

Stanisław Majewski

Katedra Budowli Komunalnych

WYKREŚLNA METODA DOBORU WYMIARÓW
DWUTEOWEGO PRZEKROJU BELKI SPRĘŻONEJ

1. Wstęp

Jednym z zadań, jakie musi zostać rozwiązane w procesie projektowania kablobetonowych elementów zginanych, jest wyznaczenie geometrycznych wymiarów przekroju poprzecznego belki. Wymiary te muszą zapewniać dobranemu przekrojowi takie parametry jakie wynikły z warunków nieprzekroczenia naprężeń oraz (powyżej rozpiętości granicznej) z warunku wykorzystania dostępnego w danym przekroju mimośrod. Danymi wyjściowymi do rozwiązania tego zadania są:

- a) wysokość belki h ,
- b) wskaźnik zginania dla włókien dolnych W' ,
- c) położenie osi obojętnej określane wartością $\alpha' = \frac{v'}{h}$,
- d) wskaźnik wydajności przekroju $\varrho = \frac{i^2}{vv'}$.

Na podstawie tych czterech danych można obliczyć powierzchnię przekroju F_b oraz jego moment bezwładności J , co wraz z warunkiem na położenie osi obojętnej daje trzy równania. Ponieważ przekrój dwuteowy charakteryzuje się pięcioma niezależnymi wymiarami, dwa z tych wymiarów (najczęściej grubości stopek) muszą zostać założone, trzy zaś pozostałe wchodzi jako niewiadome do wspomnianego układu równań, które w tym przypadku są równaniami liniowymi. Rozwiązanie tego układu nie nastrocza

trudności chociaż nie zawsze już pierwsze przybliżenie daje przekrój zadawalający ze względów konstrukcyjnych. Zadanie komplikuje się znacznie dopiero w tych przypadkach, kiedy jeden z poziomych wymiarów przekroju dwuteowego ma z góry określoną względami konstrukcyjnymi wartość. Układ równań traci wtedy swój liniowy charakter, jedna zaś z niewiadomych (np. grubość górnej stopki) występuje kolejno w pierwszym, drugim i trzecim stopniu. Rozwiązanie takiego układu wiąże się już z trudnościami, wobec których projektant decyduje się albo na metodę prób albo na dobranie przekroju z pewnym nadmiarem. W niniejszej pracy zostaną przedstawione wzory oraz wykresy, które pozwalają w sposób bardzo szybki dobrać wymiary pewnego typu przekroju dwuteowego, jeżeli znana jest jego wysokość, wskaźnik zginania dla włókien dolnych, położenie osi obojętnej oraz wskaźnik wydajności Q .

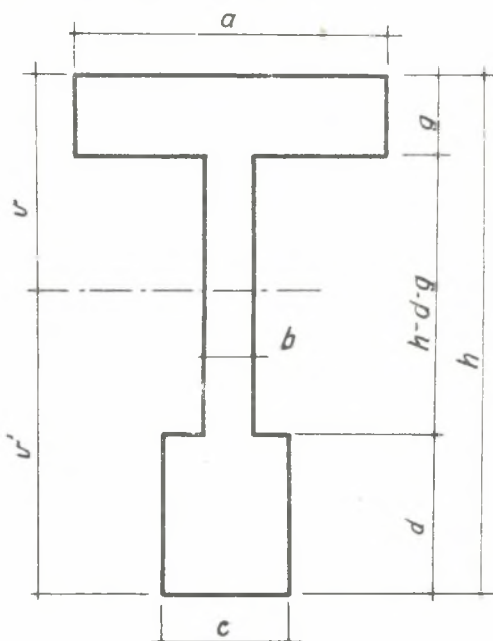
2. Wyznaczenie szerokości stopek oraz grubości środnika

Przedmiotem dalszych rozważań będzie przekrój dwuteowy, w którym grubości górnej i dolnej stopki są tak dobrane, że oś obojętna całego przekroju przechodzi przez środek ciężkości środnika (rys. 1).

Zadanie polega na określeniu wymiarów a , b oraz c przy danej powierzchni przekroju (F_p), danym położeniu osi obojętnej (v , v') oraz momencie bezwładności (J). Uprzednio, w trakcie wyznaczania wymienionych parametrów przekroju z warunków wytrzymałościowych została założona wysokość belki h . W celu rozwiązania zadania należy założyć grubość górnej stopki g .

