

**ZESZYTY  
NAUKOWE  
POLITECHNIKI  
ŚLĄSKIEJ**

**ANDRZEJ J. NOWAK**

**METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH  
Z ZASTOSOWANIEM  
WIELOKROTNEJ ZASADY WZAJEMNOŚCI**



P.3349/93

**ENERGETYKA**

**Z. 116  
GLIWICE  
1993**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1202

P. 3349/93

ANDRZEJ J. NOWAK



**METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH  
Z ZASTOSOWANIEM  
WIELOKROTNEJ ZASADY WZAJEMNOŚCI**

GLIWICE 1993

**OPINIODAWCY**

**Prof. dr hab. inż. Ryszard Parkitny**

**Prof. zw. dr inż. Jan Szargut**

**KOLEGIUM REDAKCYJNE**

**REDAKTOR NACZELNY**

— **Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski**

**REDAKTOR DZIAŁU**

— **Doc. dr hab. inż. Zbigniew Rudnicki**

**SEKRETARZ REDAKCJI**

— **Mgr Elżbieta Leško**

**REDAKCJA**

**Mgr Anna Błażkiewicz**

**REDAKCJA TECHNICZNA**

**Alicja Nowacka**

**Wydano za zgodą**

**Rektora Politechniki Śląskiej**

**PL ISSN 0372-9796**

**Wydawnictwo Politechniki Śląskiej**

**ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice**

---

**Nakład 150+83 Ark. wyd. 8,5 Ark. druk. 7.375 Papier offset. kl.111 70x100 80g**  
**Oddano do druku 1.03.93 Podpis. do druku 1.03.93 Druk ukończ. w kwietniu 1993**  
**Zam. 110/93 Cena zł 11.900,-**

---

**Fotokopie, druk i oprawę**

**wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach**

# Inżynierski zaliczenia

## Spis treści

Wstęp	11
1. Podstawy energetyki	11
1.1. Wstęp	11
1.2. Podstawy energetyki	11
1.3. Energetyka jądrowa	11
1.4. Energetyka wodna	11
1.5. Energetyka wiatrowa	11
1.6. Energetyka słoneczna	11
1.7. Energetyka geotermalna	11
1.8. Energetyka biomasy	11
1.9. Energetyka odpadowa	11
1.10. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.11. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.12. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.13. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.14. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.15. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.16. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.17. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.18. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.19. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.20. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.21. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.22. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.23. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.24. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.25. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.26. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.27. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.28. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.29. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.30. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.31. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.32. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.33. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.34. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.35. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.36. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.37. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.38. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.39. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.40. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.41. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.42. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.43. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.44. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.45. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.46. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.47. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.48. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.49. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.50. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.51. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.52. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.53. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.54. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.55. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.56. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.57. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.58. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.59. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.60. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.61. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.62. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.63. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.64. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.65. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.66. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.67. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.68. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.69. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.70. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.71. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.72. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.73. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.74. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.75. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.76. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.77. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.78. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.79. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.80. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.81. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.82. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.83. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.84. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.85. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.86. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.87. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.88. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.89. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.90. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.91. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.92. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.93. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.94. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.95. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.96. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.97. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.98. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.99. Energetyka wodno-energetyczna	11
1.100. Energetyka wodno-energetyczna	11

Bez koleżeńskich dyskusji w Instytucie Techniki Ciepłej Politechniki Śląskiej w Gliwicach oraz w the Wessex Institute of Technology University of Portsmouth w Wielkiej Brytanii ta praca nigdy by nie powstała.



# Spis treści

<b>Podstawowe oznaczenia</b>	<b>11</b>
<b>1. Wstęp</b>	<b>17</b>
1.1. Podstawy metody elementów brzegowych . . . . .	20
1.1.1. Równanie całkowite MEB . . . . .	20
1.1.2. Dyskretyzacja równania całkowite MEB . . . . .	23
1.1.3. Macierze wpływu . . . . .	26
1.1.4. Uwzględnianie warunków brzegowych . . . . .	28
1.1.5. Rozwiązanie w punktach wewnętrznych ciała . . . . .	29
1.1.6. Pola źródłowe . . . . .	29
1.2. Metody transformacji całek po obszarze w całki brzegowe . . . . .	31
<b>2. Podstawy wielokrotnej zasady wzajemności</b>	<b>34</b>
2.1. Zależności ogólne . . . . .	34
2.2. Dyskretyzacja brzegowego równania całkowite . . . . .	36
2.3. Rozwiązania podstawowe wyższych rzędów . . . . .	39
2.4. Zagadnienia zbieżności szeregu WZW . . . . .	40
2.5. Implementacja komputerowa WZW . . . . .	43
<b>3. Zastosowanie WZW do modelowania pól temperatury</b>	<b>44</b>
3.1. Ustalone przewodzenie ciepła . . . . .	44
3.2. Nieustalone przewodzenie ciepła . . . . .	50
3.2.1. Dyskretyzacja czasowa i przestrzenna . . . . .	54
3.2.2. Kroczenie w czasie . . . . .	57
3.3. Nieliniowe zagadnienia brzegowe przewodzenia ciepła . . . . .	58
<b>4. Zastosowanie WZW w zagadnieniach sprężystości i termosprężystości</b>	<b>68</b>
4.1. Podstawowe zależności teorii sprężystości . . . . .	68
4.1.1. Naprężenia termiczne . . . . .	70
4.2. Równania całkowite sprężystości i termosprężystości . . . . .	70
4.2.1. Dyskretyzacja równań całkowite sprężystości i termosprężystości . . . . .	73
4.3. Transformacja całek po obszarze w całki brzegowe . . . . .	74



4.3.1.	Zagadnienia sprężystości z obciążeniem siłami grawitacyjnymi i dośrodkowymi . . . . .	76
4.3.2.	Ustalone zagadnienia termosprężystości . . . . .	79
4.3.3.	Nieustalone zagadnienia termosprężystości . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Zastosowanie WZW do analizy równania Helmholtza</b>	<b>85</b>
5.1.	Zależności ogólne . . . . .	85
5.2.	Obliczanie wartości własnych . . . . .	88
<b>6.</b>	<b>Zastosowanie WZW w inżynierii jądrowej</b>	<b>91</b>
6.1.	Zagadnienia krytyczności reaktora jądrowego – przybliżenie dyfuzyjne jednogrupowe . . . . .	91
6.1.1.	Transformacja zagadnienia brzegowego w równanie całkowe . . . . .	94
6.1.2.	Rozwiązania wyższych rzędów . . . . .	95
6.1.3.	Obliczanie parametru geometrycznego reaktora . . . . .	95
<b>7.</b>	<b>Zastosowanie WZW w innych dziedzinach mechaniki</b>	<b>97</b>
7.1.	Zagadnienia opływu ciał . . . . .	97
7.2.	Drgania harmoniczne w cienkich płytach sprężystych . . . . .	98
<b>8.</b>	<b>Podsumowanie i wnioski końcowe</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>102</b>
<b>A</b>	<b>Rozwiązania podstawowe wyższych rzędów dla zagadnień potencjalnych</b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Stosunek współczynników liczbowych w rozwiązaniu podstawowym</b>	<b>114</b>
	<b>Streszczenie</b>	<b>115</b>

# Contents

<b>Basic notation</b>	<b>11</b>
<b>1. Introduction</b>	<b>17</b>
1.1. Fundamentals of the Boundary Elements Method . . . . .	20
1.1.1. Integral equation of BEM . . . . .	20
1.1.2. Discretization of BEM integral equation . . . . .	23
1.1.3. Influence matrices . . . . .	26
1.1.4. Consideration of the boundary conditions . . . . .	28
1.1.5. Solution at internal points . . . . .	29
1.1.6. Potential fields with internal sources . . . . .	29
1.2. Methods of transforming domain integrals to the boundary .	31
<b>2. Fundamentals of the Multiple Reciprocity Method</b>	<b>34</b>
2.1. Basic concepts . . . . .	34
2.2. Discretization of the boundary integral equation . . . . .	36
2.3. Higher order fundamental solutions . . . . .	39
2.4. Convergence of MRM series . . . . .	40
2.5. Computer implementation of MRM . . . . .	43
<b>3. Application of MRM to the modelling of temperature fields</b>	<b>44</b>
3.1. Steady-state heat conduction . . . . .	44
3.2. Transient heat conduction . . . . .	50
3.2.1. Discretization in time and space . . . . .	54
3.2.2. Time marching . . . . .	57
3.3. Nonlinear problems of heat conduction . . . . .	58
<b>4. Application of MRM in elasticity and thermoelasticity</b>	<b>68</b>
4.1. Fundamentals of the elasticity . . . . .	68
4.1.1. Thermal stresses . . . . .	70
4.2. Integral equations of elasticity and thermoelasticity . . . . .	70
4.2.1. Discretization of integral equations of elasticity and thermoelasticity . . . . .	73
4.3. Transformation of domain integrals to the boundary . . . . .	74
4.3.1. Elasticity problems with gravitational and centrifugal loadings . . . . .	76



4.3.2.	Steady-state thermoelasticity . . . . .	79
4.3.3.	Transient thermoelasticity . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Application of MRM to analysis of Helmholtz equation</b>	<b>85</b>
5.1.	Basic concepts . . . . .	85
5.2.	Eigenvalue problem . . . . .	88
<b>6.</b>	<b>Application of MRM in nuclear engineering</b>	<b>91</b>
6.1.	Criticality safety problem of nuclear reactor - diffusion simplification with one-energy group approach . . . . .	91
6.1.1.	Transformation of boundary problem into integral equation . . . . .	94
6.1.2.	Higher order fundamental solutions . . . . .	95
6.1.3.	Calculation of reactor geometric buckling . . . . .	95
<b>7.</b>	<b>Application of MRM in other branches of mechanics</b>	<b>97</b>
7.1.	Fluid flow problems . . . . .	97
7.2.	Harmonic vibration of thin elastic plates . . . . .	98
<b>8.</b>	<b>Final remarks and conclusions</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>102</b>
<b>A</b>	<b>Higher order fundamental solutions for potential problems</b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Coefficient ratio in fundamental solution</b>	<b>114</b>
	<b>Summary</b>	<b>125</b>

# Inhaltsverzeichnis

<b>Wichtige Formelzeichen</b>	<b>11</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>17</b>
1.1. Grundlagen der Randelementmethode . . . . .	20
1.1.1. Integralgleichung der REM . . . . .	20
1.1.2. Diskretisierung der REM-Integralgleichung . . . . .	23
1.1.3. Einflußmatrizen . . . . .	26
1.1.4. Berücksichtigung der Randbedingungen . . . . .	28
1.1.5. Lösung für Innenpunkte . . . . .	29
1.1.6. Potentialfelder mit internen mit Quellen . . . . .	29
1.2. Methoden der Umwandlung von Gebietsintegrale in Randintegrale . . . . .	31
<b>2. Grundlagen für die Methode der mehrfachen Reziprozität</b>	<b>34</b>
2.1. Allgemeine Grundlagen . . . . .	34
2.2. Diskretisierung der Randintegralgleichung . . . . .	36
2.3. Fundamentallösungen höherer Ordnung . . . . .	39
2.4. Probleme der Konvergenz von MMR-Reihen . . . . .	40
2.5. Computerrealisierung der MMR . . . . .	43
<b>3. Anwendung der MMR zur Modellierung von Temperaturfeldern</b>	<b>44</b>
3.1. Stationäre Wärmeleitung . . . . .	44
3.2. Instationäre Wärmeleitung . . . . .	50
3.2.1. Zeit- und Raumdiskretisierung . . . . .	54
3.2.2. Zeitschritt-Prozedur . . . . .	57
3.3. Nichtlineare Randwertprobleme der Wärmeleitung . . . . .	58
<b>4. Anwendung der MMR in der Elastizität und Thermoelastizität</b>	<b>68</b>
4.1. Grundlagen der Elastizität . . . . .	68
4.1.1. Temperaturspannungen . . . . .	70
4.2. Integralgleichungen der Elastizität und Thermoelastizität . . . . .	70
4.2.1. Diskretisierung der Integralgleichungen der Elastizität und Thermoelastizität . . . . .	73

4.3.	Umwandlung der Gebietsintegrale in Randintegrale . . . . .	71
4.3.1.	Aufgaben der Thermoelastizität unter Berücksichtigung von Gravitations- und Zentripetalkraft Belastungen . . . . .	76
4.3.2.	Stationäre Probleme der Thermoelastizität . . . . .	79
4.3.3.	Instationäre Probleme der Thermoelastizität . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Anwendung der MMR zur Analyse der Helmholtz-Gleichung</b>	<b>85</b>
5.1.	Allgemeine Grundlagen . . . . .	85
5.2.	Berechnung von Eigenwerten . . . . .	88
<b>6.</b>	<b>Anwendung der MMR in der Kernenergietechnik</b>	<b>91</b>
6.1.	Anwendung der Diffusionsnäherung und des Einsgruppenenergieverfahrens zur Untersuchung der Kritikalität des Atomreaktors . . . . .	91
6.1.1.	Umwandlung des Randwertproblems in eine Integralgleichung . . . . .	94
6.1.2.	Lösungen höherer Ordnung . . . . .	95
6.1.3.	Berechnung des geometrischen Parameters des Reaktors	95
<b>7.</b>	<b>Anwendung der MMR in anderen Gebieten der Mechanik</b>	<b>97</b>
7.1.	Umströmungsprobleme . . . . .	97
7.2.	Harmonische Schwingungen von dünnen elastischen Stäben . . . . .	98
<b>8.</b>	<b>Zusammenfassung und Schlußfolgerungen</b>	<b>100</b>
	<b>Literatur</b>	<b>102</b>
<b>A</b>	<b>Fundamentallösungen höherer Ordnung der Potentialprobleme</b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Verhältnis der Zahlenkoeffizienten in der Fundamentallösung</b>	<b>114</b>
	<b>Kurzfassung</b>	<b>125</b>

# Podstawowe oznaczenia

Skalarne wielkości fizyczne oznaczone są w pracy kursywą. Wytłuszczenia stosowano dla macierzy powstałych w wyniku dyskretyzacji równań całkowych. Nad symbolami wielkości wektorowych umieszczono strzałki.

Wszystkie występujące w pracy wielkości fizyczne wyrażone są w jednostkach międzynarodowego układu SI lub sprowadzone zostały do postaci bezwymiarowej.

W części pracy dotyczącej sprężystości i termosprężystości stosowano konwencję sumacyjną Einsteina, w której dwukrotnie występujący indeks oznacza sumowanie. Dla zagadnień dwuwymiarowych, w których indeksy 1 i 2 odpowiadają kolejno osiom  $x$  i  $y$ , mamy zatem

$$a_m a_m = a_1^2 + a_2^2 \quad a_{mm} = a_{11} + a_{22}$$

W stosowanej notacji różniczkowanie pola  $a$  według współrzędnej geometrycznej  $x_m$  oznacza się przecinkiem

$$a_{,m} = \frac{\partial a}{\partial x_m}$$

## Symbole łacińskie

- $a$  – współczynnik wyrównywania temperatury
- $\Lambda$  – macierz główna układu równań liniowych MEB. (1.29)
- $A_j$  – współczynnik w rozwiązaniu podstawowym. (2.25), (2.26)
- $b^{(0)}$  – uogólniony człon źródłowy w równaniu różniczkowym Poissona
- $b^{(j)}$  – ciąg laplasjanów funkcji źródła definiowany przez równanie (2.13)
- $b_n^{(j)}$  – średnia wartość funkcji  $b^{(j)}$  w rozważanym obszarze
- $\mathbf{b}_n^j$  – macierz kolumnowa zawierająca wartości funkcji  $b^{(j)}$  w punktach węzłowych należących do  $n$ -tego elementu brzegowego. (2.19)
- $b_m$  – składowa siły masowej w kierunku  $m$
- $b_m^*$  – jednostkowe obciążenie punktowe działające w kierunku  $m$



- $b_{max}^{(j)}$  – maksymalna wartość funkcji  $b^{(j)}$  w rozważanym obszarze  
 $B_g$  – parametr geometryczny reaktora, (6.4)  
 $B_j$  – współczynnik w rozwiązaniu podstawowym, (2.25), (2.27)  
 $B_j$  – macierz kolumnowa zawierająca wartości funkcji  $b^{(j)}$  w punktach węzłowych  
 $B_m$  – parametr materiałowy reaktora, (6.2)  
 $c$  – pojemność cieplna właściwa (ciepło właściwe)  
 $c_i$  – współczynnik zależny od kąta wewnętrznego brzegu  $\Gamma$  w punkcie  $i$ . Dla brzegu gładkiego  $c_i = 0.5$   
 $D$  – współczynnik dyfuzji w równaniu (6.1)  
 $D_j$  – całka po obszarze; ( $j = 0, 1, 2, \dots$ )  
 $e_m$  – składowa wektora jednostkowego w kierunku  $m$   
 $E$  – moduł sprężystości Younga  
 $f$  – macierz kolumnowa wyrazów wolnych w liniowym układzie równań MEB, (1.29)  
 $f_j$  – funkcja interpolacyjna w Podwójnej Zasadzie Wzajemności, (1.37)  
 $\bar{g}$  – przyspieszenie grawitacyjne  
 $\mathbf{g}_j^{in}$  – macierz wierszowa zawierająca te współczynniki macierzy wpływu  $\mathbf{G}_j$ , które odpowiadają całkowaniu z punktu obserwacji  $i$  wzdłuż elementu brzegowego  $\Gamma_n$   
 $\mathbf{G}_j$  – macierz wpływu MEB dla strumienia ciepła  
 $h$  – współczynnik wnikania ciepła  
 $\mathbf{h}_j^{in}$  – macierz wierszowa zawierająca te współczynniki macierzy wpływu  $\mathbf{H}_j$ , które odpowiadają całkowaniu z punktu obserwacji  $i$  wzdłuż elementu brzegowego  $\Gamma_n$   
 $\mathbf{H}_j$  – macierz wpływu MEB dla temperatury  
 $J$  – składowa normalna gęstości prądu neutronów, (6.14)  
 $\mathbf{J}$  – macierz kolumnowa gęstości prądu neutronów, (6.15)  
 $k$  – współczynnik przewodzenia ciepła  
 $k_e$  – efektywny współczynnik mnożenia, (6.1)  
 $K_j$  – funkcja McDonalda (zmodyfikowana funkcja Bessela) rzędu  $j$   
 $n$  – normalna zewnętrzna do brzegu  $\Gamma$   
 $M$  – liczba wyrazów obciętego szeregu (2.31)  
 $N$  – liczba elementów brzegowych  
 $p_m$  – składowa (w kierunku  $m$ ) siły powierzchniowej  
 $\bar{p}_{im}^*$  – rozwiązanie podstawowe teorii sprężystości, (4.11)  
 $\bar{p}_{imk}^*$  – rozwiązanie stowarzyszone z rozwiązaniem podstawowym teorii sprężystości, (4.16)  
 $\mathbf{P}$  – macierz sił powierzchniowych, (4.21)  
 $r$  – odległość dwóch punktów (punktu obserwacji  $i$  i punktu całkowania)  
 $\mathbf{R}$  – macierz reprezentująca wartości całki obszarowej w sformułowaniach (2.18) i (4.21)



- $R_M$  - reszta szeregu, (2.35)  
 $q$  - składowa normalna gęstości strumienia ciepła, (1.4)  
 $q^*$  - analog strumienia ciepła dla rozwiązania podstawowego, (1.5)  
 $q^{*(j)}$  - pomocnicza wielkość definiowana równaniami (2.12) i (2.28)  
 $q_n$  - macierz kolumnowa zawierająca wartości strumienia ciepła w punktach węzłowych należących do  $n$ -tego elementu brzegowego, (1.22)  
 $q_v$  - wydajność wewnętrznych źródeł ciepła, (1.6)  
 $Q$  - macierz kolumnowa zawierająca wartości strumienia ciepła we wszystkich punktach węzłowych, (1.28)  
 $t$  - czas  
 $T$  - temperatura  
 $T$  - macierz kolumnowa zawierająca wartości temperatury we wszystkich punktach węzłowych, (1.28)  
 $\bar{T}$  - rozwiązanie szczególne równania Poissona, (1.34)  
 $T_0$  - warunek początkowy dla zagadnień przewodnictwa cieplnego, (3.2)  
 $T^*$  - rozwiązanie podstawowe spełniające równanie (1.3)  
 $T^{*(j)}$  - rozwiązanie podstawowe  $j$ -tego rzędu spełniające równania (2.11) i (2.24)  
 $T_n$  - macierz kolumnowa zawierająca wartości temperatury w punktach węzłowych należących do  $n$ -tego elementu brzegowego, (1.21)  
 $u_m$  - odkształcenie w kierunku  $m$   
 $u_m^*$  - rozwiązanie podstawowe teorii sprężystości, (4.10)  
 $u_{im}^{*(1)}$  - rozwiązanie podstawowe pierwszego rzędu teorii sprężystości, (4.28)  
 $U$  - macierz przemieszczeń, (4.21)  
 $w^{(j)}$  - ciąg funkcji definiowanych równaniem (2.14)  
 $w_n^j$  - macierz kolumnowa zawierająca wartości funkcji  $w^{(j)}$  w punktach węzłowych należących do  $n$ -tego elementu brzegowego, (2.20)  
 $W_j$  - macierz kolumnowa zawierająca wartości funkcji  $w^{(j)}$  w punktach węzłowych  
 $x, y$  - współrzędne globalne  
 $X$  - macierz kolumnowa niewiadomych w układzie równań liniowych MEB, (1.29)  
 $Y_b$  - punkt bieguący, rys.1.1  
 $Y_z$  - punkt działania źródła, rys.1.1

## Symbole greckie

$\alpha$	– współczynnik rozszerzalności termicznej liniowej, (4.6)
$\alpha_j$	– współczynnik liczbowy w aproksymacji stosowanej w Podwójnej Zasadzie Wzajemności, (1.37)
$\gamma$	– współczynnik w równaniu Helmholtza (5.1)
$\Gamma$	– brzeg obszaru $\Omega$
$\delta(Y_b, Y_z)$	– funkcja Diraca działająca w punkcie $Y_z$
$\delta_{im}$	– funkcja Kroneckera
$\Delta t$	– krok czasu
$\varepsilon_{im}$	– składowe tensora odkształcenia, (4.2)
$\Theta$	– współczynnik definiujący typ schematu różnicowego
$\mu$	– moduł odkształcenia postaciowego
$\nu$	– współczynnik Poissona w równaniach sprężystości lub średnia liczba neutronów rozszczepieniowych na jeden akt rozszczepienia
$\xi, \eta$	– współrzędne lokalne
$\rho$	– gęstość
$\sigma_{im}$	– składowe tensora naprężeń
$\sigma_{im}^T$	– składowe tensora naprężeń termicznych
$\sigma_{im}^*$	– składowe tensora stowarzyszonego z rozwiązaniem podstawowym teorii sprężystości, (4.20)
$\sigma_{im}^{*(j)}$	– tensor $\sigma_{im}^*$ $j$ -tego rzędu, (4.34)
$\Sigma_a$	– makroskopowy przekrój czynny na absorpcję neutronów, (6.1)
$\Sigma_f$	– makroskopowy przekrój czynny na rozpraszanie neutronów, (6.1)
$\phi$	– strumień neutronów, (6.1)
$\Phi^T$	– macierz wierszowa zawierająca lokalne funkcje kształtu MEB, (1.21) i (1.22) lub macierz strumienia neutronów, (6.15)
$\omega_m$	– składowa (w kierunku $m$ ) prędkości kątowej
$\Omega$	– obszar w przestrzeni $R^2$ lub $R^3$ ograniczony brzegiem $\Gamma$

## Indeksy dolne

$n$	– oznacza numer elementu brzegowego
$i$	– oznacza punkt obserwacji
$\cdot_{,m}$	– oznacza różniczkowanie według współrzędnej geometrycznej $x_m$
$q$	– odnosi się do warunku brzegowego Neumanna
$T$	– odnosi się do warunku brzegowego Dirichleta
$w$	– odnosi się do punktów wewnątrz obszaru

## Indeksy górne

- \* - oznacza rozwiązanie podstawowe
- ' - pochodna względem czasu
- '' - druga pochodna względem czasu
- (j) - oznacza rząd rozwiązania podstawowego
- (m) - oznacza numer kroku czasu
- $T^*$  - oznacza macierz transponowaną
- \* - oznacza rozwiązanie szczególne

## Inne symbole

- $\nabla$  - gradient
- $\nabla^2$  - operator Laplace'a (laplasjan)
- $\frac{\partial f}{\partial n}$  - różniczkowanie wzdłuż zewnętrznej normalnej do brzegu





# Rozdział 1

## Wstęp

Rosnące wymagania odnośnie do jakości wytworów, ich trwałości, niezawodności działania itp. stawiają przed konstruktorami i producentami coraz poważniejsze zadania. Począwszy od etapu projektowania, poprzez prawie wszystkie stadia produkcji przeprowadza się dzisiaj powszechnie analizę większości cech konstrukcyjnych i eksploatacyjnych wytworu. Podejściu takiemu sprzyja burzliwy rozwój techniki komputerowej i idący z nim w parze imponujący postęp w dziedzinie nowoczesnych technik obliczeniowych. Jesteśmy świadkami powstawania nowych, rozległych dziedzin nauki polegających na zastosowaniu komputerowych metod obliczeniowych do projektowania, konstruowania i sterowania. Terminy takie jak *Computer Aided Design (Komputerowe Wspomaganie Projektowania)* czy też *Computer Aided Engineering (Komputerowe Wspomaganie Obliczeń Inżynierskich)* na trwałe weszły do języka naukowego.

