ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: TRANSPORT z. 47 Nr kol. 1586

Andrzej RATKIEWICZ [1]

METODY WYPEŁNIENIA JEDNOSTEK ŁADUNKOWYCH W ZASTOSOWANIU DO OPTYMALIZACJI SYSTEMÓW TRANSPORTOWYCH

Streszczenie. Zagadnienia pakowania stanowią jeden z mniej znanych obszarów badań operacyjnych. W niniejszym artykule przedstawiono typologię zagadnień pakowania, po czym omówiono ich znaczenie praktyczne. Następnie przedstawiono matematyczne sformułowanie problemu umożliwiające rozwiązanie zagadnienia załadunku metodami programowania całkowitoliczbowego.

METHOD OF LOAD UNITS PACKING APPLICATED TO TRANSPORT SYSTEMS OPTIMIZATION

Summary. Packing problems are not ones of very well known areas of operational researches. In this paper typology and practical importance of packing problems is discussed. Next, a mathematical definition of the problem is developed, which allows for solution to the packing problem with use of integer programming methods.

1. WPROWADZENIE

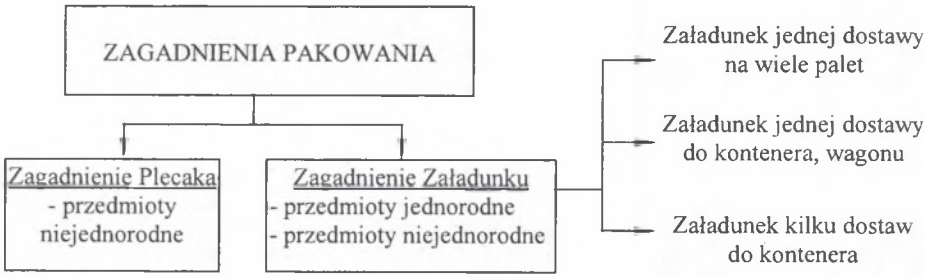
Jednym z kierunków optymalizacji systemów transportowych jest dążenie do maksymalnego wykorzystania ładowności i kubatury skrzyń ładunkowych stosowanych środków transportu. Stopień wykorzystania ładowności środka transportu wynika z sumy mas umieszczonych w nim ładunków (np. opakowań jednostkowych lub zbiorczych). Natomiast wykorzystanie kubatury (przestrzeni) skrzyni ładunkowej zależy w dużym stopniu od sposobu rozmieszczenia w niej ładunków. Wydaje się oczywiste, że w przypadku ładunków jednorodnych (o identycznych wymiarach i masie) umieszczenie ich w skrzyni ładunkowej jest zadaniem znacznie prostszym, niż w przypadku ładunków niejednorodnych. Zadania tego typu występują w literaturze pod nazwą zagadnień pakowania.

Zagadnienia pakowania (*ang. Packing Problems*) stanowią jeden z ciekawszych obszarów badań operacyjnych. Ich powstanie było odpowiedzią nauki na występujące w praktyce problemy. Rozwój zagadnień pakowania był określany poprzez wzrost wymagań występujących w rzeczywistości oraz rozwój istniejących metod i narzędzi rozwiązań. W artykule przedstawiony został obecny stan wiedzy w tym zakresie.

[1] Wydział Transportu Politechnika Warszawska. ul. Koszykowa 75 00-662 Warszawa, tel. (+48 22) 6607338 ara@it.pw.edu.pl

2. TYPOLOGIA ZAGADNIEŃ PAKOWANIA

Mówiąc najogólniej, zagadnienie pakowania polega na rozmieszczeniu zbioru przedmiotów (opakowań) w pojemnikach zgodnie z określoną funkcją celu. W celu analizy zagadnień pakowania można zaproponować przedstawiony na rys. 1 podział przedmiotowy:

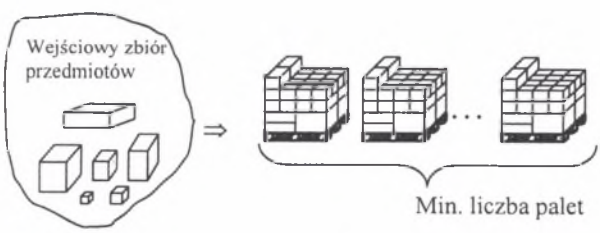


Rys. 1. Typologia zagadnień pakowania
Fig. 1. Typology of packing problems

Podział zagadnień pakowania na Zagadnienie Plecaka (*ang. Knapsack Problem* - KP) i Zagadnienie Załadunku (*ang. Bin Packing Problem* - BPP) uzasadnia następujący fakt: z definicji KP wynika, że załadowanie każdego konkretnego przedmiotu oznacza otrzymanie pewnego zysku, a celem jest takie zapakowanie pojemnika, aby zysk płynący z zapakowania przedmiotów ze zbioru wejściowego był maksymalny. Natomiast w BPP szukamy takiego zapakowania przedmiotów ze zbioru wejściowego do pojemników, ażeby stopień wykorzystania przestrzeni pojemników był największy lub też ich (pojemników) liczba była najmniejsza.

Następny podział wewnątrz BPP wynika ze zróżnicowania występujących w praktyce problemów:

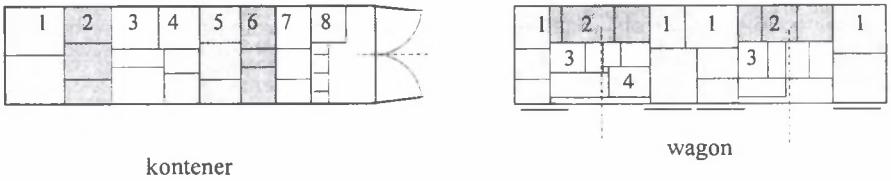
a) **Załadunek jednej dostawy na wiele palet (pojemników)** (*ang. Pallet Loading*) - wejściowy zbiór przedmiotów należy zapakować do pojemników (palet) tak, aby liczba użytych pojemników była minimalna (rys. 2).



Rys. 2. Załadunek jednej dostawy na wiele palet
Fig. 2. Pallet Loading

Zazwyczaj pojemniki (palety) mają te same identyczne wymiary. W przypadku palet często nie zakłada się maksymalnej wysokości jednostki ładunkowej paletowej (jłp), tylko wprowadza się kryterium stabilności jłp, wówczas jej wysokość jest pochodną tego kryterium.

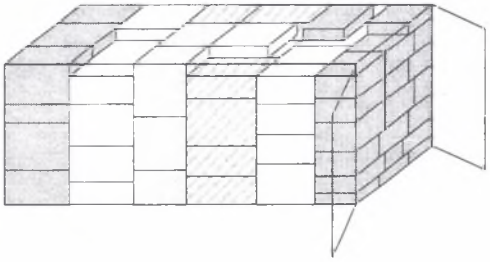
b) **Załadunek jednej dostawy do kontenera lub wagonu** (*ang. Container Loading*) - w tym przypadku mamy do czynienia z wejściowym zbiorem przedmiotów, które należy załadować do pojemnika (kontenera, naczepy, wagonu) tak, aby maksymalnie wykorzystać jego przestrzeń ładunkową (rys. 3).



Rys. 3. Załadunek kontenera i wagonu
Fig. 3. Container and wagon loading

Zazwyczaj przyjmuje się, że suma objętości przedmiotów jest nieznacznie mniejsza od objętości pojemnika. Różnice pomiędzy kontenerem (naczepą) a wagonem polegają na ustaleniu innej sekwencji układania przedmiotów w rzędach i wynikają z innego (rys. 3) położenia otworów drzwiowych (liczby oznaczają kolejność układania rzędów opakowań).

c) **Załadunek kilku dostaw do kontenera** *(ang. Multiple Destination Container Loading)* - w tym przypadku wejściowy zbiór przedmiotów składa się z kilku podzbiorów. Przedmioty należące do określonego podzbioru mają trafić do konkretnego odbiorcy. Problem (rys. 4) polega na zapakowaniu wszystkich podzbiorów przedmiotów do kontenera (skrzyni ładunkowej) z maksymalnym wykorzystaniem jego przestrzeni ładunkowej przy następujących ograniczeniach:
- przedmioty należące do podzbiorów powinny być ułożone w odległości od drzwi zgodnej z kolejnością odwiedzania odbiorców;
- przedmioty przeznaczone do jednego odbiorcy powinny się dać pobrać z kontenera bez naruszania układu pozostałych przedmiotów.



