

Bogusław ŁAZARZ  
Grzegorz WOJNAR

## IDENTYFIKACJA STRAT MOCY W PRZEKŁADNI ZĘBATEJ WALCOWEJ

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono sposób modelowania strat mocy w przekładni zębatej walcowej. Otrzymane w wyniku symulacji komputerowych wartości sprawności porównano z wynikami badań laboratoryjnych.

## IDENTIFICATION OF POWER LOSS IN SPUR GEAR

**Summary.** The paper presents a manner of modeling power loss in toothed gear. Efficiency of a gear measured on a testing stand and obtained by computer simulation has been compared.

### 1. WSTĘP

Zastosowanie w analizie dynamicznej i projektowaniu modelu układu napędowego z przekładnią zębatą wymaga przeprowadzenia identyfikacji parametrów tego modelu. Jednym z tych parametrów jest współczynnik strat mocy, który wpływa na sprawność przekładni. Identyfikacja tego współczynnika ma istotny wpływ na uzyskane wyniki badań symulacyjnych i ich zgodność pod względem jakościowym i ilościowym z doświadczeniem przeprowadzonym na obiekcie rzeczywistym.

W przekładniach zębatych moc tracona jest głównie na skutek: tarcia i tłumienia drgań w warstwie oleju pomiędzy zębami, rozbryzgiwania oleju i tarcia w łożyskach. Ze względu na przypadkowość i różnorodność przyczyn rozpraszania energii w przekładni zębatej dokładny opis matematyczny sił oporów jest znacznie utrudniony.

### 2. MODEL DYNAMICZNY PRZEKŁADNI ZĘBATEJ W UKŁADZIE NAPĘDOWYM

Schemat modelu dynamicznego przekładni zębatej w układzie przeniesienia napędu przedstawiono na rys. 1. Równania ruchu wyznaczono z następującej ogólnej zależności:

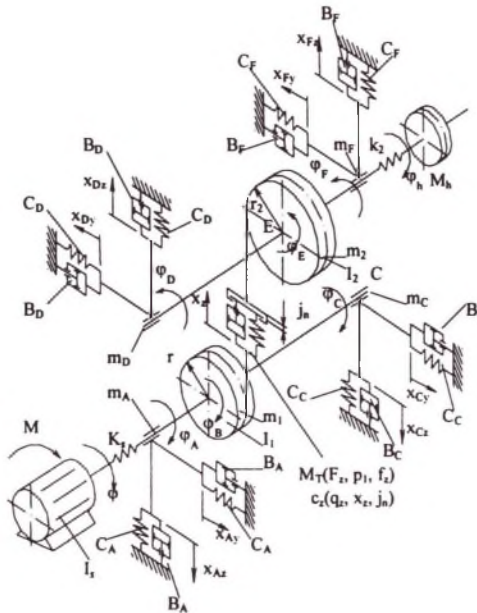
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \hat{Q}_i - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1)$$

gdzie:

$E_K$  - energia kinetyczna,

$V$  - energia potencjalna,

$D$  - energia dyssypacji,  
 $Q_i$  - siły uogólnione,  
 $q_i$  - współrzędne uogólnione.



Rys. 1. Schemat modelu dynamicznego przekładni zębatej w układzie napędowym  
 Fig. 1. Dynamic model of gearbox in power transmission system

### 3. STRATY MOCY SPOWODOWANE ROZBRYZGIWANIEM OLEJU

Straty wywołane rozbryzgiwaniem oleju określono na podstawie [1, 2]. Dla jednego koła zębatego zanurzonego w oleju na głębokość  $H$  bezwymiarowy współczynnik strat na rozbryzgiwanie oleju  $s_o$  wyznacza się z następujących zależności empirycznych, które są poprawne jedynie w przyjętym układzie jednostek:

dla  $H \leq 25$  mm i  $v \geq 10$  m/s

$$s_o = \frac{vbH\sqrt{v}}{7 \cdot 10^5 N_1}, \quad (2)$$

dla  $H \leq 25$  mm i  $v < 10$  m/s, a także dla  $25 < H < 50$  mm niezależnie od prędkości współczynnik strat wynosi

$$s_o = \frac{v^{1.5}bH\sqrt{v}}{20 \cdot 10^5 N_1}, \quad (3)$$

dla  $H > 50$  mm niezależnie od prędkości

$$s_o = \frac{v^2bH\sqrt{v}}{70 \cdot 10^5 N_1}, \quad (4)$$

gdzie :

