ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: TRANSPORT z. 47 Nr kol. 1586

Janusz WOCH

NOWE UJĘCIE PRZEPUSTOWOŚCI DROGI Z PORÓWNANIEM MODELI

Streszczenie. W artykule przedstawiono polską wersję artykułu Wocha (2003) z Transportation Research przedstawiającego dwa modele potoku ruchu, bazujące na nowym narzędziu matematycznym - zlepionych procesach kolejek, które pozwalają zakładać w modelu kolejkowym przesunięty rozkład wykładniczy odstępu potoku ruchu, wyrażające najbardziej typowy rozkład prawdopodobieństwa odstępu występujący w płynnych potokach ruchu. Pozwala to na opracowanie nowego narzędzia oceny przepustowości dróg.

A NEW METHOD OF ROAD CAPACITY ESTIMATION WITH MODELS COMPARISON

Summary. The article is polish version of Woch's (2003) article in Transportation Research demonstrating two models for traffic flow, which based on the new mathematic tool the compressed queueing processes, which may assume in the queueing model the shifted exponential distribution of the headway, expressing the most typical probability distribution in the free flows. This give us on build the new method of road capacity estimation.

1. DWA MODELE POTOKU RUCHU – TEORIOKOLEJKOWE (WG WOCHA, 2003)

Istnieje wiele prac z lat powojennych, w których występują próby modelowania kolejek ruchowych za pomocą narzędzi teorii kolejek. Jednak przełomowe znaczenie miała tu książka Haighta (1963), na której oparto podstawową notację. Notacja ta ewoluowała aż do terminologii artykułu Heidemanna (1996), stanowiącego główny punkt odniesienia proponowanego przez autora kolejkowego modelu potoku ruchu. Ostatni artykuł Heidemanna i Wegmanna (1997) stosuje poprawioną wersję notacji teoriokolejkowej w teorii potoków ruchu. W niniejszym artykule wprowadzono odpowiednie zmiany na wzór artykułu Heidemanna i Wegmanna (1997).

Haight (1963) zakłada, że rozpatrywane pojazdy potoku ruchu dzielą się na dwie grupy: pojazdy typu A i pojazdy typu B. Jeżeli względna liczba pojazdów typu A wynosi p, a odpowiednia względna liczba pojazdów typu B wynosi $q = 1 - p$, to cały odstęp ma geometryczny rozkład prawdopodobieństwa kolejki składającej się z n pojazdów:

$$(1-p)p^{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

O ile w przypadku niezależnych odstępów między kolejnymi pojazdami rozkład długości kolejki okazuje się geometrycznym, to dla dowolnego innego rozkładu odstępów,

jeżeli nie jest rozkładem geometrycznym, to oznacza, że odstępy między kolejnymi pojazdami nie są wzajemnie niezależne.

Model kolejkowy dla potoku wyjściowego Haight proponuje zbudować poprzez ujęcie wyjścia wyobrażonej kolejki jako ruchomego pasa. W takim przypadku najrozsądniej jest wybrać model wyobrażonej kolejki typu *M/D/1* z parametrami λ i Δ. Długość kolejki będzie miała rozkład Borela. „Chociaż wyobrażony model kolejkowy daje wygodny sposób opisu rozkładu pojazdów, to nie można go przyjąć do opisu przemieszczania ruchu" - stwierdza kategorycznie Haight.

Drew (1968) w definicji ruchomej kolejki również zakłada niezależność odstępów w kolejce i dochodzi również do rozkładu geometrycznego długości kolejki. Z matematycznego punktu widzenia ujęcie Drew jest podobne do ujęcia Haighta.

Heidemann (1996) wystąpił z dyskusyjnym ujęciem modelu podstawowego za pomocą narzędzi teorii kolejek. Heidemann rozważa drogę z nieprzerwanym i jednokierunkowym potokiem ruchu. Na drodze nie ma skrzyżowań lub urządzeń przeszkadzających, tak że problemy mogą być tylko powodowane samym potokiem. Zakłada się, że utrzymane są warunki stacjonarności, a więc że potok jest w stochastycznej równowadze. Będzie się używać następujących oznaczeń:

- k - gęstość (zwykle mierzona w poj/km),
- v - prędkość indywidualna lub oczekiwana prędkość (zwykle mierzona w km/h),
- k_{jam} - korkowa lub maksymalna gęstość (tj. najmniejsza gęstość, dla której potok się zatrzymuje),
- v_f - prędkość swobodna,
- q - natężenie (zwykle mierzone w poj/h).

To co dotychczas Heidemann (1996) opisał, jest modelem kolejkowym $M/G/1$ z dyscypliną według kolejności zgłoszeń FIFO, gdzie:

- $\rho = \lambda/\mu = k/k_{jam}$ - intensywność ruchu,
- $\sigma =$ odchylenie standardowe czasu obsługi, który jest czasem przejazdu dystansu $1/k_{jam}$ przez indywidualnych kierowców z zamierzonymi prędkościami.

Łącząc wzór Little'a ze wzorem Pollaczka-Chinczyna oraz podstawiając $\lambda = kv_f$ i $\mu = k_{jam}v_f$ Heidemann (1996) otrzymuje w końcu

$$v = v(k) = \frac{2v_f(k_{jam} - k)}{2k_{jam} + k(\beta^2 - 1)} = \frac{2v_f(1-\rho)}{2 + \rho(\beta^2 - 1)} = v(\rho), \tag{2}$$

gdzie

$$\beta = \sigma v_f k_{jam} \tag{3}$$

jest wskaźnikiem zmienności czasu obsługi, będącego czasem podróży odległości $1/k_{jam}$ z prędkością swobodną.

Najważniejszym aspektem jest zdaniem Heidemanna fakt, że wzór (2) może być traktowany jako rzeczywista oczekiwana prędkość dla gęstości *k*, ponieważ fikcyjny model z $v = v_f$ dla każdej gęstości *k* okazuje się nierealistyczny. Z uwagi na to, że prędkość v_f nie może być utrzymana, tak więc musi być zredukowana do prędkości *v* ze wzoru (2).

Heidemann rozważa dwa specjalne przypadki:

- dla $\beta = 0$ model kolejkowy $M/G/1$ redukuje się do modelu $M/D/1$, gdzie czas obsługi, a stąd potoku płynnego, oraz prędkość są stałe dla wszystkich pojazdów,

- dla nierealistycznego modelu $M/M/1$, który uzyskuje się dla $\beta = 1$, zależność prędkość - gęstość upraszcza się do zależności liniowej: $v = v_f(1 - \frac{k}{k_{jam}})$.

Ujęcie Heidemanna ma te same wady co model $M/D/1$, zdyskwalifikowany przez Haighta, jednak ma pewien walor poznawczy, ponieważ zostało zweryfikowane przez obserwacje rzeczywistego ruchu na drogach niemieckich. Można między innymi dowiedzieć się, że wskaźnik zmienności β zdefiniowany w modelu Heidemanna, gdzie wartość $\beta = 0$ odpowiada ruchowi o równych odstępach, natomiast $\beta = 1$ - wykładniczemu rozkładowi prawdopodobieństwa odstępu między pojazdami, przyjmuje bardzo małe wartości. Na drogach niemieckich wskaźnik ten kształtuje się na poziomie $\beta = 0.2$, co jeszcze raz dowodzi znanej własności potoków ruchu: małej wariancji odstępu między pojazdami. Nie można zatem przyjmować modelu $M/G/1$ jako modelu pojedynczego potoku ruchu. Natomiast mniejsze zastrzeżenia można mieć tu do modelowania wielopasmowej drogi za pomocą $M/G/1$. **Z drugiej strony jednak wydaje się, że minimalny dystans nie może być definiowany arbitralnie.** Każda prędkość swobodna v_f ustalonego poziomu nasycenia drogi daje jakiś oczekiwany minimalny dystans. Dopiero granica tych oczekiwanych minimalnych dystansów, przy wzrastającym nasyceniu, daje dystans minimalny. W ten sposób można tu uciec od arbitralnego rozstrzygnięcia, tak jak proponuje się w rozdziale 14.

Artykuł Heidemanna (1996) stanowił główny punkt odniesienia w dalszych rozważaniach, a więc będzie dalej wielokrotnie cytowany, w miejscach gdzie porównuje się proponowany model z modelem Heidemanna (1996).

Przybycia pojedynczego strumienia mogą być opisane (patrz, na przykład, Heidemann i Wegmann, 1997):

1) przez proces Poissona z parametrem μ (patrz, na przykład, Daganzo, 1976; Pöschl, 1983; Heidemann, 1991); lub ogólniej
2) przez sekwencję $G_1, G_2, \ldots$ niezależnych odstępów o tym samym rozkładzie $G(x)$ (patrz, na przykład, Siegloch, 1973; Plank i Catchpole, 1984, 1986a); lub ogólniej
3) przez sekwencję niezależnych losowych par $(G_1, B_1), (G_2, B_2), \ldots$ odstępów i bloków o tym samym łącznym rozkładzie $(G, B)(x, y)$ (patrz, na przykład, Tanner 1962; Yeo i Weesakul, 1964; Hawkes, 1968; Cowan, 1987; Wegmann, 1992).

W literaturze najczęściej stosowane są następujące rozkłady odstępu:

1. Rozkład wykładniczy

$$P(G > x) = e^{-\mu x}, \quad x \geq 0,$$

która dobrze opisuje rzeczywistość tylko dla małego natężenia ruchu.

2. Przesunięty rozkład wykładniczy

$$P(G > x) = \begin{cases} e^{-\mu(x-\Delta)} & dla\ x \geq \Delta \\ 1 & dla\ x < \Delta \end{cases},$$

który gwarantuje odstęp o długości co najmniej Δ.

3. Pakietowy rozkład wykładniczy

$$P(G > x) = \begin{cases} \alpha e^{-\mu(x-\Delta)} & dla\ x \geq \Delta \\ 1 & dla\ x < \Delta \end{cases}.$$

4. Inne rozkłady, takie jak Erlanga i hiper-Erlanga rozkłady lub rozkłady log normalne. Rozkłady te nie są stosowane w modelach kolejkowych, lecz tylko do modeli symulacyjnych (patrz, na przykład, Grossmann, 1991).

Heidemann i Wegmann (1997) podają klasyfikację coraz to bardziej złożonych modeli pojedynczego strumienia:

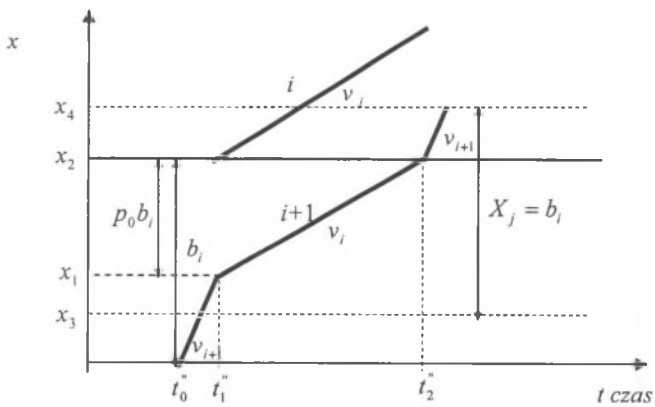
- model $A1$ jest procesem Poissona,
- model $A2$ jest procesem odnowy z przesuniętym (losowo) rozkładem wykładniczym odstępu,
- model $A3$ jest procesem odnowy z pakietowym rozkładem wykładniczym,
- model $A4$ jest procesem przybyć Tannera, gdzie blok B jest okresem zajętości kolejki $M/G/1$ (patrz Gross i Harris, 1974, s. 249).

W dalszym ciągu model strumienia jest równoważny modelowi $A2$ z powyższej listy, a natężenie oznacza się q (poj/s).

