ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: INŻYNIERIA SANITARNA z. 16 Nr kol. 278

Mieczysław Węgrzyn
Katedra Budowli Komunalnych

CZĘSTOŚĆ DRGAŃ SWOBODNYCH BELEK SPRĘŻONYCH OSIOWO

Wstęp

Konstrukcje wstępnie sprężone często poddawane są obciążeniom dynamicznym (mosty, estakady, fundamenty maszyn itp.). Zachodzi więc potrzeba wykonywania obliczeń dynamicznych takich konstrukcji, a w szczególności określenia częstości drgań swobodnych.

Liczne badania [1], [3], [4], [5], [6], wskazują, że częstość drgań swobodnych belek sprężonych różni się od częstości drgań belek niesprężonych. Brak jednak zgodności co do przyczyn powstawania i wielkości tych różnic. E. Sechniaszwili [6] uważa, że przyczyną zmiany częstości drgań są rysy, a właściwie ich brak w elementach wstępnie sprężonych. Autorzy pracy [5] uważają natomiast, że przyczyną zmiany częstości drgań jest zwiększenie modułu sprężystości betonu (ściślej dynamicznego modułu sprężystości betonu) w konstrukcjach wstępnie sprężonych oraz zmiany strukturalne w betonie powstałe w wyniku sprężenia. Tymczasem główną przyczyną zmiany częstości drgań w elementach wstępnie sprężonych jest oddziaływanie cięgna na beton (ogólnie materiał poddany sprężeniu) co zostało uwzględnione w pracy [3].

Przedstawione rozważania dotyczyć będą belek sprężonych osiowo. Wpływ sprężenia na częstość drgań swobodnych belek sprężonych mimośrodowo określony zostanie w oddzielnym opracowaniu.

Założenia

1. Rozpatruje się belkę sprężoną przy użyciu cięgien (kabli, strun) nie wychodzących na zewnątrz przekroju.

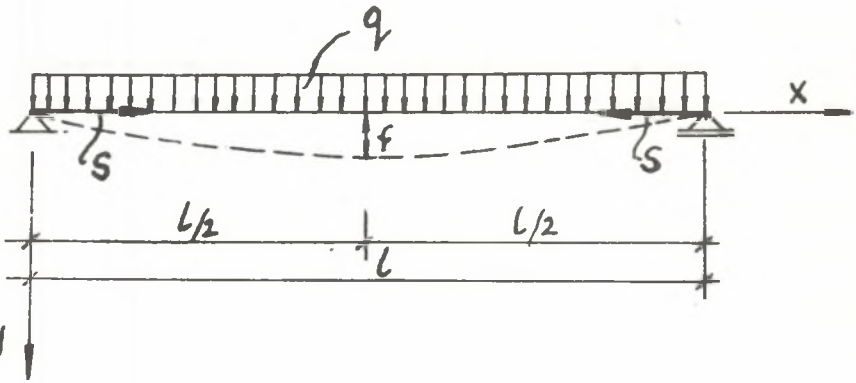
2. Zakłada się ciągły styk cięgna z belką, co ma miejsce w większości realizowanych obecnie konstrukcji wstępnie sprężonych.

3. Zakłada się, że naprężenia i odkształcenia mieścić się będą w zakresie sprężystym oraz że belka nie ulegnie podczas drgań zarysowaniu.

4. Sztywność EJ przyjęto jak dla belki jednorodnej, pomijając sztywność cięgna jako bardzo małą w porównaniu ze sztywnością belki.

1. Częstość podstawowa drgań swobodnych belek sprężonych osiowo

Do rozważań przyjęto jednoprzęsłową belkę wolnopodpartą, obciążoną równomiernie (rys. 1). Belka jest sprężona cięgnem biegnącym wzdłuż jej osi. Cięgno zostało napięte siłą o wartości S.