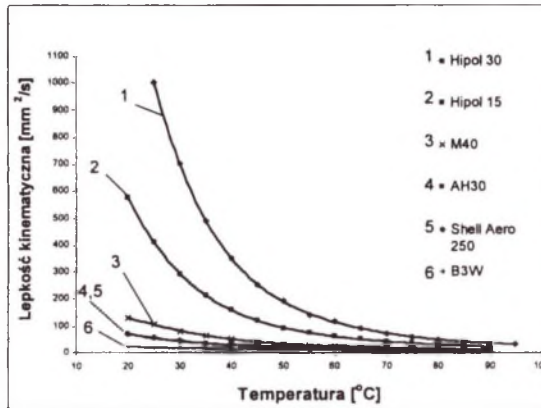
- $v$  – prędkość obwodowa [m/s],
- $b$  – szerokość koła [mm],
- $H$  – głębokość zanurzenia [mm],
- $N_l$  – moc przenoszona [kW],
- $\nu$  – lepkość kinematyczna oleju [ $\text{mm}^2/\text{s}$ ].

Bezwzględna wartość mocy traconej na skutek rozbryzgiwania oleju  $\Delta N_o$  wynosi:

$$\Delta N_o = s_o \cdot N_l . \quad (5)$$

Analizując zależności 2÷5, można zauważyć, że wartość mocy traconej na rozbryzgiwanie oleju nie zależy od przenoszonej przez przekładnię mocy.

Występująca we wzorach 2÷4 lepkość kinematyczna  $\nu$  oleju przekładniowego silnie zależy od jego temperatury. Na podstawie danych zawartych w [1] przedstawiono zmiany lepkości kinematycznej  $\nu$  oleju w funkcji jego temperatury (rys. 2).



Rys. 2. Lepkość różnych olejów w funkcji temperatury

Fig. 2. Viscosity of oils as a function of temperature

Na potrzeby modelowania aproksymowano te zależności wielomianami (6). Ich współczynniki zestawiono w tabelicy 1. Zastosowano aproksymację wielomianową (wzór 6), która wykazywała najlepszą korelację z danymi przedstawionymi na rys. 2.

$$\nu = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot T^2 + a_3 \cdot T^3 + a_4 \cdot T^4 + a_5 \cdot T^5 \quad [\text{mm}^2/\text{s}] , \quad (6)$$

gdzie:

$T$  - temperatura oleju (20÷90) [°C],

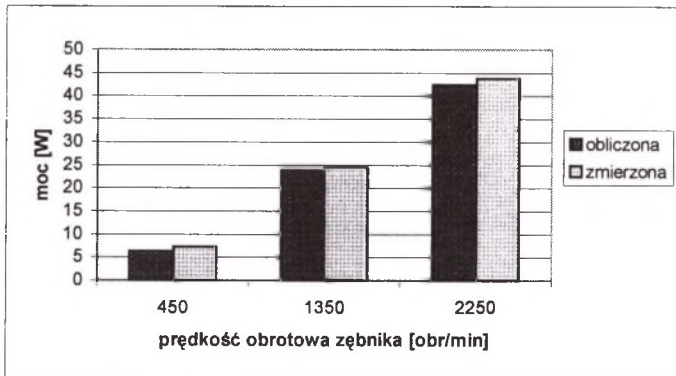
$a_5 \div a_0$  – współczynniki wielomianu podane w tabelicy 1.

