

Manfred CHMURAWA

## OPTIMALIZACJA WEWNĘTRZNEGO ZAZĘBIENIA CYKLOIDALNEGO W PRZEKŁADNIACH OBIEGOWYCH

**Streszczenie.** Wysoka sprawność przekładni obiegowych wymaga stosowania wewnętrznych ząbów cykloidalnych, w których uzębienie kół obiegowych ma postać ekwidystanty epicykloidy skróconej, w skrócie EES. W pracy przedstawiono problematykę kształtowania optymalnego uzębienia na przykładzie obiegowej przekładni cykloidalnej w celu osiągnięcia założonej trwałości zmęczeniowej tego uzębienia.

## OPTIMIZATION OF INSIDE CYCLOIDAL MESHING IN PLANETARY GEAR

**Summary.** To obtain high efficiency of planetary gear it is necessary to apply inside cycloidal meshing in which teeth have the shape of equidistant of shortened epicycloid (abbr. EES). In the labor these is presented problem of shaping optimal teeth in the shape of EES basing on example of cycloidal gear to obtain assumed durability of that teeth.

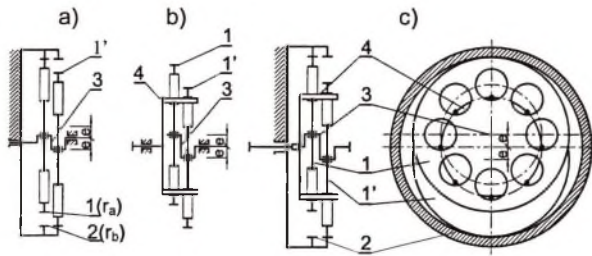
### 1. WPROWADZENIE

Wśród przekładni mechanicznych relatywnie najmniejszą, o małej dyssypacji energii jest obiegowa przekładnia cykloidalna (trochoidalna), w skrócie przekładnia Cyclo, rys. 1 [1, 2, 6, 12, 13, 14]. Jednym z poważnych problemów jest kształtowanie ząbów w przekładniach Cyclo w celu zapewnienia dostatecznie dużej trwałości zmęczeniowej ich silnie wyłożonych powierzchni roboczych.

### 2. BUDOWA I SCHEMATY KINEMATYCZNE OBIEGOWYCH PRZEKŁADNI CYKLOIDALNYCH

W teorii mechanizmów [2, 6, 8, 15] obiegowa przekładnia cykloidalna jest przekładnią typu K-H-V. Posiada nieruchome koło centralne 2, jarzmo  $h$  (mimośród) oraz jedno koło obiegowe 1, rys.1. Do wyprowadzenia momentu obrotowego, działającego na koło obiegowe, stosuje się mechanizm równowodowy (prostowodowy) o przełożeniu 1.

Wewnętrzne ząbienie w przekładni tworzą koła 1 i 1' oraz współpracujące z nimi nieruchome koło centralne 2, rys. 1a. Koła obiegowe 1 i 1' są uzębione zewnętrznie, a zarys



Rys. 1. Kinematyczny schemat elementarnej i stosowanej obiegowej przekładni cykloidalnej  
Fig. 1. Kinematic scheme of elementary and applied planetary cycloidal gear

zębów ma postać ekwidystanty epicykloidy skróconej, w skrócie EES [1, 6-8, 13, 14]. Nieruchome koło centralne 2 tworzy zespół rolek, a mechanizm prostowodowy jest tarczą ze sworzniami 4, rys. 1b. Przełożenie w obiegowej przekładni przy nieruchomym kole współpracującym 2,  $n_2=0$ :

$$i_{hl} = \frac{n_h}{n_l} = \frac{1}{1 - i_0} = \frac{z_1}{z_1 - z_2} = -\frac{z_1}{z_2 - z_1} = -\frac{z_1}{\Delta z} < 0 \quad (1)$$

$$\text{dla } \min \Delta z = 1 \quad i_{hl} = i = -z_1$$

gdzie:  $z_s = z_1$  - liczba zębów koła obiegowego,

$z_k = z_2$  - liczba zębów (rolek) nieruchomego koła współpracującego.