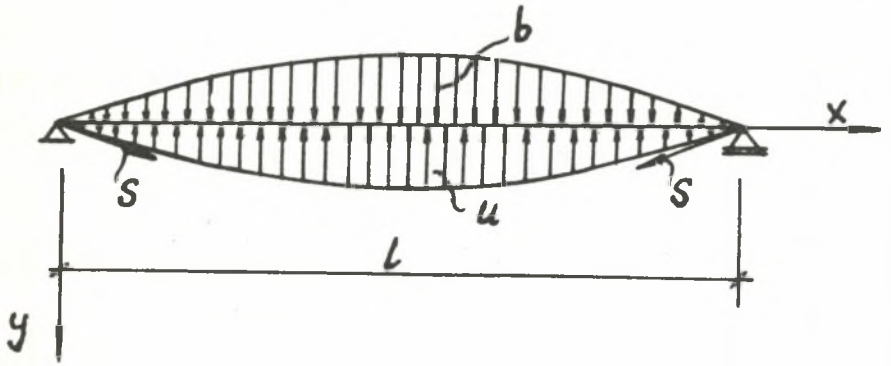


Rys. 1. Schemat statyczny i schemat obciążenia belki

Równanie osi odkształconej belki przyjęto w postaci sinusoidy

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{1}$$

w którym f spełnia rolę parametru, będąc nieznanym ugięciem belki w połowie jej rozpiętości.



Rys. 2. Schemat obciążenia belki podczas drgań

Obciążenie belki podczas drgań (rys. 2) stanowią siły bezwładności

$$b_{(x)} = \frac{q}{g} \alpha^2 y = m y \tag{2}$$

oraz oddziaływanie cięgna na beton

$$u_{(x)} = \frac{S}{r} \tag{3}$$

odniesione do jednostki długości, przy czym:

q - obciążenie równomiernie rozłożone,

g - przyspieszenie ziemskie,

α - częstotliwość drgań swobodnych,

y - rzędne osi odkształconej,

$\bar{m} = \frac{q}{g}\alpha^2$,

S - siła sprężająca,

r - promień krzywizny osi odkształconej.

Siły bezwładności wywołają ugięcie belki, które w połowie rozpiętości jest równe f_b. Ugięcie to zostaje zmniejszone o wartość f_u przez poprzeczne oddziaływanie cięgna na beton. Siła S działając w osi belki nie spowoduje jej ugięcia. Możemy więc napisać

$$f_b - f_u = f. \tag{4}$$

Biorąc pod uwagę (1) i (2) mamy

$$b_{(x)} = \bar{m}\, f \sin\frac{\pi x}{l}. \tag{5}$$

Pole wykresu obciążeń siłami bezwładności wyniesie

$$B = \int_0^l \bar{m}\, f \sin\frac{\pi x}{l}\, dx = \frac{2\,\bar{m}\, f\, l}{\pi},$$

a moment zginający w połowie rozpiętości

$$M_o = \frac{\bar{m}\, f\, l}{\pi}\frac{l}{2} - \frac{\bar{m}\, f\, l}{\pi}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{\pi}\right) = \frac{\bar{m} f l^2}{\pi^2}.$$

Przyjmując, że momenty zginające w belce również zmieniają się wg sinusoidy napiszemy

$$M_x = M_o \sin\frac{\pi x}{l} = \frac{\bar{m} f l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Pole wykresu momentów

$$M = \int_0^l \frac{\bar{m} f l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \, dx = \frac{2 \, \bar{m} f l^3}{\pi^3}$$

i moment wtórny w połowie rozpiętości

$$\bar{M}_o = \frac{\bar{m} f l^3}{\pi^3} \frac{l}{2} - \frac{\bar{m} f l^3}{\pi^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{\pi}\right) = \frac{\bar{m} f l^4}{\pi^4} .$$

Ugięcie belki w połowie rozpiętości od obciążenia siłami bezwładności

$$f_b = \frac{\bar{m} f l^4}{EJ \, \pi^4} \tag{6a}$$

lub

$$f_b = \frac{q \alpha^2 \, f l^4}{g \, EJ \, \pi^4} . \tag{6b}$$

Wielkość oddziaływania cięgna na beton u, jest zależna od promienia krzywizny osi odkształconej i zmienia się wzdłuż długości belki.

