ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: TRANSPORT z. 47 Nr kol. 1586

Barbara MAŻBIC-KULMA [1]

WYBRANE METODY AGREGACJI GRAFU I ICH ZASTOSOWANIE W SYSTEMACH TRANSPORTOWYCH

Streszczenie. Przystępując do opisu matematycznego sieci transportowej, np. drogowej, lotniczej itp., wprowadza się zwykle pojęcie grafu połączeń W praktyce systemów transportowych taki graf ma zarówno dużo wierzchołków, jak i połączeń. Posługiwanie się nim jest trudne i ma duży wpływ na czas wykonywanych obliczeń, znalezienia np. optymalnej drogi między dwoma zadanymi wierzchołkami. Stąd też w artykule przedstawiono trzy metody agregacji grafu połączeń. Pierwsza i druga metoda dotyczą grafu skierowanego, trzecia zaś ma zastosowanie wtedy, gdy rozpatrywanymi gałęziami grafu są krawędzie. Dla każdej z zaprezentowanych metod przedstawiono prosty przykład ilustrujący przedstawiony algorytm.

CERTAIN METHODS OF GRAPHS AGGREGATION AND THEIR APPLICATIONS IN TRANSPORTATIONS SYSTEMS

Summary. In the paper, the connection graph is defined. The connection graph in practical (transportation) problems has many vertices and connections. Direct applications of such graphs in computer calculations for instance, in order to find an optimal path between given vercices of the graph, can be very difficult. Therefore aggregation methods should be introduced. The paper presents three methods of aggregation. In conclusion, an example is presented.

1. WPROWADZENIE

Jak ogólnie wiadomo [1], [2], [3],[5], [8], system transportowy jest zdefiniowany trzema zasadniczymi wielkościami:

- zadaniem - potrzebą przemieszczania obiektów (ładunków lub (i) osób),
- składem - rodzajem i liczbą elementów określających wyposażenie i załogę systemu,
- organizacją - sposobem oddziaływania elementów systemu podczas realizacji zadania.

Systemem przewozowym nazwiemy system transportowy, który realizuje zadanie przemieszczania obiektów. Zadania przewozowe określają potrzeby klientów systemu. Są one z kolei scharakteryzowane poprzez następujące wielkości:

[1] Instytut Badań Systemowych PAN, ul. Newelska 5, 01-447 Warszawa, tel: (+48 22) 837 57 13, kulma@ibspan.waw,pl

- rodzaj i liczbę obiektów, jaką należy przewieźć,
- trasę przewożonych obiektów,
- termin przewożenia.

W literaturze przedmiotu istnieje wiele klasyfikacji systemów transportowych. I tak np.:

- ze względu na rodzaj przewożonych obiektów (transport towarowy, osobowy),
- ze względu na liczbę przewożonych obiektów (transport regularny, sporadyczny),
- ze względu na trasę przewożonych obiektów (transport wewnątrzzakładowy, miejski, międzymiastowy, międzynarodowy),
- ze względu na rodzaj drogi (transport kolejowy, drogowy, lotniczy, morski).

Teoria systemów transportowych [5] nie zajmuje się bezpośrednio badaniem zjawisk fizycznych, lecz badaniem modeli tych zjawisk. Model systemu transportowego [1] powinien być tak skonstruowany, aby mógł zastąpić rzeczywisty system, będąc jednocześnie narzędziem umożliwiającym rozwiązanie konkretnego zadania transportowego. Przystępując do opisu matematycznego sieci transportowej, np. kolejowej, autobusowej, miejskiej czy lotniczej, wprowadzamy zwykle pojęcie grafu połączeń. Wierzchołkami tego grafu są zwykle (w zależności od rozpatrywanego zagadnienia bądź stacje kolejowe [1], [3], bądź przystanki autobusowe [7] , czy też w przypadku transportu lotniczego – porty lotnicze [5] itp.). Gałęzie tego grafu pozwalają określić istniejące bezpośrednie połączenia między wierzchołkami grafu. Jak łatwo można zauważyć, taki graf może mieć zarówno dużą liczbę wierzchołków, jak i połączeń. Posługiwanie się nim jest trudne i ma duży wpływ na czas wykonywanych obliczeń. Stąd też w niniejszej pracy przedstawimy dwie metody agregacji wierzchołków grafu połączeń. Pierwsza z nich dotyczy agregacji grafu skierowanego (tzn. takiego grafu którego gałęziami są łuki). Druga ma zaś zastosowanie wtedy, gdy rozpatrywanymi gałęziami grafu są krawędzie. Przedstawione poniżej metody pozwalają na znaczne zmniejszenie zarówno liczby wierzchołków, jak i gałęzi rozpatrywanego grafu połączeń.