Dobrym modelem opóźnienia jest ruchomy bufor b_i, znajdujący się przed każdym pojazdem i, zależny od jego prędkości v_i. Jeżeli bufor ten jest większy od dystansu do wiodącego pojazdu s_i - co jest równoważne większej prędkości v_{i+1} od prędkości wiodącego pojazdu v_i, jest to sytuacja konfliktowa następnego pojazdu $i+1$: $b_i > s_i$ i $v_{i+1} > v_i$. Opóźnienie na dystansie b_i równe jest różnicy czasu czekania $p_0 b_i / v_i$ i czasu przejazdu płynnego $p_0 b_i / v_{i+1}$:

$$w_i = \frac{p_0 b_i}{v_i} - \frac{p_0 b_i}{v_{i+1}}, \qquad 0 < p_0 \le 1, \quad i = 1,2,... \tag{4}$$

gdzie kolizyjna część bufora $p_0 b_i = x_2 - x_1$ jest równa części p_0 bufora od momentu dopędzenia t_1'' w miejscu x_1 do momentu t_2'' w miejscu x_2 rozwiązania sytuacji kolizyjnej, jak na rys. 1 w dwóch ujęciach: w ruchomym buforze b_i oraz stałym odcinku $X_j = x_4 - x_3$, równym temu buforowi: $X_j = b_i$. Liczba stałych odcinków równa jest oczekiwanej gęstości maksymalnej płynnego potoku k_f: $1 \le j \le k_f$.



Rys. 1. Kolizyjna część bufora $p_0 b_i$ w ruchomym buforze b_i oraz w równym, stałym odcinku X_j z identycznym opóźnieniem w_i

Fig. 1. The conflict part of the buffer $p_0 b_i$ in moving buffer b_i and the fixed section X_j with the same delay w_i

W długim okresie, kiedy $i \to \infty$, w którym ruch osiąga równowagę stochastyczną i prędkość potoku płynnego v_{i+1} zmierza do (oczekiwanej) prędkości swobodnej v_f: $v_{i+1} \to v_f$, prędkość możliwa v_i zmierza do oczekiwanej prędkości v: $v_i \to v$, natomiast dystans kolizyjny $p_0 b_i$ zmierza do resztowego bufora pb_f: $p_0 b_i \to pb_f$, gdzie $b_f = 1/k_f$ jest oczekiwanym buforem maksymalnym płynnego potoku. Oczekiwane opóźnienie na dystansie b_f - $E(W_q)$ - jest różnicą oczekiwanego czasu czekania pb_f/v i oczekiwanego czasu przejazdu płynnego pb_f/v_f:

$$E(W_q) = \frac{pb_f}{v} - \frac{pb_f}{v_f}, \qquad (5) \qquad 0 < p \le 1 , \qquad (6)$$

gdzie $p = p(\rho)$ jest prawdopodobieństwem opóźnienia zależnym od intensywności ruchu ρ, jak funkcja rosnąca i wypukła. Stałe odcinki X_j są sobie równe: $X_j = X$ dla wszystkich k_f odcinków. Powyższe ujęcie (5) upodabnia zjawisko opóźnienia do opóźnienia w modelach teoriokolejkowych dla ruchu w równowadze. Podobnie modelowane są opóźnienia przez Heidemanna (1996), gdzie podzielono drogę na stałe dystanse. Dla warunków płynnego potoku opóźnienia są małe i mogą być modelowane jak w jednokanałowym modelu teoriokolejkowym.

Dla drogi jednorodnej łączne opóźnienie jest sumą opóźnień proporcjonalnych do odległości b_f lub X. Oczekiwane opóźnienie $E(W_q)$ zwiększa czas przejazdu drogi. Tak więc ruchomy bufor jest jednocześnie ruchomym urządzeniem obsługi oraz poczekalnią pochłaniającą opóźnienie. Wydaje się, że jest to idea podobna do ruchomego pasa Haighta (1963).

Zamiast modelowania ruchomego oczekiwanego bufora maksymalnego b_f można podzielić drogę na k_f stałych odcinków o równej długości X oraz równych oczekiwanych opóźnieniach, takich jak oczekiwane opóźnienie w b_f. Długość tych odcinków równa się długości oczekiwanego bufora maksymalnego b_f, co zapewnia w długim okresie równe oczekiwane opóźnienia (rys. 1):

$$X = b_f = 1/k_f . \qquad (7)$$

Ponieważ opóźnienia wydłużają początkowe odstępy między pojazdami h_i o czas w_i można na tej podstawie stwierdzić, że rzeczywisty odstęp między pojazdami h_i' jest zwiększony o opóźnienie w_i określone przez (4), a więc:

$$h_i' = h_i + w_i . \qquad (8)$$

Powyższy wzór wyjaśnia również, dlaczego w miarę wzrastania opóźnień ruchu kolejne odstępy między pojazdami przestają być niezależne, gdy wydłużane są o opóźnienia zależne od poprzedniego odstępu.

Dla dużych gęstości, ponieważ minimalne odstępy dążą do nowych stałych: $\min(h_i) \to D$, a czasy czekania dążą do nowych rozkładów wykładniczych $w_i \to M$, rozkład nowego odstępu h_i' dąży do nowego przesuniętego rozkładu wykładniczego:

$$h_i' \to D + M . \qquad (9)$$

W takich idealnych przypadkach pojawia się nowa niezależność odstępów potoku ruchu.

Najnowszym potwierdzeniem małej wariancji odstępów potoku ruchu jest artykuł Heidemanna (1996), w którym przedstawiono wyniki badań potoków ruchu na drogach niemieckich, z których otrzymano tzw. wskaźnik zmienności $\beta = 0.2$. Obrazowo ujmując,

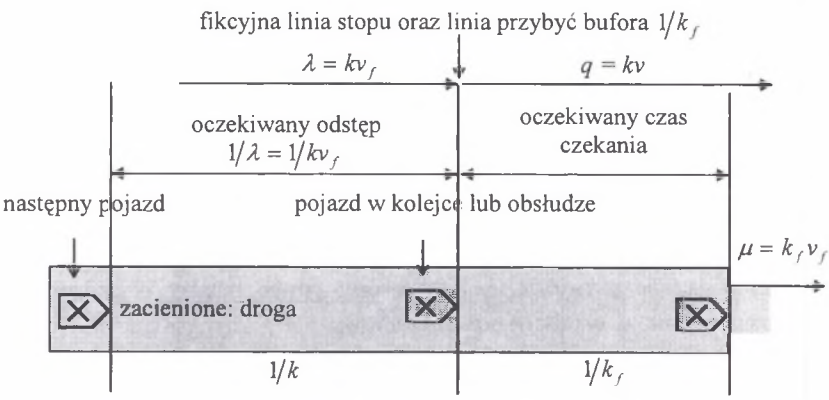
jest to równoważne sytuacji odstępu, w której minimalna wartość stanowi 0.8 wartości oczekiwanej. Jest to najnowsze potwierdzenie statystyczne małej wariancji odstępów potoków ruchu.

Czas obsługi przez ruchomy bufor b_f lub stały odcinek X jest czasem przejazdu przez bufor b_f (lub X). Oczekiwany czas czekania $Z + E(W_q)$ jest równy czasowi płynnego przejazdu pojazdu Z (będącego oczekiwanym czasem obsługi) powiększonemu o oczekiwane opóźnienie $E(W_q)$. Czas obsługi ma podobny rozkład jak odstępy (9). Dla nie zagęszczonych potoków można więc założyć, że rozkład czasu obsługi jest przesuniętym rozkładem wykładniczym, podobnym do rozkładu odstępu. Oczekiwany czas obsługi Z:

$$Z = \frac{b_f}{v_f} = \frac{X}{v_f}, \tag{10}$$

jest czasem przejazdu maksymalnego bufora b_f lub stałego odcinka X z oczekiwaną prędkością swobodną v_f.

Proces przybyć do ruchomego bufora jest procesem wyjściowym z poprzedniego kanału obsługi o oczekiwanym dystansie $1/k$, a więc natężenie przybyć do ruchomego kanału obsługi $\lambda = kv_f$. Natężenie przybyć do ruchomego kanału obsługi λ jest ograniczone najkrótszym czasem przejazdu poprzedniego odcinka $1/k$, a więc przejazdu z prędkością swobodną v_f. Tak więc, proces przybyć do bufora $1/k_f$ jest procesem obsługi poprzedniego kanału z tandemu kanałów obsługi $(1/k, 1/k_f)$, jak na rys. 2.



Rys. 2. Schemat jednokanałowego modelu kolejkowego ruchomego bufora $1/k_f$ ze strumieniem przybyć równoważnym obsłudze przez ruchomy tandem kanałów obsługi: $(1/k, 1/k_f)$

Fig. 2. The scheme of a single channel queueing model for the buffer $1/k_f$ with an arrival stream equivalent to service by the tandem service channels: $(1/k, 1/k_f)$

Natężenie obsługi μ przez ruchomy bufor wynika z najkrótszego czasu przejazdu odcinka $1/k_f$ z prędkością swobodną v_f, a więc $\mu = k_f v_f$. Schemat modelu kolejkowego ruchomego bufora przedstawia rys. 2.

Jeżeli spełniony jest warunek płynnego potoku, to zamiast modelu ruchomego bufora można podzielić drogę na k_f odcinków o długości X, które mogą być traktowane jako sekwencje kanałów obsługi o parametrach modeli jednokanałowych modeli kolejkowych o parametrach ruchomego bufora z rys. 2. Według powyższych rozważań w obydwóch ujęciach będzie identyczne sumaryczne opóźnienie, a więc są to równoważne ujęcia modelowe.

Opóźnienia, które powstają w potoku ruchu, są bardzo małe, co ilustruje idea zlepionych kolejek przedstawiona przez Wocha (1983) i w poprawionej wersji przedstawiona w tym artykule.

2. ZLEPIONE PROCESY KOLEJEK

Każdy pojazd potoku ruchu jest obsługiwany przez ruchomy fragment drogi nazywany dystansem buforowym. Czas przejazdu dystansu buforowego z płynnego potoku jest czasem obsługi pojazdu przez drogę. Ruchomy bufor jest więc systemem kolejkowym, to znaczy może być traktowany jak dynamiczny system kolejkowy, poprzedzający każdy pojazd. W rozdziale 14 zostanie przedstawiony dokładnie taki model. Tak więc, każdy pojazd ma swój własny jednokanałowy system kolejkowy. W dalszym ciągu rozważa się system kolejkowy $GI/D/1$ - p. np. Gross i Harris (1974). O przybyciach do systemu zakłada się, że jest to strumień odnowy, to znaczy że odstępy między przybyciami są niezależne i mają ten sam przesunięty rozkład dowolny z przesunięciem Δ, natomiast czas obsługi (dla chwilowego uproszczenia) jest stały i wynosi Z. Przybycia do systemu wyraża natężenie przybyć λ:

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{\lambda'} + \Delta} = \frac{\lambda'}{1 + \lambda'\Delta}, \tag{11}$$

gdzie: $\frac{1}{\lambda'} + \Delta$ - oczekiwany odstęp,

Δ - odstęp minimalny,

$\frac{1}{\lambda'}$ - wartość oczekiwana części losowej odstępu.

