ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: TRANSPORT z. 48 Nr kol. 1604

Piotr FOLĘGA, Andrzej WILK

ZASTOSOWANIE MEB W KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU KONSTRUOWANIA PRZEKŁADNI ZĘBATYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie Metody Elementów Brzegowych (MEB) w komputerowym wspomaganiu konstruowania przekładni zębatych.

THE APPLICATION BEM IN THE COMPUTER AIDED ENGINEERING OF DRIVING GEARS

Summary. Application of the Boundary Elements Method (BEM) in the computer aided engineering of driving gears has been presented in the paper.

1. WPROWADZENIE

Dążenie do zmniejszenia wymiarów przekładni zębatych, a także wzrost obciążeń roboczych przenoszonych przez przekładnie wpływają na zwiększenie sił międzyzębnych. Potrzeba spełnienia wysokich wymagań stawianych przekładniom zębatym powoduje, że prowadzi się ciągłe badania w celu zwiększenia wytrzymałości zębów kół zębatych.

Jedną z najprostszych metod obliczeniowych pozwalających na określenie naprężeń w podstawie zęba koła zębatego jest metoda łamanych przekrojów. Metoda ta za pomocą elementarnych sposobów znanych z wytrzymałości materiałów daje jakościowo dobry obraz stanu naprężenia w podstawie zęba, uwzględniając naprężenia wywołane momentem gnącym, siłą ścinającą oraz siłą ściskającą. Jednakże wyniki obliczeń tą metodą nie są wystarczająco dokładne z uwagi na zbyt uproszczony model obliczeniowy zęba. Inną z metod służącą do określania naprężeń w podstawie zęba jest metoda odwzorowań wiernokątnych (MOW). Oparta jest ona na odwzorowaniach wiernokątnych pozwalających wykorzystać znane rozwiązania dla półprzestrzeni sprężystej. Metoda ta została rozwinięta i przystosowana do obliczeń numerycznych przez prof. L. Müllera. Jedną z głównych zalet MOW jest fakt, że otrzymuje się zadowalające wartości naprężeń w podstawie zęba przy założeniu kilku punktów na zarysie stopy zęba. Zaleta ta okupiona jest jednak koniecznością rozwiązywania układu nieliniowych równań algebraicznych, co stwarza problemy natury numerycznej. Do głównych wad MOW należy jednak przede wszystkim brak uniwersalności. Zastosowanie MOW do obliczeń naprężeń w kołach wewnętrznie uzębionych napotyka na znaczne trudności. Obecnie w praktyce konstrukcyjnej najczęściej do wyznaczania naprężeń w podstawie zęba napędów zębatych stosuje się metody zalecane przez normy ISO lub DIN (rys. 1). Metody te uwzględniają jednak wyłącznie naprężenia gnące w podstawie zęba. Dla

uściślenia obliczeń wytrzymałościowych i optymalizacji cech konstrukcyjnych przekładni celowe jest stosowanie dokładnych metod wyznaczania naprężeń. Metodami zapewniającymi obecnie największą dokładność uzyskanych wyników naprężeń w podstawie zęba oraz uniwersalność zastosowania w zębach o dowolnej geometrii kół wewnętrznie i zewnętrznie uzębionych są numeryczne metody analizy stanu naprężenia. Należą do nich Metoda Elementów Brzegowych (MEB) oraz Metoda Elementów Skończonych (MES).

Rys. 1. Metody stosowane obecnie do wyznaczania naprężeń w stopie zęba
Fig. 1. The methods of calculation on the values of stresses in the base of a tooth