Rys. 4. Załadunek kilku dostaw do kontenera (każdy kolor oznacza inną dostawę)
Fig. 4. Multiple destination container loading (colors indicate different deliveries)

Wszystkie przypadki opisane powyżej w ramach BPP mogą być rozważane odnośnie do wejściowego zbioru przedmiotów jednorodnych lub niejednorodnych.

3. ZNACZENIE PRAKTYCZNE ZAGADNIEŃ PAKOWANIA

Jeżeli chodzi o zagadnienie plecaka, ma ono obecnie w systemach transportowych raczej niewielkie zastosowanie (chyba że zysk z zapakowania danego przedmiotu będzie oznaczał jego objętość - wówczas KP sprowadza się do maksymalizacji wykorzystania przestrzeni pojemnika). Znacznie ciekawsze są zagadnienia załadunku (BPP), które odzwierciedlają rzeczywiste opisane w p. 1 problemy występujące w praktyce. Należy przy tym zwrócić uwagę, że np. kontener może być zarówno pojemnikiem (załadunek dostawy do kontenera), jak i przedmiotem (rozmieszczenie kontenerów w ładowni statków).

Jednym z najczęściej pojawiających się pytań w logistyce dystrybucji (konkretnie w relacji magazyn - odbiorca detaliczny) jest dylemat: czy skompletowane w magazynie jednostki ładunkowe paletowe należy po nałożeniu na nie zabezpieczenia transportowego ładować do samochodu w całości, czy też należy je rozformować i załadować każde opakowanie towaru do skrzyni ładunkowej traktując ją jako pojemnik w kategoriach BPP. W pierwszym wariancie oszczędza się na kosztach operacji rozformowania jłp, natomiast straty wynikają z większych kosztów transportu (gorszego wykorzystania kubatury i ładowności środka transportu). W wariancie drugim jest odwrotnie. Oczywiście rozwiązanie wspomnianego dylematu dla konkretnego rzeczywistego przypadku należy szukać w porównaniu kosztów realizacji obu wariantów.

4. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU I METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ ZAŁADUNKU

Obecnie jedynie pakowanie przedmiotów o identycznych wymiarach jest oparte na opisanych i sprawdzonych w praktyce metodach. Pakowanie przedmiotów niejednorodnych jest tzw. problemem *NP-zupełnym*, co już przy średnio dużej liczbie przedmiotów w zasadzie stanowi o niemożliwości jego rozwiązania w rozsądnym czasie metodą wyznaczenia wszystkich możliwych kombinacji przedmiotów, a następnie wyboru najlepszej z nich. Obecnie podejmowane są próby rozwiązania zagadnienia BPP za pomocą metod programowania całkowitoliczbowego, metod heurystycznych, metod bazujących na algorytmach genetycznych oraz metod symulowanego wyżarzania. Poniżej przedstawiono jedną z metod rozwiązania zagadnienia załadunku wielu pojemników, opartą na programowaniu całkowitoliczbowym.

W opisywanej metodzie optymalizacyjnej przyjęto, że rotacja przedmiotów jest dopuszczana, ale tylko wokół osi wysokości. Do matematycznego sformułowania problemu w kategoriach programowania całkowitoliczbowego konieczne jest zastosowanie następujących oznaczeń:

N	całkowita liczba przedmiotów do zapakowania
m	całkowita liczba dostępnych pojemników
p_i, q_i, r_i	długość, szerokość, wysokość przedmiotu i
L_j, W_j, H_j	długość, szerokość, wysokość pojemnika j
M	dowolnie duża liczba (np. $M = 1000$),

t_{ij} zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest umieszczony w j-tym pojemniku, w przeciwnym wypadku równa 0

x_i, y_i, z_i współrzędne dolnego lewego rogu (DLR) i-tego przedmiotu

n_j zmienna binarna równa 1, jeżeli j-ty pojemnik został użyty, w przeciwnym wypadku równa 0

s_i zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest umieszczony podłużnie (tj. długość przedmiotu jest równoległa do długości pojemnika), w przeciwnym wypadku równa 0

a^{le}_{ik} zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest z lewej strony od k-tego przedmiotu (tzn. DLR przedmiotu i-tego jest z lewej strony od DLR przedmiotu k-tego);

a^{pr}_{ik} zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest z prawej strony od k-tego przedmiotu