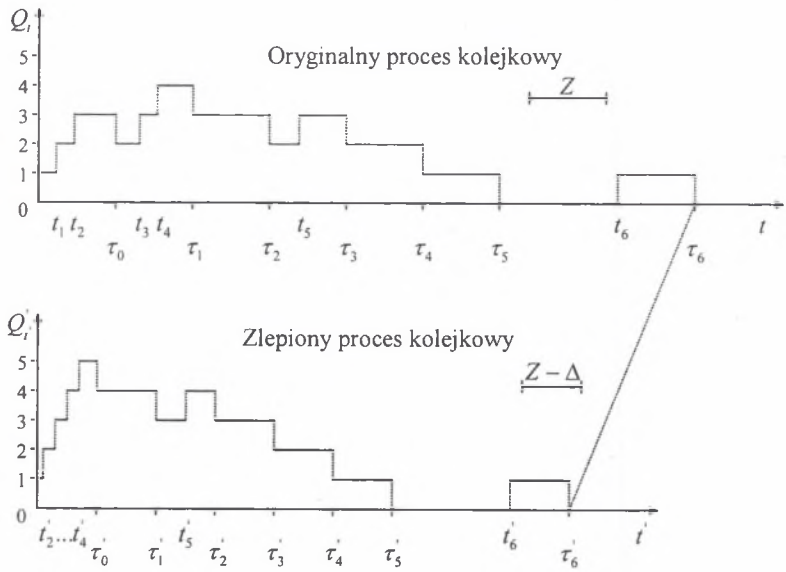
Relacje między tymi charakterystykami można wyrazić następująco:

$$0 < \Delta < Z < \frac{1}{\lambda}. \tag{12}$$

Dla takiego systemu kolejkowego można określić proces kolejek $(Q_t)_{t\geq 0}$ jako liczbę pojazdów w systemie w chwili t, to znaczy pojazdów znajdujących się w obsłudze lub w kolejce do obsługi. System i proces przybyć nazywa się oryginalnymi w celu ich odróżnienia od innego systemu i związanych z nim procesów opisanych dalej.

Rozważmy system kolejkowy również o strukturze $GI/D/1$, jednak o trochę innych założeniach. Przybycia do obsługi w tym systemie są procesem odnowy o rozkładzie odstępu identycznym z rozkładem części losowej odstępu opisanej poprzednio, to znaczy - oryginalnego systemu. O czasie obsługi w tym systemie zakłada się, że jest stały i wynosi $Z' = Z - \Delta$. Jeżeli część losowa odstępu między przybyciami w oryginalnym procesie przybyć ma rozkład wykładniczy, to mamy do czynienia z systemem $M/D/1$. Ten system w ogólnym przypadku nazywać się będzie systemem zlepionym, a proces przybyć, proces

kolejek i wszystkie ich charakterystyki określać się będzie jako zlepione. Przez t_i, t_i' oznacza się momenty i-tego przybycia w procesie oryginalnym i zlepionym, a τ_i, τ_i' - odpowiednie momenty zakończenia obsługi. Rys. 3 pokazuje przykładową realizację procesu oryginalnego Q_t i odpowiednią realizację procesu zlepionego Q_t'.



Rys. 3. Przykładowe realizacje procesów oryginalnego Q_t i zlepionego Q_t'

Fig. 3. Exemplary realizations of queueing processes: original Q_t and compressed Q_t'

We wszystkich rozważaniach zakłada się, że system oryginalny znajduje się w równowadze stochastycznej, to znaczy intensywność ruchu:

$$\rho = \lambda Z < 1 . \tag{13}$$

System oryginalny znajduje się w równowadze stochastycznej wtedy i tylko wtedy, gdy system zlepiony znajduje się w równowadze stochastycznej. Wykorzystując w warunku (13) zależność (12), dochodzi się do następującej nierówności, równoważnej (13):

$$\lambda'(Z - \Delta) < 1 \tag{14}$$

Lewa strona (13) i (14) jest intensywnością ruchu $\rho' = \lambda' B'$ systemu zlepionego.

Niech $u_1, u_2, \ldots$ oznaczają odstępy w przybyciach do uogólnionego systemu oryginalnego typu *GI/G/1*, $z_1, z_2, \ldots$ odpowiednie wartości czasu obsługi (dla systemu $GI/D/1 - z_i = Z$), a $w_1, w_2, \ldots$ czasy czekania dla kolejnych jednostek. Opóźnienie pojazdu i + 1 jest określone następującą zależnością rekurencyjną, prawdziwą dla dowolnych systemów $GI/G/1$ - Gross i Harris (1974):

$$w_{i+1} = \max(0, w_i + z_i - u_{i+1}) . \tag{15}$$

Należy zauważyć, że operacja zlepiania nie zmienia łańcucha opóźnień, bowiem gdy określić nowy system o odstępach $u_i^{'} = u_i - \Delta$, czasach obsługi $z_i^{'} = z_i - \Delta$ oraz opóźnieniach $w_i^{'}$, to na podstawie (15) można napisać:

$$w_i^{'} = w_i . \tag{16}$$

Oznacza to, że łańcuchy opóźnień w obu systemach są identyczne.

Z każdą wartością 0 w łańcuchu opóźnień jest związany czas bezczynności systemu. W procesie oryginalnym $(Q_t)_{t\geq 0}$ przedziały czasu, w których $Q_t = 0$, występują wówczas, gdy

$$u_{i+1} \geq w_i + z_i . \tag{17}$$

W takich przypadkach czas bezczynności systemu wynosi

$$u_{i+1} - w_i - z_i . \tag{18}$$

Podobnie jak dla łańcuchów opóźnień i tutaj na podstawie (18) można stwierdzić, że łańcuchy czasu bezczynności systemów oryginalnego i zlepionego są identyczne.

Z praktycznego punktu widzenia interesujące są zależności między granicznymi charakterystykami procesów $(Q_t)_{t\geq 0}$ i $(Q_{t'}^{'})_{t'\geq 0}$, takimi jak stacjonarne prawdopodobieństwa stanu i procesów: $p_i, p_i^{'}$, albo oczekiwane opóźnienie.

Ponieważ łańcuchy opóźnień w procesie oryginalnym i zlepionym są identyczne, to znaczy że stacjonarne prawdopodobieństwo systemu pustego wynosi

$$p_0 = \frac{\frac{1}{\lambda^{'}} p_0^{'}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda^{'}} p_0^{'} = (1 - \lambda\Delta) p_0^{'} = 1 - \lambda Z . \tag{19}$$

Łańcuchy opóźnień procesów oryginalnego i zlepionego są identyczne, jak również identyczne są łańcuchy czasów bezczynności, dlatego oczekiwane opóźnienie w systemie oryginalnym $E(W_q)$ jest równe oczekiwanemu opóźnieniu w systemie zlepionym $E(W_q^{'})$:

$$E(W_q) = E(W_q^{'}) . \tag{20}$$

Gdy system zlepiony jest $M/D/1$, to oczekiwane opóźnienie wynosi:

$$E(W_q^{'}) = \frac{\lambda^{'} Z^{'2}}{2(1 - \lambda^{'} Z^{'})} . \tag{21}$$

Dla odpowiedniego systemu oryginalnego otrzymuje się:

$$E(W_q) = \frac{\lambda(Z-\Delta)^2(1-\mu\Delta)}{2(1-\lambda Z)}. \tag{22}$$

Powyższe rozważania można uogólnić na inne systemy jednokanałowe, w których występuje możliwość zlepiania. Dla oznaczenia systemu kolejkowego, którego proces kolejek może być zlepiony, zmodyfikujmy symbolikę Kendalla poprzez dodanie do oznaczenia typu rozkładów prawdopodobieństwa dolnego wskaźnika $+\Delta$. Powyższy system oryginalny w rozszerzonej symbolice jest typu $M_{+\Delta} / D_{+\Delta} / 1$, natomiast $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$ będzie interpretowane jako system oryginalny, który po zlepieniu procesu kolejek o Δ daje system zlepiony typu $M / M / 1$.

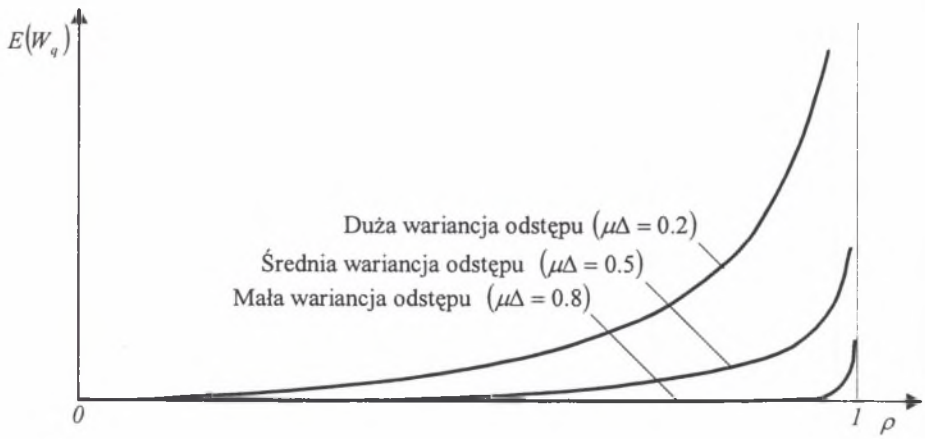
Gdy system zlepiony jest $M / M / 1$, to oczekiwane opóźnienie wynosi:

$$E(W_q') = \frac{\lambda' Z'^2}{1-\lambda' Z'}, \tag{23}$$

a odpowiedni wzór dla systemu oryginalnego $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$ jest następujący:

$$E(W_q) = \frac{\lambda(Z-\Delta)^2(1-\mu\Delta)}{1-\lambda Z}. \tag{24}$$

Powyższe wzory zostały zmienione w stosunku do odpowiednich wzorów na oczekiwane opóźnienie zamieszczonych w pierwotnej wersji - Woch (1983). W liczniku doszedł czynnik $(1-\mu\Delta)$.



Rys. 4. Zależność oczekiwanego opóźnienia $E(W_q)$ od intensywności ruchu ρ dla różnych poziomów wariancji odstępu potoku ruchu według modeli zlepionych kolejek

Fig. 4. The mean delay $E(W_q)$ as function of the traffic intensity ρ, for different values of headway variances

Na podstawie modeli zlepionych kolejek można wyjaśnić, dlaczego opóźnienia są na ogół małe. Mała wariancja odstępów potoków ruchu wynika z dużego udziału minimalnego odstępu w oczekiwanym odstępie. Zależność oczekiwanego opóźnienia od natężenia ruchu oraz dla różnych wielkości wariancji odstępów potoku ruchu ilustruje rys. 4.

3. MODEL RUCHOMEGO BUFORA TYPU $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$ (WG WOCHA, 2003)

Rozważmy drogę jednorodną z jednokierunkowym potokiem ruchu. Natężenie q jest równe iloczynowi gęstości k oraz przestrzennej oczekiwanej prędkości v. Każdy pojazd porusza się z prędkością swobodną v_f w sytuacjach bez czasów czekania. Podobnie oznacza się oczekiwaną prędkość płynnego potoku. W warunkach ustabilizowanych pojazd porusza się z prędkością v, która również interpretowana jest jako oczekiwana prędkość. Zamiast gęstości korkowej lub maksymalnej definiujemy maksymalną gęstość płynnego potoku k_f, to znaczy taką największą gęstość, dla której pojazdy poruszają się z prędkością swobodną v_f, bez czasów czekania.

W potoku ruchu można modelować opóźnienie za pomocą jednokanałowych modeli kolejkowych, jako modeli ruchomego bufora, pod warunkiem że modelowane opóźnienia będą mniejsze niż możliwości pochłaniania przez drogę w dystansie poprzedzającym ruchomy „kanał obsługi", a więc w ruchomej „poczekalni". Oznacza to, że oczekiwana długość kolejki $E(Q)$ w modelowanym systemie kolejkowym jest nie większa niż 1:

$$E(Q) \leq 1, \tag{25}$$

w minimalnym dystansie $1/k_f$. Ruch spełniający powyższy warunek nazywa się ruchem płynnym lub potokiem ustabilizowanym. Warunek (25) jest w istocie rzeczy warunkiem równowagi stochastycznej modelowanego ruchu, nazywanym również warunkiem płynnego potoku. Natomiast gdy nie jest spełniony warunek (25), to nie można modelować czasów czekania za pomocą jednokanałowych modeli kolejkowych. Taka sytuacja jest oznaką potoku nieustabilizowanego, który również nazywa się ruchem przeciążonym.