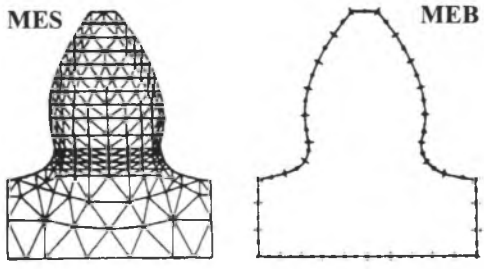
W niniejszym opracowaniu przedstawiono zastosowanie MEB w obliczeniach wytrzymałościowych zębów napędów zębatych. W tym celu opracowano programy komputerowe służące do analizy stanu naprężenia i przemieszczeń zębów kół zębatych [1,2]. Obliczenia wykonywane są przy wykorzystaniu trzech programów komputerowych. Pierwszy program pozwala wyznaczyć dokładne zarysy zębów kół zewnętrznie lub wewnętrznie uzębionych w zależności od przyjętych cech geometrycznych kół zębatych i parametrów zarysu odniesienia. Kolejny program na podstawie wczytanych danych geometrycznych umożliwia zadanie warunków brzegowych (obciążeń i podpór w dowolnie przyjętych węzłach) oraz dowolne zobrazowanie przyjętego modelu numerycznego. Po wczytaniu tak przygotowanych danych wejściowych wykonywane są obliczenia numeryczne, przy pomocy programu do analizy płaskiego stanu naprężenia i przemieszczenia z wykorzystaniem MEB.

Rozpatrywane przez autorów w dotychczasowych opracowaniach obliczenia dotyczyły w szczególności następujących zagadnień:
- analizy stanu naprężenia w podstawie zęba koła zewnętrznie lub wewnętrznie uzębionego w zależności od przyjętych cech geometrycznych kół zębatych i parametrów zarysu odniesienia [1,2,3,5],
- analizy stanu naprężenia w podstawie zęba koła zewnętrznie uzębionego z uwzględnieniem naturalnego procesu zużywania się zębów w wyniku ich współpracy oraz parametrów protuberancji narzędzia [5,6],
- analizy stanu naprężenia w dnach wrębów międzyzębnych wieńca zębatego tulei podatnej przekładni falowej [4,9],
- badania warunków wystąpienia poślizgu sprężystego w połączeniach skurczowych wieńców kół zębatych z piastami [7].

2. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ W STOPIE ZĘBA PRZY POMOCY MEB

Głównym powodem wyboru przez autorów MEB do analizy stanu naprężenia w podstawie zęba było to, że w metodzie tej naprężenia wyznaczane są bezpośrednio na brzegu elementu (na zarysie zęba). Z badań doświadczalnych wynika, że w przypadku zębów maksymalne naprężenia występują właśnie bezpośrednio na ich zarysie. Metoda ta ponadto wymaga zwykle dyskretyzacji brzegu ciała, a nie jego wnętrza, jak to jest w innych metodach

numerycznych, np. w MES (rys. 2). Ta redukcja wymiaru zadania o jeden rząd ułatwia przygotowywanie danych wejściowych i prowadzi do układu równań algebraicznych znacznie mniejszego rzędu niż w MES. MEB może być również przydatna w analizie wrażliwości i optymalizacji kształtu zarysu podstawy zęba. Daje możliwość przeprowadzenia analizy wytrzymałościowej zębów o dowolnej geometrii kół wewnętrznie i zewnętrznie uzębionych oraz umożliwia optymalny dobór cech konstrukcyjnych kół zębatych i zarysu odniesienia.



Rys. 2. Podział zęba na elementy w metodzie MES i MEB
Fig. 2. The tooth division of an elements in the FEM and BEM

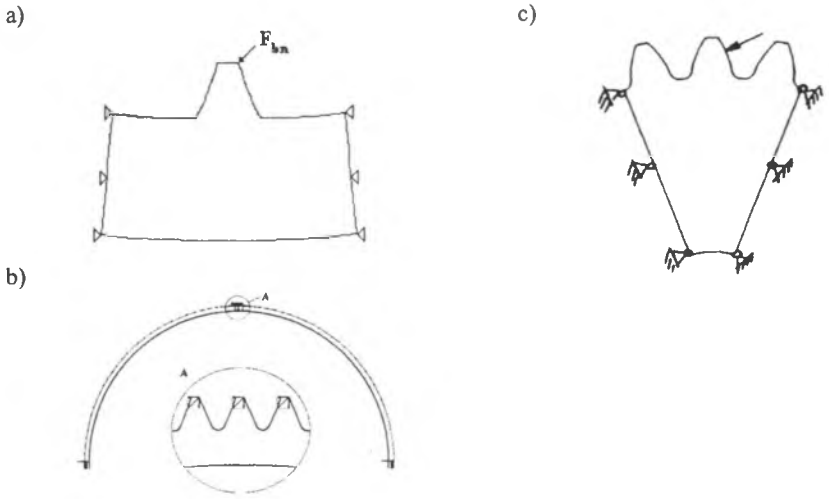
Metoda Elementów Brzegowych jest metodą przybliżoną, mającą za podstawę analitycznie sformułowane zadanie brzegowe w postaci układu równań całkowych. Metoda ta umożliwia ich przybliżone rozwiązanie przez dyskretyzację brzegu ciała elementami brzegowymi oraz aproksymację funkcji brzegowych za pomocą funkcji interpolacyjnych. W wyniku takiej procedury otrzymuje się układ równań algebraicznych, w którym niewiadome występują tylko na brzegu ciała.