### 3. WEWNĘTRZNE POZAŚRODKOWE ZAZĘBIENIE CYKLOIDALNE I UZĘBIENIE KÓŁ W PRZEKŁADNI OBIEGOWEJ

Na rys. 2 przedstawiono kształtowe koło obiegowe z uzębieniem w postaci EES, które można ująć w postaci równań parametrycznych ekwidystanty [1, 7, 8]:

$$x(\alpha) = r \cdot \cos(\alpha) + e \cdot \cos(z_k \cdot \alpha) - q \cdot \cos\left\{\alpha + \arctg\left[\frac{\sin(z_s \cdot \alpha)}{m^{-1} + \cos(z_s \cdot \alpha)}\right]\right\} \quad (2)$$

$$y(\alpha) = r \cdot \sin(\alpha) + e \cdot \sin(z_k \cdot \alpha) - q \cdot \sin\left\{\alpha + \arctg\left[\frac{\sin(z_s \cdot \alpha)}{m^{-1} + \cos(z_s \cdot \alpha)}\right]\right\} \quad (3)$$

gdzie:  $\alpha$  - kąt tworzący epicykloidę i ekwidystantę epicykloidy,

$r$  - promień rozmieszczenia rolek koła współpracującego,

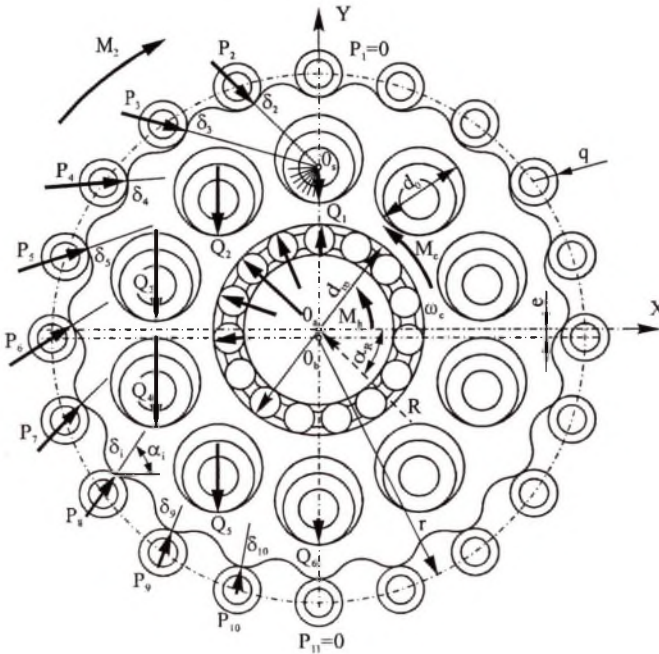
$e$  - mimośród przekładni,

$q$  - przesunięcie ekwidystanty, równe promieniowi rolki koła współpracującego;

$m$  - współczynnik skrócenia epicykloidy.

Zasadniczą krzywą zazębienia cykloidalnego jest epicykloida, która charakteryzuje się zmiennym promieniem krzywizny, rys. 3 [6-8]:

$$\rho_0 = \frac{r[1 + m^2 + 2m \cos(z_s \alpha)]^{\frac{3}{2}}}{1 + m^2 z_k + m(z_k + 1) \cos(z_s \alpha)} \quad (4)$$



Rys. 2. Przekładnia obiegowa z wewnętrznym pozaśrodkowym zazębieniem cykloidalnym  
 Fig. 2. Planet gear with extra central inside meshing