Coraz istotniejszy staje się problem optymalizacji konstrukcji i procesów. Rosnące wciąż ceny podstawowych nośników energii, a co za tym idzie - również jej bardziej przetworzonych form, wymagają rozwiązań tanich, a jednocześnie spełniających określone warunki. Ze względów finansowych dąży się do ograniczenia liczby budowanych prototypów i instalacji doświadczalnych. Zdobywanie informacji o obiekcie czy nowej konstrukcji coraz częściej zastępuje się modelowaniem matematycznym.

Obliczenia inżynierskie z dziedziny wytrzymałości materiałów, przepływu ciepła lub hydromechaniki prowadzi się dzisiaj prawie wyłącznie *metodami numerycznymi*. Metody *analityczne* wymagają bowiem zwykle, trudnych w obecnej dobie do zaakceptowania, uproszczeń geometrii analizowanego obiektu i innych założeń upraszczających. Ponadto, rozwiązania uzyskiwane metodami analitycznymi zawierają zwykle szeregi lub całki, których obliczenie również wymaga użycia komputera i metod analizy numerycznej.

Spośród metod numerycznych, które znalazły powszechne zastosowanie w obliczeniach inżynierskich, należy wymienić (w kolejności powstawania):



- metodę różnic skończonych (MRS)
- metodę elementów skończonych (MES)
- metodę elementów brzegowych (MEB)

Każda z tych metod może być uważana za szczególną wersję ogólniejszej metody ważonej residualnej (MWR) [18]. Różnice pomiędzy metodami wynikają z przyjęcia różnych funkcji wagowych oraz wykonania całkowania przez części różną liczbę razy.

Popularność i skuteczność metod numerycznych wynika przede wszystkim z ich następujących cech:

1. Metody numeryczne pozwalają modelować zagadnienia brzegowe w obszarach o praktycznie dowolnych kształtach. Trzeba oczywiście pamiętać o tym, że poszczególne metody stosują różne reprezentacje numeryczne kształtu. Tym samym, różny jest w poszczególnych metodach stopień trudności przy tworzeniu modelu geometrycznego rozważanego obiektu.
2. Metody numeryczne pozwalają uwzględniać praktycznie dowolne nieliniowości zagadnień brzegowych. Mogą to być zarówno nieliniowości typu zależności właściwości materiałowych od poszukiwanego rozwiązania, jak i nieliniowości warunków brzegowych, źródeł, czy nawet nieliniowości geometrycznych. Oczywiście stopień komplikacji matematycznych wynikających z uwzględniania nieliniowości jest różny w poszczególnych metodach.
3. Programy komputerowe, stanowiące implementacje algorytmów poszczególnych metod, są programami uniwersalnymi. Oznacza to, że za pomocą jednego programu można analizować różne obiekty z różnymi warunkami brzegowymi i początkowymi. Przy uwzględnieniu ponadto podobieństwa zjawisk wyrażającego się podobieństwem zagadnień brzegowo-początkowych ten sam kod komputerowy może służyć do analizy różnych zjawisk fizycznych.
4. Współczesne pakiety MRS, MES i MEB współpracują zwykle z graficznymi *pre-* oraz *postprocessorami*. Tym samym liczba danych wstępnie przygotowywanych przez użytkownika programu jest niewielka. Trzeba również dodać, że *pre-* i *postprocessorsy* nie tylko automatyzują proces przygotowania danych, ale również umożliwiają graficzną weryfikację zbioru danych oraz wizualizację rezultatów obliczeń.

Z punktu widzenia użytkownika programu istotne jest to, że metody różnic skończonych oraz elementów skończonych są tzw. *metodami obszarowymi*. Oznacza to, że ich stosowanie wymaga dyskretyzacji całego obszaru.

Metoda elementów brzegowych sprowadza rozwiązanie problemu do numerycznego rozwiązania równania całkowego. W niektórych sytuacjach praktycznych występujące w tym równaniu całki są całkami jedynie po brzegu ciała. Tym samym, rozwiązując równanie całkowe, należy poddać dyskretyzacji tylko brzeg obszaru. Rozwiązanie w wybranych punktach wewnętrznych uzyskuje się w następnym etapie (tzw. *postprocessingu*) na podstawie znajomości wartości brzegowych. W praktyce oznacza to istotne uproszczenia na etapie przygotowania danych dla programów komputerowych. Dla zagadnień dwuwymiarowych użytkownik zajmuje się jedynie obiektem jednowymiarowym, jakim jest linia brzegowa. W przypadku zagadnień trójwymiarowych dyskretyzuje się powierzchnię brzegową - obiekt dwuwymiarowy. W tym sensie mówi się często o obniżeniu wymiarowości zagadnienia brzegowego poprzez zastosowanie metody elementów brzegowych.

Należy jednak zaznaczyć, że stosując metodę elementów brzegowych (MEB) do modelowania praktycznych problemów inżynierskich, nie zawsze uzyskuje się sformułowania zawierające tylko całki brzegowe. Częstokroć bezpośrednie zastosowanie MEB prowadzi do równań całkowych zawierających również całki po wnętrzu obszaru. W konsekwencji, w istotny sposób komplikuje się etap rozwiązania równania całkowego. Dyskretyzacji należy bowiem poddać zarówno brzeg, jak i wnętrze obszaru. Nic więc dziwnego, że od wielu lat prowadzone są prace nad uzyskaniem takich sformułowań MEB, które pozwalają uniknąć podziału obszaru na elementy mimo wystąpienia całek po jego wnętrzu. Wymaga to oczywiście zastąpienia danych o wnętrzu obszaru dodatkowymi informacjami o zachowaniu się rozwiązania na jego brzegu. Zagadnienia omawiane w niniejszej pracy dotyczą tzw. **wielokrotnej zasady wzajemności WZW** (ang. *Multiple Reciprocity Method*). Metodą pozwala właśnie bez dyskretyzacji wnętrza obszaru rozwiązywać za pomocą MEB te zagadnienia inżynierskie, które normalnie takiej dyskretyzacji wymagają.

Metoda WZW jest oryginalną metodą opracowaną przez autora rozprawy pod koniec lat 80. Polega ona na przekształceniu występujących w równaniach MEB całek po obszarze w szereg całek po brzegu tego obszaru. W procesie transformacji wykonuje się całkowanie przez części nieskończoną liczbę razy otrzymując w granicy całkowicie brzegowe sformułowanie metody elementów brzegowych.

W dalszej części tego rozdziału zaprezentowano ogólny opis metody elementów brzegowych stanowiący jednocześnie podstawę przeglądu literatury dla problemów omawianych w pracy. Idea metody została zaprezentowana na przykładzie zagadnienia przewodzenia ciepła, przy czym podane zależności mogą być również wykorzystane w sposób bezpośredni do modelowania innych pól potencjalnych.

Ogólny opis WZW jest treścią rozdziału drugiego, podczas gdy następnie rozdziały pracy przedstawiają zastosowanie tej techniki do analizy wybranych zagadnień brzegowych. Rozdziały 2 oraz 3, w których opisano zasto-

sowanie WZW do modelowania pól temperatury, są indywidualnymi osiągnięciami autora niniejszej rozprawy. Rezultaty zaprezentowane w rozdziale 4 są w większości plonem wieloletniej współpracy z Wessex Institute of Technology w Wielkiej Brytanii. WZW znalazła tam grono kontynuatorów, którzy wykorzystując doświadczenie autora, zastosowali tę technikę do rozwiązywania zagadnień sprężystości. Analiza stacjonarnych i niestacjonarnych problemów termosprężystości zaowocowała wspólnymi publikacjami w międzynarodowych czasopismach.

Autor pracy jako pierwszy zastosował WZW do rozwiązywania równania Helmholtza. Idea ta pozwoliła innym badaczom na opracowanie efektywnych metod obliczania wartości własnych zagadnień brzegowych. Problemy te przedstawiono w rozdziale 5 pracy. Materiał stanowiący treść rozdziału 6 jest bezpośrednim efektem wymiany doświadczeń naukowych z Japan Atomic Research Institute. Rozdział 7 opracowany został na podstawie literatury, a jego celem było jedynie przedstawienie potencjalnych możliwości WZW.

Główny nacisk położono w pracy na wyprowadzenie brzegowych sformułowań MEB oraz na aspekty numeryczne wielokrotnej zasady wzajemności ograniczając do niezbędnego minimum zagadnienia takie jak badanie zbieżności szeregu, dowody jednoznaczności rozwiązań itp. Praktyczne zastosowania WZW zaprezentowano rozwiązując szereg zagadnień brzegowych mechaniki.

## 1.1. Podstawy metody elementów brzegowych

Materiał zawarty w tym podrozdziale nie jest systematycznym wykładem metody elementów brzegowych i zawiera jedynie te informacje, które są niezbędne do zrozumienia istoty metody i jej zastosowania do analizy zagadnień potencjalnych. W szczególności przedmiotem rozważań są ustalone procesy przewodzenia ciepła. Pełny wykład MEB znaleźć można w licznych monografiach zagranicznych, np. [3], [9], [12]. W Polsce, jak do tej pory, nie ukazała się żadna monografia poświęcona wyłącznie MEB, jednakże obszernie informacje na temat zastosowania metody do modelowania procesów cieplnych znaleźć można w artykule [5] oraz w monografiach [19] i [75]. MEB poświęcone też były prace doktorskie i habilitacyjne, np. [14], [37], [39].

### 1.1.1. Równanie całkowite MEB

Jak wspomniano wcześniej, MEB jest szczególną wersją metody ważonej residualnej (MWR), [18]. Równania MEB można zatem wyprowadzić z rów-



nań MWR, np. [9] i [12], przyjmując jako funkcje wagowe tzw. *rozwiązanie podstawowe* oraz jego pochodną wzdłuż normalnej zewnętrznej do brzegu ciała. W zagadnieniach cieplnych rozwiązanie podstawowe jest polem temperatury w nieskończonym obszarze (całej przestrzeni) wywołanym działaniem punktowego źródła ciepła.

Alternatywnie równania MEB można uzyskać poprzez wykorzystanie tzw. *zasady wzajemności* [32], [38], czyli symetrycznej tożsamości Greena. Zasada ta, powszechnie stosowana np. przy analizie zagadnień sprężystości, nie zdobyła większej popularności w przepływie ciepła, prawdopodobnie z braku prostej interpretacji fizycznej w tej gałęzi nauki. Z matematycznego punktu widzenia zasada wzajemności jest formułą dwukrotnego całkowania przez części i stanowi związek pomiędzy całką po obszarze i całką po jego brzegu. Zależnie od tego czy rozważany obszar jest dwu- czy trójwymiarowy, całka po obszarze jest całką powierzchniową bądź całką objętościową. Dlatego też, celem zachowania ogólności zapisu, element różniczkowy obszaru oznaczymy symbolem  $d\Omega$ , zaś element różniczkowy brzegu obszaru symbolem  $d\Gamma$ .

Zasada wzajemności jest spełniona przez dwa dowolne pola, w szczególności przez dwa pola temperatury:  $T$  oraz  $T^*$

$$\int_{\Omega} (T \nabla^2 T^* - T^* \nabla^2 T) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial T^*}{\partial n} - T^* \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (1.1)$$

gdzie:  $\Omega$  - rozważany obszar,  
 $\Gamma$  - brzeg obszaru  $\Omega$ ,  
 $\frac{\partial}{\partial n}$  - różniczkowanie wzdłuż normalnej zewnętrznej do brzegu  $\Gamma$ .

Ponieważ pola  $T$  i  $T^*$  mogą być wybrane zupełnie dowolnie, najdogodniej jest utożsamić pole  $T$  z poszukiwanym polem temperatury, za pole zaś  $T^*$  przyjąć rozwiązanie podstawowe. Rozwiązanie podstawowe spełnia następujące równanie różniczkowe [27], [63]

$$\nabla^2 T^* = \delta(Y_b, Y_z) \quad (1.2)$$

gdzie:  $Y_z$  - punkt działania źródła, rys.1.1,  
 $Y_b$  - punkt bieżący,  
 $\delta$  - dystrybucja Diraca (delta-funkcja).

Wielkość  $T^*$  zależy od dwóch parametrów: współrzędnych punktu działania źródła  $Y_z$  i współrzędnych punktu bieżącego  $Y_b$ , w którym obserwujemy efekty działania źródła. Przemieszczając początek układu współrzędnych do punktu  $Y_z$  łatwo stwierdzić, że rozwiązanie podstawowe  $T^*$  jest ostatecznie funkcją odległości  $r$  punktów  $Y_z$  i  $Y_b$

$$T^* = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln r & \text{problemy dwuwymiarowe} \\ \frac{1}{4\pi r} & \text{problemy trójwymiarowe} \end{cases} \quad (1.3)$$

Różniczkując pola  $T$  i  $T^*$  wzdłuż normalnej zewnętrznej do brzegu ciała, otrzymujemy gęstości strumienia ciepła  $q$  i  $q^*$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.4)$$

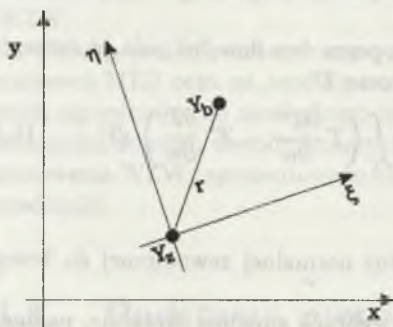
$$q^* = -k \frac{\partial T^*}{\partial n} \quad (1.5)$$

gdzie:  $k$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Założmy chwilowo, że pole  $T$  jest ustalonym polem temperatury i tym samym, że opisuje go równanie Poissona o postaci

$$k \nabla^2 T + q_v = 0 \quad \text{w } \Omega \quad (1.6)$$

gdzie:  $q_v$  – wydajność wewnętrznego źródła ciepła.



Rys. 1.1. Globalny  $(x, y)$  i lokalny  $(\xi, \eta)$  układy współrzędnych dla funkcji  $T^*$

Fig. 1.1. Global  $(x, y)$  and local  $(\xi, \eta)$  co-ordinate systems for function  $T^*$

Występujące w równaniu (1.6) wewnętrzne źródła ciepła mogą być albo rzeczywistymi źródłami ciepła działającymi w rozpatrywanym obszarze  $\Omega$ , albo źródłami fikcyjnymi. Źródła fikcyjne tworzone są przez zgrupowanie w funkcji  $q_v$  wszystkich członów opisujących efekty niestacjonarne, nieliniowe itp. Z punktu widzenia MEB źródła fikcyjne traktowane są dokładnie tak samo jak źródła rzeczywiste.

Podstawiając w miejsce laplasjanów w równaniu (1.1) odpowiednie wyrażenia z równań (1.2) i (1.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ T^*(Y_z, Y_b) \frac{1}{k} q_v(Y_b) + T(Y_b) \delta(Y_z, Y_b) \right] d\Omega(Y_b) = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ T(Y_b) \frac{\partial T^*(Y_z, Y_b)}{\partial n(Y_b)} - T^*(Y_z, Y_b) \frac{\partial T(Y_b)}{\partial n(Y_b)} \right] d\Gamma(Y_b) \quad (1.7) \end{aligned}$$

Różniczkowanie i całkowanie w równaniu (1.7) przebiega według współrzędnych punktu bieżącego  $Y_b$ , co zaznaczono symbolicznie, wprowadzając ten punkt jako argument operacji różniczkowania i całkowania.



Wykorzystując następnie własność filtracji funkcji delta Diraca i dokonując prostych operacji podstawienia, otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} & k c(Y_z) T(Y_z) + \int_{\Gamma} q^*(Y_z, Y_b) T(Y_b) d\Gamma(Y_b) = \\ & = \int_{\Gamma} T^*(Y_z, Y_b) q(Y_b) d\Gamma(Y_b) - \int_{\Omega} T^*(Y_z, Y_b) q_v(Y_b) d\Omega(Y_b) \quad (1.8) \end{aligned}$$

gdzie:  $c(Y_z)$  – współczynnik zależny od położenia punktu działania źródła  $Y_z$ .

Jeśli punkt  $Y_z$  leży poza rozważanym obszarem  $\Omega$ , współczynnik  $c(Y_z) = 0$ . Dla punktów leżących wewnątrz obszaru  $\Omega$  współczynnik  $c(Y_z) = 1$ , w przypadku zaś kiedy punkt  $Y_z$  należy do brzegu  $\Gamma$ , współczynnik ten jest równy kątowni wewnętrzznemu brzegu w punkcie  $Y_z$  [9], [12], [27]. Dla brzegu gładkiego otrzymuje się więc  $c(Y_z) = 0.5$ .

W dalszej części pracy, celem uproszczenia zapisu, temperaturę w punkcie  $Y_z$  oznaczono przez  $T_i$ , współczynnik zaś  $c(Y_z)$  przez  $c_i$ . Jednocześnie pominięto argumenty zarówno funkcji podcałkowych, jak i samych operacji całkowania i różniczkowania. Równanie (1.8) można więc zapisać w postaci

$$k c_i T_i + \int_{\Gamma} q^* T d\Gamma = \int_{\Gamma} T^* q d\Gamma - \int_{\Omega} T^* q_v d\Omega \quad (1.9)$$

Równanie (1.9) jest równaniem całkowym ze względu na poszukiwane pole temperatury  $T$  oraz gęstość strumienia ciepła  $q$  i stanowi całkową reprezentację rozwiązania wyjściowego zagadnienia brzegowego (1.6).

### 1.1.2. Dyskretyzacja równania całkowego MEB

Analityczne rozwiązanie równania (1.9) można uzyskać jedynie w obszarach o bardzo prostych kształtach. W przypadku ogólnym poddaje się je dyskretyzacji i rozwiązuje numerycznie.

Przystępując do dyskretyzacji równania (1.9), zauważmy, że dla bezźródłowych pól temperatury równanie to upraszcza się do postaci zawierającej tylko całki po brzegu ciała

$$k c_i T_i + \int_{\Gamma} q^* T d\Gamma = \int_{\Gamma} T^* q d\Gamma \quad (1.10)$$

Pominięty w równaniu (1.10) wyraz poddano analizie w dalszej części pracy.

Na wstępie dokonano podziału brzegu  $\Gamma$  na  $N$  części. Rzeczywiste odcinki brzegu ciała zastąpiono tzw. *elementami brzegowymi*. Zbiór wszystkich elementów brzegowych  $\Gamma_n$  stanowi model geometryczny analizowanego ciała. Sytuację tę ilustruje dla zagadnień dwuwymiarowych rys.1.2.

W najprostszym przypadku elementy brzegowe są odcinkami linii prostych. Można jednak również używać elementów wyższego rzędu, jak krzywe stopnia drugiego, splajny itd. Elementy specjalne, jak odcinki okręgu, elipsy, odcinki powierzchni kulistej itp., pozwalają na bardzo dokładne odwzorowanie kształtu ciał zbudowanych z wymienionych elementarnych obiektów geometrycznych.

Z każdym z elementów brzegowych związany jest lokalny układ współrzędnych krzywoliniowych zaczepiony w środku elementu. Dla zagadnień płaskich jest to układ jednowymiarowy, w którym oś  $\xi$  przebiega wzdłuż elementu, oraz  $-1 \leq \xi \leq 1$ . Dla zagadnień przestrzennych wymagany jest układ dwuwymiarowy  $\xi, \eta$ .

Przebieg temperatury i gęstości strumienia ciepła w obrębie elementu aproksymuje się, wykorzystując *lokalne funkcje kształtu*. Zależnie od przyjętej aproksymacji rozróżnia się:

- elementy stałe, dla których zakłada się stałość temperatury i strumienia ciepła w elemencie, rys.1.3

$$T(\xi) = T_1 = T_2 \quad (1.11)$$

$$q(\xi) = q_1 = q_2 \quad (1.12)$$

Związek pomiędzy globalnym i lokalnym układem współrzędnych dla elementów stałych wyznaczają liniowe funkcje kształtu rozpięte na węzłach 1 i 2

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2 \quad (1.13)$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)y_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)y_2 \quad (1.14)$$

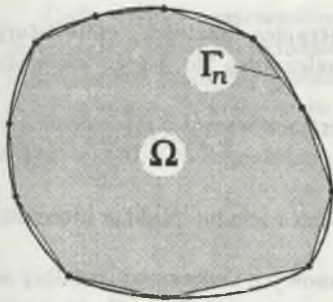
Warto w tym miejscu zauważyć, że elementy stałe należą do grupy elementów *subparametrycznych*, tzn. takich, dla których rząd aproksymacji funkcji jest niższy niż rząd aproksymacji brzegu.

- elementy liniowe, dla których temperatura i gęstość strumienia ciepła aproksymowane są liniowo pomiędzy wartościami w węzłach 1 oraz 2, rys.1.4

$$T(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)T_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)T_2 \quad (1.15)$$

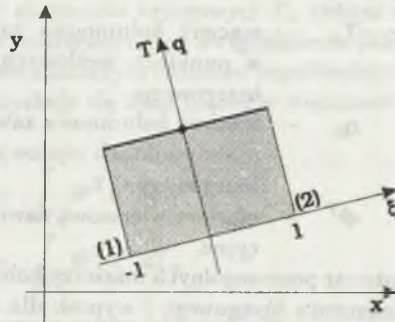
$$q(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)q_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)q_2 \quad (1.16)$$

Transformacja z układu lokalnego do globalnego przebiega zgodnie z równaniami (1.13) i (1.14). Ponieważ tym razem rząd aproksymacji funkcji jest taki sam jak rząd aproksymacji brzegu, elementy liniowe są elementami *izoparametrycznymi*.



Rys. 1.2. Model geometryczny obszaru - elementy brzegowe

Fig. 1.2. Geometrical model of the region - boundary elements



Rys. 1.3. Element stały w globalnym i lokalnym układzie współrzędnych

Fig. 1.3. Constant element in global and local co-ordinate system

- elementy kwadratowe, dla których przebieg temperatury i strumienia ciepła w elemencie jest kwadratową funkcją lokalnej współrzędnej  $\xi$ . Dla elementów kwadratowych wprowadza się więc trzeci węzeł, zwykle umieszczony w środku elementu, rys.1.5

$$x(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)x_1 + (1 - \xi^2)x_3 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)x_2 \quad (1.17)$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)y_1 + (1 - \xi^2)y_3 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)y_2 \quad (1.18)$$

$$T(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)T_1 + (1 - \xi^2)T_3 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)T_2 \quad (1.19)$$

$$q(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)q_1 + (1 - \xi^2)q_3 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)q_2 \quad (1.20)$$

Więcej szczegółów na temat różnych typów elementów brzegowych, w tym również na temat elementów *superparametrycznych* i elementów *nieciągłych*, znaleźć można np. w monografiach [9] i [12].