Mając równanie osi odkształconej w postaci

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

otrzymamy

$$y' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \Bigg|_{x = \frac{l}{2}} = 0,$$

$$y'' = - f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \Bigg|_{x = \frac{l}{2}} = - f \frac{\pi^2}{l^2} .$$

Promień krzywizny osi odkształconej w połowie rozpiętości belki

$$r_o = \frac{l^2}{f\pi^2} \tag{7}$$

a oddziaływanie cięgna na beton w środku belki

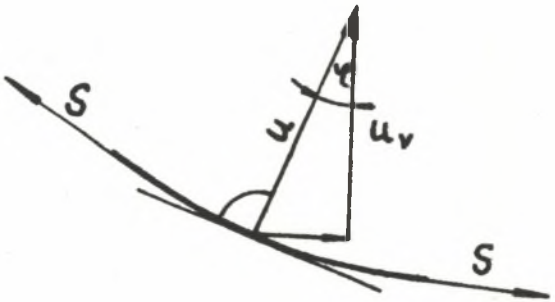
$$u_o = S\, f \frac{\pi^2}{l^2} . \tag{8}$$

Przyjęto, że oddziaływanie u zmienia się wzdłuż belki wg sinusoidy. Wtedy

$$u_{(x)} = u_o \sin \frac{\pi x}{l} \tag{9a}$$

lub korzystając bezpośrednio ze wzoru na promień krzywizny (przyjmując podobnie jak przy wyprowadzeniu równania różniczkowego osi odkształconej $y' = 0$)

$$u_{(x)} = \frac{S}{\frac{1}{|y''|}} = S\, f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} . \tag{9b}$$



Rys. 3. Schemat oddziaływania cięgna na beton

Oddziaływania te są skierowane prostopadle do osi odkształconej belki. Wobec małych zazwyczaj amplitud drgań można utożsamić oddziaływanie z jego składową pionową (rys. 3), przy $\varphi \cong 0$

$$u_v = u \cos \varphi \cong u . \tag{10}$$

Pole wykresu oddziaływania

$$U = \int_0^l Sf \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} dx = 2Sf \frac{\pi}{l}$$

i moment zginający w połowie rozpiętości belki

$$M_o \; Sf \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} - Sf \frac{\pi}{f} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{\pi}\right) = Sf.$$

Przyjmując podobnie jak poprzednio, że momenty zginające w belce zmieniają się wg sinusoidy możemy napisać

$$M_x = M_o \sin \frac{\pi x}{l} = Sf \sin \frac{\pi x}{l} .$$

Pole wykresu momentów

$$M = \int_0^l Sf \sin \frac{\pi x}{f} dx = \frac{2 \, Sfl}{\pi}$$

i moment wtórny w połowie rozpiętości

$$M_o = \frac{Sfl}{\pi} \frac{l}{2} - \frac{Sfl}{\pi} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{\pi}\right) = \frac{Sf \, l^2}{\pi^2} .$$

Ugięcie belki w połowie rozpiętości od oddziaływania cięgna

$$f_u = \frac{Sfl^2}{EJ \, \pi^2} . \tag{11}$$

Podstawiając (6b) i (11) do (4) napiszemy

$$\frac{q\alpha f\, l^4}{g\, EJ\, \pi^4} - \frac{S\, fl^2}{EJ\, \pi^2} = f,$$

stąd częstotliwość podstawowa drgań swobodnych belek sprężonych osiowo

$$\alpha = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ\, g}{q}}\sqrt{1 + \frac{S}{S_k}}, \tag{12}$$

gdzie $S_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ jest umowną siłą krytyczną (eulerowską), gdyż jak wiadomo dla elementów sprężonych o ciągłym styku cięgna rzeczywista siła krytyczna wynosi

$$P_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

przy $k \longrightarrow \infty$ [2].