Promień  $\rho_0$  ma trzy ekstrema: maksimum  $\rho_{1max}$ , minimum  $\rho_{2min}$ , minimum  $\rho_{0min}$ , rys. 3. Istotne znaczenie dla zazębienia ma minimalny krzywizny epicykloidy w części wypukłej  $\rho_{0min}$  dla  $\alpha = \alpha_3$ , rys. 2 i 3. Promień  $\rho_{0min}$  decyduje o promieniu krzywizny wewnętrznej ekwidystanty, tj. promieniu krzywizny uzębienia koła obiegowego, rys. 3:

$$\rho_e = |\rho_0| \pm q \quad (5)$$

We wklęsłej części ekwidystanty promień  $\rho_e$  jest zawsze większy od zera i podcięcie zarysu nie występuje. Natomiast w części wypukłej niepodcinanie zarysu zęba wymaga, by:

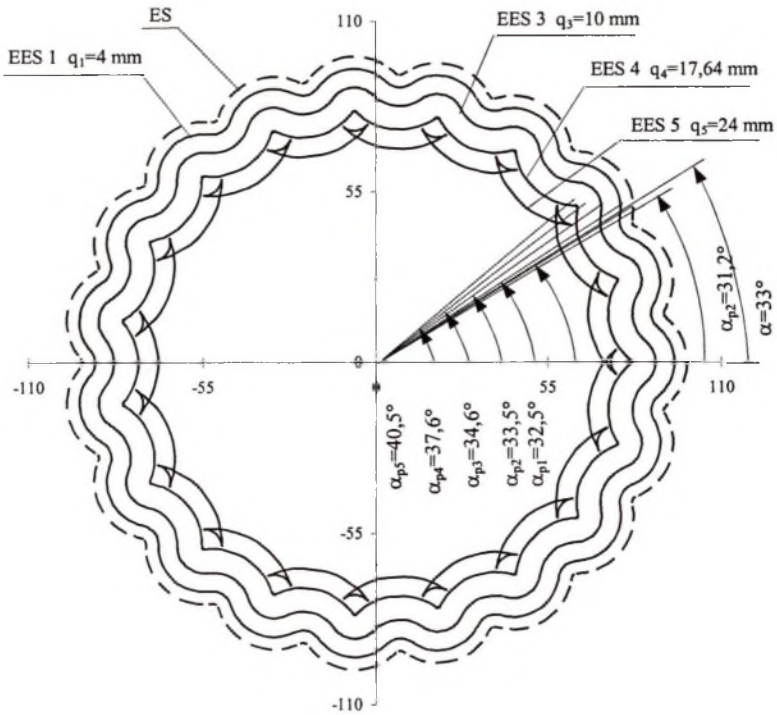
$$\rho_0 = |\rho_{0min}| - q \geq 0 \quad (6)$$

Ze wzoru (5) wynika wartość maksymalnego przesunięcia  $q_{max}$  wewnętrznej ekwidystanty:

$$\rho_{emin} = \rho_{0min} - q_{max} = 0$$

stąd  $q_{max} = \rho_{0min}$  (7)

gdzie:  $\rho_{emin}$  – minimalny promień krzywizny ekwidystanty w części wypukłej,  
 $\rho_{0min}$  – minimalny promień krzywizny epicykloidy w części wypukłej.



Rys. 3. Kształt, promień krzywizny i położenie charakterystycznych punktów epicykloidy i ekwidystanty epicykloidy skróconej (dla  $z_s = |i| = 9$ ;  $m = 0.625$ ;  $e = 3$  mm;  $q = 6$  mm)

Fig. 3. Shape, curvature and positions of characteristic points of epicycloid and equidistant of shortened epicycloid (for  $z_s = |i| = 9$ ;  $m = 0.625$ ;  $e = 3$  mm;  $q = 6$  mm)

Jeżeli  $q > q_{\max}$ , to w ekwidystantach wewnętrznych będą występowały pętle dyskwalifikujące je w zazębieniu, rys. 3. Przesunięcie ekwidystanty  $q$  przyjmuje wartości z przedziału  $(0, \rho_{\min})$ . Wzrost wartości  $q$  prowadzi do zaostzonych zębów, które w skrajnym przypadku dla maksymalnego  $q_{\max} = q_4$  mają bardzo małe promienie w części wypukłej i duże promienie krzywizny w części wklęsłej, rys.3.