W zapisie macierzowym aproksymacje temperatury i strumienia ciepła przyjmują dla poszczególnych typów elementów brzegowych następującą ogólną postać

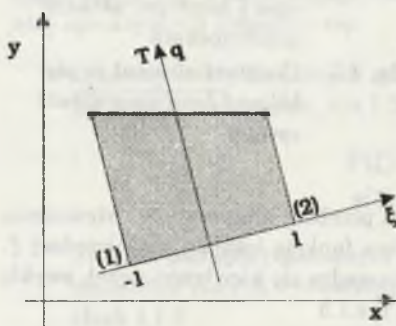
$$T(\xi) = \Phi^T \mathbf{T}_n \quad (1.21)$$

$$q(\xi) = \Phi^T \mathbf{q}_n \quad (1.22)$$



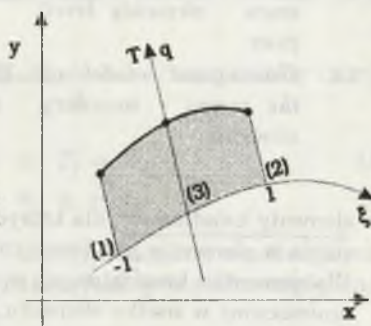
- gdzie:  $\mathbf{T}_n$  – macierz kolumnowa zawierająca wartości temperatury w punktach węzłowych należących do n-tego elementu brzegowego,  
 $\mathbf{q}_n$  – macierz kolumnowa zawierająca wartości strumienia ciepła w punktach węzłowych należących do n-tego elementu brzegowego,  
 $\Phi^T$  – macierz wierszowa zawierająca lokalne funkcje interpolacyjne.

Rozmiar poszczególnych macierzy kolumnowych i wierszowych zależy od typu elementu brzegowego i wynosi: dla elementu stałego 1, dla liniowego 2, dla kwadratowego 3.



Rys. 1.4. Element liniowy w globalnym i lokalnym układzie współrzędnych

Fig. 1.4. Linear element in global and local co-ordinate system



Rys. 1.5. Element kwadratowy w globalnym i lokalnym układzie współrzędnych

Fig. 1.5. Quadratic element in global and local co-ordinate system

### 1.1.3. Macierze wpływu

Dzieląc brzeg  $\Gamma$  na elementy brzegowe, zastąpiliśmy całki w równaniu (1.10) sumami całek po poszczególnych elementach  $\Gamma_n$

$$k c_i T_i + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} q^* T d\Gamma_n = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} T^* q d\Gamma_n \quad (1.23)$$

Z kolei aproksymacje (1.21) i (1.22) pozwalają na przekształcenie równania (1.23) do postaci

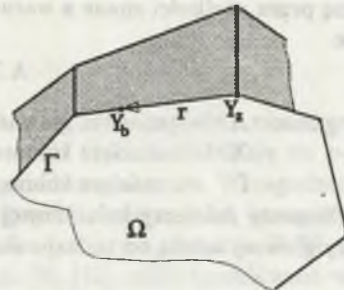
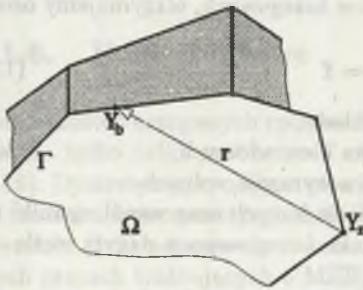
$$k c_i T_i + \sum_{n=1}^N \mathbf{T}_n \int_{\Gamma} \Phi^T q^* d\Gamma_n = \sum_{n=1}^N \mathbf{q}_n \int_{\Gamma} \Phi^T T^* d\Gamma_n \quad (1.24)$$

Całki wzdłuż poszczególnych elementów brzegowych  $\Gamma_n$  oblicza się numerycznie w lokalnym układzie współrzędnych, po uwzględnieniu Jakobianu transformacji pomiędzy globalnym i lokalnym układem współrzędnych. Dla każdego elementu brzegowego uzyskuje się dwie macierze wierszowe o rozmiarze jak macierz  $\Phi^T$

$$h^{in} = \int_{\Gamma_n} \Phi^T q^* d\Gamma_n \quad (1.25)$$

$$g^{in} = \int_{\Gamma_n} \Phi^T T^* d\Gamma_n \quad (1.26)$$

Ponieważ rozwiązanie podstawowe zależy od odległości  $r$  punktu obserwacji  $Y_z$  i punktu bieżącego  $Y_b$ , niektóre z całek są całkami osobliwymi. Dzieje się tak wtedy, gdy punkt obserwacji należy do elementu brzegowego, po którym całkujemy, por. rys.1.6 i rys.1.7. Podczas gdy całki regularne mogą być z wysoką dokładnością obliczane zwykłymi kwadratarami Gaussa [74], całki osobliwe wymagają osobnego traktowania. Stosowane są między innymi specjalne transformacje (np. transformacja Tellesa [79]), które grupują węzły kwadratury w okolicach osobliwości. Alternatywnie całki te można obliczać analitycznie lub pośrednio na podstawie sumy całek regularnych. Szczegóły znaleźć można w monografiach MEB.



Rys. 1.6. Całkowanie po elemencie regularnym

Rys. 1.7. Całkowanie po elemencie osobliwym

Fig. 1.6. Integration along regular element

Fig. 1.7. Integration along singular element

Podstawiając równania (1.25) i (1.26) do równania (1.24), otrzymujemy dla każdego punktu obserwacji

$$k c_i T_i + \sum_{n=1}^N h^{in} T_n = \sum_{n=1}^N g^{in} q_n \quad (1.27)$$

Punkt obserwacji  $i$ , zwany również punktem kolokacji, można w zasadzie wybrać dowolnie. Jednakże generując równania MEB, umieszcza się



go kolejno w węzłach elementów brzegowych. Otrzymuje się w ten sposób tyle równań typu (1.27), ile jest punktów węzłowych. Zbierając odpowiednio temperatury węzłowe w macierz kolumnową  $T$ , węzłowe strumienie ciepła w macierz kolumnową  $Q$ , macierze wierszowe zaś  $h^{in}$  oraz  $g^{in}$  w tzw. *macierze wpływu*, odpowiednio  $H$  i  $G$ , otrzymuje się ostatecznie następujący układ równań będący dyskretną formą równania całkowego

$$HT = GQ \quad (1.28)$$

Układ ten jest bezpośrednim związkiem macierzowym pomiędzy temperaturami i gęstościami strumienia ciepła na brzegu ciała.

#### 1.1.4. Uwzględnianie warunków brzegowych

Warunki brzegowe narzucają w każdym punkcie węzłowym wartość temperatury lub strumienia ciepła. Dodatkowo dla warunku brzegowego trzeciego rodzaju występuje liniowy związek pomiędzy tymi wielkościami. Generalnie stwierdzić zatem należy, że tylko  $N$  wielkości w układzie równań (1.28) jest znanych z warunków brzegowych, pozostałych zaś  $N$  należy wyznaczyć przez rozwiązanie systemu (1.28).

Przegrupowując odpowiednio kolumny w układzie (1.28) i mnożąc prawą stronę przez wielkości znane z warunków brzegowych, otrzymujemy ostatecznie

$$A X = f \quad (1.29)$$

gdzie:  $A$  - macierz główna układu,  
 $X$  - macierz kolumnowa niewiadomych,  
 $f$  - macierz kolumnowa wyrazów wolnych.

Elementy macierzy kolumnowej niewiadomych oraz współczynniki macierzy głównej zależą od rodzaju warunku brzegowego w danym węźle

$$A_{in} = \begin{cases} -G_{in} & \text{dla warunku brzegowego I rodzaju} \\ H_{in} & \text{dla warunku brzegowego II rodzaju} \\ H_{in} - h G_{in} & \text{dla warunku brzegowego III rodzaju} \end{cases} \quad (1.30)$$

$$X_n = \begin{cases} q_n & \text{dla warunku brzegowego I rodzaju} \\ T_n & \text{dla warunków brzegowych II i III rodzaju} \end{cases} \quad (1.31)$$

gdzie:  $h$  - współczynnik wnikania ciepła.

Macierz główna układu równań (1.29) jest macierzą pełną i niesymetryczną. Rozwiązanie uzyskuje się klasycznymi metodami numerycznymi, jak np. metodą eliminacji Gaussa. Przy większych rozmiarach macierzy  $A$  stosuje się podział macierzy na bloki.

### 1.1.5. Rozwiązanie w punktach wewnętrznych ciała

Po rozwiązaniu równania (1.29) i wyznaczeniu rozkładu temperatury i strumienia ciepła wzdłuż brzegu ciała można wyznaczyć temperaturę w dowolnie wybranym punkcie wewnętrznym. Operacja ta nie wymaga żadnego dodatkowego podziału obszaru i polega na przemieszczeniu punktu  $i$  w równaniu (1.27) w nowe położenie. Należy więc powtórzyć całkowanie po brzegu ciała, tym razem z punktu wewnętrznego obszaru. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że wszystkie obliczane w tym etapie całki są całkami regularnymi i utworzenie *wewnętrznych macierzy wpływu*  $H_w$  i  $G_w$  nie przedstawia większych trudności. Pamiętając o tym, że dla wszystkich punktów wewnętrznych współczynniki  $c_i$  są równe 1, temperaturę  $T_w$  w tych punktach wyznacza się przez prostą operację mnożenia macierzy wpływu przez brzegowe wartości temperatury i strumienia ciepła

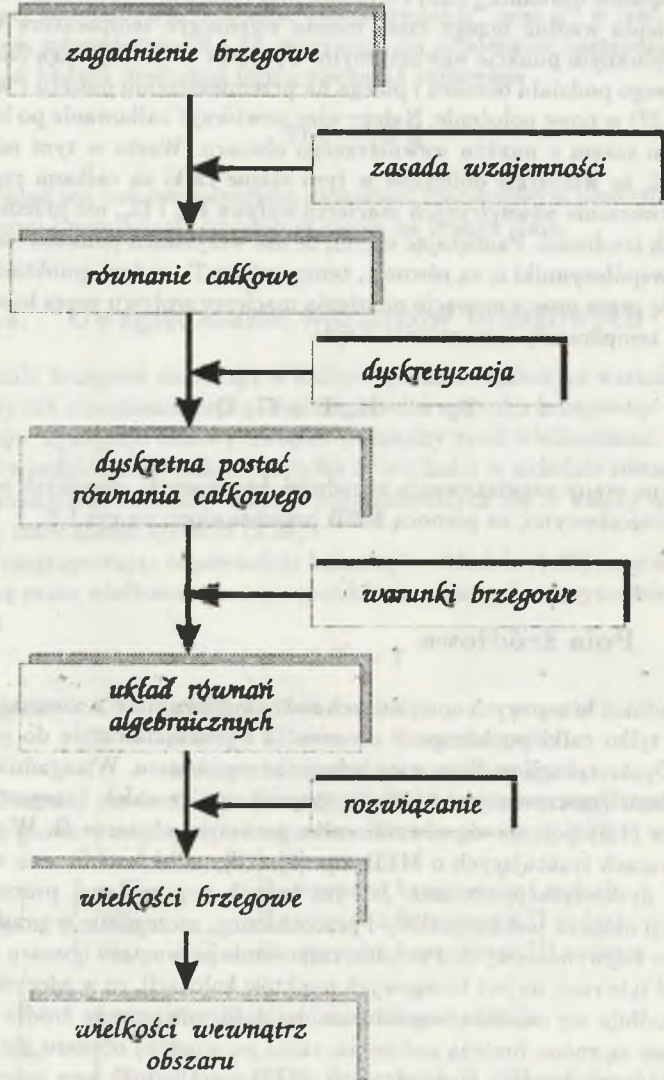
$$T_w = -H_w T + G_w Q \quad (1.32)$$

Kolejne etapy rozwiązywania zagadnień brzegowych, opisanych równaniami różniczkowymi, za pomocą MEB przedstawiono na rys.1.8.

### 1.1.6. Pola źródłowe

Dla zagadnień brzegowych opisywanych równaniem Laplace'a równanie (1.9) zawiera tylko całki po brzegu  $\Gamma$  obszaru  $\Omega$  i przekształca się do postaci (1.10). Dyskretyzacji podlega więc jedynie brzeg obszaru. W zagadnieniach ze źródłami (rzeczywistymi bądź fikcyjnymi) oprócz całek brzegowych w równaniu (1.9) pojawia się również całka po całym obszarze  $\Omega$ . W pierwszych pracach traktujących o MEB, np. [8], [13], całki te obliczano wprost poprzez dyskretyzację obszaru. Jak już jednak wspomniano, proces dyskretyzacji obszaru jest kłopotliwy i pracochłonny, szczególnie w przypadku obszarów trójwymiarowych. Ponadto, całkowanie po wnętrzu obszaru należy wykonać tyle razy, ile jest brzegowych punktów kolokacji, co w zdecydowany sposób odbija się na efektywności metody. Jeśli wewnętrzne źródła ciepła  $q_v$  opisane są znaną funkcją położenia, całka po wnętrzu obszaru nie wprowadza żadnych nowych niewiadomych. MEB traci jednak swą największą zaletę.

Gipson w swej monografii [20] poświęconej zastosowaniu MEB do rozwiązywania równania Poissona proponuje wykorzystanie metody Monte Carlo do obliczania całki po obszarze  $\Omega$ . Oprócz licznych przykładów numerycznych autor zamieszcza wydruk programu komputerowego realizującego zaproponowany algorytm.



Rys. 1.8. Etapy rozwiązywania zagadnień brzegowych za pomocą MEB

Fig. 1.8. Successive stages of solving boundary problems by BEM



Całka po całym obszarze w równaniu (1.9) może być w wielu sytuacjach praktycznych przekształcona w całki brzegowe. Tym samym udaje się uniknąć dyskretyzacji wnętrza obszaru. Zagadnienia związane z taką właśnie transformacją całki po obszarze w równoważne jej całki brzegowe są treścią niniejszej pracy.

## 1.2. Metody transformacji całek po obszarze w całki brzegowe

Metody transformacji omówione w niniejszym rozdziale dotyczą jedynie tych całek po obszarze, które występują w MEB, a precyzyjniej w równaniu (1.9). Całki te mają następującą postać

$$D_o = \int_{\Omega} T^* q_v d\Omega \quad (1.33)$$

Stosowane dotychczas w MEB metody transformacji całek (1.33) można podzielić na trzy główne grupy.

Pierwsza grupa metod związana jest z wykorzystaniem rozwiązań szczególnych równania Poissona, [2], [17]. Rozwiązanie szczególne, oznaczone przez  $\hat{T}$ , spełnia oczywiście równanie (1.6). Zatem

$$q_v = -k \nabla^2 \hat{T} \quad (1.34)$$

Podstawienie zależności (1.34) do (1.33) umożliwia wykonanie całkowania przez części

$$\begin{aligned} D_o &= -k \int_{\Omega} T^* \nabla^2 \hat{T} d\Omega = \\ &= -k \int_{\Omega} \hat{T} \nabla^2 T^* d\Omega + \int_{\Gamma} (T^* \hat{q} - q^* \hat{T}) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.35)$$

Po uwzględnieniu definicji rozwiązania podstawowego i skorzystaniu z własności filtracji delty Diraca powyższe równanie zapisuje się następująco

$$D_o = -k c_i \hat{T}_i + \int_{\Gamma} (T^* \hat{q} - q^* \hat{T}) d\Gamma \quad (1.36)$$

Dla przypadku gdy rozwiązanie szczególne nie jest znane (a tak jest na ogół) Nardini i Brebbia zaproponowali na początku lat 80. [40], [41] globalną interpolację członu źródłowego  $q_v$

$$q_v = \sum_j^J f_j \alpha_j \quad (1.37)$$



gdzie:  $f_j$  – funkcje interpolacyjne,  
 $\alpha_j$  – współczynniki aproksymacji,  
 $J$  – liczba wyrazów w wyrażeniu aproksymacyjnym.

Funkcje interpolacyjne  $f_j$  dobiera się tak, aby można było łatwo znaleźć rozwiązanie szczególne równania

$$\nabla^2 \hat{T}_j = f_j \quad (1.38)$$

Podstawiając (1.38) do (1.37), otrzymujemy

$$q_v = \sum_{j=1}^J (\nabla^2 \hat{T}_j) \alpha_j \quad (1.39)$$

co ostatecznie prowadzi do następującego wyrażenia na całkę (1.33)

$$\begin{aligned} D_o &= -k \sum_{j=1}^J \alpha_j \int_{\Omega} T^* \nabla^2 \hat{T}_j d\Omega = \\ &= \sum_{j=1}^J \alpha_j \left[ -k c_i \hat{T}_{i,j} + \int_{\Gamma} (T^* \hat{q}_j - q^* \hat{T}_j) d\Gamma \right] \quad (1.40) \end{aligned}$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że zapewnienie odpowiedniej dokładności metody wymaga, aby liczba wyrazów  $J$  w aproksymacji (1.37) była większa niż liczba węzłów brzegowych. Technika ta, znana obecnie jako podwójna zasada wzajemności PZW (ang. *Dual Reciprocity Method*), wykorzystuje więc oprócz węzłów brzegowych również tzw. bieguny wewnętrzne (ang. *internal poles*). Liczba tych punktów oraz ich lokalizacja powinny oczywiście uwzględnić kształt funkcji  $q_v$ . Innymi słowy, bieguny wewnętrzne powinny być głównie lokowane w obszarach o stromym przebiegu funkcji źródła. Dokładniejsze informacje o PZW znaleźć można w licznych publikacjach, np. [11], [64], [65], [67], [81], [82]. Wszystkie one podkreślają ogólność metody, jej efektywność numeryczną oraz wyjątkowo prostą implementację komputerową. Jednocześnie przeprowadzone obliczenia testowe potwierdzają jej wysoką dokładność. Na początku 1992 roku ukazała się monografia [66] poświęcona matematycznym podstawom i praktycznym zastosowaniom podwójnej zasady wzajemności.

Druga grupa metod, zaproponowana przez Tanga [76], opiera się na zastąpieniu aproksymacji (1.37) szeregiem Fouriera funkcji  $q_v$ . Rozwinięcia w szereg dokonuje się w obszarze nie mniejszym niż  $\Omega$ . Ponieważ wyznaczenie współczynników tego rozwinięcia wymaga w zasadzie całkowania po wnętrzu obszaru, autor proponuje wprowadzić do rozważań obszar pomocniczy  $\Omega'$  o prostym kształcie, który zawiera w sobie obszar  $\Omega$ . Prosty kształt obszaru pomocniczego, np. prostokąt dla zagadnień dwuwymiarowych, czy prostopadłościan dla zagadnień trójwymiarowych, pozwala na analityczne wyznaczenie współczynników Fouriera. Rozwinięcia dokonuje się zatem faktycznie

w "nieco za dużym" obszarze  $\Omega'$ . Następnie, wykorzystując ortogonalność funkcji bazowych i postępując podobnie jak w PZW autor transformuje całkę (1.33) w szereg całek brzegowych.

Metoda opracowana w oryginale dla zagadnień potencjalnych oraz zagadnień sprężystości była również stosowana przez Itagaki i Brebbię [25] do modelowania procesów dyfuzji neutronów. Jednakże ze względu na skomplikowaną implementację komputerową nie zyskała ona dotąd większej popularności.

Trzecia grupa metod związana jest z tzw. *tensorem Galerkina* [9], [12], [15], [16], [78]. Pozwala ona na transformację całki (1.33) w całki brzegowe dla wybranych typów funkcji  $q_v$ . Rozwinięciem tej koncepcji jest technika opracowana przez autora rozprawy pod koniec lat 80. [10], [50], [51], [56], [57], [60] i znana w literaturze anglosaskiej jako *Multiple Reciprocity Method* (*wielokrotna zasada wzajemności*). Pozwala ona modelować nie tylko procesy cieplne, ale również wiele innych zagadnień inżynierskich opisywanych równaniami różniczkowymi innych typów. Między innymi zastosowanie wielokrotnej zasady wzajemności (WZW) do rozwiązywania równania Helmholtza omówione jest w pracy [58], natomiast obliczanie wartości własnych tego równania w pozycjach [28], [29], [30] i [31]. Power H. i Power B.F. wykorzystali WZW do analizy zjawisk hydrodynamicznych [68], [69], wykazując, że uzyskane w ten sposób rozwiązanie jest całkową reprezentacją rozwiązania analitycznego. Neves i Brebbia rozszerzyli zastosowanie metody na zagadnienia sprężystości [43], zaś Neves, Brebbia, Wrobel i Nowak na problemy termosprężystości dla zagadnień stacjonarnych [44], [45], [46] i niestacjonarnych [47], [48]. Swego rodzaju podsumowaniem badań nad wykorzystaniem WZW do modelowania zagadnień sprężystości i termosprężystości jest praca doktorska Nevesa [42]. Ostatnie, znane z literatury, zastosowania WZW to problemy dyfuzji neutronów analizowane przez Itagaki i Brebbię [21], [22], [23], [24], [26] oraz zagadnienia drgań harmonicznnych w cienkich sprężystych płytach analizowane przez V. Śladka, J. Śladka i M. Tanakę [72].

Metoda WZW operuje tzw. *rozwiązaniami podstawowymi wyższych rzędów* i przekształca całkę (1.33) w sposób rekurencyjny (stąd nazwa metody). W rezultacie otrzymuje się w granicy równanie całkowe, które jest dokładnym i w pełni brzegowym sformułowaniem problemu.

Podstawy WZW wyjaśnione są w następnym rozdziale, podczas gdy dalsze części pracy dotyczą zastosowania metody do rozwiązywania wybranych zagadnień inżynierskich.

Początkowo metoda wykorzystywana była do rozwiązywania liniowych zagadnień brzegowych. Ostatnio [53], [54], [55] pole zastosowań WZW zostało poszerzone o klasę nieliniowych problemów cieplnych. Wymaga to jednak jeszcze pewnego usystematyzowania i dalszych intensywnych badań.

## Rozdział 2

# Podstawy wielokrotnej zasady wzajemności

### 2.1. Zależności ogólne

W niniejszym rozdziale przedstawiono ideę wielokrotnej zasady wzajemności. Jak wspomniano już wcześniej, technika ta pozwala przekształcić całkę po obszarze  $\Omega$  występującą w równaniu całkowym (1.9) w równoważne jej całki po brzegu ciała. Rozważania dotyczą całki z uogólnionym członem źródłowym, który oznaczono przez  $b^{(0)}$ . Człon ten może być rzeczywistym członem źródłowym lub może zawierać funkcje reprezentujące źródła fikcyjne. W szczególności dla ustalonego przewodzenia ciepła mamy

$$b^{(0)} = q_v \quad (2.1)$$

Górny indeks "o" został wprowadzony celem ujednoczenia notacji, co wyjaśniono w dalszej części pracy. Podobnie, indeksem "o" opatrzone rozwiązanie podstawowe zdefiniowane równaniem (1.3). Tym samym całkę (1.33) po obszarze  $\Omega$  można zapisać jako

$$D_o = \int_{\Omega} T^{*(0)} b^{(0)} d\Omega \quad (2.2)$$

Początkowo zakłada się również, że funkcja  $b^{(0)}$  jest znaną i gładką funkcją współrzędnych. Inne przypadki przeanalizowano w następnych rozdziałach pracy.