W modelach kolejkowych zwykłe ograniczenie intensywności ruchu jest

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{26}$$

gdzie λ jest natężeniem przybyć do ruchomego bufora, μ jest natężeniem obsługi ruchomego bufora i jest określone jako odwrotność czasu przejazdu dystansu minimalnego bufora o długości $1/k_f$ z prędkością swobodną v_f. Ograniczenie (26), jeżeli rozumieć je w sposób klasyczny jak w modelu Heidemanna (1996), jest z pozoru słabsze, niż warunek płynnego potoku (25), co wykaże się w dalszej treści. Rozwijając schemat Webstera (1958), którym również posłużył się Heidemann, można zaproponować następujący schemat modelu kolejkowego ruchomego bufora - rys. 2.

Model kolejkowy ruchomego bufora jest podobny do modelu Heidemanna podziału na stałe fragmenty drogi. Warunkiem zapewniającym płynny potok jest w modelu Heidemanna ograniczenie gęstości ruchu do gęstości optymalnej k_{opt}, dla której w klasyczny sposób otrzymujemy przepustowość $q_{\max}$. Mimo że warunek płynnego potoku (25) wygląda na mocniejszy niż w modelu klasycznym, to znaczy że jeżeli przez k_* oznaczymy graniczną gęstość ruchu, której odpowiada warunek płynnego potoku (25), to łatwo wykazać że:

$$k_* = k_{opt}. \tag{27}$$

Spróbujmy zatem porównać te wielkości.

Warunek płynnego potoku (25) na podstawie twierdzenia Little'a (p. np. Gross i Harris, 1974) można przekształcić w następujący:

$$E(W_Q) \le \frac{1}{\lambda}, \tag{28}$$

gdzie $E(W_Q)$ jest oczekiwanym czasem czekania (łącznie z czasem obsługi) w modelowanym systemie kolejkowym. Tak więc graniczna gęstość k_* spełniająca warunek płynnego potoku (28) jest to taka gęstość, dla której w (28) nierówność zastąpi się równością. Przyjmując dla celów porównania, model kolejkowy Heidemanna $M/G/1$, otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{1}{k\,v_f} = \frac{1}{v_f\,k_{jam}} + \frac{\left(\frac{k}{k_{jam}}\right)^2 + v_f^2\,k^2\,\sigma^2}{2\,v_f\,k\left(1-\frac{k}{k_{jam}}\right)}, \tag{29}$$

gdzie k_{jam} w modelu Heidemanna definiowane jest inaczej niż k_f, którego rozwiązaniem jest

$$k_* = \frac{\sqrt{\beta^2+1}-\sqrt{2}}{\beta^2-1}\sqrt{2}\,k_{jam}, \tag{30}$$

gdzie $\beta = v_f\,k_{jam}\,\sigma$, a σ^2 jest wariancją odstępu potoku ruchu.

Otrzymujemy wynik identyczny z optymalną gęstością k_{opt} w modelu Heidemanna, potwierdzający równoważność (27). Wykazaliśmy, że warunek płynnego potoku (25) w tym konkretnym przypadku jest równoważny klasycznemu pojęciu gęstości optymalnej. Jak się wykaże w dalszej treści, wynik ten ma znaczenie ogólne, to znaczy że pojęcie optymalnej gęstości k_{opt} w ujęciu klasycznym jest równoważne granicznej gęstości k_* zapewniającej płynny potok według warunku (25), a więc w dalszym ciągu utożsamia się te pojęcia, to znaczy:

$$k_* \equiv k_{opt}. \tag{31}$$

Następnym warunkiem, jaki powinien być spełniony podczas modelowania ruchomego bufora za pomocą jednokanałowych modeli kolejkowych, jest mała wariancja odstępów modelowanego ruchu sprawiająca, że modelowane opóźnienia ruchu są takie jak w zlepionych modelach kolejkowych, a więc są w bardzo specyficzny sposób zależne od intensywności ruchu.

Jeżeli przestrzega się warunku płynnego potoku (25) oraz powyższego, to można sformułować podobne założenia o modelu kolejkowym potoku ruchu, jak to zrobił Heidemann (1996). Jednak jest to całkowicie odmienne ujęcie, z pozoru tylko podobne. Zasadnicza różnica dotyczy warunku równowagi stochastycznej (25) oraz innej interpretacji fizycznej modelowanych opóźnień ruchu - w ujęciu dynamicznym. Odmienny również jest sam model kolejkowy, który pozwala spełnić wszystkie postulaty, jakie stawia się modelom jednokanałowym, wykorzystywanym do modelowania opóźnień. Chodzi przede wszystkim o niedopuszczalne zdaniem autora założenie o całkowitej losowości strumienia przybywających pojazdów w ujęciu Heidemanna, co było uzasadnione w rozdziale 13. Zasadnicza różnica jednak polega na wielokrotnie większym dystansie elementarnym drogi $1/k_f$.

W teorii potoków ruchu zakłada się - Haight (1963), Drew (1968) - że istnieje równowaga stochastyczna potoku ruchu, to znaczy istnieją: oczekiwana prędkość potoku v, oczekiwana gęstość k oraz oczekiwane natężenie q, które spełniają związek:

$$q = kv, \tag{32}$$

a prędkość spełnia równanie równowagi: $v = V_e(q)$, gdzie V_e jest związkiem równowagi dla nienasyconego potoku ruchu. Jeżeli modelem opóźnień ruchu będzie system kolejkowy typu $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$, to z twierdzenia Little'a (p. np. Gross i Harris, 1974 i Heidemann i Wegmann, 1997) otrzymujemy związek między oczekiwanym czasem czekania w odstępie $E(W_Q)$, składającym się z oczekiwanego czasu przejazdu $Z = \frac{1}{\mu}$ powiększonego o oczekiwane opóźnienie $E(W_q)$, a oczekiwaną długością kolejki w dystansie $1/k_f$ - $E(Q)$:

$$E(Q) = \lambda E(W_Q), \tag{33}$$

gdzie λ jest natężeniem przybyć, a μ natężeniem obsługi rozumianej jako czas przejazdu dystansu $1/k_f$ z prędkością płynnego potoku v_f, spełniające następujące warunki:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'} + \Delta, \qquad Z = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu'} + \Delta, \qquad \mu = k_f v_f, \qquad Z > \Delta > 0. \tag{34}$$

Zakłada się, że minimalny odstęp Δ jest jednocześnie minimalnym czasem przejazdu, a odstępy oraz czasy przejazdu mają przesunięte rozkłady wykładnicze z powyższymi parametrami. Dystans $1/k_f$, nazywany w dalszym ciągu ruchomym buforem lub buforem, wyraża najmniejszy dystans między dwoma pojazdami poruszającymi się z prędkością swobodną v_f, a więc bez opóźnień.

W konsekwencji uzyskuje się:

$$\lambda = \frac{E(Q)}{1/k_f} \frac{1/k_f}{E(W_Q)} \tag{35}$$

dla bufora $1/k_f$. W dalszym ciągu należy identyfikować λ z q, $\frac{E(Q)}{1/k_f}$ z k oraz $\frac{1/k_f}{E(W_Q)}$ z v.

W rezultacie otrzymuje się oczekiwane opóźnienie bez czasu obsługi dla modelu kolejkowego typu $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$:

$$E(W_q) = \frac{\lambda'}{\mu'^2(\mu' - \lambda')} = \frac{\rho(Z-\Delta)^2(1-\mu\Delta)}{Z(1-\rho)} = \frac{\frac{k}{k_f}(Z-\Delta)^2(1-\mu\Delta)}{Z\left(1-\frac{k}{k_f}\right)}, \tag{36}$$

gdzie $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{k}{k_f}$ jest intensywnością ruchu. Natomiast oczekiwany czas czekania $E(W_Q)$ wynosi

$$E(W_Q(\rho)) = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho(Z-\Delta)^2(1-\mu\Delta)}{Z(1-\rho)} = Z + \frac{\frac{k}{k_f}(Z-\Delta)^2(1-\mu\Delta)}{Z\left(1-\frac{k}{k_f}\right)} = E(W_Q(k)). \tag{37}$$

Oczywiście Δ zależy od v.

Odpowiednia oczekiwana prędkość wynosi:

$$v=\frac{\frac{1}{k_f}}{E(W_Q)}=\frac{\frac{1}{k_f}Z\left(1-\frac{k}{k_f}\right)}{Z^2\left(1-\frac{k}{k_f}\right)+(Z-\Delta)^2(1-\mu\Delta)\frac{k}{k_f}}. \tag{38}$$

Dla wyznaczenia optymalnej gęstości ruchu przyrównajmy pochodną funkcji $q(k)=kv$ do zera, a więc rozwiążmy równanie: $q'=v+kv'=0$. Otrzymujemy optymalną gęstość ruchu

$$k_*=\frac{k_f}{1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{39}$$

Podstawiając (38) do wzoru (39) otrzymujemy wzór na optymalną prędkość potoku ruchu:

$$v_*=\frac{\mu}{k_f}\frac{1}{1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{v_f}{1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{40}$$

Podstawiając do podstawowego wzoru: $q_*=k_*v_*$ otrzymujemy przepustowość:

$$q_*=\frac{\mu}{\left(1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}\right)^2}=\frac{k_f v_f}{\left(1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}\right)^2}. \tag{41}$$

Jak widać, obliczanie optymalnej gęstości poprzez przyrównanie pochodnej funkcji $q'(k)=0$ może być czasem kłopotliwe. Jest to jednak tylko sposób na ocenę przepustowości, który może być zastąpiony innymi sposobami, jak przedstawia się dalej.

Związek równowagi $v=V_e(q)$ wynika ze spełnienia następujących warunków płynnego potoku. Aby ruch odbywał się płynnie, to oczekiwana liczba pojazdów w dystansie $1/k_f$ powinna być nie większa od 1, to znaczy:

$$E(Q)\le 1, \tag{42}$$

co z uwagi na związek Little'a jest równoważne warunkowi:

$$E(W_q)\le\frac{1}{q}-\frac{1}{\mu}. \tag{43}$$

Ostatni warunek oznacza natomiast, że oczekiwane opóźnienie w dystansie powinno być nie większe od różnicy między odstępami między pojazdami i czasem przejazdu bez czasów czekania. Z drugiej strony, z uwagi na efektywność ruchu powinien być spełniony warunek płynnego potoku:

$$k\le\frac{1}{s_*},\qquad k_*=\frac{1}{s_*}\equiv q_*:q_*=\max(q), \tag{44}$$

gdzie s_* oznacza dystans optymalny, to znaczy taki, który maksymalizuje natężenie ruchu q, a k_* oznacza optymalną gęstość odpowiadającą przepustowości q_*. Jeżeli dopuści się większą oczekiwaną liczbę pojazdów niż 1, to z uwagi na związek Little'a jest to równoważne oczekiwanemu opóźnieniu większemu niż różnica między odstępem a czasem przejazdu bez opóźnień, co jest niemożliwe z uwagi na brak przestrzeni opóźnień dla pojazdów następnych w kolejce i konieczność zmniejszenia oczekiwanej prędkości. Tak więc warunki (42) lub (43) są mocniejsze od związku równowagi $v=V_e(q)$. Niespełnienie warunków (42) i (43)

odpowiada zmniejszeniu natężenia, bowiem pewna część przepustowości pochłaniana jest przez opóźnienie. Jest to wniosek o fundamentalnym znaczeniu dla wyjaśnienia pojęcia płynnego potoku. Gdy nierówność (42) podzieli się obustronnie przez $\frac{1}{k_f}$, to otrzyma się uogólniony warunek (44), co dowodzi równoważności wszystkich powyższych warunków płynnego potoku. Tak więc, optymalna gęstość wynikająca z warunków płynnego potoku (42) i (43) wynosi, tak jak w (45):

$$k_* = f_* k_f = \frac{1}{1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}} k_f, \tag{45}$$

gdzie f_* jest optymalnym prawdopodobieństwem płynnego potoku wynikającym z warunków płynnego potoku (44), (45), to znaczy rozwiązania równań, jakie otrzyma się po zastąpieniu w warunkach (44) i (45) znaków nierówności znakami równania.