2. GRAF POŁĄCZEŃ

Rozważmy pewien obszar. Na tym obszarze wyróżnimy pewne punkty, które ponumerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi. Otrzymamy zatem zbiór wyróżnionych punktów:

$$I = \{ 1,2,...,i,j,...,I\}$$

Punkty te mogą być połączone między sobą. Powstaje wówczas zbiór numerów połączeń:

$$U = \{ 1,2,...,u,...,U\}$$

oraz funkcja $P(i.u,j)$ ($P \subset I \times U \times I$) określona następująco:

$$P(i.u,j) = \begin{cases} 1, & \text{gdy istnieje polaczenie punktu i z punktem j} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

spełniająca następujące warunki:

1 $P : I x U x I \rightarrow \{0, 1\}$

2 $\forall_{u \in U} \forall_{i,j \in I} (i,u,j) \in P \vee (j,u,i) \in P$

Tak zdefiniowany graf będziemy dalej nazywać grafem połączeń. Poniżej przedstawimy dwa przykłady takich grafów:

Przykład 1
Każdy proces produkcyjny polega na przetwarzaniu dóbr przez kolejne urządzenia (środki produkcji) aż do otrzymania wyrobów finalnych. Kolejność wykonywana tych operacji jest z góry narzucona poprzez przyjętą technologię. Stąd też proces produkcyjny można przedstawić za pomocą grafu G = {I, U, P}, gdzie I jest zborem numerów urządzeń (środków produkcji), U jest zbiorem numerów połączeń, a funkcja P określa kolejność przetwarzania. Tak zdefiniowany graf połączeń G jest nazywany zwykle grafem produkcji.

Przykład 2
Przyjmijmy, iż rozpatrywanym obszarem jest Polska. Zbiór I jest zbiorem numerów stacji kolejowych w Polsce, zaś zbiór U zbiorem numerów torów kolejowych. W tym przypadku funkcja P określa, która stacja z którą jest połączona. Tak zdefiniowany graf nazywany jest w literaturze siecią kolejową.

3. AGREGACJA GRAFU POŁĄCZEŃ

Zdefiniowany powyżej graf połączeń może się składać zarówno z dużej liczby wierzchołków, jak i gałęzi. Posługiwanie się nim w celu znalezienia np. najkrótszej drogi między dwoma wierzchołkami jest skomplikowane i czasochłonne. Stąd też zaistniała konieczność agregacji tych grafów.

3.1. Agregacja strukturalna

Niech dany będzie graf połączeń $G = \{I, U, P\}$. Dla dalszych rozważań będziemy zakładać, że:

- Graf G jest unigrafem (tzn. jeżeli między dwoma wierzchołkami i, j istnieje połączenie, to jest ono dokładnie jedno.
- Graf G jest grafem skierowanym (tzn. iż dla każdego elementu zbioru U spełniony jest warunek: $(i \neq j \wedge (i,u,j) \in P) \Rightarrow (j,u,i) \notin P$, gdzie $i, j \in I$, $u \in U$).
- Graf G nie zawiera pętli, tzn. dla każdego wierzchołka $i \in I$: $(i,u,i) \notin P$.
- Graf G nie zawiera dróg cyklicznych, tzn. że jeżeli istnieje droga między wierzchołkiem i a wierzchołkiem j, to nie istnieje droga między wierzchołkiem j a wierzchołkiem i.

Przyjmując powyższe założenia graf **G = { I , U , P }** można zapisać w postaci $G = \langle I, \Gamma \rangle$, gdzie $\Gamma : I \rightarrow 2^I$.

Wprowadzimy teraz pojęcie macierzy relacji oraz warstwy grafu G:

Definicja 3.1.1

Macierz $A = [a_{ij}]_{mxm}$, gdzie $m = \overline{\overline{I}}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j \in \Gamma(i) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

nazywamy macierzą relacji grafu G.