Rozpocznijmy od wprowadzenia tzw. *rozwiązania podstawowego pierwszego rzędu*, czyli funkcji  $T^{*(1)}$  związanej z klasycznym rozwiązaniem podstawowym zależnością

$$\nabla^2 T^{*(1)} = T^{*(0)} \quad (2.3)$$

Jednocześnie analog strumienia ciepła, czyli funkcja  $q^{*(1)}$ , wynika z równania

$$q^{*(1)} = -k \frac{\partial T^{*(1)}}{\partial n} \quad (2.4)$$



Wykorzystując symetryczną tożsamość Greena, można przedstawić całkę  $D_0$  w sposób następujący

$$\begin{aligned} D_0 &= \int_{\Omega} T^{*(0)} b^{(0)} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 T^{*(1)} b^{(0)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{k} \int_{\Gamma} (T^{*(1)} w^{(0)} - q^{*(1)} b^{(0)}) d\Gamma + \int_{\Omega} T^{*(1)} \nabla^2 b^{(0)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{k} \int_{\Gamma} (T^{*(1)} w^{(0)} - q^{*(1)} b^{(0)}) d\Gamma + D_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie:  $w^{(0)}$  – analog strumienia ciepła będący pochodną normalną uogólnionego członu źródłowego:

$$w^{(0)} = -k \frac{\partial b^{(0)}}{\partial n} \quad (2.6)$$

Całka  $D_1$  w zależności (2.5) jest definiowana jako

$$D_1 = \int_{\Omega} T^{*(1)} \nabla^2 b^{(0)} d\Omega = \int_{\Omega} T^{*(1)} b^{(1)} d\Omega \quad (2.7)$$

przy czym

$$b^{(1)} = \nabla^2 b^{(0)} \quad (2.8)$$

Ponieważ funkcja  $b^{(0)}$  jest znaną funkcją współrzędnych, jej laplasjan może być obliczony analitycznie. Daje to nową, znaną funkcję położenia  $b^{(1)}$ . Z kolei różniczkując  $b^{(1)}$  wzdłuż normalnej zewnętrznej, otrzymujemy funkcję  $w^{(1)}$ , stanowiącą odpowiednik strumienia ciepła

$$w^{(1)} = -k \frac{\partial b^{(1)}}{\partial n} \quad (2.9)$$

Proces analitycznego różniczkowania znanej funkcji nie stanowi większego problemu przy obecnym poziomie techniki komputerowej. Szeroko dostępne oprogramowanie, jak np. pakiety *Derive* [73] czy *Mathematica* [80], pozwalają zautomatyzować większość operacji 'analitycznych', w tym operację różniczkowania. Za ich pomocą uzyskuje się również gotowe procedury komputerowe (w Fortranie, Pascalu itp.) obliczające wartości wyznaczonych pochodnych.

Warto w tym miejscu zauważyć, że postać całki  $D_1$  jest formalnie identyczna z postacią całki  $D_0$  (różnią się one jedynie rzędem rozwiązania podstawowego i rzędem laplasjanu funkcji źródła). Tym samym całka  $D_1$  może być przekształcona w sposób analogiczny jak całka  $D_0$ . W rezultacie otrzymujemy

$$D_1 = \frac{1}{k} \int_{\Gamma} (T^{*(2)} w^{(1)} - q^{*(2)} b^{(1)}) d\Gamma + D_2 \quad (2.10)$$



Opisana procedura może być w oczywisty sposób uogólniona. Definiując mianowicie ciąg *rozwiązań podstawowych wyższego rzędu* określonych zależnością rekurencyjną

$$\nabla^2 T^{*(j+1)} = T^{*(j)} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

$$q^{*(j)} = -k \frac{\partial T^{*(j)}}{\partial n} \quad (2.12)$$

ciąg *laplasjanów funkcji źródła*

$$b^{(j)} = \nabla^2 b^{(j-1)} \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

$$w^{(j)} = -k \frac{\partial b^{(j)}}{\partial n} \quad (2.14)$$

oraz prowadząc proces transformacji zgodnie z rys.2.1, otrzymujemy następujący szereg całek brzegowych reprezentujący wyjściową całkę (2.2)

$$D_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} (T^{*(j+1)} w^{(j)} - q^{*(j+1)} b^{(j)}) d\Gamma \quad (2.15)$$

Należy pokreślić, że równanie (2.15) jest dokładną reprezentacją wyjściowej całki (2.2) - żadne uproszczenia nie zostały poczynione. Z matematycznego punktu widzenia szereg (2.15) jest rezultatem wykonania całkowania przez części nieskończoną liczbę razy.

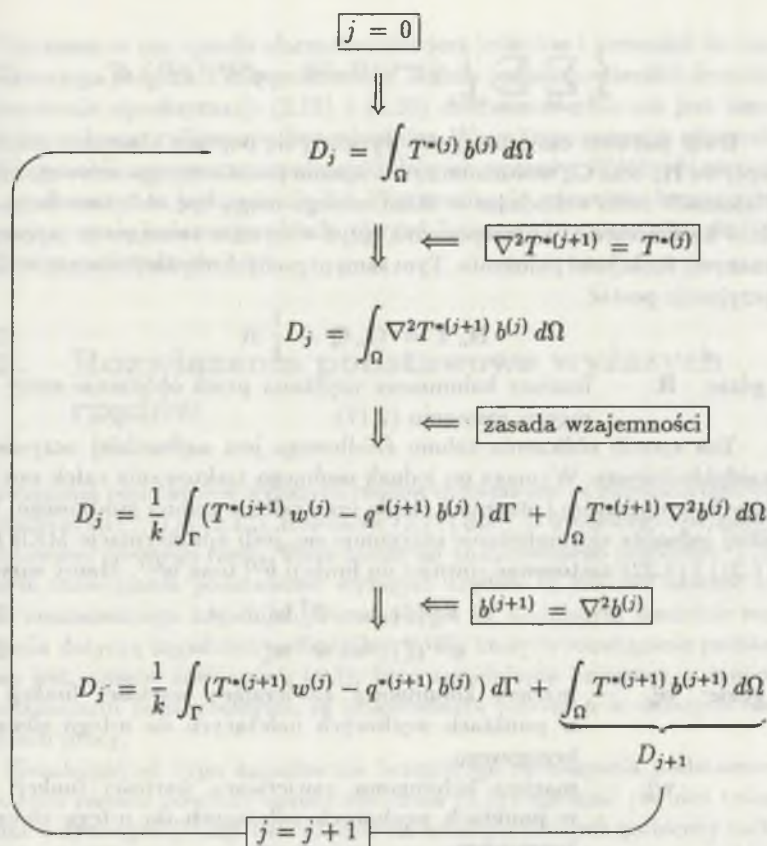
Ostatecznie podstawiając (2.15) do równania (1.9) otrzymujemy następujące, w pełni brzegowe sformułowanie wyjściowego zagadnienia brzegowego (1.6)

$$k c_i T_i + \int_{\Gamma} q^{*(0)} T d\Gamma = \int_{\Gamma} T^{*(0)} q d\Gamma - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} (T^{*(j+1)} w^{(j)} - q^{*(j+1)} b^{(j)}) d\Gamma \quad (2.16)$$

Sformułowanie to, nie zawierając całek po obszarze, nie wymaga dyskretyzacji obszaru. W ten sposób zachowana została największa zaleta MEB, jaką jest prosta generacja siatki numerycznej. Wymagana jest natomiast znajomość na brzegu obszaru nie tylko samego członu źródłowego  $b^{(0)}$ , ale również ciągu jego laplasjanów.

## 2.2. Dyskretyzacja brzegowego równania całkowego

Ogólne zasady dyskretyzacji równań całkowych MEB przedyskutowano już w podrozdziałach 1.1.2 oraz 1.1.3. Osobnego omówienia wymaga zatem je-



Rys. 2.1. Proces transformacji całek po obszarze w całki brzegowe - wielokrotna zasada wzajemności

Fig. 2.1. Transformation of domain integrals into boundary ones - the Multiple Reciprocity Method

dynie dyskretyzacja członu źródłowego, wyrażonego w równaniu (2.16) szeregiem całek brzegowych.

Jak pokazano wcześniej, podział brzegu  $\Gamma$  na  $N$  elementów brzegowych pozwala na zastąpienie całki po brzegu ciała, sumą całek po poszczególnych elementach  $\Gamma_n$

$$k c_i T_i + \sum_{n=0}^N \int_{\Gamma_n} q^{*(0)} T d\Gamma_n = \sum_{n=0}^N \int_{\Gamma_n} T^{*(0)} q d\Gamma_n -$$

$$-\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \int_{\Gamma_n} (T^{*(j+1)} w^{(j)} - q^{*(j+1)} b^{(j)}) d\Gamma_n \quad (2.17)$$

Dwie pierwsze całki brzegowe wyrażają się poprzez klasyczne macierze wpływu  $\mathbf{H}_0$  oraz  $\mathbf{G}_0$  utworzone z rozwiązania podstawowego zerowego rzędu. Natomiast całki wchodzące w skład szeregu mogą być obliczone bezpośrednio kwadraturami numerycznymi, gdyż wszystkie tworzące je wyrazy są znanymi funkcjami położenia. Tym samym po dyskretyzacji równanie (2.17) przyjmuje postać

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{T} = \mathbf{G}_0 \mathbf{Q} + \frac{1}{k} \mathbf{R} \quad (2.18)$$

gdzie:  $\mathbf{R}$  – macierz kolumnowa uzyskana przez obliczenie sumy szeregu w równaniu (2.17).

Ten sposób obliczenia członu źródłowego jest najbardziej oczywisty i najdokładniejszy. Wymaga on jednak osobnego traktowania całek zawierających temperaturę i strumień ciepła oraz całek z członu źródłowego. Bardziej jednolite sformułowanie otrzymuje się, jeśli aproksymacje MEB typu (1.21) i (1.22) zastosować również do funkcji  $b^{(j)}$  oraz  $w^{(j)}$ . Mamy wówczas

$$b^{(j)}(\xi) = \Phi^T \mathbf{b}_n^j \quad (2.19)$$

$$w^{(j)}(\xi) = \Phi^T \mathbf{w}_n^j \quad (2.20)$$

gdzie:  $\mathbf{b}_n^j$  – macierz kolumnowa zawierająca wartości funkcji  $b^{(j)}$  w punktach węzłowych należących do  $n$ -tego elementu brzegowego,

$\mathbf{w}_n^j$  – macierz kolumnowa zawierająca wartości funkcji  $w^{(j)}$  w punktach węzłowych należących do  $n$ -tego elementu brzegowego,

$\Phi^T$  – macierz wierszowa zawierająca lokalne funkcje interpolacyjne.

Powyższe aproksymacje w połączeniu z równaniami (1.25) i (1.26) dają

$$\mathbf{h}_j^m = \int_{\Gamma_n} \Phi^T q^{*(j)} d\Gamma_n \quad (2.21)$$

$$\mathbf{g}_j^m = \int_{\Gamma_n} \Phi^T T^{*(j)} d\Gamma_n \quad (2.22)$$

Prowadzi to do tzw. *macierzy wpływu wyższych rzędów* i pozwala zapisać równanie (2.17) w następującej zdyskretyzowanej postaci

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{T} = \mathbf{G}_0 \mathbf{Q} - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{G}_{j+1} \mathbf{W}_j - \mathbf{H}_{j+1} \mathbf{B}_j) \quad (2.23)$$

gdzie:  $\mathbf{B}_j$  – macierz kolumnowa wartości funkcji  $b^{(j)}$  w węzłach brzegowych,

$\mathbf{W}_j$  – macierz kolumnowa wartości funkcji  $w^{(j)}$  w węzłach brzegowych.



Uzyskane w ten sposób sformułowanie jest jednolite i prowadzi do bardzo zwartego programu komputerowego. Należy jednak podkreślić, że przez zastosowanie aproksymacji (2.19) i (2.20) dokładność obliczeń jest nieco mniejsza niż przy całkowaniu bezpośrednim. W praktyce szereg w równaniu (2.23) jest obliczany przez sumowanie kolejnych wyrazów. Zbieżność szeregu jest analizowana w podrozdziale 2.4. Wprowadzanie warunków brzegowych i rozwiązywanie końcowego układu równań liniowych przeprowadza się, jak podano w podrozdziale 1.1.4.

## 2.3. Rozwiązania podstawowe wyższych rzędów

Rozwiązania podstawowe wyższych rzędów definiowane są zależnościami rekurencyjnymi (2.11) i (2.12). Równanie (2.11) dla  $j = 0$  zawiera rozwiązanie podstawowe zerowego rzędu, które zależy od analizowanego problemu. Tym samym rozwiązania podstawowe wyższych rzędów są również zależne od typu analizowanego zagadnienia brzegowego. W niniejszym rozdziale rozważania dotyczą zagadnień potencjalnych, dla których rozwiązanie podstawowe jest opisane równaniem (1.3). Inne zagadnienia brzegowe, z innymi rozwiązaniami podstawowymi, są przedmiotem rozważań w dalszych rozdziałach pracy.

Niezależnie od typu zagadnienia brzegowego rozwiązania podstawowe wyższych rzędów powinny oprócz równania (2.11) spełniać również twierdzenie o dywergencji [32]. Twierdzenie to, ustalając związek pomiędzy całką po obszarze i całką po brzegu, wymaga, aby dwa kolejne rozwiązania podstawowe wyższych rzędów spełniały warunek

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T^{(j)} d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla^2 T^{(j+1)} d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial T^{(j+1)}}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{k} \int_{\Gamma} q^{(j+1)} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.21)$$

Powyższe równanie pozwala ustalić wartość niektórych stałych całkowania przy rozwiązywaniu równania (2.11). W szczególnym przypadku, np. jak wykazano to w Dodatku (A) dla zagadnień potencjalnych, stałe całkowania są równe zeru.

Rozwiązania równania (2.11) poszukuje się w całej przestrzeni, zapisując operator Laplace'a w cylindrycznym (zagadnienia dwuwymiarowe) lub sferycznym (zagadnienia trójwymiarowe) układzie współrzędnych. Umieszczając początek układu współrzędnych w punkcie działania źródła, uzyskuje się dla zagadnień dwuwymiarowych następujące wyrażenie

$$T^{(j)} = \frac{1}{2\pi} r^{2j} (A_j \ln r - B_j) \quad \text{dla } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$



gdzie:  $A_j$  i  $B_j$  – współczynniki liczbowe definiowane następującymi zależnościami rekurencyjnymi

$$A_{j+1} = \frac{A_j}{4(j+1)^2} \quad (2.26)$$

$$B_{j+1} = \frac{1}{4(j+1)^2} \left( \frac{A_j}{j+1} + B_j \right) \quad (2.27)$$

W Dodatku (A) zamieszczono dowód poprawności rozwiązania (2.25) przeprowadzony metodą indukcji matematycznej.

Jako wartości początkowe dla rekurencji (2.26) i (2.27) przyjmuje się zwykle  $A_0 = 1$  oraz  $B_0 = 0$ , np. [56], [57]. Wynika to z postaci klasycznego rozwiązania podstawowego  $T^{*(0)}$  zdefiniowanego równaniem (1.3). Należy jednak podkreślić, że wartość stałej  $B_0$  może być zupełnie dowolna. Obliczenia wykazały, że stała ta wpływa na szybkość zbieżności szeregu w równaniu (2.16) oraz w pewnym stopniu na dokładność rozwiązania. Wartość stałej  $B_0$  jest związana z niejednoznacznością rozwiązania równania całkowego [27], [33] i w konsekwencji decyduje o dokładności, z jaką spełnione jest równanie globalnego bilansu energii [59]. Najdokładniejsze rezultaty otrzymano, stosując bądź  $B_0 = 0$ , bądź  $B_0 = (1/2\pi) \ln r_{max}$ , gdzie  $r_{max}$  oznacza maksymalną odległość pomiędzy węzłami brzegowymi.

Analóg strumienia ciepła  $q^{*(j)}$  oblicza się przez różniczkowanie pola  $T^{*(j)}$  wzdłuż normalnej zewnętrznej, zgodnie z równaniem (2.12)

$$q^{*(j)} = -\frac{k}{2\pi} [(2j \ln r + 1) A_j - 2j B_j] r^{2j-1} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.28)$$

Godny podkreślenia jest fakt, że rozwiązania podstawowe wyższych rzędów  $T^{*(j)}$  i  $q^{*(j)}$  nie mają osobliwości dla  $j = 1, 2, \dots$ . Tym samym ich całkowanie nie wymaga żadnych specjalnych technik i standardowe kwadratury Gaussa [74] zapewniają wystarczającą dokładność.

## 2.4. Zagadnienia zbieżności szeregu WZW

W wielokrotnej zasadzie wzajemności wkład członu źródłowego do rozwiązania problemu jest przedstawiony za pomocą szeregu (2.15). Generalnie rzecz ujmując, wartość sumy tego szeregu zależy od jakości dyskretyzacji brzegu oraz od liczby sumowanych wyrazów. Jest oczywiste, że podział numeryczny brzegu powinien być dostosowany do zmienności pola temperatury i strumienia ciepła. Jest to zagadnienie niezwykle ogólne i dotyczące wszystkich metod numerycznych. Wymagane jest przy tym pewne doświadczenie poparte znajomością modelowanych zagadnień brzegowych. Bardzo dobre rezultaty uzyskuje się przy stosowaniu metod adaptacyjnych i samoadaptacyjnych, np. [1], [70], [71]. Ze względu na swą odrębność problemy

właściwego podziału numerycznego brzegu nie są dyskutowane w niniejszej pracy. Przedstawiono natomiast kryteria pozwalające sprawdzić, czy dla danej funkcji źródła szereg (2.15) jest zbieżny. Ponadto przedyskutowano sposób kontrolowania liczby wyrazów szeregu wymaganych do obliczenia jego sumy z założoną dokładnością. Zaprezentowano również oszacowanie reszty obciętego szeregu.

Warto na początek zauważyć, że w wielu praktycznych obliczeniach źródła ciepła opisywane są dość prostymi funkcjami położenia. Tym samym szereg (2.15) redukuje się do sumy skończonej i problem badania zbieżności w ogóle nie występuje.

W przypadku kiedy funkcja  $b^{(0)}$  generuje nieskończony szereg laplasjanów, zbieżność szeregu (2.15) powinna być sprawdzona. Kolejne wyrazy tego szeregu zwykle szybko zdążają do zera. Wynika to z tego, że współczynniki liczbowe  $A_j$  i  $B_j$  rozwiązań podstawowych wyższych rzędów zachowują się jak odwrotność funkcji silnia. Pewien pogląd na szybkość zbieżności szeregu można sobie wyrobić na podstawie rezultatów zamieszczonych w pracy [57].

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu jest, aby stosunek dwóch kolejnych wyrazów był mniejszy niż 1. Daje to dwie następujące nierówności

$$\left| \frac{T^{*(j+2)} w^{(j+1)}}{T^{*(j+1)} w^{(j)}} \right| < 1 \quad \text{oraz} \quad \left| \frac{q^{*(j+2)} b^{(j+1)}}{q^{*(j+1)} b^{(j)}} \right| < 1 \quad (2.29)$$

Uwzględniając zależności (2.25)–(2.28), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{T^{*(j+2)} w^{(j+1)}}{T^{*(j+1)} w^{(j)}} \right| &= r^2 \frac{A_{j+2}}{A_{j+1}} \left| \frac{\ln r - \frac{B_{j+2}}{A_{j+2}}}{\ln r - \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}}} \right| \left| \frac{w^{(j+1)}}{w^{(j)}} \right| = \\ &= \left[ \frac{r}{2(j+2)} \right]^2 \left| \frac{\ln r - \frac{B_{j+2}}{A_{j+2}}}{\ln r - \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}}} \right| \left| \frac{w^{(j+1)}}{w^{(j)}} \right| \end{aligned} \quad (2.30)$$

co po prostych przekształceniach prowadzi do następującego warunku zbieżności szeregu

$$\left| \frac{w^{(j+1)}}{w^{(j)}} \right| < \left[ \frac{2(j+2)}{r} \right]^2 \left| \frac{\ln r - \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}}}{\ln r - \frac{B_{j+2}}{A_{j+2}}} \right| \quad (2.31)$$

Stosunek współczynników  $B_j$  do  $A_j$  wynika z równań (2.26) i (2.27) i wyraża się następującą zależnością (dowód zamieszczono w Dodatku B)

$$\frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} = \sum_{l=0}^j \frac{1}{1+l} \quad \frac{B_{j+2}}{A_{j+2}} = \sum_{l=0}^{j+1} \frac{1}{1+l} \quad (2.32)$$

Podobne kryterium uzyskuje się dla stosunku funkcji  $b^{(j+1)}$  i  $b^{(j)}$

$$\left| \frac{b^{(j+1)}}{b^{(j)}} \right| < \left[ \frac{2(j+2)}{r} \right]^2 \left| \frac{2(j+1) \ln r - 2(j+1) \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} + 1}{2(j+2) \ln r - 2(j+2) \frac{B_{j+2}}{A_{j+2}} + 1} \right| \quad (2.33)$$

Kryteria (2.31) oraz (2.33) uzależniają stosunki  $b^{(j+1)}$  do  $b^{(j)}$  oraz  $w^{(j+1)}$  do  $w^{(j)}$  od rzędu laplasjanu  $j$  oraz odległości  $r$  punktów kolokacji i całkowania. Łatwo zauważyć, że im mniejsza jest odległość  $r$ , tym większy może być stosunek kolejnych laplasjanów i tym łatwiej więc można spełnić kryterium zbieżności szeregu. W praktyce oznacza to, że warunki (2.31) oraz (2.33) powinny być sprawdzane dla każdego  $j$  przy  $r = r_{max}$ . W przypadku "za dużych obszarów" zaleca się [43] zmniejszenie  $r_{max}$  przez podział obszaru  $\Omega$  na podobszary.

Warunki (2.31) i (2.33) są jedynie warunkami koniecznymi. Przeprowadzone przykładowe obliczenia sugerują jednak, że są to również warunki wystarczające zbieżności szeregu.

W komputerowej realizacji WZW szereg (2.17) zostaje przekształcony w sumę skończoną. Aby obliczyć sumę szeregu z zadowalającą dokładnością, suma skończona powinna zawierać odpowiednią liczbę wyrazów. Jeśli szereg jest zbieżny, liczbę uwzględnianych wyrazów kontroluje się poprzez obliczanie wkładu kolejnych wyrazów szeregu do prawej strony równania (2.17). Reszta obciętego szeregu może być łatwo oszacowana poprzez wykorzystanie globalnych funkcji interpolacyjnych podwójnej zasady wzajemności [56] lub też bezpośrednio przez analizowanie całki po obszarze  $\Omega$ . Mamy bowiem

$$D_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^M \int_{\Gamma} (T^{*(j+1)} w^{(j)} - q^{*(j+1)} b^{(j)}) d\Gamma + R_M \quad (2.34)$$

gdzie:  $R_M$  - reszta szeregu wyrażająca się następującą całką po obszarze

$$R_M = \int_{\Omega} T^{*(M+1)} b^{(M+1)} d\Omega \quad (2.35)$$

Z twierdzenia o wartości średniej [32] uzyskujemy

$$R_M = b_a^{(M+1)} \int_{\Omega} T^{*(M+1)} d\Omega \quad (2.36)$$

gdzie:  $b_a^{(M+1)}$  - średnia wartość funkcji  $b^{(M+1)}$  w obszarze  $\Omega$ .

Uwzględniając teraz definicję rozwiązania podstawowego wyższego rzędu (2.11) oraz twierdzenie o dywergencji, wyrażamy całkę (2.36) następująco

$$R_M = b_a^{(M+1)} \int_{\Omega} \nabla^2 T^{*(M+2)} d\Omega = -\frac{1}{k} b_a^{(M+1)} \int_{\Gamma} q^{*(M+2)} d\Gamma \quad (2.37)$$

Ostatnia całka po brzegu  $\Gamma$  jest sumą współczynników w tym wierszu macierzy wpływu  $\mathbf{H}_{M+2}$ , który odpowiada rozważanemu punktowi kolokacji  $i$ . Pozwala to uzyskać następującą nierówność

$$|R_M| \leq \left| \frac{1}{k} b_{max}^{(M+1)} \int_{\Gamma} q^{*(M+2)} d\Gamma \right| = \left| \frac{1}{k} b_{max}^{(M+1)} \sum_{n=1}^N h_{M+2}^{in} \right| \quad (2.38)$$

gdzie:  $b_{max}^{(M+1)}$  - maksymalna wartość funkcji  $b^{(M+1)}$  w obszarze  $\Omega$ .



## 2.5. Implementacja komputerowa WZW

Implementacja komputerowa wielokrotnej zasady wzajemności jest naturalna i prosta. Program komputerowy składa się z dwóch zasadniczych części. Część pierwsza programu ma charakter uniwersalny i stanowi niewielką modyfikację standardowych kodów komputerowych MEB opublikowanych m.in. w [8] i [9]. Podstawowa modyfikacja dotyczy sposobu obliczania macierzy kolumnowej  $\mathbf{R}$  w równaniu (2.18). Ponieważ macierz  $\mathbf{R}$  jest sumą szeregu, jej obliczenie wymaga zrealizowania dodatkowej pętli. Organizacja tej pętli może opierać się na całkowaniu bezpośrednim lub może wykorzystywać macierze wpływu wyższych rzędów, jak opisano to w podrozdziale 2.2.