Zastosowanie MEB do efektywnych i dokładnych obliczeń wytrzymałościowych zębów wymaga wcześniejszego przyjęcia modelu fizycznego i matematycznego zęba. Model fizyczny obejmuje nie tylko własności fizyczne tworzywa, z którego wykonany jest ząb, ale także sposób obciążenia i podparcia. Te ostatnie czynniki decydują ostatecznie o prawidłowym sformułowaniu zadania brzegowego, które należy rozwiązać za pomocą MEB.

Wykonane obliczenia kół wewnętrznie i zewnętrznie uzębionych dotyczyły zębów stalowych obciążonych jednostkową siłą skupioną w górnej części zarysu oraz podpartych w sposób przedstawiony na rys. 3a. W obliczeniach rozpatrywano wyodrębniony z koła zębatego pojedynczy ząb pomijając wpływ sąsiednich zębów. Założenie to upraszcza obliczenia numeryczne, nie wprowadzając do wyników obliczeń znacznych błędów [1,2].

Rozważono także naprężenia w wieńcu zębatym tulei podatnej przekładni falowej, której model numeryczny przedstawiono na rys. 3b. W modelu tym obciążenie tulei pochodzące od generatora przekładni falowej zostało zadane w postaci uprzednio wyznaczonych przemieszczeń. Natomiast obciążenie wywołane przenoszonym przez przekładnię momentem obrotowym zostało zadane w postaci sił międzyzębnych. W obliczeniach rozpatrywano wyodrębnione z wieńca zębatego trzy zęby pomijając wpływ pozostałych. Ze względu na trudności numeryczne przyjęto uproszczony model wieńca zębatego w zakresie analizy stanu naprężenia przy asymetrii stref obciążenia: międzyzębnej i opierania na generatorze.

Na rys. 3c przedstawiono natomiast stosowany w obliczeniach [7] opracowany model numeryczny połączenia skurczowego wieńca zębatego.



Rys. 3. Opracowane modele numeryczne MEB stosowane w obliczeniach:
a) wytrzymałości zębów kół zębatych, b) wieńca zębatego tulei podatnej przekładni falowej, c) połączenia skurczowego wieńca zębatego

Fig. 3. The BEM numerical models in the analysis:
a) the toothed wheel, b) the flexspline, c) the force-fitted fastening

W programie komputerowym do obliczeń współrzędnych punktów zarysu zębów wykorzystano algorytm prof. L. Müllera. Wszystkie wymiary zębów zostały odniesione do modułu, co pozwoliło uzyskać parametry geometryczne zarysu zęba oraz wyniki obliczeń w wielkościach bezwymiarowych.