Korzystając z zależności $n = \frac{\alpha}{2\pi}$ obliczymy częstość podstawową drgań swobodnych belek sprężonych osiowo

$$n = \frac{\pi}{2\, l^2}\sqrt{\frac{EJ\, g}{q}}\sqrt{1 + \frac{S}{S_k}} \tag{13a}$$

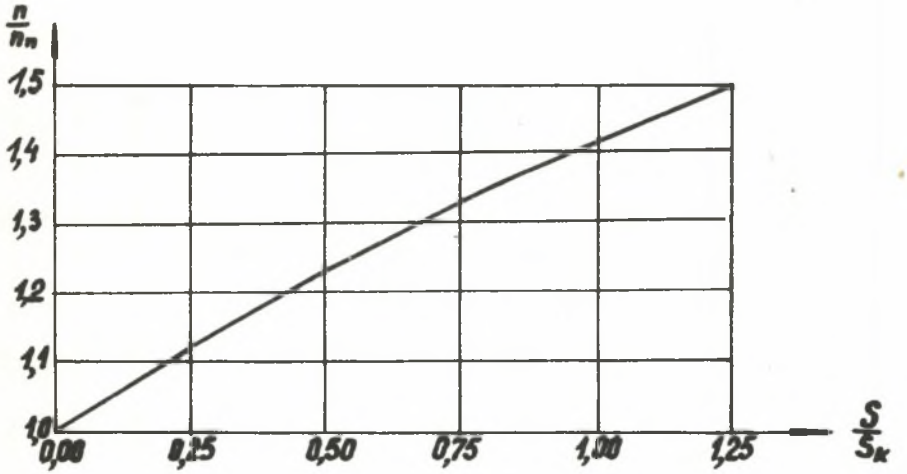
lub

$$n = n_n\sqrt{1 + \frac{S}{S_k}}, \tag{13b}$$

gdzie $n_n = \frac{\pi}{2\, l^2}\sqrt{\frac{EJ\, g}{q}}$ jest częstością podstawową drgań belek niesprężonych.

Wzory (13) uzyskał inną metodą T. Hop, [3].

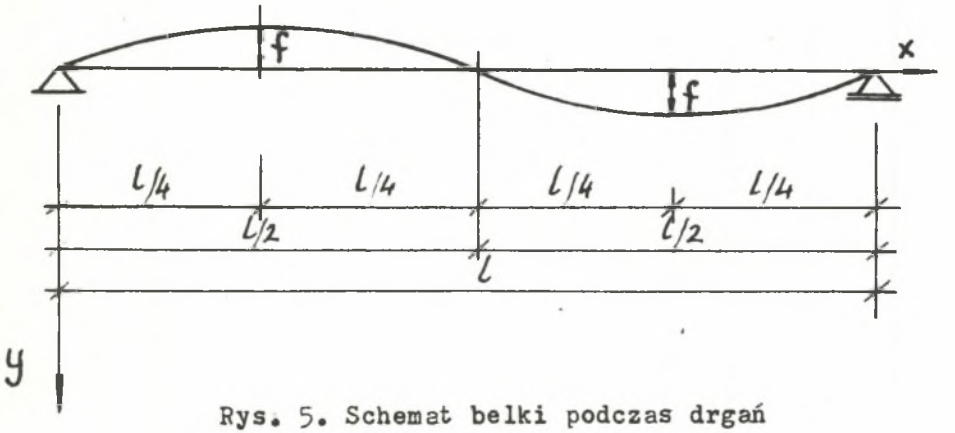
Zależność częstości podstawowej drgań swobodnych belek sprężonych osiowo od stopnia sprężenia przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Zależność między stosunkami $\frac{S}{S_k}$ i $\frac{n}{n_n}$

2. Częstość drgań swobodnych drugiego i wyższych rzędów belek sprężonych osiowo

Częstość drgań drugiego rzędu obliczymy podobnie jak częstość podstawową drgań posługując się zależnością (4).



Rys. 5. Schemat belki podczas drgań

Podczas drgań oś odkształcona przyjmie w przybliżeniu kształt sinusoidy o równaniu

$$y = f \sin \frac{2\pi x}{l}, \tag{14}$$

gdzie f jest nieznanym ugięciem belki w odległości 1/4 od podpory.