#### 4. OBLICZENIOWA TRWAŁOŚĆ UZĘBIENIA KÓŁ OBIEGOWYCH

Na rys. 4 przedstawiono rozkład sił międzyzębnych  $P_i$  w styku jednej z rolek koła współpracującego z uzębieniem koła obiegowego [4, 5, 7, 9]. Na rys. 4 przedstawiono także rozkłady nacisków oraz naprężeń podpowierzchniowych, decydujących o trwałości powierzchni styku flanki zęba.

Prawdopodobieństwo trwałości elementu  $\Delta V_{x_{\text{vpe}}}$  na flance zęba opisuje zależność:

$$\ln \frac{1}{\Delta \varphi_{x\psi_e}} = A_e \cdot N_e^e \cdot \sigma_{x\psi_e}^c \cdot Z_{x\psi_e}^{-h} \cdot \Delta V_{x\psi_e} \quad (8)$$

gdzie:  $A_e$  - stała materiałowa,

$N_e$  - liczba cykli obciążenia, wyrażona przez liczbę obrotów :  $N_e = u_e \cdot L_e$ ,

$\sigma_{x\psi_e}$ ,  $Z_{x\psi_e}$  - naprężenie podpowierzchniowe i głębokość ich występowania;

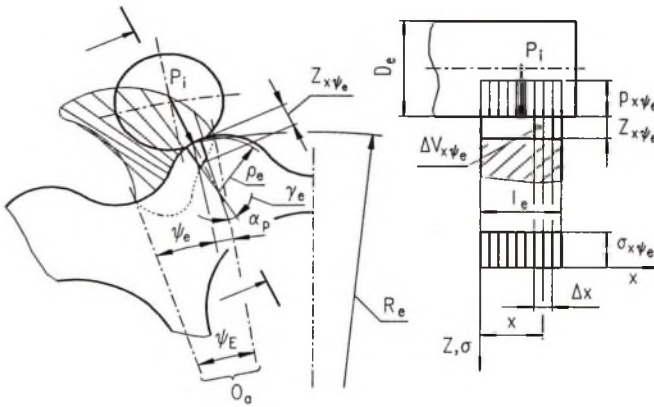
$\Delta V_{x\psi_e}$  - umowna objętość materiału zęba, poddana działaniu naprężeń, rys. 4:

$$\Delta V_{x\psi_e} = \Delta x \cdot \rho_e \cdot \gamma_e \cdot Z_{x\psi_e}^e,$$

$\psi_e$ ,  $\rho_e$ ,  $\gamma_e$  - wielkości geometryczne jak na rys. 4;

$c$ ,  $h$  - wykładniki trwałości dla stali łożyskowej;  $c = 31/3$ ,  $h = 7/3$ ,

$e$  - wykładnik Weibulla dla węzłów łożyskowych, dla styku liniowego  $e = 9/8$ .



Rys. 4. Rozkład obciążenia, rozkłady nacisków oraz naprężeń podpowierzchniowych na flance zęba koła obiegowego o zarysie ekwidystanty epicykloidy skróconej

Fig. 4. Distribution of load, distribution of pressures and subsurface stresses on the flank of the tooth of the planet wheel with the shape of equidistant of shortened epicycloid

Prawdopodobieństwo trwałości wycinka flanki zęba o szerokości  $l_e$  wyniesie:

$$\ln \frac{1}{d\varphi_{\psi_e}} = A \cdot u_e^e \cdot L_e^e \cdot l_e \cdot \rho_e \cdot \gamma_e \cdot \sigma_{\psi_e}^c \cdot Z_{\psi_e}^{1-h} \cdot d\psi_e \quad (9)$$

przy czym:  $\sigma_{\psi_e} = 106,81 \sqrt{q_i \cdot \Sigma \rho_e} [MPa]$  i  $Z_{\psi_e} = 2,37 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{q_i}{\Sigma \rho_e}} [mm]$  (10)

$$q_i = P_i / l_e \quad \text{i} \quad \Sigma \rho_e = \frac{2}{D_e} + \frac{1}{\rho_e} \quad (11)$$