Optymalne prawdopodobieństwo płynnego potoku pozwala również określić optymalną prędkość, jak widać w modelu podstawowym, a więc we wzorze (32):

$$v_* = f_* v_f = \frac{1}{1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}} v_f, \tag{46}$$

odpowiadającą optymalnej gęstości.

Z drugiej strony optymalny dystans s_* z warunku (44) odpowiada maksymalnemu natężeniu ruchu q_*, dla którego w warunkach (42) i (43) zachodzi równość. Innymi słowy, q_* jest przepustowością drogi, wyprowadzoną z modelu podstawowego (41):

$$q_* = k_* v_* = f_*^2 k_f v_f = \frac{\mu}{\left(1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}\right)^2}, \qquad 0 \le \mu\Delta \le 1, \tag{47}$$

gdzie $\mu\Delta$ jest współczynnikiem zmienności czasu przejazdu dystansu $1/k_f$ z prędkością swobodną v_f. Jeżeli $\mu\Delta = 1$, odpowiada to potokowi o równych odstępach. Ponieważ

$$\mu\Delta = \frac{\Delta}{\frac{1}{\mu}},$$

a więc wyraża stosunek minimalnego odstępu do oczekiwanego, to jest dobry wskaźnik zmienności czasu obsługi. Jeżeli $\mu\Delta = 0$, odpowiada to potokowi całkowicie losowemu, to znaczy o wykładniczych odstępach. Ten ostatni przypadek nie jest realistyczny. Jak wykazują badania statystyczne Heidemanna, na drogach niemieckich współczynnik zmienności modelu Heidemanna (1996) wynosi $\beta = 0.2$, co, z grubsza rzecz biorąc, odpowiada wartości współczynnika $\mu\Delta = 0.8$, a więc bardzo małej wartości wariancji odstępu potoku ruchu.

Aby wyznaczyć k_* (45) z warunku płynnego potoku, należy obustronnie pomnożyć (43) przez q, aby otrzymać podstawowy warunek płynnego potoku ograniczający oczekiwaną liczbę pojazdów w kolejce l przez prawdopodobieństwo niewykorzystania drogi $1-\rho$:

$$\frac{k}{k_f}\mu E(W_q) = qE(W_q) = l \le 1 - q\frac{1}{\mu} = 1-\rho. \tag{48}$$

Jeżeli potok ruchu spełnia warunek płynnego potoku (42), to z uwagi na efekt małej wariancji odstępu potoku, ilustrowany ideą zlepionych kolejek, w sytuacji dużych wartości współczynnika zmienności, prawdopodobieństwa stacjonarne kolejek trzy- i więcej-

pojazdowych są równe zeru, a więc opóźnienie występuje tylko w kolejkach dwupojazdowych. Oznacza to, że prawdopodobieństwa stacjonarne stanów, że w dystansie $1/k_f$ jest 0, 1 i 2 pojazdy, równe odpowiednio p_0, p_1 i p_2, spełniają warunek:

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1. \tag{49}$$

Powyższy warunek powinien być traktowany jako pewne uproszczenie dla celów demonstracyjnych; jest on spełniony dla dużego zakresu zmienności intensywności ruchu ρ, kiedy wariancja odstępów jest mała, na przykład $\mu\Delta = 0.8$. Wtedy warunek (42), który gwarantuje płynny potok, odpowiada następującemu ograniczeniu prawdopodobieństwa opóźnienia p_2, prawdopodobieństwem pustego dystansu p_0:

$$p_0 \geq p_2 \approx 1 - f(k), \tag{50}$$

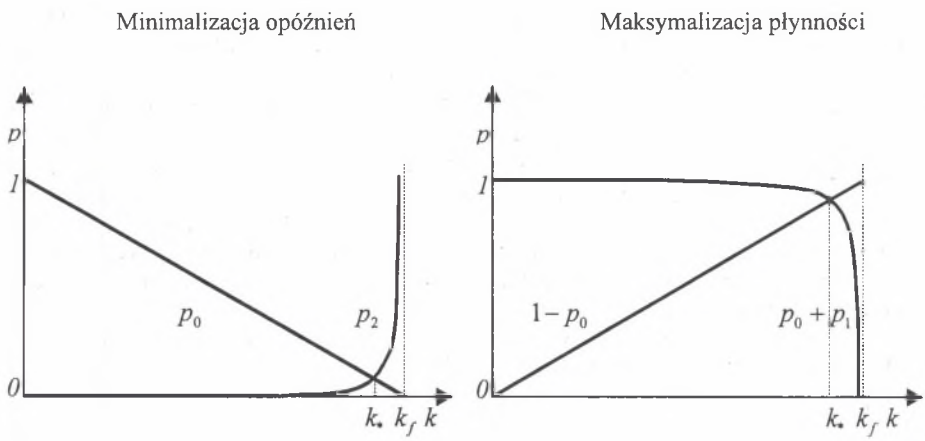
gdzie $f(k)$ jest prawdopodobieństwem płynnego potoku, wobec tego $1 - f(k)$ jest dokładnym i na ogół nieznanym, prawdopodobieństwem opóźnienia w modelowanym dystansie. Powyższy warunek, po pomnożeniu przez -1 i dodaniu 1, jest równoważny ograniczeniu prawdopodobieństwa płynnego potoku $p_0 + p_1$ przez prawdopodobieństwo wykorzystania dystansu $1 - p_0$:

$$f(k) = p_0 + p_1 \geq 1 - p_0. \tag{51}$$

Układ powyższych równoważnych warunków płynnego potoku pozwala na stwierdzenie, że dla ustalonego modelu opóźnień ruchu spełniającego warunki płynnego potoku minimalizacja opóźnień jest równoważna maksymalizacji płynnego potoku, bowiem prowadzi do tej samej oceny optymalnej gęstości ruchu k_*. Można więc stwierdzić, że podstawowy model ruchu nie jest jedynym możliwym ujęciem zagadnienia optymalnej gęstości ruchu. Czasem zamiast maksymalizacji płynności ruchu można minimalizować opóźnienia, przy ograniczonym stopniu pochłaniania opóźnień lub maksymalizować płynny potok, przy ograniczonym poziomie efektywności wykorzystania drogi. Rys. 5 przedstawia wykresy prawdopodobieństw z warunków płynnego potoku (50) i (51) ilustrujące powyższe rozważania, przy następujących interpretacjach oznaczeń: gęstość k, prawdopodobieństwo pustego dystansu p_0, prawdopodobieństwo opóźnienia p_2, prawdopodobieństwo wykorzystania dystansu buforowego $1 - p_0$, prawdopodobieństwo płynności $p_0 + p_1$, gęstość maksymalna k_f, ocena optymalnej gęstości ruchu k_*. Ponieważ oczekiwana kolejka $E(Q) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2$, kiedy spełniony jest (49), oraz na podstawie twierdzenia Little'a (patrz Gross i Harris, 1974) $E(Q) = \lambda \cdot E(W_Q)$ mamy prawdopodobieństwo opóźnienia

$$p_2 = \lambda \cdot E(W_q) = \frac{\rho^2 (1 - \mu\Delta)^3}{1 - \rho} = \frac{\left(\frac{k}{k_f}\right)^2 (1 - \mu\Delta)^3}{1 - \frac{k}{k_f}}$$

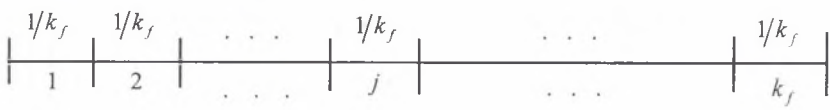
i prawdopodobieństwo płynności $p_0 + p_1 = 1 - p_2$ oraz prawdopodobieństwo pustego dystansu $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{k}{k_f}$.



Rys. 5. Dualność zagadnień minimalizacji opóźnień oraz maksymalizacji płynności ($\mu\Delta = 0.8$)
Fig. 5. Duality of problems: minimization of delays and maximization of free-flow $(\mu\Delta = 0{,}8)$

4. MAKSYMALNA PŁYNNOŚĆ POTOKU RUCHU (WG WOCHA, 2003)

Rozważmy drogę z gęstością k, którą można podzielić na k_f fragmentów o długości $1/k_f$, modelowanych jako jednokanałowe systemy kolejkowe, o takim samym natężeniu obsługi μ. Przez obsługę rozumie się przejazd dystansu $1/k_f$ z oczekiwaną prędkością swobodną v_f, a więc bez opóźnień, to znaczy $\mu = k_f \cdot v_f$. Liczba k_f jest określona inaczej niż w podobnym modelu Heidemanna (1996) liczba k_{jam}, mianowicie jest to maksymalna liczba pojazdów na drodze poruszających się z prędkością swobodną v_f, bez opóźnień. Natomiast natężenie $\lambda = kv_f$ jest natężeniem przybyć do j-tego odcinka drogi: $1 \le j \le k_f$. Podział drogi na odcinki ilustruje rys. 1



Rys. 6. Podział na odcinki
Fig. 6. Dividing into sections

W powyższych określeniach pojawia się zasadnicza różnica w stosunku do opisu modelu ruchomego bufora z [Woch (2003)], bowiem tutaj dzieli się drogę na stałe fragmenty. Wymaga to szerszego uzasadnienia. W opisie modelu ruchomego bufora założono, że czasy czekania lokalizowane są równomiernie na drodze, co wydaje się słuszne w idealnym przypadku drogi jednorodnej. Jak wykazano w [Woch (2003)], jeżeli podzielimy drogę na stałe kawałki, jak w modelu Heidemanna (1996) oraz wyżej, to jeżeli spełnione są warunki płynnego potoku podane w modelu ruchomego bufora z [Woch (2003)], to odpowiada to

warunkom równowagi stochastycznej rozumianej teoriokolejkowo, jak również odpowiada to warunkom ustabilizowanego potoku, rozumianym w sposób klasyczny. W takich warunkach równowagi stochastycznej potoku, ponieważ, jak wykazano w [Woch (2003)], każdy elementarny fragment drogi o długości $1/k_f$ zawiera wystarczające rezerwy przepustowości na pochłanianie „swoich" opóźnień, można wyobrazić sobie drogę działającą w sekwencji stałych fragmentów, tak jak wyżej, jak również - równoważne inne podziały powstające poprzez przesuwanie miejsca początku fragmentów elementarnych. Daje to podstawę do różnych równoważnych sposobów modelowania opóźnień, jeżeli spełnione są warunki płynnego potoku. **Tak więc, w tym modelu mechanizm utrzymywania bezpiecznego odstępu jest taki sam jak w modelu ruchomego bufora, jednak w inny sposób rejestruje się zakłócenia płynności ruchu.**