Zauważmy, że przy przyjętych założeniach elementy macierzy relacji dla $i = j$ są zerami ($a_{ij} = 0$ *dla* $i = j$)

Definicja 3.1.2

Ciąg podzbiorów wierzchołków grafu $W_1, W_2, \ldots\ldots, W_k \subset I$. nazywamy warstwami, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1) jeżeli $x \in W_1 \Rightarrow \Gamma_x^{-1} = \emptyset$
2) jeżeli $x \in W_k \Rightarrow \Gamma_x^{-1} \subset \{W_1, W_2, \ldots\ldots, W_{k-1}\}$
3) jeżeli $x \in W_k$, $k > 0$ to $\Gamma_x^{-1} \cap W_{k-1} \neq \emptyset$
4) $\bigcup_{k=1}^{K} W_k = I$

gdzie:

Γ_x - zbiór tych wierzchołków $y \in I$, dla których istnieje droga z wierzchołka x do wierzchołka y (zbiór następników wierzchołka x).

Γ_x^{-1} - zbiór tych wierzchołków $y \in I$, dla których istnieje droga z wierzchołka y do wierzchołka x (zbiór poprzedników wierzchołka x).

Za Korzanem [4] przytoczymy teraz następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3.1.1

Zbiór wierzchołków tworzących warstwę grafu połączeń G spełniającego założenia 1 – 4 tworzy jeden z podgrafów pustych [2] grafu G.

Twierdzenie 3.1.2

Jeżeli $x \in W_l$, to $\Gamma_x \subset \{W_{l+1}, W_{l+2}, \ldots\ldots, W_k\}$, *gdzie* k oznacza liczbę warstw.

Jak łatwo można zauważyć, w wyniku podziału grafu na warstwy otrzymujemy trójkątną macierz relacji A'. Prawdziwe jest także ogólne twierdzenie:

[2] Grafem pustym nazywamy graf, którego zbiór gałęzi jest zbiorem pustym.

Twierdzenie 3.1.3

Niech $W_1, W_2, \ldots\ldots, W_k$ są warstwami grafu G. Zakładamy, że wierzchołki grafu G zostały tak przenumerowane, że jeżeli $(i \in W_s,\ j \in W_t \wedge s < t) \Rightarrow i < j$, to wówczas elementy a'_{ij} macierzy relacji A' spełniają następujący warunek: $a'_{ij} = 0$ dla $j \leq i$.

Dowód:

Dla $j = i$ element $a'_{ii} = 0$, gdyż z założenia 3 rozpatrywany graf nie ma pętli.

Dla $j < i$ możliwe są dwa przypadki:

- wierzchołki i, j należą do tej samej warstwy. Wówczas $a'_{ij} = 0$, gdyż z twierdzenia 3.1.1 wynika, iż wewnątrz warstwy nie ma połączeń.
- wierzchołek j należy do warstwy wcześniejszej niż wierzchołek i. Wówczas korzystając z twierdzenia 3.1.2 wynika, że $a'_{ij} = 0$.

c.n.u

Korzystając z powyższego twierdzenia będziemy więc zakładać, że: $a'_{ij} = 0$ dla $j \leq i$. Dla dalszych rozważań wyróżnimy teraz dwa typy połączeń między wierzchołkami grafu:

1. Połączenie szeregowe

Definicja 3.1.3

Ciąg wierzchołków $i, j_1, j_2, \ldots, j_n$, *gdzie* $i < j_1 < j_2 < \ldots\ldots < j_n$ jest połączony szeregowo wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\Gamma_i = \{j_1\},\ \Gamma_{j_1} = \{j_2\}, \ldots\ldots\ldots\ldots \Gamma_{j_{n-1}} = \{j_n\} \wedge \Gamma_{j_1}^{-1} = \{i\}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \Gamma_{j_n}^{-1} = \{j_{n-1}\},$$

W przypadku gdy $j \in \Gamma_i$ oraz wierzchołki i, j są połączone szeregowo, to zachodzi następujący warunek: $\Gamma_i = \{j\}$ $\Gamma_j^{-1} = \{i\}$.