Dla spełnienia warunku pokrywania się osi obojętnej przekroju z osią ciężkości środnika musi być:

$$v - g = v' - d.$$



Rys. 1

Wprowadzając:

$$v' = \kappa' h$$

$$v = (1 - \kappa') h \quad (1)$$

$$g = \tau h$$

uzyskamy

$$(1 - \kappa') h - \tau h = \kappa' h - d$$

$$d = (2\kappa' + \tau - 1) h \quad (2)$$

Powierzchnia rozpatrywanego przekroju wyniesie

$$F_b = a \cdot g + b \cdot (h - d - g) + c \cdot d \quad (3a)$$

Suma momentów statycznych względem osi obojętnej prowadzi do warunku

$$a \cdot g \cdot (v - 0,5g) = c \cdot d \cdot (v' - 0,5d) \quad (3b)$$

Moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej wyrazi się jako

$$J = \frac{a \cdot g^3}{12} + a \cdot g \cdot (v - 0,5g)^2 + \frac{b \cdot (h - g - d)^3}{12} + \frac{c \cdot d^3}{12} + c \cdot d \cdot (v' - 0,5d)^2. \quad (3c)$$

Dla dalszego rozwiązania przekształcimy nieco układ równań (3a), (3b), (3c), wprowadzając do niego zależności (1) i (2) oraz dodatkowo

$$F_b = \vartheta h^2, \\ J = F_b i^2 = \vartheta h^2 \rho v v' = \vartheta \rho \chi' (1 - \chi') h^4.$$

W ten sposób otrzymamy:

$$\tau a + 2(1 - \chi' - \tau) b + (2\chi' + \tau - 1) c = \vartheta h \quad (4a)$$

$$c = \frac{(2 - \tau - 2\chi') \tau}{(1 - \tau)(2\chi' + \tau - 1)} a \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} & [\tau^3 + 12\tau(1 - \chi' - 0,5\tau)^2] a + 8(1 - \chi' - \tau)^3 b + \\ & + [(2\chi' + \tau - 1)^3 + 3(2\chi' + \tau - 1)(1 - \tau)^2] c = \\ & = 12\rho \chi' (1 - \chi') h \cdot \vartheta. \end{aligned} \quad (4c)$$

Rozwiązując układ (4a), (4b), (4c) uzyskamy

$$a = \alpha_a \vartheta h, \quad (5)$$

$$b = \alpha_b \vartheta h, \quad (6)$$

$$c = \alpha_c \vartheta h. \quad (7)$$

We wzorach tych:

$$\alpha_a = \frac{(\beta_2 - \beta_1) \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \quad (8)$$

$$\alpha_b = \beta_1 - \frac{(\beta_2 - \beta_1) \beta_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \quad (9)$$

$$\alpha_c = \varphi \alpha_a \quad (10)$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - \tau}{\tau(3 - 2\chi' - 2\tau)}$$