Tablica 1

Współczynniki wielomianów aproksymujących zmiany lepkości kinematycznej olejów

| Rodzaj oleju   | $a_5$               | $a_4$               | $a_3$               | $a_2$               | $a_1$              | $a_0$             |
|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|-------------------|
| Hipol 30       | -1,76832801<br>e-06 | +6,70219002<br>e-04 | -1,02028855<br>e-01 | +7,86486182<br>e+00 | -3,1166220<br>e+02 | +5,225773<br>e+03 |
| Hipol 15       | -9,38461539<br>e-07 | +3,31646749<br>e-04 | -4,72559121<br>e-02 | +3,43248607<br>e+00 | -1,2973235<br>e+02 | +2,124783<br>e+03 |
| M40            | +1,69092641<br>e-07 | -4,06445005<br>e-05 | +2,93237418<br>e-03 | +1,01777741<br>e-03 | -8,2833829<br>e+00 | +2,782973<br>e+02 |
| AH30           | -1,48969755<br>e-07 | +4,97296997<br>e-05 | -6,55810205<br>e-03 | +4,33061685<br>e-01 | -1,4901427<br>e+01 | +2,396799<br>e+02 |
| Shell Aero 250 | +1,88959276<br>e-08 | -3,69494901<br>e-07 | -8,70578392<br>e-04 | +1,32090211<br>e-01 | -7,7273567<br>e+00 | +1,788067<br>e+02 |
| B3W            | -2,56578550<br>e-08 | +7,48363824<br>e-06 | -8,82214932<br>e-04 | +5,57849825<br>e-02 | -2,1319427<br>e+00 | +4,904734<br>e+01 |

Wyznaczane z powyższych zależności wartości strat mocy na rozbryzgiwanie oleju przedstawiono na rys. 3. Wartości te są zgodne z wyznaczonymi podczas pracy przekładni przy różnych prędkościach obrotowych bez obciążenia na stanowisku mocy krążącej.

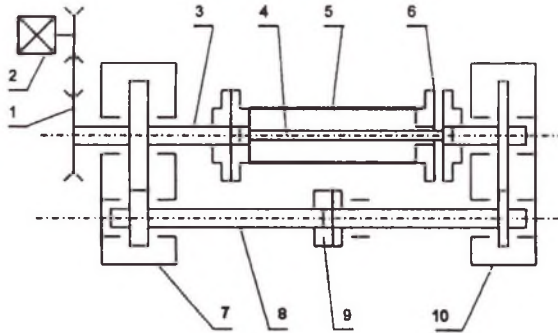


Rys. 3. Moc strat mieszania oleju na stanowisku badawczym

Fig. 3. Power loss of oil mixing on testing stand

#### 4. WYZNACZANIE STRAT MOCY NA STANOWISKU MOCY KRĄŻĄCEJ

Do badań wykorzystano stanowisko pracujące w układzie mocy krążącej przedstawione na rys. 4. Pozwala ono na pracę badanych kół przy różnych prędkościach obrotowych oraz obciążeniu regulowanym za pomocą wałków skrętnych, sprężła napinającego i dźwigni z obciążnikami. W skład stanowiska wchodzi dwie przekładnie: zamykająca i badana, o jednakowym przełożeniu i rozstawie osi. Przekładnia zamykająca napędzana jest silnikiem elektrycznym o mocy 15 [kW] za pośrednictwem przekładni pasowej.



Rys. 4. Schemat stanowiska badawczego FZG: 1 – przekładnia pasowa, 2 – silnik, 3 – wałek, 4 – wałek skrętny, 5 – osłona wałka skrętnego, 6 – sprzęgło pomiarowe momentu obrotowego, 7 – przekładnia zamykająca, 8 – wałek sprzęgający, 9 – sprzęgło napinające, 10 – przekładnia badana

Fig. 4. FZG testing stand: 1 – belt transmission, 2 – electric motor, 3 – shaft, 4 – torsion shaft, 5 – shield of shaft, 6 – clutch, 7 – closing transmission with high strength gears, 8 – shaft, 9 – tightening clutch, 10 – tested transmission system

Parametry kół:

- odległość osi kół 91.5 mm,
- szerokość kół 20 mm,
- moduł 4.5 mm,
- liczba zębów w zębniku 16,
- liczba zębów w kole 24,
- współczynnik przesunięcia zarysu zębnika  $x_1 = 0.8635$ ,
- współczynnik przesunięcia zarysu koła  $x_2 = -0.5$ .

Materiał kół:

- stal 20H2N4A nawęglana i hartowana do twardości 60 HRC.

Straty mocy  $\Delta N$  wyznaczano przedstawioną w [3] metodą bilansu cieplnego, stosując dodatkowe podgrzewanie przekładni. Metoda ta wykorzystuje zależność pomiędzy przyrostem temperatury przekładni a mocą rozpraszaną w przekładni:

$$Q = \text{const} \cdot \Delta t^{1,25} \quad (7)$$

gdzie:

- $\Delta t$  – przyrost temperatury przekładni względem temperatury otoczenia,
- $Q$  – moc grzania.

