow A.A.: Ob odnoj zadacze teorii nadzieznosti. Izwiestija AN SSSR, Tiechniczeskija Kibiernietika, 1964, No 3, ss. 58-61
- [109] Swiesznikow A.A.: Wyczielenije wierojatnosti priebowanija odnomernogo markowskogo processa w obłasti s pierieniennymi granicami. Izwiestija AN SSSR, Tiechniczeskaja Kibiernietika, 1970, No 5, ss. 140-146.
- [110] Tarabiejew J.W.: Zadaczi w obłasti obiespieczenia stabilnosti i mietrologiczeskiej nadzieznosti sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 3-6.
- [111] Tatijewskij A.W.: Uczot postiepiennych otkazow pri rasczotie nadzieznosti elektroizmeritielnych priborow. W książce: Nadieznost' elektroizmeritielnych priborow. Moskwa, ONTIPRIBOR, 1967.
- [112] Tiukow B.W., Czetwiertakow S.A.: Obeczizije woprosy eksperimentalnogo issledowanija stabilnosti sriedstw izmierienij. Mietrologija, 1977, No 2, ss. 34-40.
- [113] Tomaszewski A.: Próba ustalenia kryteriów jakości narzędzi pomiarowych. PAK, 1966, nr 8-9.
- [114] Turkieltaub R.M.: Metody issledowanija toczności i nadzieznosti schiem operatory. Biblioteka po awtomatike. Izd. "Energija", Moskwa, Leningrad 1966.
- [115] Tuszyński J.: Zagadnienie niezawodności mierników elektrycznych. PAK, 1964, No 5, ss. 189-192.
- [116] Tuszyński J.: Metodyka i wyniki badań niezawodności mierników elektrycznych. Seeja Naukowa z okazji XX-lecia Instytutu Elektrotechniki, sekcja Jakości i Niezawodności, Warszawa 1966, Instytut Elektrotechniki, s. 41.
- [117] Tuszyński J.: Niektóre naukowe, techniczne i ekonomiczne aspekty badań niezawodności przyrządów pomiarowych. PAK, 1970, nr 12, ss.506-508.
- [118] Wiener U.E., Cretu F.M.: Projektirung der Makrosystems für metrologische versicherung, ACTA IMECO VI, Dresden, 1973, B-113, V. 1, ss. 141-156.
- [119] Wiener U.E.: The value of measuring information, determination possibilities, applications in management analyses of measuring systems. ACTA IMECO VII, London, 1976, ss. 107-111.
- [120] Winokurow A.W.: Metodika ocenki stabilności projektirujemych radioizmeritielnych priborow. Mietrologija, 1980, No 3, ss. 29-32.
- [121] Woprosy matematycznej teorii nadzieznosti. Pod redakcją B.W. Gniezdisko, Moskwa, "Radio i Swiaz", 1983.
- [122] Zarickij W.S.: Opriedialenije wierojatnosti nadzieznost' roboty sistemy w tieczniji zadannogo promiezutka wriemieni. Izwiestija AN SSSR, Tiechniczeskaja Kibiernietika, 1966, No 1, ss. 51-55.
- [123] Zielencow B.P.: O spieczifikie nadzieznosti sriedstw izmierienij. Izmeritielnaja Tiechnika, 1971, No 2, ss. 92-94.
- [124] Zielencow B.P., Szelepajew A.G.: Issledowanije i ocenka nadzieznosti izmeritielnych sistem s niepożnym obeżiwaniem. Mietrologija, 1978, No 7, ss. 3-9.
- [125] Stratanowicz R.Ł.: Izbrannyje woprosy teorii fluktuacij w radiotiechnike. Izd. Sowietskogo Radio, Moskwa 1961.