Połączenie szeregowe na rysunku można przedstawić następująco:

Rys. 1. Połączenie szeregowe
Fig. 1. Serial connection

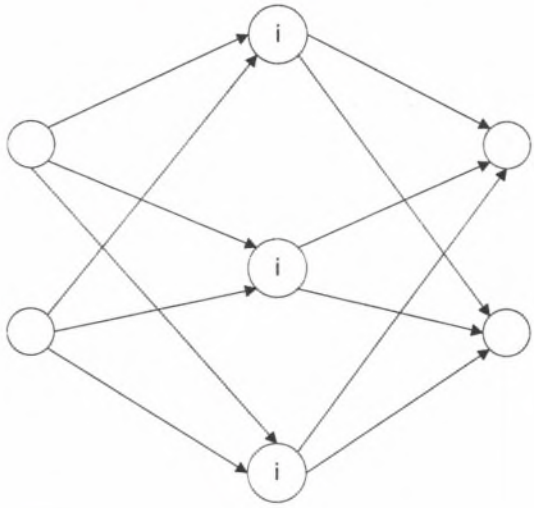
2. Połączenie równoległe

Definicja 3.1.4

Ciąg wierzchołków $i_1, i_2, \ldots\ldots, i_n$ jest połączony równolegle wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujący warunek:

$$(\Gamma_{i_1} = \Gamma_{i_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \Gamma_{i_n}) \wedge (\Gamma_{i_1}^{-1} = \Gamma_{i_2}^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \Gamma_{i_n}^{-1})$$

Połączenie równoległe można na rysunku przedstawić następująco:



Rys. 2. Połączenie równoległe
Fig. 2. Parallel connection

Wprowadzimy teraz pojęcie agregacji szeregowej i równoległej.

Agregacja szeregowa:

Załóżmy, że wierzchołki $k, l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ są połączone szeregowo. Wówczas agregacja szeregowa zbioru wierzchołków $\{k, l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n\}$ polega na zastąpieniu go jednym wierzchołkiem (agregatem). Nową macierz relacji A_1 otrzymujemy z macierzy A przez podstawienia $a_{kj} = a_{l_n}$ i $a_{l_1 j} = a_{l_2 j} = \ldots\ldots = a_{l_n j} = 0$ *dla* $j = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots n$.

Można zatem łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.4

Jeżeli wierzchołki k, l są połączone szeregowo, to agregacja tych wierzchołków odpowiada lewostronnemu pomnożeniu macierzy A przez macierz: $L = [L_{st}]$, *gdzie*:

$$\begin{array}{lll} l_{ss} = 1 & dla & s \neq k, l \\ l_{kk} = 0, & l_{ll} = 0, & I_{kl} = 1 \\ l_{st} = 0 & dla & pozostałych. \end{array}$$

Lemat 3.1.1

Jeżeli wierzchołki i, j, k. gdzie $(i < j < k)$, są połączone szeregowo, to kolejność agregacji nie jest istotna.

Lemat ten jest oczywiście prawdziwy przy agregacji n wierzchołków połączonych szeregowo.

Lemat 3.1.2

Jeżeli wierzchołki $i, j_1, j_2, \ldots\ldots, j_n$. $(i < j_1 < j_2 < \ldots\ldots < j_n)$ są połączone szeregowo, to

$$L(i, j_1, j_2, \ldots\ldots, j_n) = L(i, j_n) \ldots\ldots L(i, j_2) L(i, j_1)$$

Lemat 3.1.3

Jeżeli wierzchołki $i, j_1, j_2, \ldots\ldots, j_n$. oraz $k, l_1, l_2, \ldots\ldots, l_m$ są połączone szeregowo i

$$\{k, l_1, l_2, \ldots\ldots, l_m\} \cap \{i, j_1, j_2, \ldots\ldots, j_n\} = \emptyset$$

to macierze $L(i, j_1, j_2, \ldots\ldots, j_n)$ i $L(k, l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n)$ komutują.

Agregacja równoległa:

Załóżmy, że wierzchołki $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ są połączone równolegle. Wówczas agregacja równoległa zbioru wierzchołków $\{k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n\}$ polega na zastąpieniu go jednym wierzchołkiem k_1 (agregatem) o wejściach i wyjściach takich samych jak każdego z wierzchołków agregowanych.