Po podstawieniach i przekształceniach ostatecznie równanie (9) ma postać [4, 5, 10, 11]:

$$\ln \frac{1}{d\varphi_{\psi_e}} = 2,902 \cdot 10^{24} \cdot A \cdot u_e^e \cdot L_e^e \cdot l_e^{-7/2} \cdot \rho_e \cdot \gamma_e \cdot P_i^{9/2} \cdot \Sigma \rho_e^{35/6} \cdot d\psi_e \quad (12)$$

Prawdopodobieństwo trwałości flanki pojedynczego zęba, której wymiar określa kąt  $\psi_E$ , równe jest iloczynowi prawdopodobieństw trwałości poszczególnych jej wycinków, więc

$$\ln \frac{1}{\varphi_e} = \int_0^{\varphi_e} \ln \frac{1}{d\varphi_{we}} = 2,902 \cdot 10^{24} \cdot A \cdot u_e^e \cdot L_e^e \cdot l_e^{-7/2} \int_0^{\varphi_e} \rho_e \cdot \gamma_e \cdot F_i^{9/2} \cdot \Sigma \rho_e^{35/6} \cdot d\psi_e \quad (13)$$

Przyjmując prawdopodobieństwo  $\varphi_e$  (np.  $\varphi_e = 0,9$ ) można ze wzoru (13) obliczyć trwałość  $L_e$  styku pojedynczego zęba z rolką koła współpracującego, wyrażoną w liczbie obrotów wału napędowego przekładni do chwili zaistnienia objawów pittingu w uzębieniu.

Trwałość wszystkich zębów koła obiegowego  $L_E$ , to jest trwałość całego uzębienia:

$$L_E = \left( \sum_{i=1}^{i=z_{ob}} L_{ei}^{-e} \right)^{-1/e} \quad (14)$$

Każdy ząb w kole poddawany jest w przybliżeniu tym samym obciążeniem, więc:

$$L_E = \left( z_e \cdot L_e^{-e} \right)^{-1/e} = z_e \cdot \frac{1}{e} \cdot L_e \quad (15)$$

Na podstawie powyższej metody opracowano program CYCLO4, przeznaczony do prognozowania trwałości powierzchni uzębienia w kole obiegowym [10, 11].

## 5. OPTIMALIZACJA UZĘBIENIA KÓŁ OBIEGOWYCH

Z zależności (4) i (5) oraz rys. 3 i 4 wynika, iż dominujący wpływ na krzywiznę uzębienia wywierają parametry zazębienia  $m$  i  $e$ , a szczególnie przesunięcie ekwidystanty  $q$ . W związku z tym dla geometrii zazębienia można sformułować następującą tezę:

**Dla określonych wartości mimośrod  $e$  i współczynnika skrócenia  $m$  istnieje takie przesunięcie ekwidystanty  $q$ , dla którego obliczeniowa trwałość zęba  $L_e$  i trwałość uzębienia  $L_E$  w przekładni o danym przełożeniu będzie największa.**

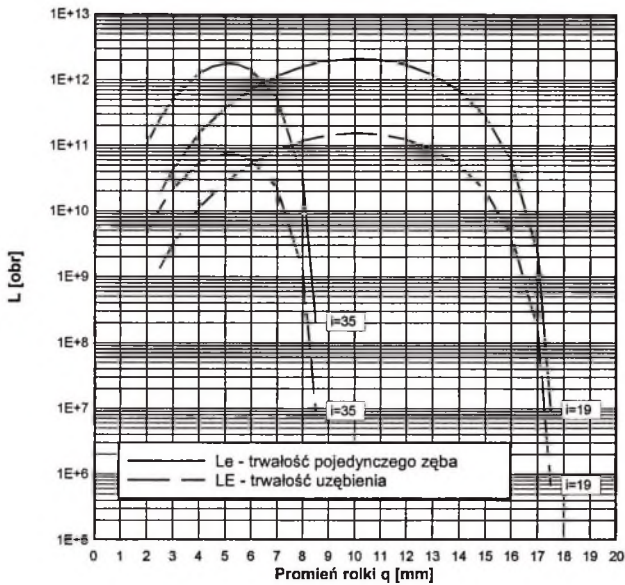
W celu udowodnienia tezy przeprowadzono wielokryterialną analizę trwałości dla różnych przekładni przy różnych założeniach. Wykorzystano przedstawioną w rozdz. 4 metodykę prognozowania trwałości uzębienia i program CYCLO4. Na wstępie poszukiwano pierwotnej postaci zmian trwałości jako funkcji przesunięcia  $q$ , równego promieniowi rolki, rys. 5. Przebiegi trwałości mają maksima określające optymalny promień rolki  $q$ .