Dla takiej sekwencji odcinków drogi można określić oczekiwaną płynność potoku jako oczekiwaną liczbę pojazdów poruszających się płynnie:

$$F(k) = k - l \cdot k_f, \qquad 0 < F(k) < k < k_f, \tag{52}$$

gdzie k jest oczekiwaną liczbą pojazdów na całej drodze, a l jest oczekiwaną liczbą pojazdów opóźnionych we fragmencie drogi $1/k_f$, a więc $l \cdot k_f$ jest oczekiwaną liczbą pojazdów opóźnionych na całej drodze. Oczekiwana liczba pojazdów opóźnionych na odcinku drogi $1/k_f$ na podstawie twierdzenia Little'a (p. np. Gross i Harris, 1974) jest równa

$$l = \lambda \cdot E(W_q), \tag{53}$$

ponieważ oczekiwana kolejka $E(Q) = \lambda E(W_Q) = \lambda E(W_q) + \lambda \frac{1}{\mu}$ równa jest oczekiwanej liczbie opóźnionych pojazdów $\lambda E(W_q)$ powiększonej o oczekiwaną liczbę obsługiwanych pojazdów $\lambda \frac{1}{\mu}$, gdzie $\lambda = kv_f$ jest natężeniem przybyć do pojedynczego fragmentu drogi, ograniczonym czasem przejazdu poprzedniego odcinka $1/k$ z prędkością swobodną v_f, a $E(W_q)$ odpowiednim oczekiwanym opóźnieniem. Jeżeli intensywność ruchu

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{k}{k_f} < 1, \tag{54}$$

to oczekiwana liczba pojazdów poruszających się płynnie (1) jest równa

$$F(k) = k \cdot \left(1 - \mu \cdot E(W_q)\right). \tag{55}$$

Dla określenia optymalnej gęstości, dla której największa jest maksymalna płynność potoku, przyrównajmy pochodną do zera $F'(k) = 0$, co prowadzi do równania:

$$1 - \mu \cdot E(W_q) - k \cdot \mu \cdot E'(W_q) = 0, \tag{56}$$

gdzie $E'(W_q)$ jest pochodną oczekiwanego opóźnienia. Dzieląc obustronnie przez μ oraz podstawiając $Z = \frac{1}{\mu}$ oczekiwany czas przejazdu dystansu $1/k_f$, otrzymujemy inną formę równania, podobną do poprzednich rozważań:

$$Z - E(W_q) - k \cdot E'(W_q) = 0. \tag{57}$$

Można zauważyć, że gdy w podobny sposób w podstawowym modelu przyrównamy pochodną natężenia do zera, to prowadzi to do innego równania:

$$Z + E(W_q) - k \cdot E'(W_q) = 0. \tag{58}$$

Różne równania mogą dawać identyczne rozwiązania. Sprawdzenie takiego przypuszczenia dla modelu $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$ nie jest trudne, bowiem oczekiwane opóźnienie jest według rozważań z [Woch (2003)], równe

$$E(W_q) = \frac{\frac{k}{k_f}(Z-\Delta)^2(1-\mu\cdot\Delta)}{Z\left(1-\frac{k}{k_f}\right)}, \tag{59}$$

natomiast pochodna tej funkcji jest równa

$$E'(W_q) = \frac{\frac{1}{k_f}(Z-\Delta)^2(1-\mu\cdot\Delta)}{Z\left(1-\frac{k}{k_f}\right)^2}. \tag{60}$$

Rozwiązanie (57) jest następujące:

$$k_0 = k_f \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(1-\mu\cdot\Delta)^{-3}}}\right) \tag{61}$$

i po przekształceniu (61) okazuje się mniejsze od optymalnej gęstości wyprowadzonej z modelu podstawowego przez [Wocha (2003)], która jest rozwiązaniem równania (58):

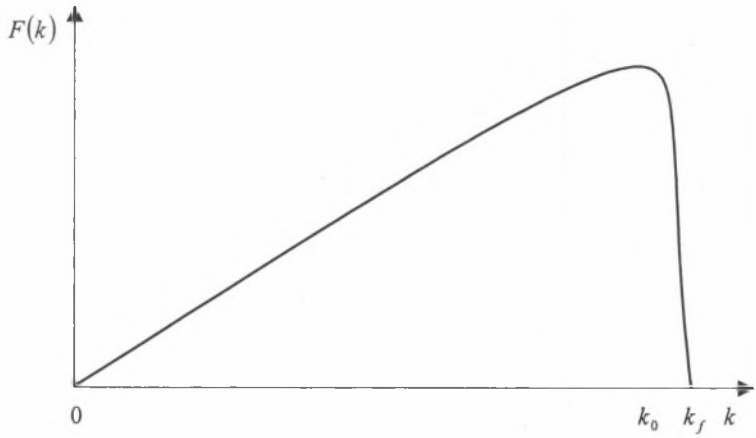
$$k_* = \frac{k_f}{1+(1-\mu\cdot\Delta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{62}$$

Można sądzić, że pojęcie optymalnej gęstości maksymalizującej płynność potoku jest dolnym ograniczeniem optymalnej gęstości w modelu podstawowym.

Rys. 7 przedstawia wykres oczekiwanej płynności potoku

$$F(k) = k\left(1 - \frac{\frac{k}{k_f}(1-\mu\cdot\Delta)^3}{1-\frac{k}{k_f}}\right) \text{ dla } \mu\cdot\Delta = 0.8.$$

Optymalna gęstość pod względem płynności potoku jest rozszerzeniem pojęcia optymalnego natężenia, które powstało jako kryterium efektywności wykorzystania złożonych węzłów torowych i jako takie funkcjonuje do dzisiaj w Polskich Kolejach Państwowych. Złożoność modeli węzłów transportowych sprawia, że do oceny opóźnień stosuje się metody Monte Carlo. Badanie przepustowości złożonych węzłów transportowych za pomocą optymalnego natężenia ukazuje dopiero zalety tego podejścia.



Rys. 7. Wykres oczekiwanej płynności potoku $F(k)$. Gęstość k, położenie optymalnej gęstości k_0 względem maksymalnej gęstości k_f

Fig. 7. Graph of the mean flow freedom $F(k)$

Problemem teoretycznym powyższego ujęcia płynności potoku jest relacja optymalnej gęstości k_0 i optymalnej gęstości k, zdefiniowanej w modelu ruchomego bufora Wocha (2003). Aby porównać te wielkości, należy przekształcić równania (57) i (58) przenosząc wyrażenia $-k \cdot E'(W_q)$ na prawe strony, aby otrzymać rozwiązania jako przecięcia krzywych odpowiadających lewym i prawym stronom tych równań. Mamy więc równanie „równowagi" odpowiadające (57):

$$Z - E(W_q) = k \cdot E'(W_q) \tag{63}$$

oraz równanie „równowagi" odpowiadające (58):

$$E(W_Q) = Z + E(W_q) = k \cdot E'(W_q) \quad . \tag{64}$$

Po prawej stronie obu równań występuje wyrażenie, które należy interpretować jako oczekiwany przyrost funkcji opóźnień, a więc wskaźnik przyrostu kosztu opóźnień. Natomiast lewa strona (63) jest różnicą oczekiwanego czasu przejazdu bez opóźnień odcinka drogi $1/k_f$ i opóźnienia. Jest to więc wskaźnik dopuszczalności opóźnień ze względu na „rezerwy przepustowości". Tak więc równanie (63) jest swoistym kryterium efektywności wykorzystania drogi.

Po lewej stronie (64) jest oczekiwany czas czekania $E(W_Q)$, który jest ważnym wskaźnikiem strat jakości ruchu, ponieważ wyraża podstawowy wskaźnik jakości ruchu: oczekiwany czas podróży $k_f E(W_Q)$, równy iloczynowi liczby elementarnych odcinków drogi

k_f i oczekiwanego czasu czekania w elementarnym odcinku drogi $E(W_Q)$. A więc równanie (13) można interpretować również jako kryterium efektywności wykorzystania drogi.

Oczekiwany czas czekania $E(W_Q)$ (64) dla zmniejszającej się gęstości k zmierza do minimalnego czasu obsługi, który równy jest oczekiwanemu czasowi przejazdu odcinka $1/k_f$ bez opóźnień, a więc równy jest oczekiwanemu czasowi obsługi Z w elementarnym modelu kolejkowym, jak na rys. 8.

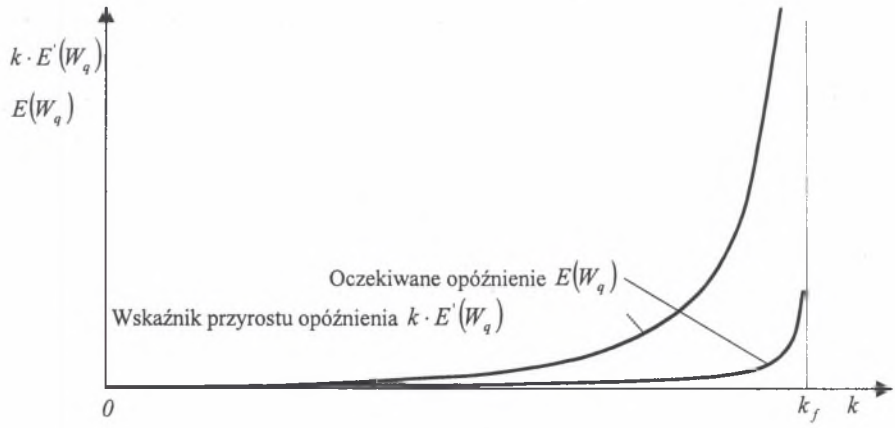
Oczekiwana rezerwa czasu przejazdu $Z - E(W_q)$ (63) ma wykres, który jest „odbiciem" wykresu oczekiwanego czasu czekania w prostej $k = Z$, tak jak na rys. 8.

Natomiast niezbyt oczywisty jest przebieg wykresu oczekiwanego przyrostu opóźnienia $k \cdot E'(W_q)$. Dla modelu kolejkowego $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$, który jest naszym modelem podstawowym, można na podstawie (8) i (9), dojść do następującej tożsamości:

$$k \cdot E'(W_q) \equiv E(W_q) \cdot \frac{1}{1 - \frac{k}{k_f}} > E(W_q), \tag{65}$$

ponieważ $0 < \frac{k}{k_f} < 1$.

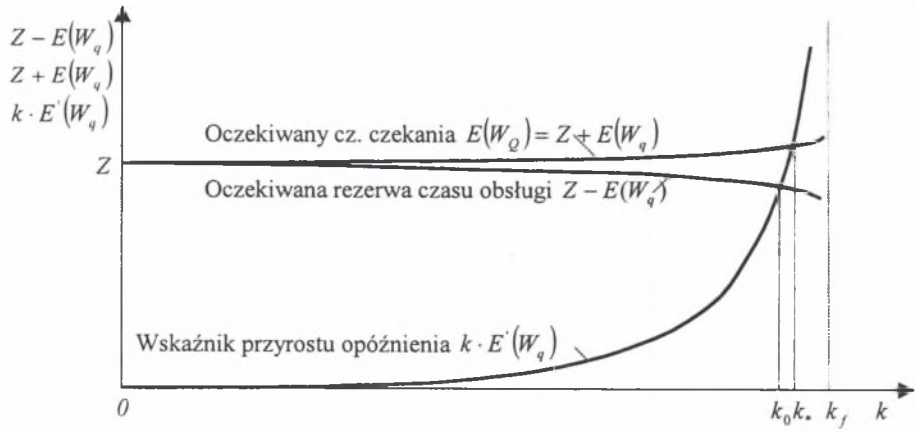
Pozwala to stwierdzić, że oczekiwany przyrost opóźnienia $k \cdot E'(W_q)$ jest funkcją wypukłą o wykresie podobnym do wykresu oczekiwanego opóźnienia $E(W_q)$, jak na rys. 8.



Rys. 8. Wzajemny układ wykresów oczekiwanego przyrostu opóźnienia $k \cdot E'(W_q)$ i oczekiwanego opóźnienia $E(W_q)$

Fig. 8. Disposition of graphs of the mean increment of delay $k \cdot E'(W_q)$ and the mean delay, for $E(W_q)$

Na tej podstawie można narysować wszystkie krzywe efektywności wykorzystania drogi, tak jak na rys. 9.