Niezależnie od sposobu całkowania celowa jest zmiana kolejności wykonywanych operacji. Innymi słowy, zamiast obliczać sumę całek brzegowych, znacznie efektywniej można obliczyć całkę z sumy funkcji podcałkowych. Wiąże się to ze zmniejszeniem liczby operacji, a co za tym idzie – ze skróceniem czasu obliczeń. Jeśli macierz kolumnowa  $\mathbf{R}$  jest wyrażona za pomocą macierzy wpływu, zmiana kolejności operacji pozwala uniknąć przechowywania w pamięci komputera macierzy wpływu wyższych rzędów. Obliczone współczynniki macierzy wpływu są na bieżąco mnożone przez macierze kolumnowe  $\mathbf{B}_j$  oraz  $\mathbf{W}_j$  i sumowane celem utworzenia macierzy  $\mathbf{R}$ .

Druga część programu komputerowego zawiera dwie procedury obliczające elementy macierzy  $\mathbf{B}_j$  i  $\mathbf{W}_j$ . Procedury te zależą od postaci członu źródłowego w zagadnieniu brzegowym i powinny być każdorazowo uzupełnione przez użytkownika programu. Jak już wspomniano wcześniej, odpowiednie oprogramowanie pozwala zautomatyzować ten etap tworzenia kodu komputerowego.



## Rozdział 3

# Zastosowanie WZW do modelowania pól temperatury

Istotą wielokrotnej zasady wzajemności jest transformacja zagadnienia brzegowego, przedstawionego w formie równania różniczkowego Poissona, w brzegowe równanie całkowe. Uogólniony człon źródłowy  $b^{(0)}$  w równaniu Poissona reprezentuje rzeczywiste lub fikcyjne źródła ciepła. Zastosowanie WZW do modelowania pól temperatury sprowadza się więc do odpowiedniego zdefiniowania członu źródłowego i wyznaczenia ciągu jego laplasjanów. Zagadnienia te przedyskutowane zostaną kolejno dla procesów ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła.

### 3.1. Ustalone przewodzenie ciepła

Wyczerpujące informacje na temat modelowania za pomocą metody elementów brzegowych bezźródłowych pól temperatury można znaleźć w licznych publikacjach, np. [5], [9], [12], [39]. W niniejszym podrozdziale skoncentrujemy się więc na obliczaniu źródłowych, ustalonych pól temperatury. Podstawiając za uogólniony człon źródłowy  $b^{(0)}$  wydajność wewnętrznych źródeł ciepła  $q_v$ , możemy bezpośrednio wykorzystać rezultaty przedstawione w rozdziale 2. Ograniczymy się zatem do zaprezentowania rezultatów obliczeń numerycznych reprezentatywnych przykładów testowych.

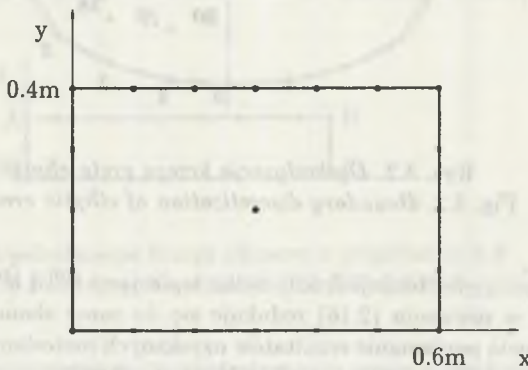
W większości przypadków testy numeryczne dotyczą obszarów o stosunkowo prostych kształtach, co podyktowane jest jedynie chęcią porównania uzyskanych rezultatów z rozwiązaniami analitycznymi. Należy jednak podkreślić, że kształt obszaru może być zupełnie dowolny.

#### Przykład 3.1. Przykład referencyjny

Ten prosty przykład został zaczerpnięty z #9(ii) NAFEMS<sup>1</sup> Thermal Analysis Benchmarks.

<sup>1</sup>National Agency for Finite Element Methods and Standards

Rozmiary obszaru i jego podział numeryczny na liniowe elementy brzegowe pokazano na rys.3.1. Brzeg obszaru utrzymywany jest w stałej temperaturze równej zero. Współczynnik przewodzenia ciepła  $k = 52 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , a wydajność wewnętrznego źródła ciepła jest stała w całym obszarze  $\Omega$  i wynosi  $q_v = b^{(0)} = 10^6 \text{ W}/\text{m}^3$ . Dla takiej funkcji źródła wszystkie laplasjany są równe zero i szereg w równaniu (2.16) redukuje się do jednego wyrazu. Temperatura w punkcie centralnym wyznaczona analitycznie wynosi  $310.1^\circ\text{C}$ . Stosując WZW, otrzymano wartość  $310.48^\circ\text{C}$ . Wartość tę porównano również z rezultatem z innej metody transformacji całek po obszarze w całki brzegowe, a mianowicie z wynikiem wyznaczonym za pomocą tzw. podwójnej zasady wzajemności. PZW dała wynik  $314.6^\circ\text{C}$  [61].



Rys. 3.1. Dyskretyzacja brzegu obszaru w przykładzie referencyjnym  
Fig. 3.1. Boundary discretization in benchmark problem

**Przykład 3.2.** Pole temperatury w nieskończenie długim pręcie o przekroju eliptycznym

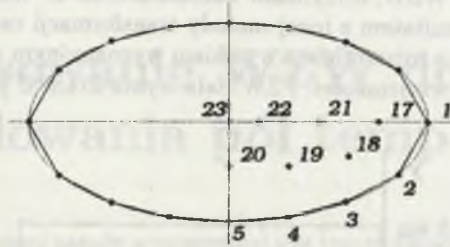
Rozważa się ustalone przewodzenie ciepła w nieskończenie długim pręcie o przekroju eliptycznym. Dzieląc równania definiujące zagadnienie brzegowe przez iloczyn współczynnika przewodzenia ciepła i charakterystycznej różnicy temperatur, można sprowadzić je do postaci bezwymiarowej [19].

Podział numeryczny brzegu na liniowe elementy brzegowe pokazano na rys.3.2. Elipsa ma półośie główne o długościach odpowiednio 2 i 1. Założono, że bezwymiarowa wydajność wewnętrznych źródeł ciepła jest proporcjonalna do kwadratu bezwymiarowej współrzędnej  $x$ . Przy zerowym warunku brzegowym I rodzaju rozwiązanie analityczne problemu dane jest zależnością

$$T = -(50x^2 - 8y^2 + 33.6)(x^2/4 + y^2 - 1)/246$$

Bezwymiarowa gęstość strumienia ciepła na brzegu obszaru wynika z następującego równania

$$q = - \frac{(-50x^3 - 100xy^2 + 4x^2y + 83.2x)x}{492} - \frac{(-100x^2y + 4y^2x + 32y^3 - 83.2y)y}{246}$$



Rys. 3.2. Dyskretyzacja brzegu pręta eliptycznego  
Fig. 3.2. Boundary discretization of elliptic cross-section

Dla przyjętej funkcji źródła tylko laplasjany  $b^{(0)}$  i  $b^{(1)}$  są różne od zera i szereg w równaniu (2.16) redukuje się do sumy skończonej. Tablica 3.1 przedstawia porównanie rezultatów uzyskanych metodami WZW oraz PZW z rozwiązaniem analitycznym, [61]. Warto podkreślić, że rozwiązanie metodą PZW uzyskano, stosując 17 punktów wewnętrznych, podczas gdy sformułowanie WZW jest sformułowaniem czysto brzegowym.

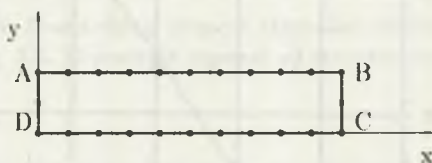
Tablica 3.1  
Bezwymiarowa temperatura i bezwymiarowa gęstość strumienia ciepła w wybranych węzłach przekroju eliptycznego

Zmienna	Punkt	x	y	Rozw. WZW	Rozw. analit.	Rozw. PZW
q	1	2.0	0.0	0.877	0.949	0.825
	2	1.706	-0.522	0.952	0.915	0.948
	3	1.179	-0.808	0.711	0.657	0.698
	4	0.598	-0.954	0.368	0.343	0.339
	5	0.0	-1.0	0.228	0.208	0.194
T	17	1.5	0.0	0.247	0.259	0.262
	18	1.2	-0.35	0.217	0.220	0.220
	19	0.6	-0.45	0.150	0.143	0.136
	20	0.0	-0.45	0.113	0.103	0.092
	21	0.9	0.0	0.244	0.240	0.236
	22	0.3	0.0	0.163	0.151	0.142
	23	0.0	0.0	0.149	0.136	0.127

Chociaż dyskretyzacja brzegu jest bardzo zgrubna, szczególnie w sąsiedztwie wierzchołków elipsy, rezultaty obliczeń numerycznych zgadzają się dość dobrze z rozwiązaniem analitycznym. Drobniejszy podział numeryczny brzegu oczywiście wpłynąłby na poprawę dokładności rozwiązań numerycznych.

**Przykład 3.3.** Pole temperatury wywołane źródłem ciepła opisanym funkcją trygonometryczną

Na tym przykładzie przeszedzono wpływ liczby sumowanych wyrazów w szeregu (2.15) na dokładność rezultatów numerycznych WZW. Podobnie jak poprzednio zagadnienie brzegowe sformułowano w zmiennych bezwymiarowych.



Rys. 3.3. Dyskretyzacja brzegu obszaru w przykładzie 3.3

Fig. 3.3. Boundary discretization in Example 3.3

Rozważmy pole temperatury w nieskończonym przecie o przekroju prostokątnym i wymiarach  $1 \times 0.2$ . Jego dyskretyzację przedstawiono na rys.3.3. Krawędzie AB oraz CD są izolowane cieplnie, tj. strumień ciepła  $q = 0$ . Wzdłuż krawędzi AD oraz BC zadano warunki brzegowe I rodzaju

$$T = 0.2 \quad \text{wzdłuż AD}$$

$$T = 1.8 \quad \text{wzdłuż BC}$$

Założymy, że bezwymiarowa wydajność źródła ciepła opisana jest następującą funkcją trygonometryczną

$$b^{(0)} = -0.8 \pi^2 \cos(\pi x)$$

Funkcja jest różniczkowalna nieskończoną liczbę razy, dając ciąg laplasjanów o wyrazie ogólnym

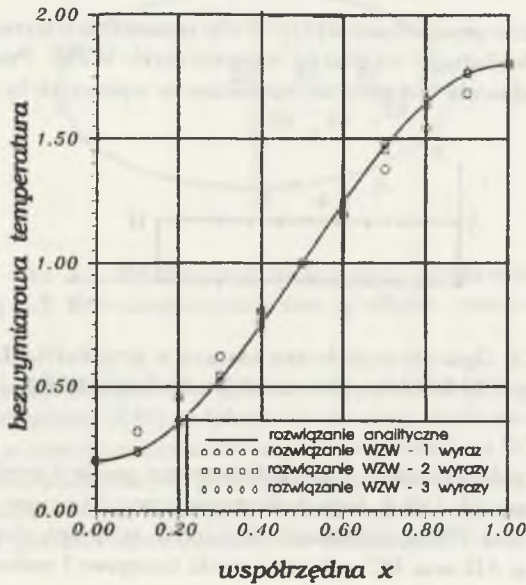
$$b^{(j)} = (-1)^{j+1} 0.8 \pi^{j+2} \cos(\pi x)$$

W rezultacie rozwiązanie wyraża się przez nieskończony szereg całek brzegowych. Rozwiązanie analityczne powyższego problemu dane jest wzorem

$$T = 1 - 0.8 \cos(\pi x)$$



Linia ciągła na rys.3.4 przedstawia rozwiązanie analityczne, podczas gdy poszczególne symbole oznaczają rozwiązania numeryczne uzyskane metodą WZW przy uwzględnieniu różnej liczby wyrazów. Z rysunku wynika, że dokładność rozwiązania numerycznego zależy w sposób wyraźny od liczby sumowanych wyrazów szeregu (2.15). Zadowalającą zbieżność uzyskuje się po zsumowaniu trzech wyrazów szeregu. Próby zagęszczenia podziału numerycznego przy mniejszej liczbie wyrazów szeregu nie prowadziły do poprawy dokładności rozwiązania.

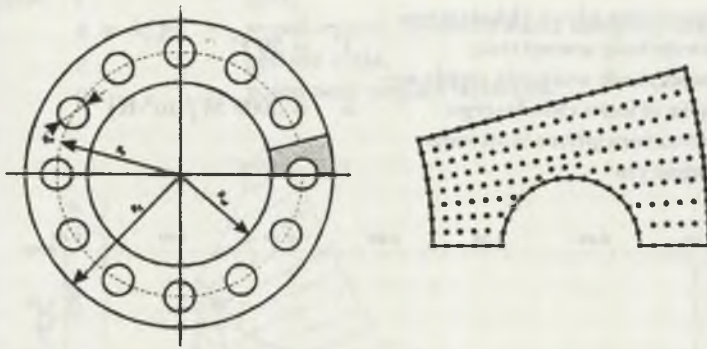


Rys. 3.4. Zależność rozwiązania WZW od liczby sumowanych wyrazów szeregu

Fig. 3.4. Dependence of MRM solution on the number of terms in the series

**Przykład 3.4.** Pole temperatury w ścianie zbiornika ciśnieniowego przy absorpcji promieniowania jądrowego

Analizuje się ustalone przewodzenie ciepła w ścianie stalowego zbiornika ciśnieniowego chłodzonego systemem kanałów [4] - rys.3.5. Geometria obiektu pozwala wyodrębnić do rozważań powtarzalny element również pokazany na rysunku. Dyskretyzacji poddano tylko brzeg obszaru. Punkty wewnętrzne wprowadzono jedynie celem wyznaczenia przebiegu izoterm wewnątrz obszaru.



Rys. 3.5. Powtarzalny element zbiornika ciśnieniowego  
Fig. 3.5. Repeating segment of pressure vessel

Wszystkie płaszczyzny symetrii są powierzchniami adiabatycznymi. Na wewnętrznej powierzchni zbiornika założono warunek brzegowy II rodzaju, tzn. znana jest gęstość strumienia ciepła. W kanale, którym płynie czynnik chłodzący oraz na zewnętrznej powierzchni zbiornika, przyjęto warunek brzegowy III rodzaju, tzn. konwekcyjną wymianę ciepła.

Na skutek absorpcji promieniowania jądrowego pole temperatury w ścianie jest polem źródłowym. Wydajność wewnętrznych źródeł ciepła zmienia się wykładniczo wraz z odległością  $R$  od osi zbiornika [4], [36].

Rozmiary geometryczne segmentu odniesiono do promienia zewnętrzne-  
go zbiornika  $R_z$ . Ponadto w obliczeniach przyjęto [4]:

wydajność wewnętrznych źródeł  
ciepła

$$q_v = 75.08 \cdot 10^5 \exp(-4 \cdot R) \text{ W/m}^3$$

bezwymiarowy promień zewnętrzny  
zbiornika

$$R_z = 1$$

bezwymiarowy promień wewnętrzny  
zbiornika

$$R_w = 0.6$$

bezwymiarowy promień otworów  
chłodzących

$$R_h = 0.2$$

bezwymiarowy promień okręgu z  
otworami

$$R_o = 0.8$$

współczynnik przewodzenia ciepła  
stali

$$k = 43.27 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$$

gęstość strumienia ciepła na po-  
wierzchni wewnętrznej

$$q = 15000 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

współczynnik wnikania ciepła na  
powierzchni zewnętrznej

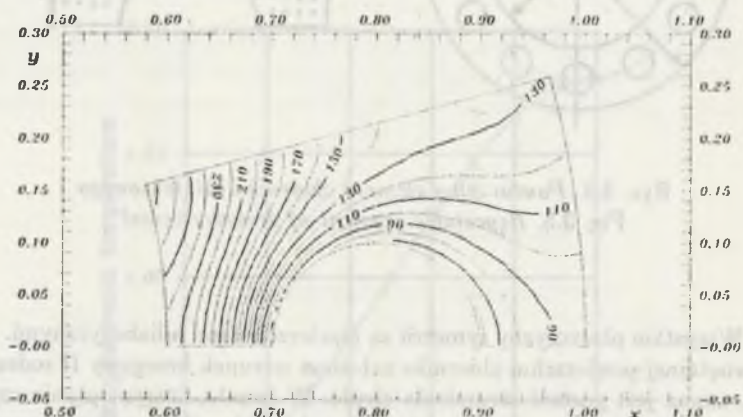
$$h = 50 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

temperatura płynu chłodzącego  
 powierzchnię zewnętrzną  
 współczynnik wnikania ciepła we-  
 wnętrzu otworu chłodzącego  
 temperaturą płynu w otworze  
 chłodzącym

$$T' = 20^{\circ}\text{C}$$

$$h = 3000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

$$T = 15^{\circ}\text{C}$$



Rys. 3.6. Przebieg izoterm [ $^{\circ}\text{C}$ ] w elemencie powtarzalnym zbiornika ciśnieniowego

Fig. 3.6. Isothermal lines [ $^{\circ}\text{C}$ ] within the repeatable segment of pressure vessel

Rozwiązanie WZW uzyskano [16], sumując osiem wyrazów szeregu (2.15). Izotermę wraz z przestrzennym obrazem pola temperatury przedstawiono na rys.3.6 i 3.7.

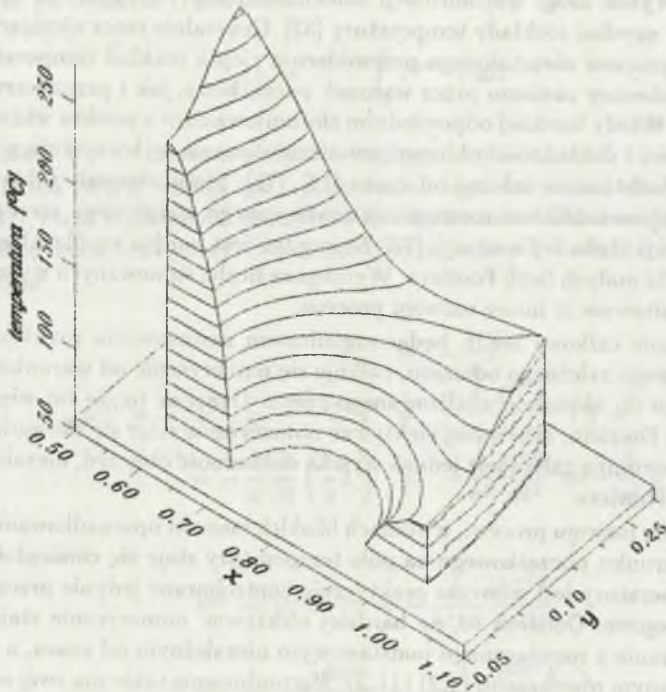
### 3.2. Nieustalone przewodzenie ciepła

W niniejszym podrozdziale omówiono zastosowanie wielokrotnej zasady wzajemności do obliczania nieustalonych, bezźródłowych pól temperatury. Zagadnienia takie opisywane są równaniem różniczkowym Fouriera - Kirchhoffa

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$



gdzie:  $t$  - czas,  
 $a = k/\rho c$  - współczynnik wyrównywania temperatury,  
 $\rho$  - gęstość ciała,  
 $c$  - pojemność cieplna właściwa.



Rys. 3.7. Przestrzenny obraz pola temperatury w elemencie powtarzalnym zbiornika ciśnieniowego

Fig. 3.7. 3-D plot of temperature field within repeatable segment of pressure vessel

Równaniu (3.1) powinny towarzyszyć warunki brzegowe oraz warunek początkowy. Ten ostatni jest rozkładem temperatury wewnątrz ciała w chwili początkowej  $t = 0$

$$T_0 = T \Big|_{t=0} \quad (3.2)$$

gdzie:  $T_0$  - znana funkcja położenia.

Warunki brzegowe mogą być dowolnego rodzaju i dlatego nie będą tutaj omawiane.



Zanim przystąpimy do zaprezentowania zastosowania WZW do rozwiązywania zagadnienia brzegowo-początkowego (3.1)–(3.2), warto wspomnieć, że transformacja w równanie całkowe może być dokonana przy zastosowaniu zależnego od czasu lub też niezależnego od czasu rozwiązania podstawowego. Wybór drogi transformacji zależy od liczby Fouriera, dla której pragniemy uzyskać rozkłady temperatury [52]. Generalnie rzecz ujmując, na początku procesu nieustalonego przewodzenia ciepła rozkład temperatury jest kontrolowany zarówno przez warunek początkowy, jak i przez warunki brzegowe. Wtedy bardziej odpowiednim sformulowaniem z punktu widzenia efektywności i dokładności obliczeń jest sformułowanie wykorzystujące rozwiązanie podstawowe zależne od czasu [12], [75]. Sformułowanie takie jest prostym odpowiednikiem rozwiązania analitycznego wyrażonego szeregiem całek funkcji błędu *erfc* oraz *erfc* [77]. Szereg ten jest bardzo szybko zbieżny, ale tylko dla małych liczb Fouriera. Wymagana liczba sumowanych wyrazów rośnie gwałtownie w miarę rozwoju procesu.

Równanie całkowe MEB, będące rezultatem zastosowania rozwiązania podstawowego zależnego od czasu, całkuje się numerycznie od warunku początkowego do aktualnie analizowanego czasu. Oznacza to, że im większa jest liczba Fouriera, tym mniej efektywne numerycznie staje się sformułowanie. Jego ogromną zaletą jest jednak wysoka dokładność obliczeń, niezależnie od liczby Fouriera.

W miarę rozwoju procesu, w stanach bliskich stanowi uporządkowanemu, wpływ warunku początkowego na pole temperatury staje się coraz słabszy. Pole temperatury jest wówczas praktycznie kontrolowane jedynie przez warunki brzegowe. Oznacza to, że bardziej efektywne numerycznie staje się sformułowanie z rozwiązaniem podstawowym niezależnym od czasu, a więc zdefiniowanym równaniami (1.2) i (1.3). Sformułowanie takie ma swój odpowiednik w klasie rozwiązań analitycznych przedstawionych za pomocą szeregu funkcji własnych [19], [63].

W niniejszym podrozdziale przedyskutowano jedynie sformułowanie będące rezultatem wykorzystania rozwiązania podstawowego niezależnego od czasu. Występującą w nim całkę po obszarze przekształcono w całki brzegowe, wykorzystując wielokrotną zasadę wzajemności.

Zależności przedstawione w rozdziale 2 pozostają słuszne również dla procesu nieustalonego przewodzenia ciepła po podstawieniu w miejsce uogólnionego członu źródłowego  $b^{(0)}$  fikcyjnego źródła ciepła, a właściwie upustu ciepła, którego wydajność jest proporcjonalna do czasowej pochodnej temperatury. Z punktu widzenia WZW jest to więc problem nieliniowy, w którym wydajność źródeł jest zależna od rozwiązania. Zagadnienia takie są omówione w podrozdziale 3.3. Jednakże ze względu na duże znaczenie praktyczne problemów nieustalonej wymiany ciepła poświęcono im osobny podrozdział.

Zastosowanie zasady wzajemności do pól temperatury  $T^{*(0)}$  oraz  $T$  opisywanych równaniem różniczkowymi odpowiednio (1.2) i (3.1) pozwala uzys-

kać następujące równanie całkowe

$$k c_i T_i + \int_{\Gamma} q^{*(0)} T d\Gamma = \int_{\Gamma} T^{*(0)} q d\Gamma - D_0 \quad (3.3)$$

Całka po obszarze  $\Omega$  ma postać

$$D_0 = -\frac{k}{a} \int_{\Omega} T^{*(0)} \dot{T} d\Omega \quad (3.4)$$

gdzie:  $\dot{T}$  - czasowa pochodna temperatury.