Uzyskane na powyższych przykładach potwierdzenie założonej tezy posłużyło do uogólnienia zarysowującej się prawidłowości o istnieniu optymalnego promienia  $q$  (przesunięcia ekwidystanty) dla dowolnych parametrów zazębienia cykloidalnego.

Dla przykładu z przebiegu  $L_e$  na rys. 6 wynika, iż dla dowolnej kombinacji wartości  $e$  i  $m$  oraz dla dowolnego przełożenia zaistnieje taka wartość promienia (a także przesunięcia  $q$ ) uznana za optymalną, dla której trwałość pojedynczego zęba  $L_e$  będzie największa.

## 6. WNIOSKI

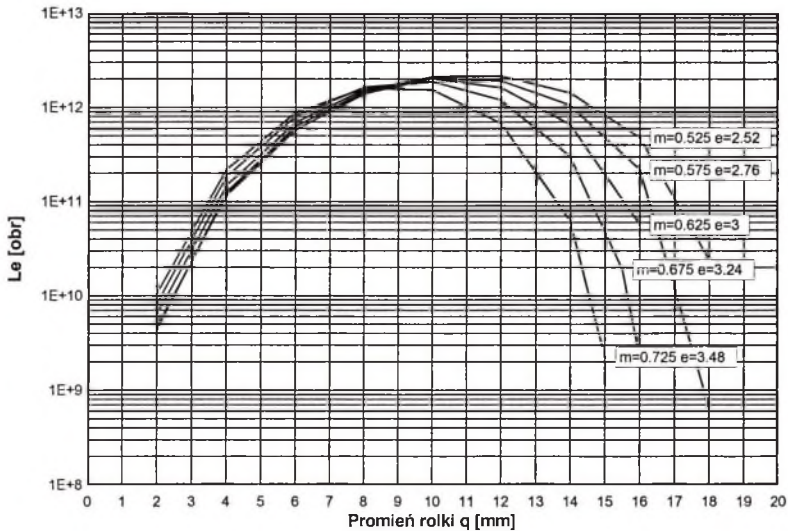
1. Wewnętrzne pozaśrodkowe zazębienie w przekładniach cykloidalnych wymaga specjalnego uzębienia kół obiegowych w postaci ekwidystanty epicykloidy skróconej, którą charakteryzują trzy podstawowe parametry: mimośród przekładni  $e$ , współczynnik skrócenia epicykloidy  $m$  i przesunięcie ekwidystanty  $q$ .
2. Istotne znaczenie dla wewnętrznych zazębień cykloidalnych ma przesunięcie ekwidystanty  $q$ , równe promieniowi rolek w kołach współpracujących, ponieważ postać uzębienia, krzywizna i kształt flanki zęba w kołach obiegowych zależą głównie od wartości tego przesunięcia.