Rys. 9. Rozmieszczenie punktów przecięcia krzywych efektywności wykorzystania drogi ilustrujące stałą relację między optymalną gęstością maksymalizującą płynność - k_0 a optymalną gęstością z modelu podstawowego - k_*.

Fig. 9. Disposition of the road effectiveness graphs crossing points showing a fixed relation between the optimum density of the flow freedom - k_0, and the optimum density of the moving buffer model - k_*

Gdy sporządzi się rysunek obrazujący (63) i (64), taki jak rys. 9, to widać, że ponieważ funkcja $k \cdot E'(W_q)$ jest zawsze rosnąca i wypukła, to przecięcie (63) na wykresie jest zawsze „wcześniej" niż (64), a więc optymalna gęstość k_0 z (63) jest zawsze mniejsza niż optymalna gęstość k_* z (64):

$$k_0 < k_* . \tag{66}$$

Innymi słowy, można stwierdzić, że kryterium maksymalnej płynności potoku jest zawsze ostrzejsze niż kryterium przepustowości w modelu podstawowym.

Aby ocenić charakterystyki przepustowości w modelu maksymalnej płynności potoku, wyznaczmy oczekiwaną prędkość

$$v = \frac{\frac{1}{k_f}}{E(W_Q)} = \frac{\frac{1}{k_f} Z\left(1 - \frac{k}{k_f}\right)}{Z^2\left(1 - \frac{k}{k_f}\right) + (Z - \Delta)^2 (1 - \mu\Delta)\frac{k}{k_f}} . \tag{67}$$

Gdy podstawimy optymalną gęstość k_0 z (61), to otrzymamy optymalną prędkość w modelu maksymalnej płynności potoku

$$v_0 = \frac{v_f}{1 + (1 - \mu\Delta)^3\left(\sqrt{1 + (1 - \mu\Delta)^{-3}} - 1\right)} . \tag{68}$$

Optymalne natężenie w modelu maksymalnej płynności jest równe

$$q_0 = k_0 v_0 = \frac{\mu}{1+(1-\mu\Delta)^3 + 2\sqrt{(1-\mu\Delta)^6 + (1-\mu\Delta)^3}} . \tag{69}$$

Pojawia się naturalne pytanie o różnicę między przepustowością

$$q_* = \frac{\mu}{\left(1+(1-\mu\Delta)^{\frac{3}{2}}\right)^2} \tag{70}$$

z modelu ruchomego bufora z [Woch (2003)] a optymalnym natężeniem (18).

Przepustowość (70) daje się przedstawić za pomocą wzoru

$$q_* = \frac{\mu}{1+(1-\mu\Delta)^3 + 2\sqrt{(1-\mu\Delta)^3}} , \tag{71}$$

co daje podstawę do stwierdzenia, że

$$q_0 < q_* . \tag{72}$$

Widać również, że różnica między optymalnym natężeniem q_0 a przepustowością q_* jest bardzo mała, zważywszy że wyrażenie $(1-\mu\Delta)^6$ ma małe wartości dla typowych wartości $\mu\Delta = 0.8$ - wskaźników wariancji czasów przejazdu po odcinku $1/k_f$, co wykazane zostało przez Wocha (1998) i Heidemanna (1996).

Pojęcie optymalnego natężenia pod względem płynności, jakie stosowane jest do analiz efektywności wykorzystania węzłów torowych sieci PKP, jest praktyczną egzemplifikacją modelu maksymalnej płynności, przedstawionego wyżej. Na ogół oczywiste było, że pojęcie optymalnego natężenia pod względem płynności jest dolnym ograniczeniem przepustowości. Natomiast brakowało wyjaśnienia, dlaczego różnica między przepustowością a optymalnym natężeniem jest mała. Tym wyjaśnieniem jest model maksymalnego płynnego potoku przedstawiony wyżej. Tak więc, powyższy model ilustruje również, że różnica optymalnych natężenia (72) jest też mała, co wynika z własności funkcji oczekiwanych opóźnień $E(W_q)$ przedstawionych na rys. 8 i 9.

Gdy wyobrazimy sobie skrajny przypadek drogi z jednym odcinkiem elementarnym, to znaczy $k_f = 1$, to pojęcie optymalnej natężenia płynnego potoku redukuje się do pojęcia optymalnej natężenia stosowanego do dzisiaj w PKP w analizach efektywności wykorzystania węzłów torowych (patrz na przykład Woch, 1983). Ponieważ różnice między optymalnymi natężeniami a przepustowościami są małe, jak to do dzisiaj intuicyjnie oczekiwano, w praktyce optymalne natężenia są traktowane jako dobre charakterystyki przepustowości.

5. PORÓWNANIE NUMERYCZNYCH WYNIKÓW MODELU HEIDEMANNA I RUCHOMEGO BUFORA ORAZ MAKSYMALNEJ PŁYNNOŚCI POTOKU

Obliczenia za pomocą modelu Heidemanna (1996) przeprowadzono dla sprawdzenia typowych charakterystyk niemieckich dróg, a więc średniej prędkości swobodnej $v_f = 130\ km/h$, współczynnika zmienności czasu obsługi $\beta = 0.2$ oraz stałej długości fragmentu drogi uważanego za urządzenie obsługi - minimalny dystans $1/k_{jam} = 10\ m$. Przy takich wartościach parametrów modelu Heidemanna wzór na optymalną gęstość przekształca się na następujący:

$$k_{opt} = 0.581\, k_{jam} = 58.1\ poj/km. \tag{73}$$

Optymalna gęstość jest oczywiście środkiem do celu, jakim jest określenie przepustowości

$$q_{\max} = (0.581)^2 k_{jam} v_f = 0.337\mu. \tag{74}$$

Tak więc natężenie obsługi na podstawie powyższego wzoru obliczamy mnożąc $k_{jam} = 100\ poj/km$ przez średnią prędkość swobodną:

$$\mu = 100 \cdot 130 = 13000\ poj/h. \tag{75}$$

Podstawiając do wzoru (74) otrzymujemy:

$$q_{\max} = 0.337 \cdot 13000 = 4381\ poj/h. \tag{76}$$

Można zwrócić uwagę w modelu Heidemanna na bardzo dużą wartość natężenia obsługi μ (75). Jest to nierealna wartość natężenia obsługi i dlatego konsekwencją tej sytuacji jest bardzo duża wartość „straconej" przepustowości drogi μ_d, wynosząca prawie 2/3 wartości maksymalnej:

$$\mu_d = 0.663\mu, \tag{77}$$

którą uzyskano poprzez arbitralną, nierealistyczną i za małą wartość fragmentu drogi uważanego za urządzenie obsługi - minimalnego dystansu $1/k_{jam}$ równego 10 m. Można przypuszczać, że jest to sytuacja przymusowa, wynikająca z zastosowania nieodpowiedniego modelu kolejkowego, a więc przyjęcia niewłaściwego założenia o rozkładu odstępu potoku ruchu, to znaczy przyjęcia założenia o wykładniczym rozkładzie odstępu.

Obliczenia według modelu ruchomego bufora przeprowadzono przyjmując założenia podobnie jak w modelu Heidemanna (1996). Przyjęto, że średnia prędkość swobodna $v_f = 130\ km/h$ oraz że współczynnik zmienności czasu obsługi wynosi $\mu\Delta = 0.8$, co w przybliżony sposób odpowiada wartości współczynnika Heidemanna $\beta = 0.2$. Wartość $\beta = 1$ w modelu Heidemanna odpowiada założeniu wykładniczego rozkładu prawdopodobieństwa czasu przejazdu po fragmencie drogi $1/k_{jam}$. Natomiast wartość $\beta = 0$ odpowiada stałym czasom przejazdu. Odwrotne znaczenie mają odpowiednie wartości współczynnika zmienności $\mu\Delta$. Dlatego, z grubsza rzecz biorąc, można w celach porównawczych stosować następującą formułę wzajemnej odpowiedniości:

$$\mu\Delta \approx 1-\beta, \qquad \beta \le 1. \tag{78}$$

Wiadomo, że współczynnik zmienności $\mu\Delta$ wyraża proporcje stałej części czasu podróży Δ do oczekiwanego czasu podróży $1/\mu$, co pozwala na łatwe wyrażanie zmienności czasu podróży dystansu $1/k_f$. Dystans $1/k_f$ definiowany jest całkowicie odmiennie w modelu ruchomego bufora, jako najmniejsza odległość między dwoma pojazdami poruszającymi się z prędkością płynnego potoku v_f, to znaczy bez czasów czekania. Jako taka zależy zawsze od przyjętej prędkości płynnego potoku i w tym przypadku, po uwzględnieniu odległości bezpiecznej, można przyjąć, że minimalny (średni) dystans potoku płynnego $1/k_f = 90\,m$ jest równy połowie drogi hamowania, która dla prędkości swobodnej $v_f = 130\,km/h$ wynosi $180\,m$ (patrz na przykład: Datka, Suchorzewski, Tracz, 1997, rys. 3.4, p.68). W ten sposób założono, że w modelu ruchomego bufora prawdopodobieństwo dopędzenia $p = 0.5$.

Optymalna gęstość przy powyższych założeniach jest określona wzorem uzyskanym w modelu ruchomego bufora:

$$k_* = \frac{k_f}{1+\left(1-\mu\Delta\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.918\,k_f = 10.2\,poj/km. \tag{79}$$

Przepustowość w modelu ruchomego bufora przy powyższych założeniach jest określona przekształconym wzorem:

$$q_* = \frac{\mu}{\left(1+\left(1-\mu\Delta\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2} = 0.842\,\mu = 0.842\,k_f\,v_f. \tag{80}$$

Tak więc natężenie obsługi μ obliczamy mnożąc maksymalną gęstość potoku płynnego $k_f = 11.1\,poj/km$, odpowiadającą przyjęciu minimalnego dystansu $1/k_f = 90\,m$, przez średnią prędkość swobodną, to znaczy:

$$\mu = k_f \cdot v_f = 11.1 \cdot 130 = 1443\,poj/h. \tag{81}$$

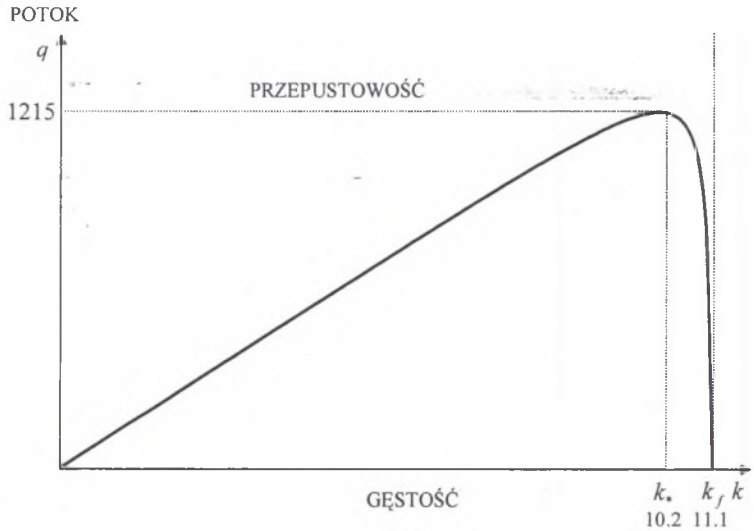
Zgodnie ze wzorem otrzymujemy przepustowość

$$q_* = 0.842 \cdot 1443 = 1215\,poj/h. \tag{82}$$

Zgodnie ze wzorem modelu podstawowego otrzymujemy optymalną prędkość

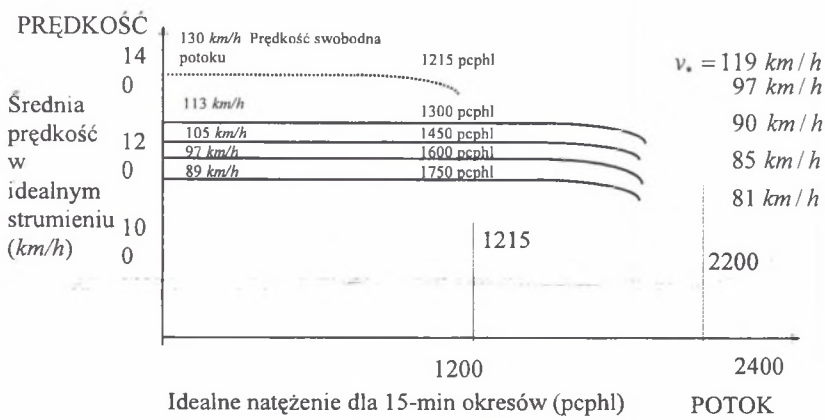
$$v_* = q_*/k_* = 1215/10.2 = 119\,km/h. \tag{83}$$

Rys. 10 obrazuje oczekiwany kształt krzywej dla powyższych rezultatów:



Rys. 10. Krzywa potok-gęstość dla modelu ruchomego bufora
Fig. 10. Flow-Density Curve for the proposed model

Porównanie rezultatów dla proponowanego modelu z rezultatami dla podobnych modeli przedstawionych przez Halla (1995) pozwala na konkluzję, że proponowany model daje poszerzenie obrazu modelu przepustowości danego przez Halla (1995) na rys. 2.3. Na podstawie charakterystyk strumieni ruchu z rys. 11 można zauważyć, że proponowany model daje dobre oceny przepustowości (patrz tabl. 1).