Macierz relacji nowego grafu (o zagregowanych połączeniach równoległych) otrzymamy z macierzy A przez wyzerowanie wierszy i kolumn odpowiadających zagregowanym wierzchołkom z wyjątkiem kolumny i wiersza o najniższym numerze. Tak więc $a_{k_2 j} = \ldots\ldots = a_{kn_j} = 0$ i $a_{ik_2} = \ldots\ldots = a_{ik_n} = 0$ *dla* $i, j = 1,2,\ldots\ldots,n$.

Możemy więc analogicznie do twierdzenia 3.1.4 sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.5

Jeżeli wierzchołki $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ są połączone równolegle to ich agregacja odpowiada pomnożeniu macierzy A lewo- i prawostronnie przez macierz:

$P = [p_{st}]$, *gdzie* $p_{ss}=1$ *dla* $s \neq k_2, \ldots\ldots, k_n$ *i* $p_{st} = 0$ *dla pozostałych.*

Analogicznie jak dla połączeń szeregowych można łatwo udowodnić następujące lematy:

Lemat 3.1.4

Jeżeli wierzchołki $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ są połączone równolegle, to

$$P(k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n) = P(k_1, k_n) P(k_1, k_{n-1}) P(k_1, k_2)$$

Lemat 3.1.5

Jeżeli wierzchołki $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ i $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_m$ są połączone równolegle i

$$\{k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n\} \cap \{l_1, l_2, \ldots\ldots, l_m\} = \emptyset,$$

to macierze $P(k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n)$ *i* $P(l_1, l_2, \ldots\ldots, l_m)$ komutują.

Algorytm agregacji strukturalnej grafu składa się z dwu na przemian wykonywanych operacji:

1. agregacji połączeń szeregowych,
2. agregacji połączeń równoległych.

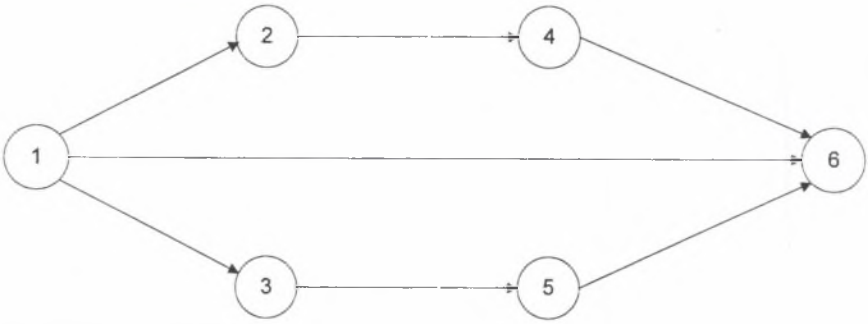
Ten cykliczny algorytm powtarzamy tak długo, dopóki nie wyczerpią się wszystkie możliwości agregacji wierzchołków grafu. Bazując na powyższym rezultatach można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.6

Rezultat agregacji jest taki sam niezależnie od tego, czy zaczniemy od agregacji połączeń szeregowych, czy równoległych.

Przykład 3.1.1

Rozpatrzmy następujący graf:



Rys. 3. Przykładowy graf połączeń
Fig. 3. Example of the connection graph

Macierz relacji rozpatrywanego grafu ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

1. krok algorytmu

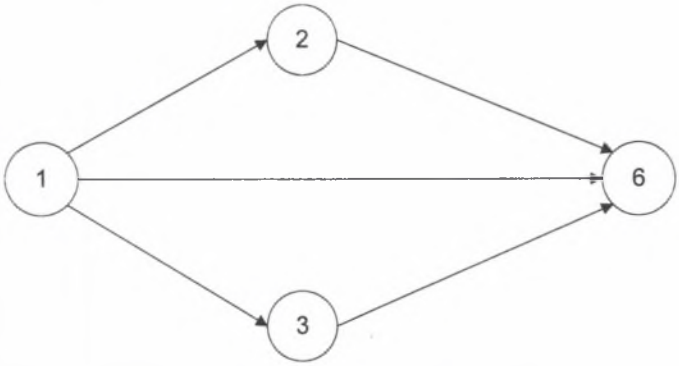
Jak łatwo można zauważyć, dwie pary wierzchołków tzn. (2,4) i (3,5) są połączone szeregowo. Stąd macierz $L_1 = L(2,4)\ L(3,5) =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

i $A_1 = L_2 A =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd graf $\hat{G}$ po agregacji szeregowej będzie następującej postaci:



Rys. 4. Postać grafu G przedstawionego na rys 3 po agregacji szeregowej
Fig. 4. Graph G (fig 3) after the serial aggregation

2. krok algorytmu (agregacja połączeń równoległych)

Jak łatwo można zauważyć, w macierzy A_1 dwie kolumny (druga i trzecia) są takie same. Stąd po wykorzystaniu twierdzenia 3.1.5 macierz P ma postać:

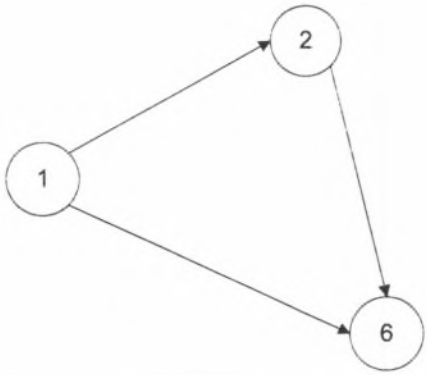
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

i macierz relacji ma postać: $A_2 = P\,A_1\,P =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Tak więc w rezultacie otrzymujemy graf postaci:



Rys. 5. Postać grafu G przedstawionego na rys 4 po agregacji równoległej
Fig. 5. Graph G (fig 4) after the parallel aggregation

3.2. Agregacja liniowa

Niech dany będzie graf połączeń **G = {I , U , P}**. Podobnie jak poprzednio (punkt 3.1) będziemy zakładać, że:

- Graf ***G*** jest unigrafem.
- Graf G nie zawiera pętli.

Ponadto założymy, że

- ***G*** jest grafem niezorientowanym tzn. iż dla każdego elementu zbioru ***U*** spełniony jest warunek:

$$\left(i \neq j \ \wedge \ (i,u,j) \in P\right) \Rightarrow (j,u,i) \in P, \quad gdzie \quad i,j \in I, \ u \in U.$$

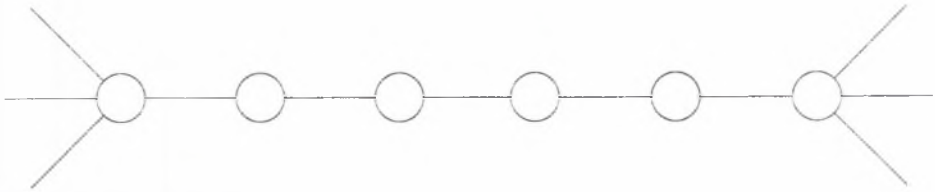
Dla dalszych rozważań wprowadzimy teraz pojęcie połączenia liniowego:

Definicja 3.2.1

Wierzchołki i oraz j są połączone liniowo wtedy i tylko wtedy, gdy

- istnieje marszruta łącząca wierzchołek i z wierzchołkiem j - $L(i,j)$,
- stopień każdego wierzchołka $k \in L(i,j)$ jest równy 2.

Połączenie liniowe można na rysunku przedstawić następująco:



Rys. 6. Połączenie liniowe
Fig. 6. A linear connection

Poniżej przedstawimy algorytm agregacji połączeń liniowych.
Wprowadzimy następujące oznaczenia:
$\hat{G} = \{\hat{I}, \hat{U}, P\}$ - graf, który powstaje po dokonaniu liniowej agregacji wierzchołków,
$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{Ixl}$ - macierz połączeń

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & gdy \quad (i,u,j) \in P \qquad i,j \in I \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

$T = \{t_1, t_2, \ldots\ldots, t_m\}$ - zbiór takich trójek $t_j = (j, w_{1j}, w_{2j})$, gdzie j - numer kolumny, dla której $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$, j=1,2,.....,m,

w_{1j} - numer pierwszego wiersza, w którym dla kolumny j $a_{ij} = 1$.
w_{2j} - numer drugiego wiersza, w którym dla kolumny j $a_{ij} = 1$.