Sprawność przekładni wyznaczano z zależności:

$$\eta = \frac{N - \Delta N}{N} = 1 - \frac{\Delta N}{N} \quad (8)$$

gdzie:

- $N$  – moc przenoszona przez przekładnię,
- $\Delta N$  – straty mocy odpowiadające mocy grzania.

## 5. STRATY W ŁOŻYSKACH

Przedstawiony w [4, 5] moment tarcia łożyska przekładni wynosi:

$$M_f = 0,5 \cdot P \cdot D_w \cdot \mu_f, \quad (9)$$

gdzie:

$\mu_f$  - współczynnik tarcia w łożysku,

$P$  - obciążenie łożyska,

$D_w$  - średnica toczna łożyska.

Wartości współczynnika  $\mu_f$  zgodnie z [4, 5] zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2  
Wartości współczynników tarcia w łożyskach wg [4, 5]

| Rodzaj łożyska              | $\mu_f$ |
|-----------------------------|---------|
| Kulkowe jednorzędowe        | 0,0015  |
| Kulkowe dwurzędowe wahliwe  | 0,0010  |
| Kulkowe skośne jednorzędowe | 0,0020  |
| Kulkowe skośne dwurzędowe   | 0,0024  |
| Stożkowe                    | 0,0018  |
| Barytkowe                   | 0,0018  |
| Igielkowe                   | 0,0025  |
| Walcowe                     | 0,0011  |

## 6. STRATY SPOWODOWANE TARCIEM POMIĘDZY ZĘBAMI

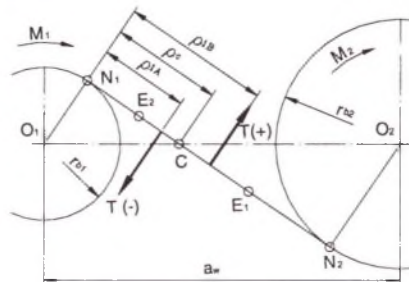
Podczas współpracy powierzchnie robocze zębów toczą się po sobie i ślizgają jednocześnie. Tylko w punkcie tocznym nie występuje wzajemny poślizg. W ząbieniu oprócz siły normalnej do powierzchni zębów występuje również skierowana prostopadle do niej siła tarcia. Sposób modelowania tarcia w ząbieniu przedstawiono na rys. 5. Moment tarcia współpracującej pary zębów  $M_f$  wyznaczany jest z zależności:

$$M_f = T \cdot \rho_1, \quad (10)$$

gdzie:

$T$  - siła tarcia pary zębów,

$\rho_1$  - ramię działania siły tarcia zależne od chwilowego położenia punktu współpracy zębów na odcinku przyporu.



Rys. 5. Modelowanie tarcia w ząbieniu

Fig. 5. Modeling of friction in mesh

Chwilowe wartości siły tarcia  $T$  wyznaczone są z zależności (11). Jej znak zmienia się na przeciwny, gdy ramię działania  $\rho_1$  jest większe od współrzędnej punktu tocznego  $\rho_c$  (rys. 5), ponieważ w punkcie tocznym zmienia się zwrot wektora prędkości poślizgu.

$$T = F_z \cdot f_{tz} , \quad (11)$$

gdzie:

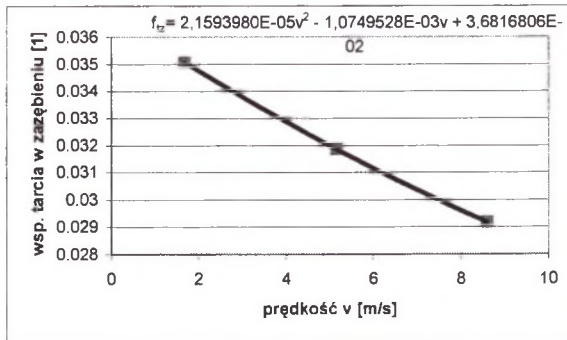
$F_z$  - siła międzyzębna,

$f_{tz}$  - współczynnik tarcia.