Rys.11. Krzywe prędkość-potok w HCM 1994 a krzywa prędkość-potok dla modelu ruchomego bufora
Fig. 11. Speed-Flow Curves Accepted for 1994 HCM and Speed-Flow Curve for the moving buffer model

Optymalna gęstość w modelu maksymalnej płynności potoku jest określona wzorem:

$$k_0 = k_f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(1-\mu\Delta)^{-3}}}\right) = 0.911k_f = 10.1\,poj/km. \tag{84}$$

Optymalne natężenie w modelu maksymalnej płynności jest określona wzorem:

$$q_0 = \frac{\mu}{1+(1-\mu\Delta)^3 + 2\sqrt{(1-\mu\Delta)^6 + (1-\mu\Delta)^3}} = 0.841\mu = 0.841k_f v_f. \tag{85}$$

Zgodnie ze wzorem (85) otrzymujemy optymalne natężenie

$$q_0 = 0.841 \cdot 1443 = 1214\,poj/h. \tag{86}$$

Zgodnie ze wzorem otrzymujemy optymalną prędkość

$$v_0 = \frac{v_f}{1+(1-\mu\Delta)^3\left(\sqrt{1+(1-\mu\Delta)^{-3}} - 1\right)} = 0.924v_f = 120\,km/h. \tag{87}$$

W tabl. 1 przedstawiono siedem grup charakterystyk dla wszystkich charakterystyk z rys. 11 obu modeli. Można zauważyć bardzo dobrą zgodność porównywanych charakterystyk.

Tablica 1

Charakterystyki modelu ruchomego bufora oraz modelu maksymalnej płynności potoku dla różnych prędkości płynnego potoku z HCM 1994

Prędkość swobodna $v_f\,(km/h)$	Oczekiwany minimalny bufor $1/k_f\,(m/poj)$	Gęstość potoku płynnego $k_f\,(poj/km)$	Natężenie obsługi $\mu\,(poj/h)$	Optymalna gęstość $\frac{k_0}{k_*}\,(poj/km)$	Optymalna prędkość $\frac{v_0}{v_*}\,(km/h)$	Optymalne natężenie Przepustowość $\frac{q_0}{q_*}\,(poj/h)$
130	90	11.1	1443	10.1 / 10.2	120 / 119	1214 / 1215
113	60	16.7	1887	15.2 / 15.3	104 / 104	1588 / 1589
105	48	20.8	2184	18.8 / 19.1	97 / 96	1838 / 1839
97	42	23.8	2309	21.6 / 21.8	90 / 89	1943 / 1944
89	36	27.8	2474	25.3 / 25.5	82 / 82	2082 / 2083

Optymalna prędkość potoku w modelu ruchomego bufora jest najmniejsza, prędkość swobodna $v_f = 89$, ponieważ daje maksymalną przepustowość $q_* = 2083$. Jest to podobny wniosek, jaki nasuwa się z modelu Halla (1995) dla HCM 1994 przedstawionego na rys. 11. Do identycznych wniosków doprowadza analiza odpowiednich charakterystyk modelu maksymalnej płynności.

6. PODSUMOWANIE

Przedstawione zostały dwa modele kolejkowe potoku pozwalające na ocenę przepustowości dróg. Na wstępie przedstawiono dwie definicje kolejki ruchowej odpowiadające dwom modelom kolejkowym: ruchomego bufora oraz modelu maksymalnej płynności potoku. Właściwym modelem kolejkowym jest model ruchomego bufora, który można odwzorować na kolejkowy system jednokanałowy, z przesuniętym rozkładem wykładniczym odstępu. Model ruchomego bufora można zastąpić modelem maksymalnej płynności potoku, opartym na podziale na stałe odcinki, pod warunkiem że spełniony jest warunek płynnego potoku. Dla obydwóch modeli właściwym ujęciem kolejek jest model $M_{+\Delta} / M_{+\Delta} / 1$ pozwalający odwzorować małą wariancję odstępów. Mała wariancja odstępów potoku wynika ze specyfiki ruchu na drodze, jest zjawiskiem powszechnym, które dotychczas nie miało odpowiednich narzędzi modelowych w teorii kolejek.

W modelu ruchomego bufora sformułowano warunki konieczne i wystarczające płynnego potoku: oczekiwana długość kolejki w dystansie modelowym nie powinna przekraczać 1, co - jak się dowodzi - równoważne jest ograniczeniu oczekiwanego czasu czekania na dystansie modelowym do różnicy między czasem przejazdu dystansu modelowego a odstępem. Również jest to równoważne ograniczeniu gęstości w dystansie modelowym do jeden. Wykazano, że tak sformułowane ograniczenia płynnego potoku są właściwe, bowiem zapewniają maksymalne natężenie.

W modelu maksymalnej płynności potoku sformułowano nowe pojęcie efektywności ruchu, mianowicie pojęcie oczekiwanej płynności potoku, wyrażonej przez oczekiwaną liczbę pojazdów poruszających się płynnie. Pojęcie to pozwala na określenie optymalnej gęstości oraz optymalnej prędkości dających maksymalną płynność. Zamiast przepustowości w modelu tym zdefiniowano optymalne natężenie. Wyjaśniono, dlaczego te charakterystyki są dobrymi ocenami odpowiednich charakterystyk przepustowości w zwykłym rozumieniu. Pozwala to na znaczne udoskonalenie narzędzi analizy przepustowości sieci transportowych.

Na zakończenie przeprowadzone zostały obliczenia podstawowych charakterystyk potoku ruchu według modelu ruchomego bufora oraz modelu maksymalnej płynności, wykazujące całkowitą zgodność odpowiednich charakterystyk. Wyniki proponowanych modeli porównano również z charakterystykami HCM 1994.

Przedstawione modele mają wszelkie cechy modelu uniwersalnego, które, można mieć nadzieję, znajdą zastosowanie w teorii potoków ruchu oraz w dydaktyce transportowej. Można również mieć nadzieję na szerokie wykorzystanie tych modeli w praktyce w różnych dziedzinach, ponieważ mimo prostoty w numerycznych zastosowaniach, modele uwzględniają najistotniejszą własność potoków - a więc dają możliwości modelowania małej wariancji odstępu potoku, czego nie udawało się uzyskać w dotychczasowych ujęciach. W przyszłości zamierza się przeprowadzić badania możliwości zastosowania tych modeli również do oceny przepustowości skrzyżowań.

Powyższy artykuł jest polską wersją artykułu Wocha (2003), w którym po raz pierwszy zastosowano aktualną, polską terminologię matematyczną w zagadnieniach przepustowości dróg transportowych. Z tego względu należy oczekiwać na duże zainteresowanie powyższym artykułem w środowiskach naukowych.

LITERATURA

1. Catchpole E. A. and Plank A. W., 1986. The capacity of a priority intersection. *Transportation Research B* **20**, 441-456.
2. Cowan, R. J., 1987. An extension of Tanner's result on uncontrolled intersection. *Queueing Systems* **1**, 249-263.
3. Daganzo, C. F., 1976. Traffic delay at unsignalized intersections. Clarification of some issues. *Transportation Science* **11**, 180-189.
4. Datka, S. and Suchorzewski, and W. Tracz, M., 1997. Inżynieria ruchu. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.
5. Drew, D. R. (1968) Traffic flow theory and control. McGraw-Hill Book Company, New York.
6. Gross, D. and Harris, C. M. , 1974. Fundamentals of queueing theory. John Wiley & Sons, New York.
7. Grossmann, M., 1991. Methoden zur Berechtung und Beurteilung von Leistungsfaehigkeit und Verhrqualitaet an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen. Technical Report Heft 9, Ruhr-Universitaet Bonn.
8. Haight, F. A., 1963. Mathematical theories of traffic flow. Academic Press, New York.
9. Hall, F. L., 1995. Traffic stream characteristics. In: Traffic Flow Theory and Characteristics. FHWA Washington. INTERNET: http://www:tfhrc.gov/.
10. Hawkes, A. G., 1968. Gap acceptance in road traffic. *Journal of Applied Probability* **5**, 84-92.
11. Heidemann, D., 1991. Queue length and waiting time distribution at priority intersections. *Transportation Research B* **25**, 163-174.
12. Heidemann, D., 1996. A queueing theory approach to speed-flow-density relationships. In: Transportation and Traffic Theory. (ed Lesort), Pergamon, 103-118. *Transportation Research B* **25**, 163-174.
13. Heidemann, D., 1996. A queueing theory approach to speed-flow-density relationships. In: Transportation and Traffic Theory. (ed Lesort), Pergamon, 103-118.
14. Heidemann, D. and Wegmann, H., 1997. Queueing at unsignalized intersections. *Transportation Research B* **31**, 239-263.
15. Plank, A. W. and Catchpole, E. A., 1984. A general capacity formula for an uncontrolled intersection. *Traffic Engineering Control* **25**, 327-329.
16. Pösch, F. J., 1983. Die signalgesteuerte Nebenstrassenzufahrt als verallgemeinertes M/G/1-Wartesystem. ZOR **27**, 91-111.
17. Siegloch, W., 1973. Die Leichstungsermittlung an Knotenpunkten ohne Lichtsignalsteuerung. *Schriftenreihe Strassenbau und Strassenverkehrstechnik,* 154.
18. Tanner, J. C., 1962. A theoretical analysis of delays at an uncontrolled intersection. Biometrica 49, 163-170.
19. Webster, F. W., 1958. Traffic signal settings. *Road Research Technical Paper No. 39.* Her Majesty's Stationery Office, London.
20. Wegmann, H., 1992. Impendance effects in capacity estimmation. ZOR **36**, 73-91.
21. Woch, J., 1983. Podstawy inżynierii ruchu kolejowego. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.
22. Woch, J., 1998. Kształtowanie płynności ruchu w gęstych sieciach transportowych. Polska Akademia Nauk – Oddział w Katowicach, Komisja Transportu. Katowice, Wydawnictwo Szumacher.
23. Woch, J., 2003. Two models for traffic flow. Transportation Research. Przygotowywana do druku.

Abstract

In this year will be shown Woch's (2003) article demonstrating two models for traffic flow, which based on the new mathematic tool the compressed queueing processes, which may assume in the queueing model the shifted exponential distribution of the headway, expressing the most typical probability distribution in the free flows. This give us on build the new method of road capacity estimation, where is defined the new term optimal rate.