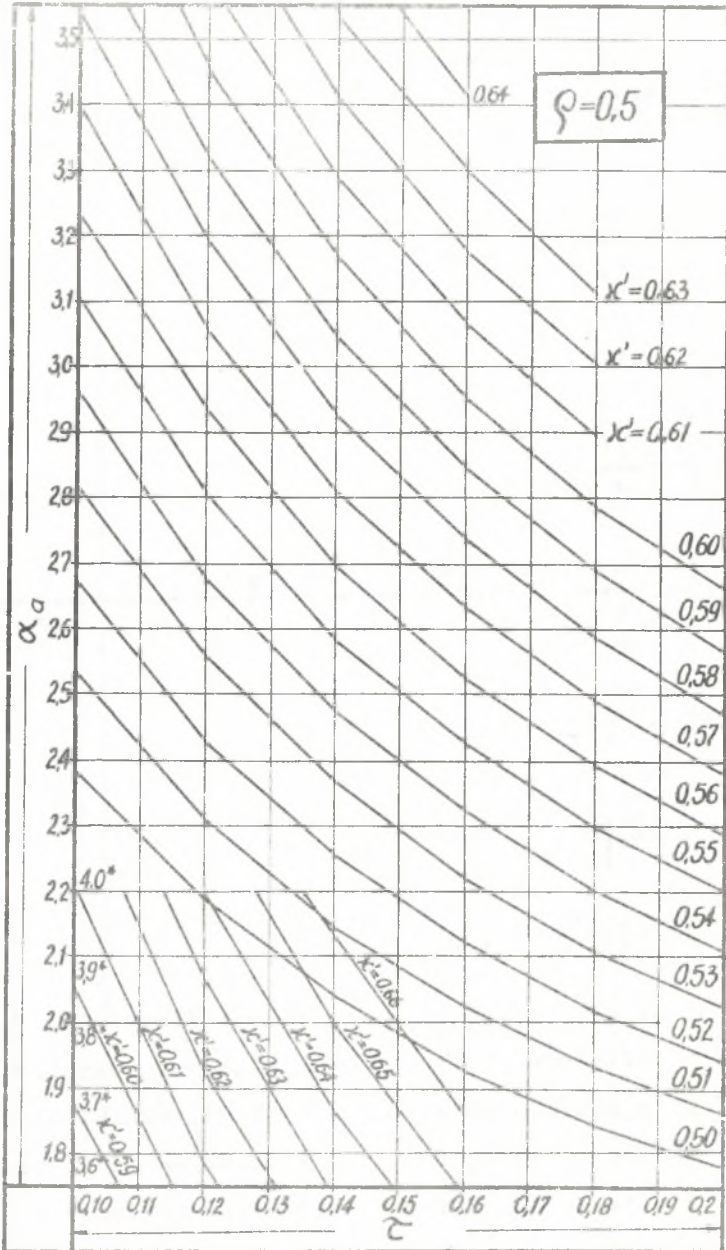
$$\alpha_2 = \frac{12(1 - \tau)(1 - \chi')\chi'\varrho}{\tau\{\tau^2(1 - \tau) + (2 - 2\chi' - \tau)[3(1 - \tau)(3 - 2\chi' - 2\tau) + (2\chi' - 1 + \tau)^2]\}}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2(1 - \chi' - \tau)}$$

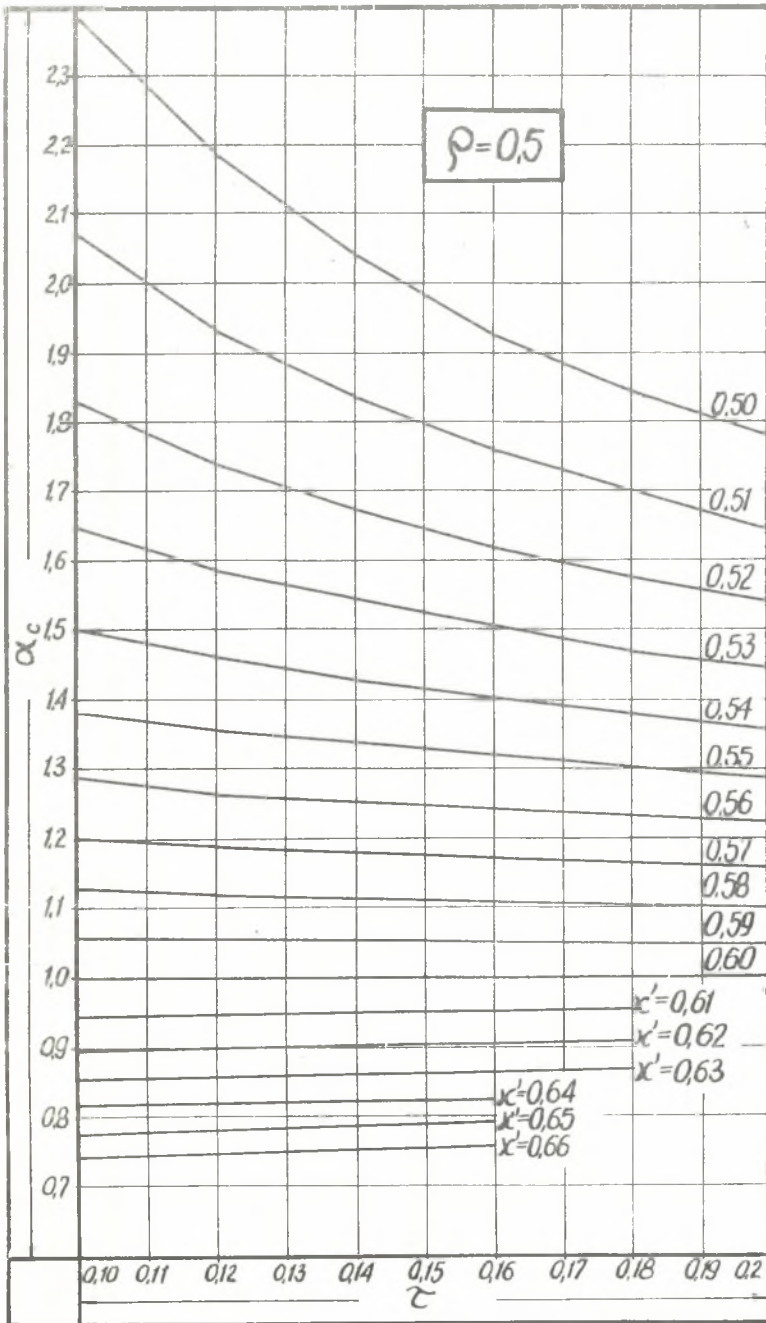
$$\beta_2 = \frac{3(1 - \chi')\chi'\varrho}{2(1 - \chi' - \tau)^2}$$