METODY ANALIZY NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ

S t r e s z c z e n i e

Praca dotyczy niezawodności przyrządów pomiarowych, rozpatrywanej ze względu na wymagania metrologiczne. Podano metody i modele do analizy tej niezawodności. W odróżnieniu od metod klasycznej teorii niezawodności, bazujących na funkcjach intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$, niezawodność metrologiczną uwzględnia losowe procesy zmian określonych właściwości metrologicznych. Prowadzi to do wyznaczenia wskaźników niezawodności przyrządów pomiarowych drogą analizy przejścia losowego procesu zmian właściwości przez zdefiniowany poziom ustalonych wymagań metrologicznych. Mamy więc w pracy do czynienia z parametrycznym ujęciem niezawodności przyrządów pomiarowych.

Praca składa się z wstępu, 6 rozdziałów, zakończenia i cytowanej literatury. We wstępie krótko scharakteryzowano stan prac w dziedzinie niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych i sformułowano cel pracy.

W rozdziale 1 przytocza się niezbędne definicje i określenia oraz uzasadnia metodę badawczą niezawodności przyrządów pomiarowych.

W rozdziale 2 opisano analityczną metodę wyznaczania wskaźników niezawodności metrologicznej, w przypadku gdy realizacje procesu zmian właściwości metrologicznych są monotonicznymi i przedziałami ciągłymi funkcjami czasu.

W rozdziale 3 na podstawie znanych zależności w teorii czułości i ogólnej (klasycznej) teorii niezawodności, przedstawiono nowe metody analizy niezawodności metrologicznej. Pozwalają one wyznaczać wskaźniki niezawodności metrologicznej, gdy znamy strukturę niezawodnościową przyrządów pomiarowych i zbiór ich cech istotnych. Połączenie teorii niezawodności i teorii czułości pozwoliło na rozbudowę tej ostatniej o aspekt dynamiczny (czasowy).

W rozdziale 4 zastosowano teorię procesów Markowa do celów analizy niezawodności przyrządów pomiarowych. Postawiono i udowodniono tezę, że procesy uszkodzeń metrologicznych są procesami typu dyfuzyjnego. Dało to możliwość zbudowania adekwatnych metod analizy niezawodności przyrządów pomiarowych, wykorzystując kinetyczne równanie Fokkera-Plancka-Koźmogorowa i metodę funkcji charakterystycznej Pugaczewa. Wykorzystano również ogólne zależności słuszne w teorii dyskretnych łańcuchów Markowa za skończoną przestrzenią stanów.

W 5 rozdziale w krótkiej formie przedstawiono metody teorii odnowy oraz metody ogólnej teorii procesów stochastycznych do analizy niezawod-

ności metrologicznej. Przedstawiono również próbę uzasadnienia nowego ujęcia teorii prawdopodobieństwa w zastosowaniu do analizy niezawodności przyrządów pomiarowych. Nowe ujęcie nie jest oparte na aksjomatyce Koźmogorowa, lecz na dystrybucyjnej interpretacji podstawowych pojęć tej teorii i klasach abstrakcji.

Rozdział 6 zawiera statystyczną analizę badań przyrządów pomiarowych ze względu na właściwości niezawodnościowe. Przytoczono estymatory błędów wskaźników do opisu niezawodności metrologicznej.

Literatura cytowana, dotycząca zasadniczo dziedziny niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych, zawiera zdaniem autora najważniejsze pozycje, które ukazały się drukiem na przestrzeni lat 1960-1985.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ

Р е з ю м е

Настоящая работа касается надёжности измерительных приборов, рассматриваемых с точки зрения метрологических требований. Даны методы и модели для анализа так определённой надёжности.

По сравнению с методами классической теории надёжности, базирующей на функциях интенсивности отказов $\lambda(t)$, метрологическая надёжность учитывает стохастические процессы изменений определённых метрологических свойств. Ведёт это к определению показателей метрологической надёжности измерительных приборов, путём анализа перехода стохастического процесса через заданный уровень установленных метрологических требований. И так имеем здесь дело с параметрическим описанием надёжности измерительных приборов.

Работа состоит из вступления, 6 глав, окончания и списка цитированной литературы.

Во вступлении коротко охарактеризовано состояние метрологической надёжности средств измерений и приведена основная цель работы.

В 1 главе даны необходимые определения и термины а также обоснован метод анализа надёжности измерительных приборов.