1. Dla każdej kolumny j macierzy A obliczamy $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.
2. Dla każdej kolumny macierzy A, dla której $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$, wyznaczamy $t_j = (j, w_{1j}, w_{2j})$ zdefiniowane powyżej. Otrzymujemy zbiór $T = \{t_1, t_2, \ldots\ldots, t_m\}$.
3. Rozpatrujemy pierwszy element $t_1 = (1, w_{11}, w_{21})$ zbioru T i sprawdzamy, czy numery wierszy w_{11} ,w_{21} nie występują jako wyróżnione numery kolumn należące do zbioru T :

(*) $w_{11} = j$ lub $w_{21} = j$ dla $j \in T$

a) jeżeli nie zachodzi warunek (*), to:

$$T = \{t_2, t_3, \ldots\ldots, t_m\} \ ; \ \hat{I} = I - \hat{I} \ : \ \hat{U} = U \cup \hat{U}$$

gdzie:

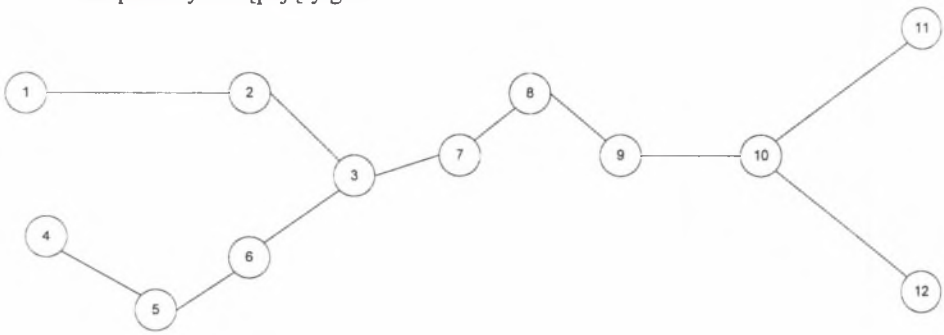
$\hat{I}$ - zbiór wierzchołków pośrednich marszruty między wierzchołkami określonymi w t_1,

$\hat{U}$ - połączenie pomiędzy wierzchołkami określonymi w t_1.

b) jeżeli zachodzi warunek (*), to dołączamy kolejno te trójki, dla których ten warunek jest spełniony i postępujemy analogicznie jak w punkcie a).

4. Sprawdzamy, czy zbiór T jest pusty. Jeżeli tak, to koniec działania algorytmu, jeżeli nie, to bierzemy następny element zbioru T i przechodzimy do punktu 3.

Przykład 2.2.1
Rozpatrzmy następujący graf



Rys. 7. Przykładowy graf
Fig. 7. Example of the graph

Dla przedstawionego powyżej grafu G macierz A ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & & & & & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \end{bmatrix}$$

Stąd zgodnie z punktem 1 algorytmu wektor sum poszczególnych kolumn przedstawia się następująco:

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 1]$$

Zbiór T ma w tym przypadku postać: $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4., t_5., t_6\}$, gdzie:
$t_1 = (2,1,3)$; $t_2 = (5,4,6)$; $t_3 = (6,3,5)$; $t_4 = (7,3,8)$; $t_5 = (8,7,9)$; $t_6 = (9,8,10)$.
Rozważmy zatem element $t_1 = (2,1,3)$ zbioru T. Zgodnie z punktem 3 proponowanego powyżej algorytmu sprawdzamy, czy wierzchołki 1, 3 są numerami tych kolumn macierzy A, dla których $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$. Ponieważ tak nie jest, to zgodnie z punktem 3a zaprezentowanego algorytmu:

$$T := \{t_2, t_3, t_4., t_5., t_6\}; \quad \hat{I} = I - \{2\}; \quad \check{U} = \overset{*}{U} \cup \{u(1,3)\}.$$