$$\varphi = \frac{\tau(2 - 2\chi' - \tau)}{(1 - \tau)(2\chi' - 1 + \tau)} \cdot$$

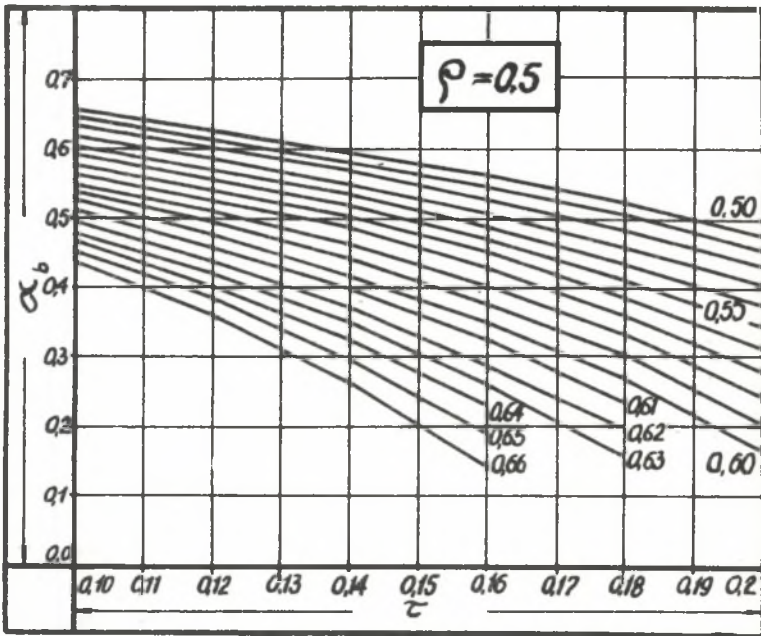
Przedstawione wzorami (8), (9) i (10) współczynniki α_a , α_b , i α_c zostały obliczone dla $\varrho = 0,5$ oraz sześciu wartości $\tau = 0,10 - 0,20$ przy χ' zmieniającym się co $0,01$. Wyniki tych obliczeń przedstawiono na rysunkach 2, 3 i 4. Uzyskane tą drogą wykresy pozwalają na łatwy i szybki dobór wymiarów przekroju poprzecznego belki dwuteowej. Sposób korzystania z tych wykresów ilustrują przykłady zamieszczone w dalszym ciągu pracy.



Rys. 2. Wartości współczynników α_a . *Opis rzędnych dla odcinków krzywych położonych w lewym dolnym rogu rysunku



Rys. 3. Wartości współczynników α_c



Rys. 4. Wartości współczynników α_b

3. Przykłady

Zadanie 1. Zaprojektować przekrój środkowy kablobetonowej belki wolnopodpartej o rozpiętości $l = 40,00$ m i obciążeniu $p = 1,0$ T/m.