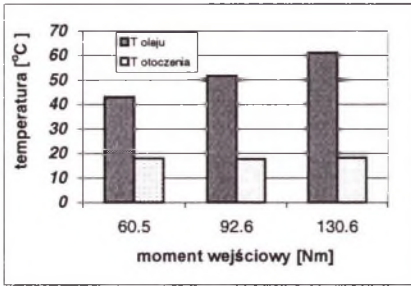
Wartości sprawności przekładni zębatej uzyskane w wyniku symulacji przy założeniu współczynnika tarcia pomiędzy zębami zgodnie z [4] porównano z wynikami badań doświadczalnych na stanowisku mocy krążącej. Wartości te były znacznie niższe od wyznaczonych w badaniach laboratoryjnych. Przyjmując założenie, że modelowanie strat w łożyskach przedstawione na podstawie literatury w punkcie 3 nie wymaga weryfikacji, przeprowadzono dostrojenie modelu, wyznaczając nową charakterystykę współczynnika tarcia w zazębieniu w funkcji liniowej prędkości zazębienia się (rys. 6). Otrzymane wartości współczynnika tarcia mieszczą się w zakresie  $0,02 \div 0,06$  i są zgodne z danymi literaturowymi [5,6].

Wyznaczone w wyniku symulacji wartości sprawności przekładni zębatej porównano z wartościami uzyskanymi na podstawie pomiarów na stanowisku mocy krążącej. Porównania dokonywano przy różnych obciążeniach przekładni oraz przy różnych prędkościach obrotowych zębniaka. W prowadzonych symulacjach komputerowych uwzględniano zmiany temperatury oleju w przekładni powstałe na skutek zmian obciążenia i prędkości obrotowej (rys. 7 i 8).

Na rysunkach 9÷11 przedstawiono wartości sprawności przekładni zębatej uzyskane w wyniku symulacji i badań laboratoryjnych przy różnych obciążeniach i prędkościach obrotowych. Wartości te są porównywalne, co potwierdza poprawność zastosowanego sposobu modelowania strat mocy w przekładni zębatej.

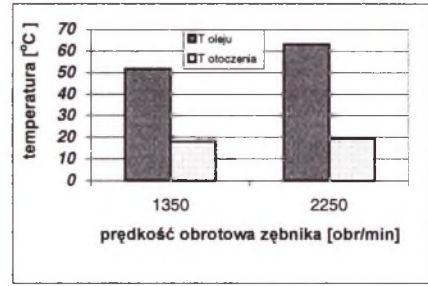


Rys. 6. Współczynnik tarcia w zazębieniu w funkcji prędkość zazębienia się po dostrojeniu modelu  
Fig. 6. Friction coefficient in mesh as a function of meshing velocity after a model tuning



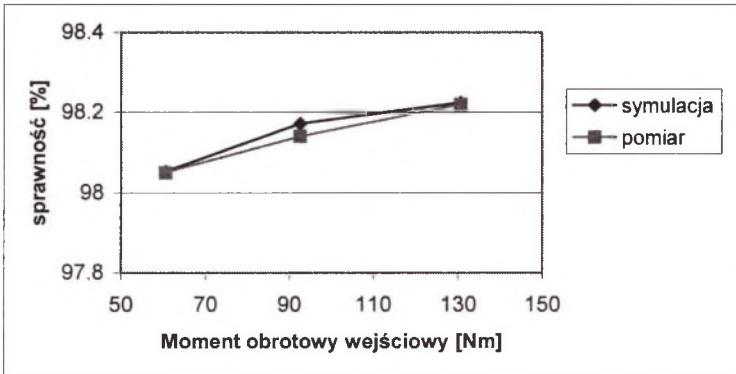
Rys. 7. Ustalona temperatura oleju oraz temperatura otoczenia zmierzona na stanowisku mocy krążącej przy prędkości obrotowej zębniaka  $n_1=1350$  [obr/min] i różnych obciążeniach

Fig. 7. Establish oil temperature and ambient temperature measured on FZG testing stand for speed of pinion 1350 r.p.m and different driving torque