3. ZASTOSOWANIE MEB W ANALIZIE STANU NAPRĘŻENIA W PODSTAWIE ZĘBA

O kształcie zęba, a zwłaszcza jego stopy, decydują parametry nacinanego koła (liczba zębów, współczynnik przesunięcia zarysu) oraz parametry zarysu odniesienia (wysokość głowy narzędzia, kąt zarysu, promień zaokrąglenia głowy narzędzia). Wszystkie te parametry mają bardzo istotny wpływ na kształt stopy zęba, a tym samym na wartości naprężeń tam występujących. W pracach [3, 5] przeanalizowano wpływ cech geometrycznych koła i zarysu odniesienia (frezu zębatkowego oraz dłutaka) na wartości naprężeń w stopie zęba. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci krzywych ukazujących zależność naprężeń w stopie zęba w funkcji liczby zębów koła przy stałych wartościach współczynnika przesunięcia zarysu koła. Naprężenia podano w jednostkach bezwymiarowych:

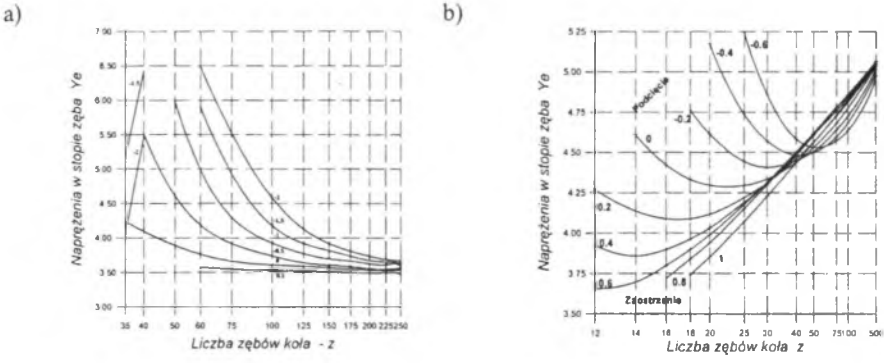
$$Y_e = \sigma_{max} \cdot \frac{b \cdot m}{F_{bn}} \tag{1}$$

gdzie: σ_{max} - maksymalna wartość naprężenia na brzegu zęba, b - szerokość koła zębatego, m - moduł zęba, F_{bn} - wartość siły międzyzębnej.

Otrzymane wyniki obliczeń porównano z rezultatami uzyskanymi za pomocą metod zalecanych przez normy ISO/DIN uzyskując zgodność jakościową i ilościową. Przykładowe

wyniki wykonanych w pracach [3,5] obliczeń numerycznych przedstawiono na rys. 4.

W pracy [5] rozważono przypadek naturalnego procesu zużywania się zębów w wyniku ich współpracy, a w szczególności wpływu tego zużycia na wartości naprężeń występujących w stopie zęba. Na podstawie doświadczeń eksploatacyjnych można stwierdzić, że zużycie powierzchni roboczej zębów prowadzi do wystąpienia karbu w skrajnym punkcie przyporu położonym na stopie zęba. Wzrost wartości naprężeń w karbie w wyniku zachodzącego tam zużycia w znacznym stopniu odciąża stopę zęba, powodując w niej stopniowy spadek naprężeń ze wzrostem wartości zużycia. Ze wzrostem głębokości zużycia wartości naprężeń w stopie zęba ulegają znacznemu zmniejszeniu przy jednoczesnym ich wzroście w karbie. W określonych przypadkach karb spowodowany zużyciem zęba może spełniać rolę karbu odciążającego, zwiększając wytrzymałość podstawy zęba na złamanie.



Rys. 4. Naprężenia w kole zębatym:
a) wewnętrznie uzębionym, b) zewnętrznie uzębionym
Fig. 4. Stresses in the: a) internal gear, b) external gear

W opracowaniu [6] przeprowadzono analizę wpływu parametrów protuberancji narzędzia na wartości maksymalnych naprężeń w podstawie zęba koła zewnętrznie uzębionego. W przypadku kół szlifowanych oprócz karbu zmęczeniowego w stopie zęba może powstać dodatkowy ostry karb spowodowany współpracą krawędzi tarczy szlifierskiej, który może znacznie zmniejszyć wytrzymałość zmęczeniową zęba. Aby uniknąć tego szkodliwego zjawiska, stosuje się zarysy odniesienia z protuberancją. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń numerycznych stwierdzono, że wpływ parametrów protuberancji na zmiany naprężeń w podstawie zęba jest nieznaczny.