Во 2 главе описан аналитический метод определения показателей метрологической надёжности в случае, когда реализации процесса изменений метрологических свойств являются монотонными кусочно-непрерывными функциями времени.

В 3 главе, на основании известных положений из теории чувствительности и общей (классической) теории надёжности, представлены новые методы анализа метрологической надёжности. Дают они возможность определять показатели, когда известна надёжностная структура измерительных приборов и множество существенных параметров. Совмещение теории надёжности и чувствительности позволило учесть динамический аспект решаемой проблемы.

В 4 главе применено теорию марковских процессов для целей анализа надёжности измерительных приборов. Поставлена и защищена гипотеза о том, что процессы метрологических отказов являются процессами диффузионного типа. Позволило это использовать кинетические уравнения Фокера-Планка-Колмогорова для описания метрологической надёжности. Используется также метод характеристической функции Пугачёва и общие положения теории дискретных марковских цепей с конечным фазовым пространством.

В 5 главе коротко представлены методы теории восстановления и общей теории стохастических процессов пригодны для анализа метрологической надёжности. Приведена попытка обоснования нового направления в теории вероятностей для целей анализа надёжности измерительных приборов. Новое направление

основано не на колмогоровской аксиоматике а на дистрибуционной интерпретации основных понятий теории вероятностей и на классах абстракций.

В 6 главе дан статистический анализ исследований измерительных приборов с учётом надёжностных свойств. Приведены оценки точности показаний для целей описания метрологической надёжности.

Цитированная в конце литература касается прежде всего метрологической надёжности измерительных приборов и состоит из списка 125 позиций за годы 60-85.

ANALYSIS METHODS OF METROLOGICAL RELIABILITY

S u m m a r y

The work deals with the reliability of measurement instruments, being considered in the aspect of metrological requirements. Adequate methods and models are proposed for the analysis of the reliability. As opposed to the conventional methods of the standard reliability theory which are based on the failure rate functions $\lambda(t)$, the metrological reliability discussed in the work takes into consideration the random processes of variations of the metrological properties. An analysis of these processes, which are phenomena of drifting the properties out of the given limits (defined as the metrological requirements), makes possible to calculate the reliability indexes.

In another words, the parametric approach to the measurement instruments reliability is presented.

The work contains an introduction, six chapters, a concluding part and a bibliography. In the introductory part a state-of-art in the field of the metrological reliability is reviewed, and the target of the work is formulated.

In the Chapter 2, the analytical method for calculation of metrological reliability indexes is described, for the case when the realizations of the random process of metrological properties variations are monotonic and the in-intervals-continuous functions of the time.

New methods of the metrological reliability analysis are presented in the Chapter 3, that are based on the conventional relationships, known in the standard reliability theory. These methods are adequate for computing the metrological reliability indexes, having given the reliability structure of a measurement instrument, as well as the set of substantial parameters. A combination of the reliability theory and the theory of sensitivity made possible to extent the latter to a dynamic aspect (time functions).

In the Chapter 4 the Markovian processes theory is applied for the reliability analysis of the measurement instruments. Then the thesis of the work is formulated and justified, that the metrological failures processes are of a diffusion character ones. This makes possible to devise adequate methods for the measurement instruments reliability analysis, by applying kinetic equations of Fokker-Planck-Kolmogorov, with the method of the characteristic Pugatchev function. The general relationships, valid in

the discrete Markov chains theory are applied, too, with the finite phase space.

In the Chapter 5 a concise survey of renovation methods is given, as well as the methods of the general theory of random processes, for a metrological reliability analysis. An attempt of justification of the new approach to the probability theory in applications to measurement instruments reliability analysis is given. This new approach is based on the distributional interpretation of basic notions of this theory, and on the classes of abstraction, and not on the Kolmogorov axiom.

Chapter 6 contains the statistic analysis of experimental testing data of a few measurement instruments on their reliability properties. Estimator indexes of errors are quoted for a description of a metrological reliability.

The set of bibliography contains 125 items quoted in the work, being of the most importance, of 1960-1985 period of time.

P 3341 / 85 / 80

**WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:**

- 44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-90! Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN —
Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.