Istota WZW polega na wyznaczeniu ciągu rozwiązań podstawowych (2.25), ciągu laplasjanów funkcji źródła i wykonaniu całkowania przez części nieskończoną liczbę razy. Obliczając ciąg laplasjanów funkcji źródła, mamy kolejno

$$b^{(0)} = -\frac{k}{a} \dot{T} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} b^{(1)} &= \nabla^2 b^{(0)} = -\frac{k}{a} \nabla^2 \dot{T} = -\frac{k}{a} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 T) = \\ &= -\frac{k}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{a} \dot{T} \right) = -\frac{k}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{k}{a^2} \ddot{T} \end{aligned} \quad (3.6)$$

oraz ogólnie

$$b^{(j)} = \nabla^2 b^{(j-1)} = -\frac{k}{a^{j+1}} \frac{\partial^{j+1} T}{\partial t^{j+1}} \quad (3.7)$$

$$w^{(j)} = -k \frac{\partial b^{(j)}}{\partial n} = -\frac{k}{a^{j+1}} \frac{\partial^{j+1} q}{\partial t^{j+1}} \quad (3.8)$$

Podstawienie tych zależności do równania (2.15) pozwala uzyskać [51], [56]

$$D_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^j} \int_{\Gamma} \left( q^{*(j)} \frac{\partial^j T}{\partial t^j} - T^{*(j)} \frac{\partial^j q}{\partial t^j} \right) d\Gamma \quad (3.9)$$

Podstawienie (3.9) do (3.3) daje po prostych przekształceniach

$$k c_i T_i + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a^j} \int_{\Gamma} q^{*(j)} \frac{\partial^j T}{\partial t^j} d\Gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a^j} \int_{\Gamma} T^{*(j)} \frac{\partial^j q}{\partial t^j} d\Gamma \quad (3.10)$$

gdzie pochodne rzędu zerowego oznaczają same funkcje.

Należy zauważyć, że powyższe równanie jest równaniem całkowym ze względu na współrzędne geometryczne, różniczkowym zaś ze względu na czas.

### 3.2.1. Dyskretyzacja czasowa i przestrzenna

Przystępując do dyskretyzacji równania (3.10), dzielimy brzeg  $\Gamma$  na elementy brzegowe i wprowadzamy macierze wpływu  $H_j$  i  $G_j$ . W rezultacie równanie (3.10) wyrazi się następująco

$$H_0 T + \frac{1}{a} H_1 \dot{T} + \frac{1}{a^2} H_2 \ddot{T} + \dots = G_0 Q + \frac{1}{a} G_1 \dot{Q} + \frac{1}{a^2} G_2 \ddot{Q} + \dots \quad (3.11)$$

Równanie (3.11) jest równoważne układowi równań różniczkowych zwyczajnych nieskończonego rzędu. Należy zauważyć, że w równaniach tych występują pochodne czasowe obu wielkości, temperatury  $T$  i strumienia ciepła  $q$  i dlatego sformułowanie to jest zasadniczo różne od sformułowania PZW. Nawet dla stałych w czasie warunków brzegowych Dirichleta proces niestabilny może być zadowalająco modelowany. Zastosowanie PZW dla analogicznego przypadku wymagałoby przyjęcia punktów wewnętrznych, tzw. *internal poles*.

Powyższy układ równań różniczkowych można rozwiązywać analitycznie lub numerycznie. W niniejszej pracy przedstawiono jedynie rozwiązanie numeryczne. W tym celu przyjmiemy funkcję interpolującą przebieg temperatury pomiędzy poszczególnymi momentami czasu. Dla najprostszej, liniowej aproksymacji pomiędzy chwilami czasu oznaczonymi przez  $(m)$  i  $(m+1)$  uzyskujemy

$$T = (1 - \Theta) T^{(m)} + \Theta T^{(m+1)} \quad (3.12)$$

$$Q = (1 - \Theta) Q^{(m)} + \Theta Q^{(m+1)} \quad (3.13)$$

gdzie:  $\Theta$  ( $0 \leq \Theta \leq 1$ ) – bezwymiarowy parametr decydujący o typie schematu różnicowego,

$\Delta t^{(m)} = t^{(m+1)} - t^{(m)}$  – krok czasu.

Parametr  $\Theta$  definiuje aktualny czas  $t$  względem początku rozważanego kroku czasu

$$\Theta = \frac{t - t^{(m)}}{\Delta t^{(m)}} \quad (3.14)$$

Zrózniczkowanie zależności (3.12) i (3.13) według czasu prowadzi do następujących wyrażeń na pochodne temperatury i strumienia ciepła

$$\dot{T} = \frac{1}{\Delta t^{(m)}} (T^{(m+1)} - T^{(m)}) \quad (3.15)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{\Delta t^{(m)}} (Q^{(m+1)} - Q^{(m)}) \quad (3.16)$$

Pochodne czasowe wyższego rzędu są równe zero i układ równań różniczkowych (3.11) przekształca się automatycznie w skończony system równań algebraicznych

$$H_l T^{(m+1)} - G_l Q^{(m+1)} = -H_r T^{(m)} + G_r Q^{(m)} \quad (3.17)$$



w którym poszczególne macierze oblicza się następująco

$$\mathbf{H}_l = \Theta \mathbf{H}_0 + \frac{1}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}_l = \Theta \mathbf{G}_0 + \frac{1}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{G}_1 \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H}_r = (1 - \Theta) \mathbf{H}_0 - \frac{1}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 \quad (3.20)$$

$$\mathbf{G}_r = (1 - \Theta) \mathbf{G}_0 - \frac{1}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 \quad (3.21)$$

Ponieważ aproksymacje (3.12) i (3.13) są funkcjami liniowymi, otrzymane sformułowanie nazwano *dwupunktowym sformulowaniem pierwszego rzędu*.

Przebieg temperatury w czasie może być również aproksymowany wielomianami wyższego rzędu. Np. użycie funkcji kwadratowej prowadzi do dobrze znanego schematu trójpunktowego [63], [75], [83]

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\Theta - 1)\Theta\mathbf{T}^{(m-1)} + (1 - \Theta^2)\mathbf{T}^{(m)} + \frac{1}{2}(\Theta + 1)\Theta\mathbf{T}^{(m+1)} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\Theta - 1)\Theta\mathbf{Q}^{(m-1)} + (1 - \Theta^2)\mathbf{Q}^{(m)} + \frac{1}{2}(\Theta + 1)\Theta\mathbf{Q}^{(m+1)} \quad (3.23)$$

Parametr  $\Theta$  jest tym razem dowolną liczbą z przedziału  $< -1, 1 >$  spełniającą równanie (3.14). Oczywiście funkcje (3.22) i (3.23) lepiej oddają zmiany temperatury i gęstości strumienia ciepła niż liniowe aproksymacje (3.12) i (3.13); szczególnie kiedy parametr  $\Theta$  jest równy 0 (iloraz centralny).

Różniczkowanie zależności (3.22) i (3.23) według czasu daje

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\Theta + 0.5}{\Delta t^{(m)}} \mathbf{T}^{(m+1)} - \frac{2\Theta}{\Delta t^{(m)}} \mathbf{T}^{(m)} + \frac{\Theta - 0.5}{\Delta t^{(m)}} \mathbf{T}^{(m-1)} \quad (3.24)$$

$$\ddot{\mathbf{T}} = \frac{1}{(\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{T}^{(m+1)} - \frac{2}{(\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{T}^{(m)} + \frac{1}{(\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{T}^{(m-1)} \quad (3.25)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\Theta + 0.5}{\Delta t^{(m)}} \mathbf{Q}^{(m+1)} - \frac{2\Theta}{\Delta t^{(m)}} \mathbf{Q}^{(m)} + \frac{\Theta - 0.5}{\Delta t^{(m)}} \mathbf{Q}^{(m-1)} \quad (3.26)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{(\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{Q}^{(m+1)} - \frac{2}{(\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{Q}^{(m)} + \frac{1}{(\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{Q}^{(m-1)} \quad (3.27)$$

co prowadzi do tzw. *trójpunktowego sformułowania rzędu drugiego*

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_l \mathbf{T}^{(m+1)} - \mathbf{G}_l \mathbf{Q}^{(m+1)} = \\ & - \mathbf{H}_{r0} \mathbf{T}^{(m)} - \mathbf{H}_{r1} \mathbf{T}^{(m-1)} + \mathbf{G}_{r0} \mathbf{Q}^{(m)} + \mathbf{G}_{r1} \mathbf{Q}^{(m-1)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Poszczególne macierze oblicza się następująco

$$\mathbf{H}_l = 0.5\Theta(\Theta + 1)\mathbf{H}_0 + \frac{\Theta + 0.5}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 + \frac{1}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{H}_2 \quad (3.29)$$



$$\mathbf{G}_1 = 0.5\Theta(\Theta + 1) \mathbf{G}_0 + \frac{\Theta + 0.5}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{G}_1 + \frac{1}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{G}_2 \quad (3.30)$$

$$\mathbf{H}_{1,0} = (1 - \Theta^2) \mathbf{H}_0 - \frac{2\Theta}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 - \frac{2}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{H}_2 \quad (3.31)$$

$$\mathbf{G}_{1,0} = (1 - \Theta^2) \mathbf{G}_0 - \frac{2\Theta}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{G}_1 - \frac{2}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{G}_2 \quad (3.32)$$

$$\mathbf{H}_{1,1} = 0.5\Theta(\Theta - 1) \mathbf{H}_0 + \frac{\Theta - 0.5}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 + \frac{1}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{H}_2 \quad (3.33)$$

$$\mathbf{G}_{1,1} = 0.5\Theta(\Theta - 1) \mathbf{G}_0 + \frac{\Theta - 0.5}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{G}_1 + \frac{1}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{G}_2 \quad (3.34)$$

Aproksymację kwadratową temperatury i strumienia ciepła można również rozpiąć pomiędzy dwoma poziomami czasowymi  $t^{(m)}$  oraz  $t^{(m+1)}$ , [56]

$$\mathbf{T} = [(1 - p)\Theta + p] \Theta (\mathbf{T}^{(m+1)} - \mathbf{T}^{(m)}) + \mathbf{T}^{(m)} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{Q} = [(1 - p)\Theta + p] \Theta (\mathbf{Q}^{(m+1)} - \mathbf{Q}^{(m)}) + \mathbf{Q}^{(m)} \quad (3.36)$$

Parametr  $\Theta$  ponownie należy do przedziału  $< 0, 1 >$ , dodatkowy zaś parametr  $p$  jest miarą "odległości" aproksymacji (3.35) i (3.36) od aproksymacji liniowych (3.12) i (3.13). Na przykład dla  $p = 1$ , zależność (3.35) przechodzi w zależność (3.12). Różniczkowanie według czasu daje

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{2(1 - p)\Theta + p}{\Delta t^{(m)}} (\mathbf{T}^{(m+1)} - \mathbf{T}^{(m)}) \quad (3.37)$$

$$\ddot{\mathbf{T}} = \frac{2(1 - p)}{(\Delta t^{(m)})^2} (\mathbf{T}^{(m+1)} - \mathbf{T}^{(m)}) \quad (3.38)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{2(1 - p)\Theta + p}{\Delta t^{(m)}} (\mathbf{Q}^{(m+1)} - \mathbf{Q}^{(m)}) \quad (3.39)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \frac{2(1 - p)}{(\Delta t^{(m)})^2} (\mathbf{Q}^{(m+1)} - \mathbf{Q}^{(m)}) \quad (3.40)$$

Podstawiając powyższe do (3.11) otrzymuje się po prostych przekształceniach ponownie zależność (3.17), będącą jednak *dwupunktowym sformułowaniem rzędu drugiego*. Poszczególne macierze wyrażają się następująco

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_l = & \Theta [p + \Theta(1 - p)] \mathbf{H}_0 + \frac{2\Theta - 2p\Theta + p}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 + \\ & + \frac{2(1 - p)}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{H}_2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_l = & \Theta [p + \Theta(1 - p)] \mathbf{G}_0 + \frac{2\Theta - 2p\Theta + p}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{G}_1 + \\ & + \frac{2(1 - p)}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{G}_2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r &= (1 - \Theta)(1 + \Theta - \rho\Theta) \mathbf{H}_0 - \frac{2\Theta - 2\rho\Theta + \rho}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{H}_1 - \\ &\quad - \frac{2(1 - \rho)}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{H}_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_r &= (1 - \Theta)(1 + \Theta - \rho\Theta) \mathbf{G}_0 - \frac{2\Theta - 2\rho\Theta + \rho}{a\Delta t^{(m)}} \mathbf{G}_1 - \\ &\quad - \frac{2(1 - \rho)}{(a\Delta t^{(m)})^2} \mathbf{G}_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Możliwe są również aproksymacje rzędu wyższego niż drugi. Uzyskuje się wówczas nieco bardziej skomplikowane sformułowania, ale zasadniczo podobne do zaprezentowanych.

### 3.2.2. Kroczenie w czasie

Zależnie od przyjętego schematu różnicowego, rozwiązanie problemu dane jest wyrażeniem (3.17) – schemat dwupunktowy, lub (3.28) – schemat trójpunktowy. Całkowanie po czasie należy wykonać dla każdego kroku czasu. Aby obliczyć temperaturę i gęstość strumienia ciepła w chwili  $t^{(m+1)}$ , wymagana jest znajomość macierzy kolumnowych  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{Q}$  w chwili  $t^{(m)}$  dla schematu dwupunktowego oraz dodatkowo w chwili  $t^{(m-1)}$  dla schematu trójpunktowego. Macierze te znane są z poprzednich iteracji lub z warunku początkowego danego równaniem (3.2), jeśli obliczenia wykonywane są dla pierwszego kroku czasowego. Należy jednak wyraźnie podkreślić, że sformułowanie z rozwiązaniem podstawowym niezależnym od czasu nie pozwala uzyskać dokładnych wyników dla początku procesu. Jednocześnie istotne jest to, że początkowe niedokładności, a czasem nawet oscylacje, szybko zanikają w miarę kroczenia w czasie.

Biorąc powyższe pod uwagę oraz fakt, że trudno jest zainicjować proces iteracyjny dla schematów trójpunktowych, zaleca się wykonać najpierw kilka kroków czasu, stosując sformułowanie z rozwiązaniem podstawowym zależnym od czasu, a następnie zmienić sformułowanie na to, które zaprezentowano w niniejszym podrozdziale.

Prawa strona w równaniach (3.17) lub (3.28) po wykonaniu odpowiednich operacji macierzowych tworzy macierz kolumnową  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{H}_l \mathbf{T}^{(m+1)} - \mathbf{G}_l \mathbf{Q}^{(m+1)} = \mathbf{R} \quad (3.45)$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych powyższy układ równań przekształcamy do postaci

$$\mathbf{A} \mathbf{X}^{(m+1)} = \mathbf{f} \quad (3.46)$$

i rozwiązujemy klasycznymi metodami. Jeśli obliczenia prowadzone są dla stałego kroku czasu przy niezmiennym w czasie typie warunków brzegowych,

macierz główna układu  $A$  nie zależy od czasu. Tym samym układ równań (3.46) wystarczy sfaktoryzować tylko raz.

Obliczenie macierzy niewiadomych  $X^{(m+1)}$  pozwala na podstawie warunków brzegowych znaleźć zarówno temperaturę, jak i strumień ciepła dla czasu  $t^{(m+1)}$ . Po uaktualnieniu macierzy kolumnowych  $T$  i  $Q$  dla czasu  $t^{(m)}$  i ewentualnie  $t^{(m-1)}$ , jeśli stosowany jest schemat trójpunktowy, można przeprowadzić obliczenia dla następnego kroku czasu.

### Przykład 3.5. Nieustalone przewodzenie ciepła

Prześledzono proces nieustalonego przewodzenia ciepła w przekroju prostokątnym nieskończenie długiego pręta. Rozmiary obszaru oraz jego dyskretyzację na 30 elementów stałych pokazano na rys.3.8. Zagadnienie jest sformułowane w postaci bezwymiarowej. Wzdłuż brzegów  $x=0$  oraz  $y=0$  założono izolację cieplną, na pozostałych zaś brzegach, tj.  $x=0.5$  oraz  $y=1.0$  założono konwekcyjną wymianę ciepła z otoczeniem o temperaturze 0 przy liczbie Biota  $Bi=0.5$ . Jako warunek początkowy przyjęto wyrównany rozkład temperatury w całym obszarze  $T_0=1$ .

Rezultaty obliczeń numerycznych porównano z rozwiązaniem analitycznym i uzyskany błąd bezwzględny nieustalonego pola temperatury w dwóch wybranych węzłach przedstawiono na rys.3.9 oraz 3.10. Kwadraciki na tych rysunkach oznaczają rozwiązanie WZW otrzymane za pomocą dwupunktowego sformułowania pierwszego rzędu, romby zaś za pomocą dwupunktowego sformułowania drugiego rzędu. Dla porównania zamieszczono również błąd bezwzględny rozwiązania uzyskanego za pomocą podwójnej zasady wzajemności z jednym, centralnym punktem wewnętrznym.

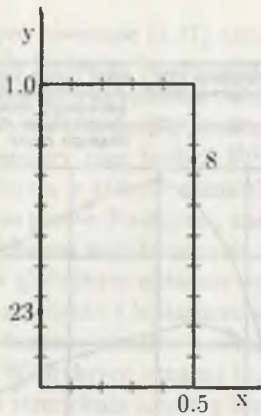
Obliczenia przeprowadzono ze stosunkowo dużym, bezwymiarowym krokiem czasu wynoszącym 0.2 przy zastosowaniu parametrów  $\Theta = 1$  i  $p = 1.2$ .

Należy dodać, że próba obliczenia pola temperatury dla bardzo małych liczb Fouriera zakończyła się niepowodzeniem. Pojawiające się oscylacje spowodowane były najprawdopodobniej zbyt małą liczbą wyrazów szeregu (rezultat przyjętych aproksymacji temperatury w czasie). Dlatego też dla bardzo małych liczb Fouriera zalecane jest stosowanie sformułowania z rozwiązaniem podstawowym zależnym od czasu.

## 3.3. Nieliniowe zagadnienia brzegowe przewodzenia ciepła

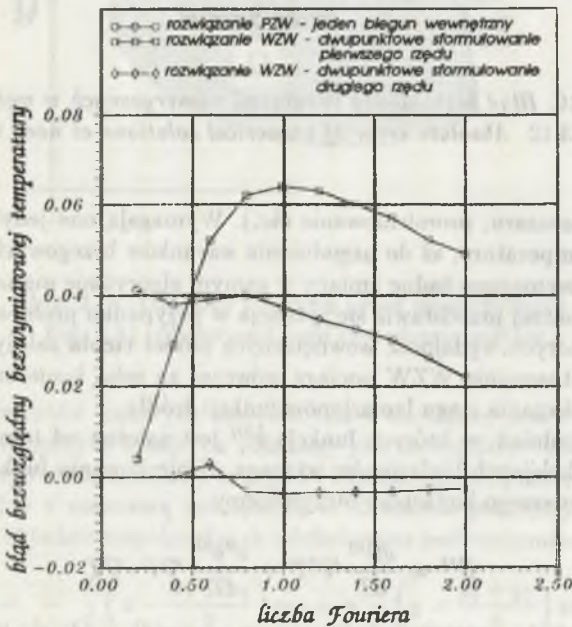
Wielokrotną zasadę wzajemności można wprost stosować do rozwiązywania niektórych typów zadań nieliniowych. Przykładem są zagadnienia brzegowe z nieliniowością skupioną w warunkach brzegowych (konwekcja swobodna





Rys. 3.8. Dyskretyzacja brzegu przekroju prostokątnego na elementy brzegowe stałe

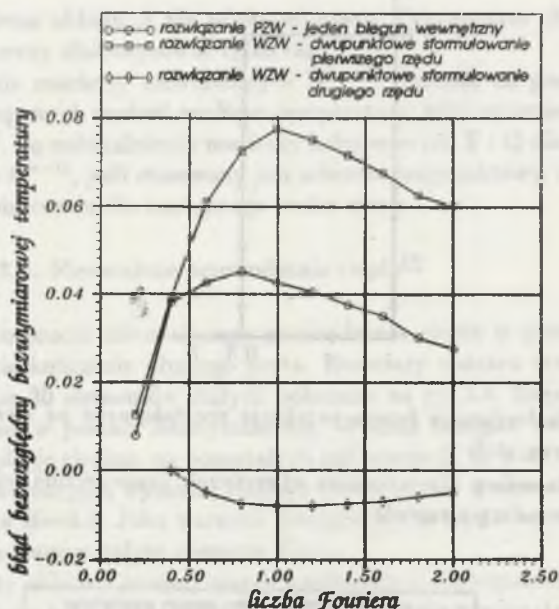
Fig. 3.8. Boundary discretization of rectangle cross-section with constant boundary elements



Rys. 3.9. Błąd bezwzględny rozwiązań numerycznych w węźle nr 8

Fig. 3.9. Absolute error of numerical solutions at node no 8





Rys. 3.10. Błąd bezwzględny rozwiązań numerycznych w węźle nr 23

Fig. 3.10. Absolute error of numerical solutions at node no 23

na brzegu obszaru, promieniowanie etc.). Wymagają one jedynie iterowania pola temperatury, aż do uzgodnienia warunków brzegowych [6]. Nie są natomiast wymagane żadne zmiany w samym algorytmie metody.

Nieco inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku problemów brzegowych, w których wydajność wewnętrznych źródeł ciepła zależy od temperatury. Zastosowanie WZW pociąga wówczas za sobą konieczność zmiany sposobu obliczania ciągów laplasjanów funkcji źródła.

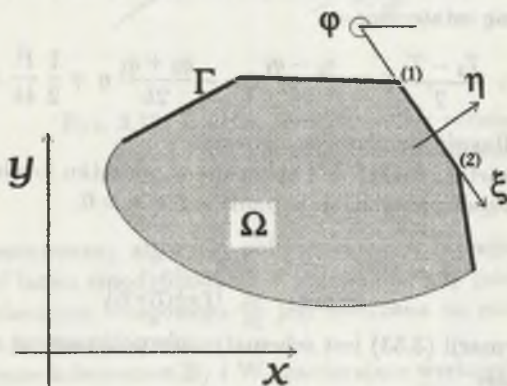
Dla zagadnień, w których funkcja  $b^{(0)}$  jest zależna od temperatury  $T$ , obliczanie kolejnych laplasjanów wymaga różniczkowania funkcji złożonej. Np. dla pierwszego laplasjanu otrzymujemy

$$b^{(1)} = \frac{db^{(0)}}{dT} \nabla^2 T + \frac{d^2 b^{(0)}}{dT^2} \nabla T \cdot \nabla T \quad (3.47)$$

Równanie to upraszcza się istotnie w przypadku, gdy druga pochodna funkcji źródła według temperatury znika. Dzieje się tak wówczas, kiedy uogólnione źródło ciepła wyraża się za pomocą liniowej funkcji lub liniowego operatora od temperatury. Przykładem takich zagadnień są np. procesy nieustalonego przewodzenia ciepła, opisane w poprzednim podrozdziale, oraz zagadnienia opisywane równaniem Helmholtza, omówione w rozdziale 5.

W przypadku ogólnym równanie (3.47) zawiera dwa wyrazy. Występujący w pierwszym wyrazie laplasjan temperatury można na podstawie równania (1.6) zastąpić uogólnionym członem źródłowym. Wyraz drugi natomiast zawiera, kłopotliwy do obliczenia, gradient temperatury. Dlatego też celem uproszczenia procedury ciąg funkcji  $b^{(j)}$  i  $w^{(j)}$  oblicza się w lokalnym układzie współrzędnych, w którym różniczkowanie rozwiązania podług współrzędnych jest bardzo proste. Następnie, znając transformację pomiędzy globalnym i lokalnym układem współrzędnych, przelicza się ten ciąg na laplasjany obowiązujące w globalnym układzie współrzędnych.

Ponieważ obliczanie gradientu i laplasjanu wymaga różniczkowania według dwóch zmiennych, funkcje kształtu powinny być funkcjami dwóch lokalnych współrzędnych. W praktyce oznacza to, że WZW wykorzystuje zależność temperatury  $T$  i strumienia ciepła  $q$  zarówno wzdłuż brzegu  $\Gamma$ , jak i wzdłuż normalnej zewnętrznej do tego brzegu.