Ważnym elementem obliczeń wytrzymałościowych przekładni falowych jest ocena wartości naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca zębatego jej tulei podatnej. Częstym zjawiskiem poprzedzającym zniszczenie tulei jest jej pękanie w miejscach lokalnego wzrostu naprężeń w wieńcu zębatym. W pracach [4,9] przeprowadzono analizę wpływu podstawowych cech konstrukcyjnych tulei podatnej, takich jak względna deformacja promieniowa i względna grubość powłoki na wartości naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca zębatego. Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych odpowiadały jakościowo wynikom zamieszczonym w literaturze uzyskanymi innymi metodami obliczeń.

W pracy [7] przedstawiono zastosowanie MEB do wyznaczania rozkładów naprężeń na powierzchni połączenia skurczowego wieńca ząbatego z piastą. Rozkłady te pozwoliły na ocenę nośności połączenia.

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono zastosowanie MEB w komputerowym wspomaganiu konstruowania przekładni zębatych [1,2,3,4,5,6,7,8,9]. Otrzymane wyniki dotyczące naprężeń w stopach zębów stawiają tę metodę na równi z innymi, wykorzystywanymi obecnie metodami analizy stanu naprężenia [8]. Zastosowanie MEB w obliczeniach wytrzymałościowych zębów kół zębatych umożliwia nie tylko ich numeryczną analizę wytrzymałości, ale także analizę wrażliwości oraz optymalizację kształtu zarysu podstawy zęba.

Literatura

1. Wilk A., Matyja T.: Zastosowanie MEB do wyznaczania naprężeń w podstawie zębów kół wewnętrznych uzębionych. XVII Sympozjum PKM, Lublin-Nałęczów 1995.
2. Wilk A., Matyja T.: Zastosowanie MEB w obliczeniach wytrzymałościowych kół zębatych. Mat. Konf. „Metody i środki projektowania wspomaganego komputerowo", Pol. Warszawska 1995.
3. Wilk A., Matyja T., Folęga P.: Analiza wpływu cech konstrukcyjnych koła wewnętrznie uzębionego i narzędzia na naprężenia w podstawie zęba, ZN Pol. Śl., s. Transport, Z. 28, Gliwice 1996.
4. Folęga P., Wilk A.: Analiza stanu naprężeń wieńca zębatego tulei podatnej przekładni falowej z wykorzystaniem MEB, Materiały XIII Konferencji „Metody i środki projektowania wspomaganego komputerowo", Politechnika Warszawska, 2001.
5. Wilk A., Folęga P.: Wyznaczanie wytrzymałości podstawy zębów kół napędów zębatych, ZN Pol. Śl., s. Transport, Z. 29, Gliwice 1997.
6. Folęga P., Wilk A.: Wpływ protuberancji na stan naprężeń w stopie zęba koła zewnętrznie uzębionego, ZN Pol. Śl., s. Transport, Z. 38, Gliwice 1999.
7. Matyja T., Wilk A.: Propozycja modyfikacji metody konstruowania kół z nasadzanymi wieńcami w napędach zęnatych, ZN Pol. Śl., s. Transport, Z. 29, Gliwice 1997.
8. Folęga P., Wilk A.: Analiza stanu naprężenia w podstawie zęba z wykorzystaniem MEB. Materiały XXI Sympozjonu PKM, Bielsko-Biała-Ustroń, Tom I, WNT 2003.
9. Folęga P., Wilk A.: Numeryczna analiza stanu naprężenia wieńca zębatego tulei podatnej za pomocą MEB, ZN Pol. Śl., s. Transport, Z. 42, Gliwice 2001.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Dąbrowski

Abstract

Application of the Boundary Elements Method (BEM) in the numerical analysis of the strength of the driving gears has been presented in the paper. There has been presented the influence of the construction features of gear wheel and construction features of the tool on the values of stresses in the base of an internal and external gear tooth. Analysis of the influence of wear of active faces of teeth and influence of the construction features of protuberation on the values of stresses in their bases has also been made. Application of the BEM in the numerical analysis of the harmonic gear drive flexspline has been presented in the paper too.

Praca wykonana w ramach BK-222/RT2/2003