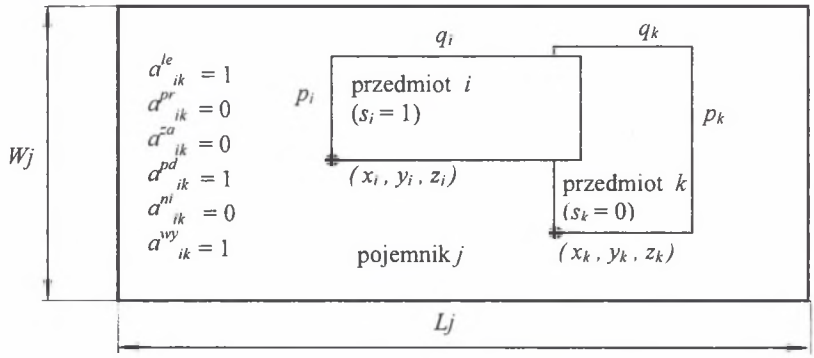
a^{za}_{ik} zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest za k-tym przedmiotem (z tyłu)

a^{pd}_{ik} zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest przed k-tym przedmiotem (z przodu)

a^{ni}_{ik} zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest poniżej k-tego przedmiotu

a^{wy}_{ik} zmienna binarna równa 1, jeżeli i-ty przedmiot jest powyżej k-tego przedmiotu

Interpretację wprowadzonych zmiennych przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Przedstawienie oznaczeń zmiennych
Fig. 5. Variables presentation

Funkcja celu ma wówczas postać:

$$\text{Minimum}\left(\sum_{j=1}^{m} L_j \cdot W_j \cdot H_j \cdot n_j \;-\; \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot q_i \cdot r_i\right) \tag{1}$$

przy ograniczeniach:

dla każdego $i, k,$ $\quad i < k$

$$x_i + p_i s_i + q_i(1 - s_i) \le x_k + (1 - a^{le}{}_{ik})\,M \tag{2}$$

$$x_k + p_k s_k + q_k(1 - s_k) \le x_i + (1 - a^{pr}{}_{ik})\,M \tag{3}$$

$$y_i + q_i s_i + p_i(1 - s_i) \le y_k + (1 - a^{za}{}_{ik})\,M \tag{4}$$

$$y_k + q_k s_k + p_k(1 - s_k) \le y_i + (1 - a^{pd}{}_{ik})\,M \tag{5}$$

$$z_i + r_i \le z_k + (1 - a^{ni}{}_{ik})\,M \tag{6}$$

$$z_k + r_k \le z_i + (1 - a^{wy}{}_{ik})\,M \tag{7}$$

$$a^{le}{}_{ik} + a^{pr}{}_{ik} + a^{za}{}_{ik} + a^{pd}{}_{ik} + a^{ni}{}_{ik} + a^{wy}{}_{ik} \ge t_{ij} + t_{kj} - 1 \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{m} t_{ij} = 1 \qquad \text{dla każdego} \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} t_{ij} \le M \cdot n_j \qquad \text{dla każdego } j \tag{10}$$

$$x_i + p_i s_i + q_i(1 - s_i) \le L_j + (1 - t_{ij}) \cdot M \qquad \text{dla każdego } i, j \tag{11}$$

$$y_i + q_i s_i + p_i(1 - s_i) \le W_j + (1 - t_{ij}) \cdot M \qquad \text{dla każdego } i, j \tag{12}$$

$$z_i + r_i \le H_j + (1 - t_{ij}) \cdot M \qquad \text{dla każdego } i, j \tag{13}$$