Zakładając:

współczynnik strat reologicznych $\eta = 0,85$,

współczynnik wydajności przekroju $\rho = 0,5$,

ciężar objętościowy betonu $\gamma = 2,7$ T/m³,

markę betonu $R_w = 400$ kg/cm², dla której naprężenia dopuszczalne wynoszą: $k_0 = 180$ kg/cm², $k_0 = -16$ kg/cm², $k_1 = 140$ kg/cm², $k_2 = 160$ kg/cm², $k_1 = k_2 = 0$ kg/cm², wysokość przekroju $h = 1,5$ m,

otrzymamy następujące parametry przekroju poprzecznego belki:

$$W' = 0,157 \text{ m}^3,$$

$$\chi' = 0,575.$$

Obliczając $\psi = \frac{W}{\rho h^3(1-\chi')} = 0,219$ i przyjmując grubość górnej

stopki $g = 15 \text{ cm}$ uzyskujemy dla $\tau = g:h = 0,1$ i $\chi' = 0,575$ z wykresów na rysunkach 2; 3 i 4

$$\alpha_a = 3,47,$$

$$\alpha_b = 0,555,$$

$$\alpha_c = 1,165.$$

Grubość stopki dolnej wyznaczymy z zależności (2)

$$d = (2\chi' + \tau - 1) h = (1,15 + 0,1 - 1) 1,50 = 37,50 \text{ cm}.$$

Szerokości stopek oraz grubość środnika obliczymy ze wzorów (5), (6) i (7)

$$a = 3,47 \cdot 0,219 \cdot 1,50 = 114 \text{ cm},$$

$$b = 0,555 \cdot 0,219 \cdot 1,50 = 18,2 \text{ cm},$$

$$c = 1,165 \cdot 0,219 \cdot 1,50 = 38,2 \text{ cm}.$$

Przekrój przedstawiony na rysunku 5 ma następujące parametry:

$$F_b = 0,490 \text{ m}^2,$$

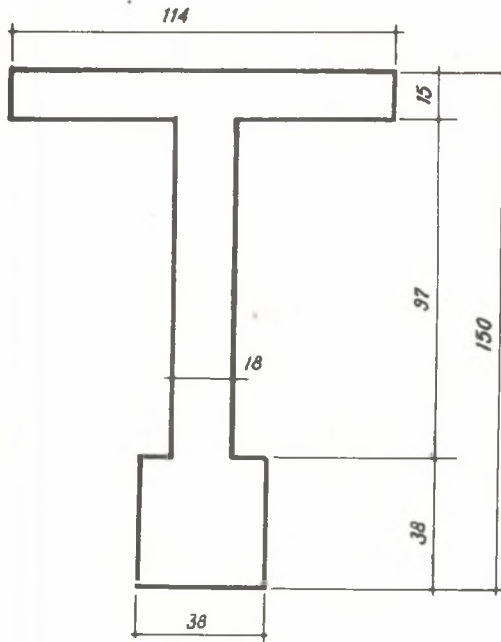
$$\psi = 0,218$$

$$\nu' = 0,863$$

$$\chi' = 0,575$$

$$J = 0,1378 \text{ m}^4,$$

$$W' = 0,1595 \text{ m}^3.$$



Rys. 5

Jak widać zgodność z danymi wyjściowymi jest bardzo dobra. Pewne rozbieżności są spowodowane zaokrągleniami przyjętymi w wymiarach przekroju.

Zadanie 2. Może się zdażyć, że jeden z wymiarów poziomych przekroju dwuteowego ma narzuconą względami konstrukcyjnymi wartość. Przyjmijmy, że szerokość półki górnej przekroju poszukiwanego w zadaniu 1 musi wynosić 90 cm. Poszukujemy więc przekroju, dla którego:

$$W' = 0,157 \text{ m}^3,$$

$$\chi' = 0,575,$$

$$F_b = 0,492 \text{ m}^2,$$

$$h = 1,50 \text{ m},$$

przy narzuconej szerokości półki górnej $a = 90 \text{ cm}$, wtedy jak poprzednio $\vartheta = 0,219$.