Przez analogię z (1), (2) i (3) oraz (6b) i (11) otrzymamy

$$f_b = \frac{q\alpha^2 f l^4}{2^4 g EJ \pi^4} \tag{15}$$

oraz

$$f_u = \frac{S f l^2}{2^2 EJ \pi^2}. \tag{16}$$

Po podstawieniu (15) i (16) do (4) otrzymamy

$$\frac{q\alpha^2 f l^4}{2^4 g EJ \pi^4} - \frac{S f l^2}{2^2 EJ \pi^2} = f$$

skąd po przekształceniach, częstotliwość drgań drugiego rzędu

$$\alpha_2 = \frac{2^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ g}{q}} \sqrt{1 + \frac{S}{2^2 S_k}} \tag{17}$$

czyli ogólnie częstotliwość drgań wyższych rzędów belek sprężonych odsowo

$$\alpha_i = \frac{i2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ g}{q}} \sqrt{1 + \frac{S}{i^2 S_k}}, \tag{18}$$

gdzie $i = 1, 2, 3$.

Częstość drgań swobodnych wyższych rzędów belek sprężonych osiowo określimy podobnie jak poprzednio

$$n_i = i^2 n_n \sqrt{1 + \frac{S}{i^2 S_k}} \tag{19a}$$

lub

$$n_i = n_{ni} \sqrt{1 + \frac{S}{S_{ki}}} , \tag{9b}$$

gdzie: $n_{ni} = i^2 n_n$ jest częstością drgań swobodnych i-tego rzędu belki niesprężonej,

zaś

$$S_{ki} = \frac{i^2 \pi^2 EJ}{l^2} .$$

Wzory (19) są oczywiście ważne dla wyznaczenia częstości podstawowej drgań swobodnych belek sprężonych osiowo (dla i = 1).

3. Przykład

Rozpatrzmy belkę wolnopodpartą z betonu marki "400" (γ = = 2500 kG/m^3, E = 330 000 kG/cm^2) o rozpiętości 500 cm i przekroju prostokątnym o wymiarach 12 x 24 cm, wstępnie sprężoną siłą S = 38000 kG, obciążoną ciężarem własnym.

$$J = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13824 \text{ cm}^4$$

$$q = 12 \cdot 24 \cdot 0{,}0025 = 0{,}72 \text{ kG/cm}.$$

W obliczeniu wartości J i q pominięto obecność cięgna w belce, przyjmując pełny przekrój betonowy. Również E przyjęto jak dla przekroju betonowego, zgodnie z założeniem 4.

Częstość podstawowa drgań swobodnych:

- belki niesprężonej

$$n_n = \frac{\pi}{2\,l^2}\sqrt{\frac{EJg}{q}} = \frac{\pi}{2\,.\,500^2}\sqrt{\frac{330000\,.\,13824\,.\,981}{0{,}72}} =$$

$$= 15{,}70 \text{ Hz},$$

- belki sprężonej

$$S_k = \frac{\pi^2\,EJ}{l^2} = \frac{\pi^2\,.\,330000\,.\,13824}{500^2} = 180\,000 \text{ kG},$$

$$n = n_n\sqrt{1 + \frac{S}{S_k}} = 15{,}70\sqrt{1 + \frac{38000}{180000}} = 15{,}70\,.\,1{,}1 =$$

$$= 17{,}27 \text{ Hz}.$$

Wynik ten jest zgodny z wynikami badań opisanymi w [3],[4],[5]

Częstość drgań swobodnych drugiego rzędu:

- belki niesprężonej

$$n_{n2} = 2^2\,.\,n_n = 4\,.\,15{,}70 = 62{,}80 \text{ Hz},$$

- belki sprężonej

$$n_2 = n_{n2}\sqrt{1 + \frac{S}{2^2\,S_k}} = 62{,}80\,.\,1{,}025 = 64{,}36 \text{ Hz}.$$

Częstość drgań swobodnych trzeciego rzędu:

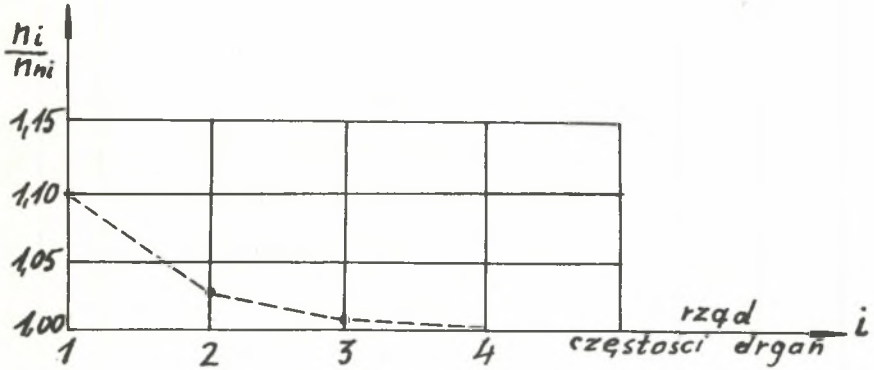
- belki niesprężonej

$$n_{n3} = 3^2\,.\,15{,}70 = 141{,}30 \text{ Hz},$$

- belki sprężonej

$$n_3 = n_{n3} \sqrt{1 + \frac{S}{3^2 S_k}} = 141{,}30 \cdot 1{,}011 = 142{,}85 \text{ Hz.}$$

W oparciu o obliczone częstości drgań swobodnych sporządzono wykres wartości stosunku $\frac{n_i}{n_{ni}}$ dla kolejnych drgań harmonicznych (rys. 6).



Rys. 6. Zmienność stosunku $\frac{n_i}{n_{ni}}$ dla kolejnych drgań harmonicznych

4. Wnioski

1. Częstość drgań swobodnych belek sprężonych osiowo wzrasta wraz ze wzrostem siły sprężającej. Teoretycznie wzrost ten jest nieograniczony, praktycznie (z uwagi na ograniczoną wytrzymałość materiału) dochodzi do około 15% częstości drgań belek niesprężonych.
2. Częstości drgań swobodnych wyższych rzędów zbliżają się do częstości drgań swobodnych belek niesprężonych.

LITERATURA

[1] DENKHAUS G., DÜCK G.: Über das Verhalten von Spannbetonbalken bei Biegeschwingungen. Beton und Stahlbetonbau, nr 3/1952.

[2] EIMER C.: O stateczności ustrojów sprężonych kablami swobodnymi. Archiwum Inżynierii Lądowej nr 3-4/1955.

[3] HOP T.: Drgania belek sprężonych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika nr 11, Gliwice 1962.

[4] HOP T., WĘGRZYN M. i inni: Podstawy doświadczalno-teoretyczne zastosowania betonów łupkoporytowych w konstrukcjach obciążonych dynamicznie. Sprawozdanie z badań, Politechnika Śląska, Gliwice 1968.

[5] JAMES M.L., LUTES L.D., SMITH G.M.: Dynamic Properties of Reinforced and Prestressed Concrete Structural Components. Journal of the American Concrete Institute, no 11/1964, and no 6 part two/1965.

[6] SECHMIASZWILI E.: Kolebanija uprugich sistem. Tbilisi 1966.

[7] WIERZBICKI W.: Zadania z teorii naprężeń wyboczenia i drgań PWN, Warszawa 1953.

S t r e s z c z e n i e

W artykule określono częstość drgań swobodnych belek sprężonych osiowo posługując się metodą momentów wtórnych. Z otrzymanych tą drogą wzorów na częstość drgań wynika, że jest ona wyższa w belkach wstępnie sprężonych osiowo, w porównaniu z częstością drgań belek niesprężonych i zmienia się wraz ze zmianą wielkości siły sprężającej.

ЧАСТОТА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК,
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ПО ОСИ

Р е з ю м е

В статье определено частоту предварительно напряжённых по оси балок используя метод вторичных моментов. Из полученных таким образом формул следует, что эта частота выше в балках предварительно напряжённых по оси по сравнению с частотой колебаний балок, не имеющих предварительных напряжений, и изменяется вместе с изменением величины предварительного напряжения.

NATURAL FREQUENCY OF VIBRATIONS
OF AXIALLY PRESTRESSED BEAMS

S u m m a r y

In the article the natural frequency of vibrations of axially prestressed beams has been determined using the metod of secondary moments. By means of formulas on the natural frequency of vibrations it is evident that frequency is higher in axially prestressed beams than in non prestressed beams and it changes with the quantity change of exciting force.