Rys. 3.11. Globalny i lokalny układ współrzędnych

Fig. 3.11. Global and local co-ordinate system

Dla elementów liniowych stosowanych w niniejszej pracy odpowiedni układ współrzędnych lokalnych pokazany jest na rys.3.11. Lokalna współrzędna  $\xi$  odpowiada orientacji brzegu  $\Gamma$ , lokalna współrzędna  $\eta$  zaś ma kierunek zgodny z normalną zewnętrzną  $n$ . Zależność pomiędzy lokalnym i globalnym układem współrzędnych zdefiniowana jest równaniami

$$\xi = + \frac{2}{l} \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cos \varphi + \frac{2}{l} \left( y - \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \sin \varphi \quad (3.48)$$

$$\eta = - \frac{2}{l} \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \sin \varphi + \frac{2}{l} \left( y - \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \cos \varphi \quad (3.49)$$

gdzie:  $\varphi$  - kąt, jaki element brzegowy tworzy z osią  $x$ .

Dla elementu liniowego  $T$  i  $\frac{\partial T}{\partial n}$  zmieniają się liniowo wzdłuż elementu – por. rys.1.4. Tym samym następujące zależności obowiązują dla  $\eta = 0$

$$T = \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \xi \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{T_2 - T_1}{2} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{q_2 + q_1}{2k} - \frac{q_2 - q_1}{2k} \xi \quad (3.52)$$

Indeksy 1 and 2 odnoszą się odpowiednio do początku i końca elementu brzegowego.

Dla potrzeb WZW aproksymacji (3.51) i (3.52) są modyfikowane przez dodanie do każdej z nich członu proporcjonalnego do  $\eta$  (człon ten znika na brzegu  $\Gamma$ , dając klasyczne aproksymacje MEB). Po prostych przekształceniach otrzymuje się ostatecznie

$$T = \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \xi - \frac{q_2 - q_1}{2k} \xi \eta - \frac{q_2 + q_1}{2k} \eta + \frac{1}{2} \frac{l^2}{4k} \beta \eta^2 \quad (3.53)$$

gdzie:  $l$  – długość elementu brzegowego,  
 $\beta$  – wartość funkcji  $b^{(0)}$  obliczona w początku lokalnego układu współrzędnych, tj. w punkcie  $\xi = \eta = 0$ .

$$\beta = b^{(0)} \Big|_{\xi=\eta=0} = b^{(0)} \Big|_{T=\frac{1}{2}(T_1+T_2)} \quad (3.54)$$

Przebieg aproksymacji (3.53) jest schematycznie pokazany na rys.3.12. Jej różniczkowanie daje

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{T_2 - T_1}{2} - \frac{q_2 - q_1}{2k} \eta \quad (3.55)$$

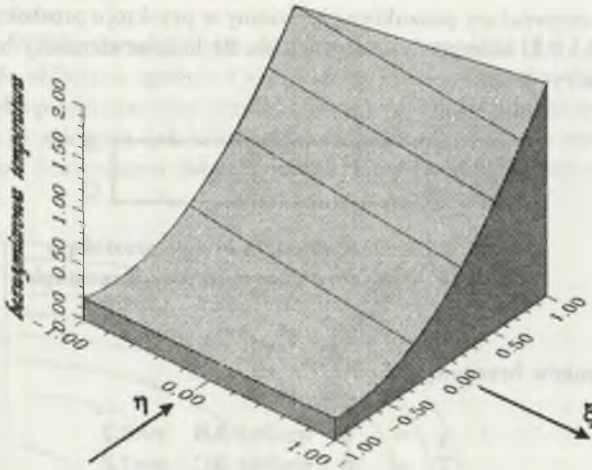
$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{q_2 + q_1}{2k} - \frac{q_2 - q_1}{2k} \xi - \frac{l^2}{4k} \beta \eta \quad (3.56)$$

Warto zauważyć, że podczas obliczania macierzy wpływu  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{G}$  powyższe zależności używane są jako funkcje kształtu, z tym że wówczas  $\eta = 0$ .

Kolejne laplasjany funkcji źródła w lokalnym układzie współrzędnych mogą być teraz łatwo obliczone z wykorzystaniem oprogramowania symbolicznego Derive [73] czy Mathematica [80]. Wymagane jest różniczkowanie uogólnionego członu źródłowego (znana funkcja  $T$ ) podług temperatury  $T$  oraz różniczkowanie zależności (3.53) podług lokalnych współrzędnych. Uwzględniając transformacje (3.48) i (3.49), można związać laplasjany  $\nabla_{x,y}^2$  oraz  $\nabla_{\xi,\eta}^2$  odpowiednio w globalnym i lokalnym układzie współrzędnych, następującą zależnością

$$\nabla_{x,y}^2 b^{(j)} = \left( \frac{4}{l^2} \right) \nabla_{\xi,\eta}^2 b^{(j)} \quad (3.57)$$





Rys. 3.12. Lokalne zachowanie się rozwiązania  
 Fig. 3.12. Local behaviour of solution

Zaprezentowany algorytm obliczania ciągu laplasjanów funkcji źródła może być łatwo zmodyfikowany w przypadku, gdy pochodna temperatury wzdłuż elementu brzegowego  $\frac{\partial T}{\partial \xi}$  jest obliczana na podstawie rozwiązania równania hiperosobliwego.

Macierze kolumnowe  $\mathbf{B}_j$  i  $\mathbf{W}_j$  zawierające wartości funkcji  $b^{(j)}$  i  $w^{(j)}$  w węzłach brzegowych są dla zagadnień nieliniowych zależne od temperatury  $T$ . W konsekwencji rozwiązanie zagadnienia brzegowego można uzyskać jedynie iteracyjnie. Zakładając mianowicie wstępnie rozkład temperatury i strumienia ciepła na brzegu ciała, oblicza się funkcję źródła oraz ciąg jej laplasjanów. Uwzględniając warunki brzegowe, rozwiązanie problemu sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych (1.29). Z układu tego znajduje się macierz niewiadomych, która pozwala na podstawie warunków brzegowych zaktualizować rozkład temperatury i strumienia ciepła na brzegu ciała. Pętla iteracyjna jest wykonywana aż do osiągnięcia kryterium zbieżności.

Celem zaprezentowania dokładności i efektywności WZW przy rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych przeanalizowano dwa następujące przykłady.

### Przykład 3.6. Nieliniowe zagadnienie przewodzenia ciepła

Rozważmy zagadnienie brzegowe opisanie następującym równaniem Poissona

$$\nabla^2 T = 12\sqrt{T} \quad (3.58)$$

Pola temperatury poszukiwać będziemy w przekroju prostokątnym o wymiarach  $1 \times 0,2$ , którego dyskretyzację na 24 liniowe elementy brzegowe pokazano na rys.3.13.



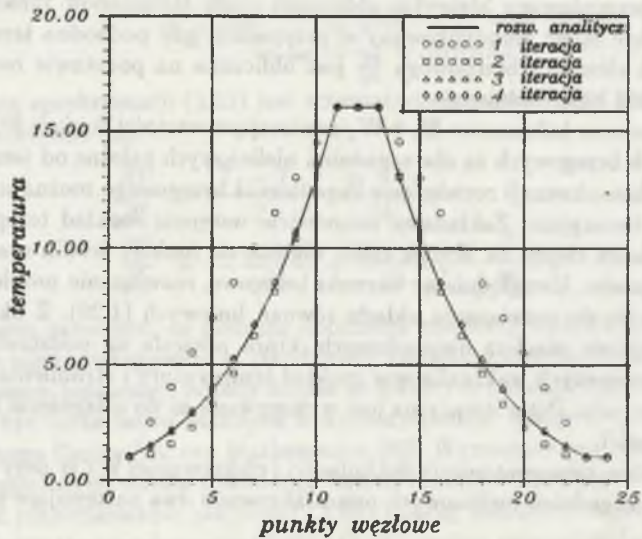
Rys. 3.13. *Dyskretyzacja brzegu prostokąta*  
Fig. 3.13. *Boundary discretization of rectangle*

Dla warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} q &= 0 & \text{wzdłuż AB} & y=0,2 \\ T &= 16 & \text{wzdłuż BC} & x=2,0 \\ q &= 0 & \text{wzdłuż CD} & y=0,0 \\ T &= 1 & \text{wzdłuż AD} & x=1,0 \end{aligned}$$

rozwiązanie analityczne ma postać

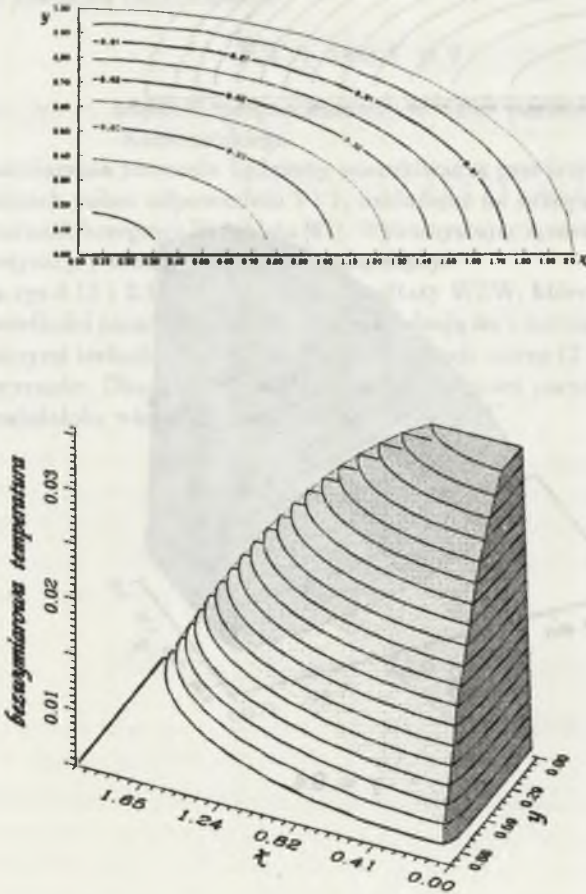
$$T = x^4$$



Rys. 3.14. *Zdążanie rozwiązania WZW do rozwiązania analitycznego*

Fig. 3.14. *Convergence of MRM results to analytical solution*

Stosując WZW, uwzględniono dwa wyrazy szeregu (2.15). Laplasjany funkcji źródła obliczano zgodnie z algorytmem opisanym w niniejszym podrozdziale. Jako punkt startowy przyjęto liniowy rozkład temperatury wzdłuż osi  $x$ . Rys.3.14 pokazuje, jak kilka pierwszych iteracji zdąża do rozwiązania analitycznego. Stwierdzono dobrą zbieżność i wysoką dokładność wyników.

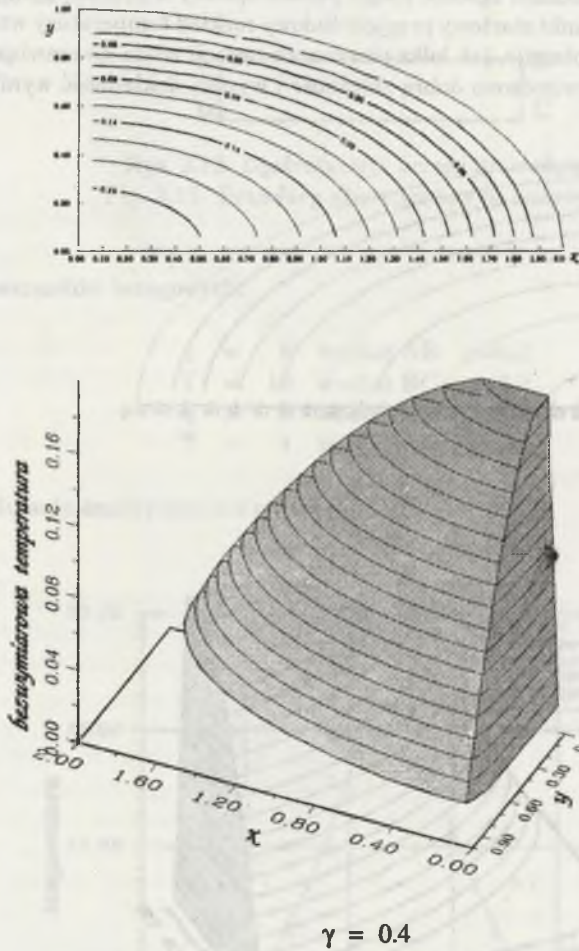


$$\gamma = 0.1$$

Rys. 3.15. Izotermy oraz przestrzenny obraz rozkładu temperatury dla zjawiska samozapłonu w przekroju eliptycznym przy  $\gamma = 0.1$

Fig. 3.15. Isothermal lines and 3-D plot of temperature distribution for self-ignition problem in elliptic cross-section with  $\gamma = 0.1$





Rys. 3.16. Izotermy oraz przestrzenny obraz rozkładu temperatury dla zjawiska samozapłonu w przekroju eliptycznym przy  $\gamma = 0.4$

Fig. 3.16. Isothermal lines and 3-D plot of temperature distribution for self-ignition problem in elliptic cross-section with  $\gamma = 0.4$

**Przykład 3.7.** Analiza zjawisk samozapłonu

Poszukujemy ustalonego pola temperatury wywołanego reakcją chemiczną towarzyszącą procesowi samozapłonu. Badając zjawiska samozapłonu [67], zakłada się wykładniczą zależność wydajności wewnętrznych źródeł ciepła od temperatury i sprowadza zagadnienie brzegowe do rozwiązania następującego równania różniczkowego

$$\nabla^2 T + \gamma \exp T = 0 \quad (3.59)$$

gdzie:  $\gamma$  – wielkość proporcjonalna do tzw. parametru Franka-Kamenetskiego.

Rozwiązania równania będziemy poszukiwać w przekroju eliptycznym o długościach półośi odpowiednio 2 i 1, zakładając na brzegu elipsy jednorodny warunek brzegowy Dirichleta [67]. Wykorzystując symetrię zagadnienia, dyskretyzacji poddano jedynie ćwiartkę elipsy.

Na rys.3.15 i 3.16 przedstawiono rezultaty WZW, które dla dwóch różnych wielkości parametru  $\gamma$  dość dobrze zgadzają się z rozwiązaniem uzyskanym innymi technikami [67]. W obu przypadkach szereg (2.15) ograniczono do 5 wyrazów. Okazało się, że dla większych wartości parametru  $\gamma$  uwzględnić należałoby więcej wyrazów szeregu.

## Rozdział 4

# Zastosowanie WZW w zagadnieniach sprężystości i termosprężystości

W porównaniu z zagadnieniami potencjalnymi problemy sprężystości są niepomrotnie bardziej skomplikowane. Poszukiwane pola przemieszczeń są polami wektorowymi, zaś pola naprężeń polami tensorowymi. W konsekwencji już sama notacja równań staje się dość kłopotliwa, gdyż wymaga uwzględnienia składowych pola przemieszczeń i naprężeń w poszczególnych kierunkach przyjętego układu współrzędnych. Powszechnie zatem stosowanym sposobem zapisu równań sprężystości i termosprężystości jest konwencja sumacyjna Einsteina, w której dwukrotnie występujący indeks oznacza sumowanie. Taką też notację zastosowano w niniejszej pracy.

### 4.1. Podstawowe zależności teorii sprężystości

Rozważania w niniejszym rozdziale ograniczone są do statycznych zagadnień sprężystości przy niewielkich odkształceniach sprężystych. Pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń są wówczas powiązane są ze sobą następującymi trzema rodzajami zależności, np. [49]:

- równaniami równowagi, które wiążą pochodne przestrzenne składowych tensora naprężeń ze składowymi sił masowych

$$\sigma_{im,i} + b_m = 0 \quad (4.1)$$

gdzie:  $\sigma_{im}$  – składowe tensora naprężeń,  
 $b_m$  – składowe sił masowych,



- relacjami kinematycznymi, które wyrażają odkształcenia poprzez przemieszczenia

$$\varepsilon_{im} = \frac{1}{2}(u_{i,m} + u_{m,i}) \quad (4.2)$$

gdzie:  $\varepsilon_{im}$  – składowe tensora odkształceń,  
 $u_m$  – składowe wektora przemieszczeń,

- równaniami konstytutywnymi, ustalającymi związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem. Dla zagadnień sprężystości liniowej jest to prawo Hooke'a

$$\sigma_{im} = 2\mu \varepsilon_{im} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{im} \quad (4.3)$$

gdzie:  $\mu$  – moduł odkształcenia postaciowego,  
 $\nu$  – współczynnik Poissona,  
 $\delta_{im}$  – delta Kroneckera definiowana jako

$$\delta_{im} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i = m \\ 0 & \text{jeśli } i \neq m \end{cases}$$

Moduł odkształcenia postaciowego  $\mu$  może być wyrażony poprzez moduł sprężystości Younga  $E$  oraz współczynnik Poissona  $\nu$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

W dwuwymiarowych zagadnieniach sprężystości równania (4.1)-(4.3) stanowią układ 9 równań z 9 nieznanymi składowymi. Równania te można dalej przekształcać, co prowadzi do otrzymania podstawowego równania teorii sprężystości, równania Naviera

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{i,im} + u_{m,ii} + \frac{1}{\mu} b_m = 0 \quad (4.4)$$

Do jednoznacznego rozwiązania równania (4.4) wymagana jest znajomość warunków brzegowych. Ustalają one wartości przemieszczeń i sił powierzchniowych odpowiednio na częściach  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  brzegu  $\Gamma$

$$\begin{aligned} u_m &= \bar{u}_m && \text{wzdłuż } \Gamma_1 \\ p_m &= \bar{p}_m && \text{wzdłuż } \Gamma_2 \end{aligned}$$

gdzie:  $\bar{u}_m$  – składowa (w kierunku  $m$ ) przemieszczenia na brzegu  $\Gamma_1$ ,  
 $\bar{p}_m$  – składowa (w kierunku  $m$ ) siły powierzchniowej na brzegu  $\Gamma_2$ .

Należy podkreślić, że podział brzegu  $\Gamma$  na części  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  stanowi jedynie koncepcję obliczeniową, jako że w różnych kierunkach różne typy warunku brzegowego mogą być zdefiniowane w tym samym punkcie brzegu.

### 4.1.1. Naprężenia termiczne

Obliczanie naprężeń termicznych  $\sigma_{im}^T$  wymaga znajomości pola temperatury. Zakłada się zwykle, że pole temperatury oddziałuje na pole naprężeń, pole naprężeń zaś nie wpływa na pole temperatury. Takie też założenie przyjęto w niniejszej pracy, w konsekwencji rozprzegając analizowane zagadnienia brzegowe przepływu ciepła i sprężystości. Pole temperatury może być polem ustalonym lub nieustalonym. Zakładając jednocześnie, że przyspieszenia występujące w zagadnieniu sprężystości są niewielkie i tym samym pomijając człon bezwładnościowy, rozpatruje się zwykle ustalone pole naprężeń. Całe zagadnienie staje się tzw. quasi-statycznym zagadnieniem termosprężystości.

Naprężenia termiczne  $\sigma_{im}^T$  uwzględnia się najczęściej [49], modyfikując równania konstytutywne (4.3)

$$\sigma_{im} = 2\mu \varepsilon_{im} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{im} - \sigma_{im}^T \quad (4.5)$$

Dla materiałów izotropowych, o własnościach niezależnych od temperatury, naprężenia te wyrażają się następująco

$$\sigma_{im}^T = 2\mu \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \varepsilon_{im}^T$$

przy czym

$$\varepsilon_{im}^T = \alpha \Delta T \delta_{im} \quad (4.6)$$

gdzie:  $\alpha$  – współczynnik rozszerzalności termicznej liniowej,  
 $\Delta T$  – nadwyżka temperatury ponad stan naturalny, w którym naprężenia i deformacje są równe zero.

W tym ujęciu działanie pola temperatury jest szczególnym przypadkiem stanu odkształceń początkowych. Alternatywnie, naprężenia termiczne można uwzględnić przez wprowadzenie do równania Naviera dodatkowych sił masowych, proporcjonalnych do gradientu temperatury [7]

$$b_m = -2\mu \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha T_{,m} \quad (4.7)$$

## 4.2. Równania całkowite sprężystości i termosprężystości

Równania całkowite sprężystości otrzymuje się, podobnie jak w przypadku zagadnień potencjalnych, przez zastosowanie zasady wzajemności do dwóch pól; tym razem pól przemieszczeń. Pierwszym polem jest poszukiwane pole

przemieszczeń, zdefiniowane równaniem Naviera. Drugim jest pole  $u^*$  będące rozwiązaniem podstawowym równania (4.4). Pole  $u^*$  spełnia więc następujące równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{i,im}^* + u_{m,ii}^* + \frac{1}{\mu} b_m^* = 0 \quad (4.8)$$

gdzie:  $b_m^*$  – jednostkowe obciążenie punktowe działające w każdym z ortogonalnych kierunków (określonych przez wektor jednostkowy  $e_m$ )

$$b_m^* = \delta(Y_z, Y_b) e_m \quad (4.9)$$

gdzie:  $Y_z$  – punkt źródłowy,  
 $Y_b$  – punkt bieżący.

Składowe przemieszczeń i sił powierzchniowych w danym kierunku  $m$  są wynikiem działania składowych jednostkowego obciążenia punktowego. Mamy zatem

$$\begin{aligned} u_m^* &= u_{im}^*(Y_z, Y_b) e_i \\ p_m^* &= p_{im}^*(Y_z, Y_b) e_i \end{aligned}$$

gdzie:  $u_{im}^*$  i  $p_{im}^*$  – tzw. rozwiązania podstawowe teorii sprężystości.

Rozwiązania podstawowe teorii sprężystości reprezentują przemieszczenia i siły powierzchniowe w kierunku  $m$  w punkcie  $Y_b$  odpowiadające punktowemu obciążeniu jednostkowemu działającemu w punkcie  $Y_z$  w kierunku  $i$ . Dla zagadnień dwuwymiarowych mają one postać, [9]; [12]

$$u_{im}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left\{ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{im} + r_{,i} r_{,m} - \frac{1}{2} \delta_{im} \right\} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} p_{im}^* &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu) \delta_{im} + 2r_{,i} r_{,m}] \frac{\partial r}{\partial n} - \right. \\ &\quad \left. -(1-2\nu)(r_{,i} n_m - r_{,m} n_i) \right\} \quad (4.11) \end{aligned}$$

gdzie:  $r$  – odległość punktów  $Y_z$  i  $Y_b$ ,  
 $n_m$  – kosinusy kierunkowe normalnej  $n$ , zewnętrznej do brzegu  $\Gamma$ .

Zastosowanie zasady wzajemności do pól  $u$  oraz  $u^*$  prowadzi do następującego równania całkowego

$$\begin{aligned} c_{im}(Y_z) u_m(Y_z) &= \int_{\Gamma} u_{im}^*(Y_z, Y_b) p_m(Y_b) d\Gamma(Y_b) - \\ - \int_{\Gamma} p_{im}^*(Y_z, Y_b) u_m(Y_b) d\Gamma(Y_b) &+ \int_{\Omega} u_{im}^*(Y_z, Y_b) b_m(Y_b) d\Omega(Y_b) \quad (4.12) \end{aligned}$$



gdzie:  $c_{im}$  - współczynnik zależny od kształtu brzegu w punkcie  $Y_2$ . Jego wartość wyliczyć można np. przez uwzględnienie warunku równowagi dla całego ciała jako bryły sztywnej [9], [12], [13]. Dla brzegu gładkiego  $c_{im} = 0.5\delta_{im}$ , natomiast dla punktów wewnętrznych obszaru  $c_{im} = \delta_{im}$ .