W oparciu o wykresy na rysunkach 2, 3 i 4 zadanie może być rozwiązane w bardzo prosty sposób.

Wiedząc, że

$$a = \alpha_a \cdot h = \alpha_a \cdot 0,219 \cdot 1,50 = 0,90$$

znajdujemy

$$\alpha_a = \frac{0,90}{0,328} = 2,745.$$

Z wykresu na rys. 2 odczytujemy, że dla $\chi' = 0,575$ α_a wynosi 2,745 jeżeli $\tau = 0,155$.

Dla $\tau = 0,155$ odczytujemy dodatkowo

$$\alpha_b = 0,43$$

$$\alpha_c = 1,14.$$

Poszukiwany przekrój winien więc mieć następujące wymiary:

$$a = 90 \text{ cm,}$$

$$b = 14,1 \text{ cm,}$$

$$c = 37,4 \text{ cm,}$$

$$g = 23,2 \text{ cm,}$$

$$d = 45,8 \text{ cm.}$$

Przekrój przedstawiony na rys. 6 ma następujące parametry:

$$F_b = 0,4904 \text{ m}^2,$$

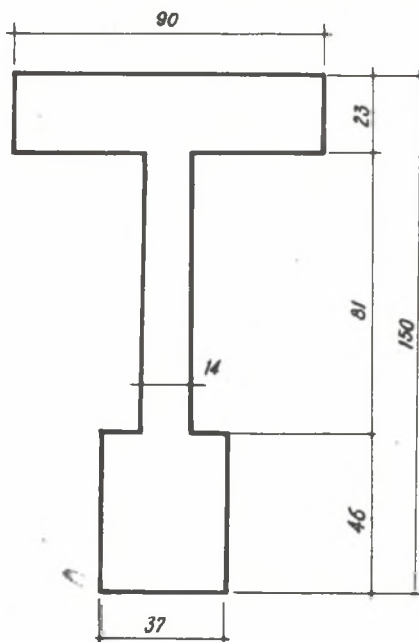
$$\psi = 0,218,$$

$$\nu' = 0,864 \text{ m,}$$

$$\chi' = 0,575,$$

$$J = 0,1347 \text{ m}^4,$$

$$W = 0,156 \text{ m}^3.$$



Rys. 6

Również w tym przypadku zgodność wyników z parametrami wynikającymi z warunków wytrzymałościowych jest zadowalająca.

Streszczenie

W pracy podano wzory oraz wykresy pozwalające na łatwy i szybki dobór wymiarów pewnego typu przekroju dwuteowego, jeżeli znane są następujące jego parametry:

a) wysokość h ,

b) wskaźnik wydajności $g = \frac{i^2}{v v'}$,

c) wskaźnik tężości $\vartheta = \frac{F_b}{h^2}$,

d) położenie osi obojętnej określone zależnością $\chi' = \frac{v'}{h}$.

Wzory te mogą znaleźć zastosowanie przy projektowaniu sprężonych elementów zginanych.

НАЧЕРТАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ПОДБОРА РАЗМЕРОВ ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ БАЛКИ

Р е з ю м е

В работе представлены формулы а также диаграммы позволяющие легко и быстро подобрать размеры двутаврового сечения в случае когда известны следующие его параметры:

а) высота h ,

б) показатель производительности $g = \frac{1}{\psi \psi'}$,

в) показатель плотности $\psi = \frac{F_b}{h^2}$

г) положение нейтральной оси определённое значением $\chi' = \frac{\psi'}{h}$.

Эти формулы могут быть использованы при проектирование сопрягаемых изгибаемых элементов.

A GRAPHIC METHOD OF DETERMINATION OF DIMENSIONS
OF A I-SHAPED CROSS SECTION OF A PRESTRESSED BEAM

S u m m a r y

The formulas and diagrams given in this paper make possible quick and easy determination of a particular I-shaped cross section sizes when the following parameters are known:

a) the depth h ,

b) the efficiency factor $g = \frac{1}{\psi \psi'}$,

c) the "stoutnes" factor $\psi = \frac{F_b}{h^2}$,

d) the position of the neutral axis determined by the factor $\chi' = \psi' : h$.

These formulas can be applicated in designing of prestressed beams.