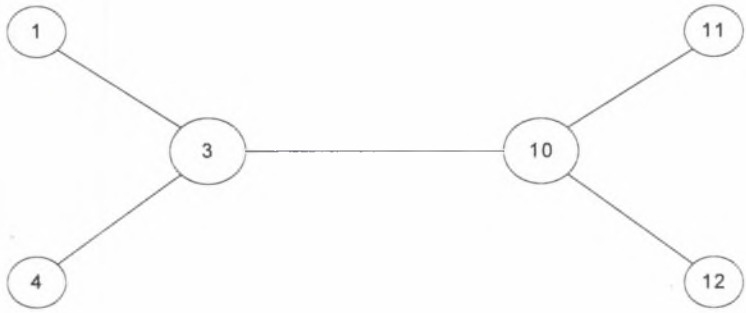
Następnie rozpatrujemy element $t_2 = (5,4,6)$. Zauważmy, iż w tym przypadku wierzchołek 6 jest numerem kolumny, dla której $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$. Stąd zgodnie z punktem 3b algorytmu elementy $t_2 = (5,4,6)$ i $t_3 = (6,3,5)$ łączymy ze sobą w następujący element { 5 , 6 , 4 . 3 }.

A więc nowy graf $\hat{G}$ będzie postaci $\hat{I} := \hat{I} - \{5,6\}$; $\hat{U} := \hat{U} \cup \{u(4,3)\}$.

Zbiór T będzie teraz postaci : $T = \{t_4, t_5, t_6\}$. Następnie bierzemy element $t_4 = (7,3,8)$ i postępując analogicznie dołączamy do niego elementy $t_5 = (8,7,9)$ i $t_6 = (9,8,10)$.

Powstaje element postaci: { 7 , 8 , 9 , 3, 10 }. Nowy graf $\hat{G}$ będzie postaci $\hat{I} := \hat{I} - \{7,8,9\}$; $\hat{U} := \hat{U} \cup \{u(3,10)\}$.. Zbiór $T := \emptyset$, co oznacza zakończenie działania algorytmu.

Rozpatrywany przez nas graf po agregacji liniowej będzie postaci:



Rys. 8. Graf G przedstawiony na rys 7 po agregacji liniowej
Fig. 8. Graph G (fig 7) after the linear aggregation

Literatura

1. Ambroziak T.: O pewnych aspektach modelowania systemów transportowych, Prace Naukowe. Transport z.44 OW PW, Warszawa 2000.
2. Bąk Cz.: Systemy transportowe, Politechnika Krakowska, Kraków 1986.
3. Jacyna M.: Modelowanie wielokryterialne w zastosowaniu do oceny systemów transportowych, Prace Naukowe. Transport z.47, OW PW, Warszawa 2001.
4. Korzan B.: Elementy teorii grafów i sieci – metody i zastosowania, WNT, Warszawa 1978.
5. Leszczyński J.: Modelowanie systemów i procesów transportowych, OW PW, Warszawa 1994.
6. Malarski M.: Modelowanie procesów ruchu lotniczego dla kontroli i planowania lotów, Prace Naukowe. Transport z.49, OW PW, Warszawa 2002.
7. Mażbic-Kulma B.: Automatyczny system wyznaczania rozkładu jazdy autobusów dla potrzeb PKS. Materiały konferencyjne nt. „Matematyczne podstawy teorii systemów transportowych". PWN, Warszawa – Łódź 1981.
8. Piasecki S.: Optymalizacja systemów przewozowych, WKiŁ, Warszawa 1973.

Abstract

The theory of transportation systems does not directly cover researches on physical phenomena, but rather on their models. The model of the transportation system should be able to simulate a real system, but also should be a tool enabling solving of given transportation tasks. In order to describe transportation system (rail, bus or air), as a routine a connection graph would be used. Vertices of the graph can be train stations, bus stops or in case of air transport – airports. The arcs of the graph show direct connections between vertices. It can be noticed that such a graph can have many vertices as well as many arcs. Its application can be difficult and performance problems by calculating can occur. Therefore two methods of aggregation were introduced in the paper. The first one relates to directed graphs (i.e. graphs in which edges are directed). The process of parallel and serial aggregation was presented. It was observed that the result of the aggregation is uncorrelated with the sequence of aggregation. Second method, described in the paper, called linear aggregation can be used only when graphs arcs are also its edges. Presented methods enable to reduce the number of analysed vertices as well as arcs of the graph. Examples, visualising the functioning of described algorithms, were presented.