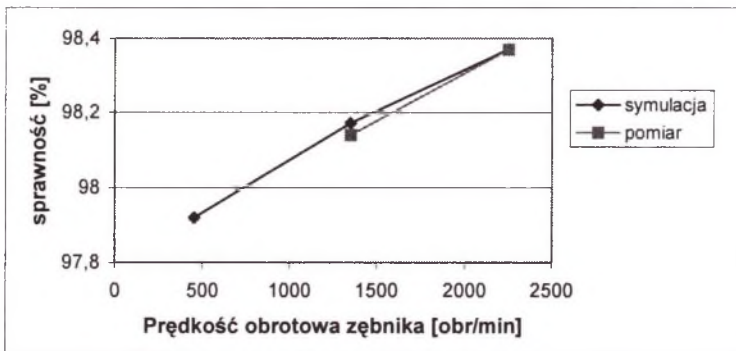
Rys. 8. Ustalona temperatura oleju oraz temperatura otoczenia zmierzona na stanowisku mocy krążącej przy momencie wejściowym  $M_1=92,6$  [Nm] i różnych prędkościach obrotowych zębniaka

Fig. 8. Establish oil temperature and ambient temperature measured on FZG testing stand for driving torque  $M_1=92,6$  [Nm] and different rotational speed of pinion



Rys. 9. Sprawność przekładni zmierzona i uzyskana drogą symulacji komputerowej w funkcji momentu wejściowego przy prędkości obrotowej zębniaka 1350 [obr/min]

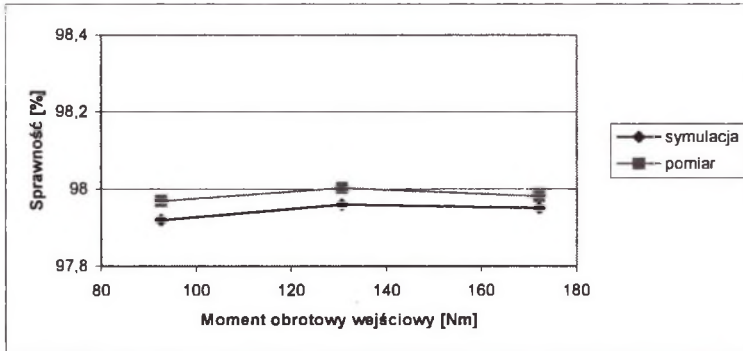
Fig. 9. Efficiency of a gear measured and obtained by computer simulation as a function of driving torque; rotational speed of pinion 1350 r.p.m



Rys. 10. Sprawność przekładni zmierzona i uzyskana drogą symulacji komputerowej w funkcji prędkości obrotowej zębniaka przy obciążeniu momentem wejściowym 92,6 [Nm]

Fig. 10. Efficiency of a gear measured and obtained by computer simulation as a function of rotational speed of pinion; driving torque 92,6 [Nm]





Rys. 11. Sprawność przekładni zmierzona i uzyskana drogą symulacji komputerowej w funkcji momentu wejściowego przy prędkości obrotowej zębniaka 450 [obr/min]

Fig. 11. Efficiency of a gear measured and obtained by computer simulation as a function of driving torque; rotational speed of pinion 450 r.p.m

## 7. WNIOSKI

Biorąc pod uwagę wyniki badań, można stwierdzić, że przyrost temperatury oleju w przekładni spowodowany wzrostem przenoszonej mocy (rys. 7, 8) powoduje zmniejszenie strat mocy spowodowanych rozbryzgiwaniem oleju.

Należy uwzględnić w badaniach modelowych zmiany lepkości kinematycznych oleju w funkcji temperatury.

Dostrojony model dynamiczny pozwala uzyskać wyniki zgodne z doświadczeniem.

## Literatura

1. Müller L.: Przekładnie zębate - projektowanie. WNT, Warszawa 1996.
2. Müller L.: Przekładnie zębate - badania. WNT, Warszawa 1984.
3. Müller L., Wilk A.: Sprawność przekładni zębatych. Przegląd Mechaniczny, Zeszyt 2/1969.
4. Wilk A., Niedziela Z., Łazarz B.: Wspomagane komputerowo konstruowanie walcowych przekładni zębatych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1991.
5. Kudriawcew W.N. i inni: Planetarnyje pieriedaczi. Sprawocznik. Maszynostrojenije, Leningrad 1977.
6. Dietrich M. (red.): Podstawy konstrukcji maszyn. Tom 3. Wydanie trzecie. WNT, Warszawa 1999.
7. Dziama A., Michniewicz M., Niedźwiedzki A.: Przekładnie zębate. Wydanie drugie. PWN, Warszawa 1995.

**Abstract**

The paper presents a manner of modelling toothed gear power loss in mesh, bearing and mixed oil. Efficiency of toothed gear obtained by computer simulation and measured on a testing stand was has been compared.