s_i, $a^{le}{}_{ik}$, $a^{pr}{}_{ik}$, $a^{za}{}_{ik}$, $a^{pd}{}_{ik}$, $a^{ni}{}_{ik}$, $a^{wy}{}_{ik}$, t_{ij}, n_j - binarne,

$$x_i,\ y_i,\ z_i \ge 0$$

Ograniczenia (2) – (7) zabezpieczają przed ewentualnym pokrywaniem się (zachodzeniem na siebie) przedmiotów odpowiednio w osi X (2), (3) następnie w osi Y (4), (5) oraz w osi Z (6), (7). Ograniczenie (8) sprawdza, czy ograniczenia (2) – (7) są stosowane tylko dla przedmiotów wewnątrz tego samego pojemnika (inaczej byłoby to bezcelowe). Ograniczenie (9) zapewnia, że każdy przedmiot na pewno zostanie zapakowany na którąś paletę. Ograniczenie (10) oznacza, że jeżeli paleta nie została użyta do zapakowania, nie może się na niej znaleźć żaden przedmiot. Ograniczenie (11) zapewnia, że przedmioty nie będą wystawać za obrys pojemnika określony jego długością L. Podobnie ograniczenia (12)

i (13) zapewniają, że przedmioty nie będą wystawać za obrys pojemnika określony jego szerokością W i wysokością H.

Jak wynika z zapisu funkcji celu, omawiany model pozwala przy zapakowaniu zadanego zbioru przedmiotów na zastosowanie pojemników o różnych wymiarach.

Do rozwiązania tak sformułowanego problemu można zastosować komputerowe narzędzie wspomagające rozwiązywanie zadań programowania całkowitoliczbowego (PCL). Wówczas jednak cały proces poszukiwania rozwiązania zależy od parametrów takiego narzędzia, co może się negatywnie odbić na jakości rozwiązania.

5. PODSUMOWANIE

Przedstawiona w artykule metoda rozwiązania zagadnienia załadunku jest oparta na programowaniu całkowitoliczbowym, można zatem spodziewać się, że jej skuteczne stosowanie przyniesie rozwiązanie optymalne. Niestety, wspomniana w rozdziale 3 *NP – zupełność* zagadnienia załadunku powoduje, ze liczba ograniczeń w modelu matematycznym drastycznie rośnie wraz ze wzrostem liczby przedmiotów do zapakowania. Fakt ten stanowi poważne ograniczenie w próbach rozwiązania zagadnienia załadunku metodami programowania całkowitoliczbowego. Dlatego najbardziej obiecującymi metodami rozwiązania wydają się być obecnie metody heurystyczne.

Należy przypuszczać, że dalsza ewolucja zagadnień załadunku będzie przebiegała w kierunku wyznaczonym przez wymagania technologii transportu. Dlatego w rozważaniach dotyczących zagadnień załadunku można się spodziewać wzrostu znaczenia stabilności układanej jednostki ładunkowej oraz uwzględniania nacisku powierzchniowego występującego na opakowaniach.

W kolejnych publikacjach zostaną przedstawione metody wykorzystania zagadnienia wypełniania jłp do optymalizacji systemów transportowych.

Literatura

1. Chen C. S., Sarin S., Ram B.: The pallet packing problem for non-uniform box sizes. International Journal of Production Research 1991 (29) 10 s. 1963-1968.
2. Dyckhoff H.: A typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research 1990 (44): s. 145-159.
3. Ratkiewicz A.: Optymalizacja procesu komisjonowania w ustalonej klasie łańcuchów transportowo–magazynowych. Rozprawa doktorska na Wydziale Transportu PW, Warszawa, czerwiec 2002.
4. Siudak M.: Badania operacyjne. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1994.

Abstract

In this paper an integer linear programming model for solution to general packing problem has been presented. Theoretically, a packing problem being well-formulated in terms of linear programming should yield an optimal solution. It is essential, that according to *NP – completeness*, the number of constraints drastically increases with number of cartons. So, obtaining the optimal solution is dependant on parameters of the mathematical programming tool.

For further development, additional constraints can be introduced to the models to include other concerns in the packing problem such as stability of packing unit and carton surface pressure.