Rys. 5. Trwałość pojedynczego zęba  $L_e$  oraz całego uzębienia  $L_E$  koła obiegowego w funkcji promienia rolki  $q$  na przykładzie dwóch różnych przekładni

Fig. 5. Durability of single tooth  $L_e$  and entire toothing  $L_E$  in planet wheel in function of radius of the roller  $q$  in example of two different gears

$i=19$



Rys. 6. Trwałość pojedynczego zęba  $L_e$  w przekładni o przełożeniach  $i=19$  w funkcji promienia rolki  $q$  dla różnych mimośrodków  $e$  i współczynników  $m$  dla  $r=const$

Fig. 6. Durability of single tooth  $L_e$  in planet wheel with ratio  $i=19$  in function of radius of the roller  $q$  for different eccentric  $e$  and coefficient  $m$  for  $r=const$

3. Optymalną wartość przesunięcia  $q$  dla danej przekładni i danego przełożenia można wyznaczyć za pomocą metody numerycznej w oparciu o kryterium najwyższej obliczeniowej trwałości powierzchni uzębienia w jej kołach obiegowych

## Literatura

1. Braren R.: Offenlegungsschrift 2433675. Planeten getriebe. Deutsches Patentamt nr 509833/249, Bonn 1975.
2. Braren L.: Die kinematischen Grundlagen und der Aufbau des Compur – Getriebes. Berlin (etwa 1927): Sammlung von Veröffentlichungen der Siemens – Schuckertwehe 62.
3. Broszeit E., Zwirlein O.: Internal stresses and their influence on material stresses in hertzian contacts - calculations with different stress hypotheses. ASME Journ. Tribol. Vol. 108, 1986, s. 387-393.
4. Chmurawa M.: Analityczna i numeryczna metoda wyznaczania obciążeń w obiegowej przekładni cykloidalnej. ZN Instytutu Transportu Pol. Śl., z. 1, Katowice 2000, s.13-20.
5. Chmurawa M.: Analiza stanu obciążenia w obiegowej przekładni cykloidalnej. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. seria: Transport, z. 41, Gliwice 2000.
6. Chmurawa M.: Przekładnia z wewnętrznym ząbieniem cykloidalnym. Maszyny Dźwigowo-Transportowe nr 2, 1993, Bytom 1993, s. 55-71.
7. Chmurawa M.: Modyfikacja ząbienia w obiegowych przekładniach cykloidalnych. Sprawozdanie z proj. badawczego (grantu) nr 7 TO7C 038 15. Bytom 2001.
8. Chmurawa M., Olejek G.: Ząbienie cykloidalne przekładni planetarnej. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., seria Transport, z. 22, Gliwice 1994, s. 71-86.
9. Chmurawa M., John A.: FEM in numerical analysis of forces, strain and stress in planetary wheel of cycloidal gear. Numerical Analysis and Its Applications, Nr 1988, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg 2000, s. 772-779.
10. Chmurawa M., Warda B.: Metodyka prognozowania trwałości tocznych węzłów łożyskowych przekładni cykloidalnej. Mat.5 Konf. „Problemy niekonwencjonalnych układów łożyskowych”, Pol. Łódźka, Łódź 2001, s.55-62.
11. Chmurawa M., Warda B.: Metodyka prognozowania trwałości uzębienia kół obiegowych w przekładni cykloidalnej. Trybologia nr 4, 2001 (178), s. 549-558.
12. Hamerak K.: Das Cyclogetriebe – eine geniale Idee und ihre technische Verwirklichung. Technik Heute, Verlag Christiani, Nr 6, Bonn, Juni 1979. s.1-4.
13. Kudriawcew W.N.: Planetarnyje predaczi. Maszinstrojenije, Moskwa–Leningrad 1966, s. 251-271.
14. Lehmann M.: Berechnung und Messung der Kräfte in einen Zykloiden–Kurvenscheiben Getriebe. Dissertation, Technische Universität, München 1976.
15. Müller L.: Przekładnie obiegowe. PWN, Warszawa 1983.

Recenzent: Prof. zw. dr hab. inż. Jerzy Antoniak



**Abstract**

To obtain high efficiency of planetary gear it is necessary to apply inside cycloidal meshing in which teeth have the shape of equidistant of shortened epicycloid (abbr. EES). In the labor these is presented problem of shaping optimal teeth in the shape of EES basing on example of cycloidal gear to obtain assumed durability of that teeth.