Stosując uproszczenie notacji, podobnie jak w rozdziale 1, równanie (4.12) zapiszemy ostatecznie następująco

$$c_{im} u_m + \int_{\Gamma} p_{im}^* u_m d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{im}^* p_m d\Gamma + \int_{\Omega} u_{im}^* b_m d\Omega \quad (4.13)$$

Po znalezieniu nieznanymi wielkości brzegowych równanie (4.13) może być wykorzystane do obliczania przemieszczeń w punktach wewnętrznych ciała. Naprężenia w punktach wewnętrznych są natomiast rezultatem różniczkowania równania (4.13) według współrzędnych geometrycznych i wykorzystania prawa Hooke'a

$$\sigma_{im} = \int_{\Gamma} u_{imk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{imk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{imk}^* b_k d\Omega \quad (4.14)$$

Stowarzyszone z rozwiązaniami podstawowymi teorii sprężystości składowe tensorów  $u_{imk}^*$  i  $p_{imk}^*$  mają dla zagadnień dwuwymiarowych odpowiednio postać, [9], [12]

$$\begin{aligned} u_{imk}^* &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)(r_{,m}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{mk} - r_{,k}\delta_{im}) + \\ &+ 2r_{,i}r_{,m}r_{,k} \} \quad (4.15) \\ p_{imk}^* &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,m} + n_m \delta_{ik} + n_i \delta_{mk}) + \right. \\ &+ 2\frac{\partial r}{\partial n} [ (1-2\nu)\delta_{im}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,m} + \delta_{mk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,m}r_{,k} ] + \\ &\left. + 2\nu(n_i r_{,m}r_{,k} + n_m r_{,i}r_{,k}) - (1-4\nu)n_k \delta_{im} \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

Analogicznie równania całkowe dla zagadnień termosprężystości wymagają uwzględnienia zależności (4.5) bądź (4.7). Rozpatrując jedynie obciążenie termiczne, otrzymuje się [7], [9], [12], [49]

$$\begin{aligned} c_{im} u_m + \int_{\Gamma} p_{im}^* u_m d\Gamma &= \int_{\Gamma} u_{im}^* p_m d\Gamma + \\ &+ 2\mu \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha \int_{\Omega} u_{im,m}^* \Delta T d\Omega \quad (4.17) \end{aligned}$$

gdzie:

$$u_{im,m}^* = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\mu} \frac{r_{,i}}{r} \quad (4.18)$$

Wyrażenia na naprężenia w punktach wewnętrznych ciała wynikają ze zróźniczkowania równania (4.17). Ponieważ jednak rozwiązanie podstawowe (4.18) zawiera osobliwość, jego zróźniczkowanie wymaga zastosowania wzoru Leibniza [32]. Daje to następującą zależność całkową na naprężenia w punktach wewnętrznych [7], [9], [45]

$$\begin{aligned} \sigma_{im} = & \int_{\Gamma} u_{imk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{imk}^* u_k d\Gamma \\ & - 2\mu \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha \left[ \int_{\Omega} \sigma_{im}^* \Delta T d\Omega + \Delta T \delta_{im} \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_{im}^* = & -u_{imk,k}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} \delta_{im} \delta(Y_z, Y_b) = \\ = & \frac{(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \left[ \frac{1}{r^2} \left( r_{,i} r_{,m} - \frac{\delta_{im}}{2} \right) - \frac{\pi}{2(1-2\nu)} \delta_{im} \delta(Y_z, Y_b) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Zaprezentowane równania są ważne dla płaskiego stanu odkształcenia. Dla płaskiego stanu naprężeń wielkość  $\nu$  winna być zastąpiona przez  $\bar{\nu}$ , natomiast  $\alpha$  przez  $\bar{\alpha}$ . Związek między tymi wielkościami ujmują następujące równania

$$\begin{aligned} \bar{\nu} = & \frac{\nu}{1+\nu} \\ \bar{\alpha} = & \frac{\alpha}{1+\bar{\nu}} = \alpha \left( \frac{1+\alpha}{1+2\nu} \right) \end{aligned}$$

#### 4.2.1. Dyskretyzacja równań całkowych sprężystości i termosprężystości

Równania całkowe sprężystości i termosprężystości w postaci (4.13), (4.14), (4.17) i (4.19) zawierają oprócz całek po brzegu obszaru również całki po całym obszarze  $\Omega$ . Tym samym bezpośrednia ich dyskretyzacja, podobnie jak ma to miejsce w przypadku źródłowych pól temperatury, nie byłaby efektywna numerycznie. Dyskretyzacji poddaje się zatem jedynie brzeg obszaru, całki po obszarze zaś transformuje się w równoważne im całki brzegowe. W procesie transformacji wykorzystamy ponownie wielokrotną zasadę wzajemności.

Wprowadzając macierze wpływu  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{G}$ , zdyskretyzowane równania (4.13) i (4.17) zapisujemy następująco

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{R} \quad (4.21)$$

gdzie:  $\mathbf{U}$  - macierz przemieszczeń,  
 $\mathbf{P}$  - macierz sił powierzchniowych,  
 $\mathbf{R}$  - macierz powstała przez obliczenie wartości całek po obszarze  $\Omega$ , występujących w równaniach (4.13) lub (4.17).

Sposób uwzględniania warunków brzegowych jest analogiczny jak w przypadku zagadnień potencjalnych i nie wymaga osobnego omówienia. W efekcie otrzymuje się układ równań algebraicznych o postaci (1.29).

### 4.3. Transformacja całek po obszarze w całki brzegowe

W równaniach całkowych sprężystości (4.13) i (4.14) oraz termosprężystości (4.17) i (4.19) występują cztery rodzaje całek po obszarze  $\Omega$ . Różnią się one między sobą postacią rozwiązania podstawowego oraz funkcją obciążenia. Stosując uogólniony zapis

$$D^{(0)} = \int_{\Omega} u^{*(0)} b^{(0)} d\Omega \quad (4.22)$$

oraz uwzględniając zależności podane w rozdziale 2, otrzymujemy następującą brzegową reprezentację całki po obszarze  $\Omega$

$$D^{(0)} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^{*(j+1)}}{\partial n} b^{(j)} - u^{*(j+1)} \frac{\partial b^{(j)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.23)$$

Znaczenie poszczególnych symboli wynika z tablicy 4.1.

Tablica 4.1

Uogólnione rozwiązania podstawowe oraz uogólnione obciążenia w równaniach całkowych sprężystości i termosprężystości

Równanie całkowe	Uogólnione rozwiązanie podstawowe		Obciążenie uogólnione $b^{(0)}$
	$u^{*(0)}$	nr równ. def.	
(4.13)	$u_{im}^*$	(4.10)	$b_m$
(4.14)	$u_{imk}^*$	(4.15)	$b_k$
(4.17)	$u_{im,m}^*$	(4.18)	$\Delta T$
(4.19)	$\sigma_{im}^*$	(4.20)	$\Delta T$

Zależność (4.23) wymaga obliczenia ciągu kolejnych laplasjanów obciążenia oraz zdefiniowania rozwiązań podstawowych wyższych rzędów. Rozwiązania te wynikają z następujących równań rekurencyjnych



$$\nabla^2 u_{im}^{*(j+1)} = u_{im}^{*(j)} \quad (4.24)$$

$$\nabla^2 u_{imk}^{*(j+1)} = u_{imk}^{*(j)} \quad (4.25)$$

$$\nabla^2 u_{im,m}^{*(j+1)} = u_{im,m}^{*(j)} \quad (4.26)$$

$$\nabla^2 \sigma_{im}^{*(j+1)} = \sigma_{im}^{*(j)} \quad (4.27)$$

W powyższych równaniach dolne indeksy są związane z kierunkiem w przestrzeni, rząd rozwiązania podstawowego i obciążenia zaś wskazuje górny indeks.

Neves w swej pracy doktorskiej [42] podał rozwiązanie równań (4.24) i (4.25) dla  $j = 0$

$$u_{im}^{*(1)} = -\frac{r^2}{32\pi(1-\nu)\mu} \left\{ (3-4\nu)(\ln r - 1)\delta_{im} - (r_{,i}r_{,m} - \frac{\delta_{im}}{2}) \ln r \right\} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial u_{im}^{*(1)}}{\partial n} = \frac{r n_k}{32\pi(1-\nu)\mu} \left\{ (r_{,i}\delta_{mk} + r_{,m}\delta_{ik}) \ln r + r_{,i}r_{,m}r_{,k} + \delta_{im}r_{,k} \left[ (3-4\nu)(2\ln r - 1) + \ln r + \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (4.29)$$

$$u_{imk}^{*(1)} = \frac{r}{16\pi(1-\nu)} \left\{ (r_{,i}\delta_{mk} + r_{,m}\delta_{ki} + r_{,k}\delta_{im}) \ln r + 2(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{mk} + r_{,m}\delta_{ki} - r_{,k}\delta_{im}) \ln r - r_{,i}r_{,m}r_{,k} \right\} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial u_{imk}^{*(1)}}{\partial n} = \frac{n_l}{16\pi(1-\nu)} \left\{ 2(1-2\nu)(\delta_{il}\delta_{mk} + \delta_{ml}\delta_{ki} - \delta_{kl}\delta_{im}) \ln r + 2(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{mk} + r_{,m}\delta_{ki} - r_{,k}\delta_{im})r_{,l} + [(\delta_{il}\delta_{mk} + \delta_{ml}\delta_{ki} + \delta_{kl}\delta_{im}) \ln r + (r_{,i}\delta_{mk} + r_{,m}\delta_{ki} + r_{,k}\delta_{im})r_{,l}] - [(r_{,m}r_{,k}\delta_{il} + r_{,i}r_{,k}\delta_{ml} + r_{,i}r_{,m}\delta_{kl}) - 2r_{,l}r_{,i}r_{,m}r_{,k}] \right\} \quad (4.31)$$

oraz udowodnił, że pozostałe rozwiązania podstawowe wyższych rzędów dla zagadnień sprężystości mają następującą postać

$$u_{im,m}^{*(j+1)} = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\mu} A_{j+1} r^{2j+1} r_{,i} (\ln r - B_{j+1}) \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial u_{im,m}^{*(j+1)}}{\partial n} = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\mu} A_{j+1} r^{2j} \left[ r_{,i}r_{,m}n_m + (n_i + 2jr_{,i}r_{,m}n_m) (\ln r - B_{j+1}) \right] \quad (4.33)$$

$$\sigma_{im}^{*(j+1)} = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} C_{j+1} r^{2j} \left[ \frac{1}{1-2\nu} (\ln r - D_{j+1}) \delta_{im} + \right.$$

$$+ \left( r_{,i} r_{,m} - \frac{\delta_{im}}{2} \right) (E_{j+1} \ln r - F_{j+1}) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{im}^{(j+1)}}{\partial n} = & - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} C_{j+1} r^{2j-1} \\ & \left\{ \frac{1}{1-2\nu} [2j(\ln r - D_{j+1}) + 1] r_{,k} n_k \delta_{im} + \right. \\ & + \left[ \left( r_{,i} r_{,m} - \frac{\delta_{im}}{2} \right) (2j \ln r + 1) r_{,k} n_k + \right. \\ & + (n_i r_{,m} + n_m r_{,i} - 2 r_{,i} r_{,m} r_{,k} n_k) \ln r \left. \right] E_{j+1} - \\ & - \left[ 2j r_{,k} n_k \left( r_{,i} r_{,m} - \frac{\delta_{im}}{2} \right) + \right. \\ & \left. \left. + (n_i r_{,m} + n_m r_{,i} - 2 r_{,i} r_{,m} r_{,k} n_k) \right] F_{j+1} \right\} \quad (4.35) \end{aligned}$$

Poszczególne współczynniki są określone zależnościami rekurencyjnymi

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= \frac{A_j}{(2j+1)^2 - 1} \\ B_{j+1} &= B_j + \frac{2(2j+1)}{(2j+1)^2 - 1} \\ C_{j+1} &= \frac{C_j}{4j^2} \\ D_{j+1} &= D_j + \frac{1}{j} \\ E_{j+1} &= \frac{2j}{j+1} \\ F_{j+1} &= (jF_j + E_{j+1}) \frac{j}{j^2 - 1} \end{aligned}$$

Wartości startowe dla powyższych rekurencji są następujące:

$$\begin{aligned} \text{dla } j=0 & - A_1 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 1, \\ & \quad \quad \quad D_1 = 0, \quad E_1 = 0, \quad F_1 = -1, \\ \text{dla } j=1 & - F_2 = 0. \end{aligned}$$

### 4.3.1. Zagadnienia sprężystości z obciążeniem siłami grawitacyjnymi i dośrodkowymi

W przypadku zagadnień sprężystości, w których występują jedynie siły grawitacyjne i dośrodkowe, odpowiadające im obciążenie uogólnione jest stałe lub zmienia się liniowo z położeniem. Obliczając zatem ciąg laplasjanów tego obciążenia, otrzymujemy jedynie pierwszy wyraz ciągu, a szereg (4.23) redukuje się do jednego wyrazu.

W szczególności dla sił grawitacyjnych mamy

$$b^{(0)} = b_m = \rho g_m \quad (4.36)$$

gdzie:  $\rho$  - gęstość ciała,

$g_m$  - składowa przyspieszenia grawitacyjnego w kierunku  $m$ .

Ponieważ  $b^{(0)}$  jest wielkością stałą, pochodna normalna jest równa zero

$$w^{(0)} = \frac{\partial b^{(0)}}{\partial n} = 0 \quad (4.37)$$

Zależność (4.23) przekształca się do postaci

$$\int_{\Omega} u_{im}^* b_m d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{im}^*(1)}{\partial n} b^{(0)} d\Gamma \quad (4.38)$$

$$\int_{\Omega} u_{imk}^* b_k d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{imk}^*(1)}{\partial n} b^{(0)} d\Gamma \quad (4.39)$$

Przy obciążeniu siłami dośrodkowymi wielkość tego obciążenia jest proporcjonalna do odległości  $x_i$  od osi obrotu

$$b^{(0)} = b_m = g_{im} x_i \quad (4.40)$$

gdzie składowe przyspieszenia  $g_{im}$  są funkcją składowych prędkości kątowej  $\omega_i$  oraz  $\omega_m$

$$g_{im} = \rho (\delta_{im} \omega_k \omega_k - \omega_i \omega_m)$$

Ponieważ obciążenie jest liniową funkcją współrzędnej  $x_i$ , jego pochodna wzdłuż normalnej zewnętrznej jest stała i równa odpowiednio

$$w^{(0)} = \frac{\partial b^{(0)}}{\partial n} = g_{im} n_i \quad (4.41)$$

Całki po obszarze  $\Omega$  wyrażają się więc następująco

$$\int_{\Omega} u_{im}^* b_m d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{im}^*(1)}{\partial n} b^{(0)} - u_{im}^*(1) w^{(0)} \right) d\Gamma \quad (4.42)$$

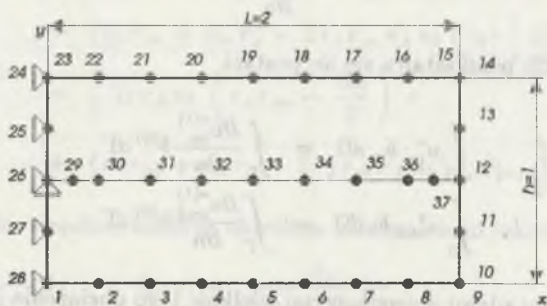
$$\int_{\Omega} u_{imk}^* b_k d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{imk}^*(1)}{\partial n} b^{(0)} - u_{imk}^*(1) w^{(0)} \right) d\Gamma \quad (4.43)$$

Dyskretyzacja tych całek przebiega w standardowy dla MEB sposób, zgodnie z opisem w rozdziałach 1.1.2 i 2.2.



#### Przykład 4.1. Rotacja płyty wokół osi $y$

Rozważmy zagadnienie płaskiego stanu naprężeń będące rezultatem działania siły dośrodkowej. Celem porównania rezultatów numerycznych z rozwiązaniem analitycznym analizie poddamy prostokątną płytę, obracającą się wokół osi  $y$ . Rozmiary oraz podział płyty na elementy brzegowe przedstawia rys.4.1. Porównania dokonano w punktach leżących na osi  $x$ .



Rys. 4.1. Dyskretyzacja płyty

Fig. 4.1. Discretization of plate

Składowe obciążenia są funkcją położenia i dla analizowanego przypadku dane są zależnościami

$$b_1^{(0)} = b_x = \rho \omega_x^2 x$$

$$b_2^{(0)} = b_y = 0$$

Rozwiązanie analityczne pozwala wyrazić składowe przemieszczenia oraz naprężenia następującymi wzorami [43]

$$u_1 = u_x = \frac{\rho \omega_x^2}{2E} x \left( L^2 - \frac{x^2}{3} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \rho \omega_x^2 (L^2 - x^2)$$

W tabelicy 4.2 dokonano porównania rezultatów WZW z powyższymi wzorami po przyjęciu  $E = 10^4 \text{MPa}$  oraz  $\nu = 0.3$ . Maksymalny błąd nie przekracza 1%. Identyczne rezultaty liczbowe otrzymano, stosując tensor Galerkinia [42].

Tablica 4.2

Porównanie rezultatów WZW z rozwiązaniem analitycznym

Numer punktu	Przemieszczenia [m]		Naprężenia [MPa]	
	rozw. anal.	rozw. WZW	rozw. anal.	rozw. WZW
26	.00000E+0	.00000E+0	.20000E+1	.19889E+1
29	.19983E-4	.19922E-4	.19950E+1	.19876E+1
30	.49740E-4	.49581E-4	.19788E+1	.19611E+1
31	.97917E-4	.97586E-4	.18750E+1	.18677E+1
32	.14297E-3	.14248E-3	.17188E+1	.17129E+1
33	.18333E-3	.18273E-3	.15000E+1	.14860E+1
34	.21745E-3	.21678E-3	.12175E+1	.12169E+1
35	.24375E-3	.24305E-3	.87500E+0	.87466E+0
36	.26068E-3	.25995E-3	.46875E+0	.46754E+0
37	.26568E-3	.26491E-3	.19500E+0	.19481E+0
12	.26667E-3	.26595E-3	.00000E+0	.19889E+0

### 4.3.2. Ustalone zagadnienia termosprężystości

Ustalone problemy termosprężystości opisywane są równaniami całkowymi (4.17) oraz (4.19). Występujące w tych równaniach całki po obszarze wyrażają się przez następujące szeregi całek brzegowych

$$\int_{\Omega} u_{im,m}^{*(0)} b^{(0)} d\Omega = \int_{\Gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\partial u_{im,m}^{*(j+1)}}{\partial n} b^{(j)} - u_{im,m}^{*(j+1)} \frac{\partial b^{(j)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.44)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{im}^{*(0)} b^{(0)} d\Omega = \int_{\Gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\partial \sigma_{im}^{*(j+1)}}{\partial n} b^{(j)} - \sigma_{im}^{*(j+1)} \frac{\partial b^{(j)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.45)$$

Rozwiązania podstawowe wyższych rzędów w równaniach (4.44) oraz (4.45) dane są zależnościami rekurencyjnymi (4.32)–(4.35).

Uogólnione obciążenie termiczne  $b^{(0)}$  wynika z analizy ustalonego pola temperatury istniejącego w rozważanym ciele. Pole to jest rozwiązaniem równania różniczkowego (1.6). Po oznaczeniu przez  $T$  nadwyżki temperatury ponad przyjęty stan naturalny otrzymujemy

$$b^{(1)} = \nabla^2 b^{(0)} = \nabla^2 T = -\frac{q_v}{k} \quad (4.16)$$

$$b^{(j)} = -\frac{1}{k} q_v^{(j-1)} \quad (4.17)$$

Proces generowania ciągu  $b^{(j)}$  przebiega zatem zupełnie analogicznie jak w przypadku analizy ustalonych źródłowych pól temperatury. Warto również zauważyć, że w przypadku bezźródłowych pól temperatury funkcja  $T$  jest harmoniczna i szeregi (1.11) oraz (1.15) redukują się do jednego tylko wyrazu. Szeregi te ulegają również istotnemu uproszczeniu wówczas, gdy funkcja źródła jest na tyle prosta, że generuje skończony ciąg laplasjanów (por. rozdział 2.4).

Warto na koniec dodać, że wykorzystując tensor Galerkinia, można uzyskać brzegowe sformułowanie tylko takiego zadania termosprężystości, w którym pole temperatury jest polem bezźródłowym.

#### Przykład 4.2. Naprężenia termiczne w ścianie zbiornika ciśnieniowego

Przedmiotem analizy jest ustalone zagadnienie termosprężystości w powtarzalnym elemencie ściany zbiornika ciśnieniowego chłodzonego systemem kanałów. Na podstawie źródłowego pola temperatury wyznaczonego w przykładzie 3.4 obliczono metodą WZW pole przemieszczeń i naprężeń, przyjmując:

moduł Younga	$E = 20.7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,
współczynnik Poissona	$\nu = 0.3$ ,
współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej	$\alpha = 1.1 \cdot 10^{-5} 1/\text{K}$ .

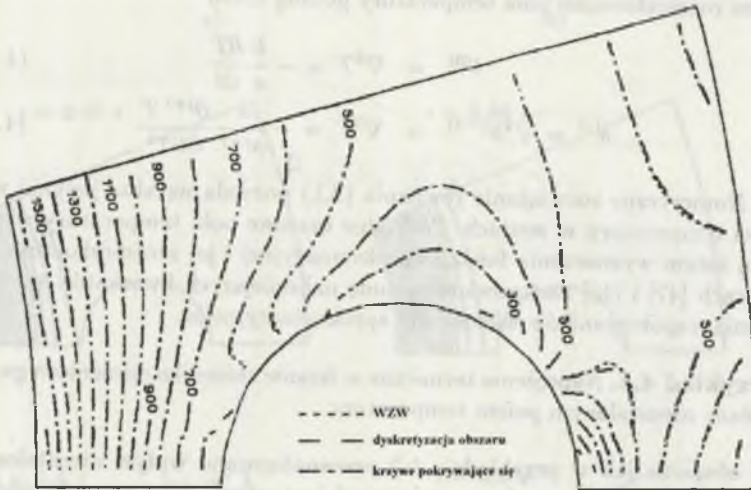
Podział brzegu obszaru na liniowe elementy brzegowe w obliczeniach pola przemieszczeń i naprężeń jest identyczny jak w obliczeniach cieplnych – por. rys.3.5. Porównanie naprężeń zredukowanych  $\sigma_{red}$  (wg hipotezy Hubera-Misesa) obliczonych metodą WZW z rezultatami uzyskanymi przez bezpośrednie całkowanie po wnętrzu obszaru poddanej dyskretyzacji przedstawiono na rys.4.2. Podział wnętrza obszaru na elementy różnicowe podczas bezpośredniego całkowania pokazany jest na rys.4.3. Zgodność rezultatów uzyskanych za pomocą obu sformułowań jest bardzo dobra, a oba rodzaje linii na rys.4.2 praktycznie pokrywają się.

Warto zwrócić uwagę na różnicę w stopniu skomplikowania siatki numerycznej pokazanej na rys.1.3 i siatki numerycznej WZW pokazanej na rys.3.5. Nie pozostaje to bez wpływu na efektywność obu sformułowań. Więcej szczegółów znaleźć można w pracach [12] i [16].

#### 4.3.3. Nieustalone zagadnienia termosprężystości

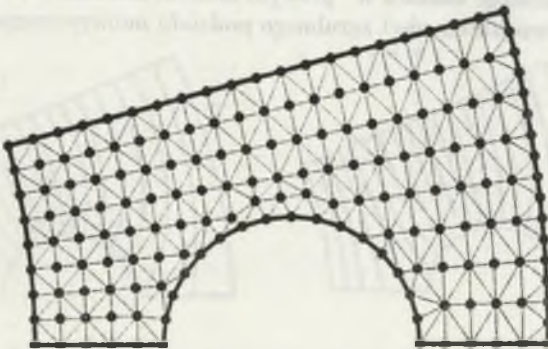
W tzw. quasi-statycznych zagadnieniach termosprężystości pole przemieszczeń pozostaje polem ustalonym, natomiast pole temperatury staje się polem niestacjonarnym. Wynika ono z rozwiązania zagadnienia (3.1). Tym





Rys. 4.2. Porównanie naprężenia  $\sigma_{red}$  [MPa] obliczonego metodą WZW oraz przez całkowanie po wnętrzu obszaru

Fig. 4.2. Comparison of stress  $\sigma_{red}$  [MPa] calculated by MRM and by domain discretization



Rys. 4.3. Dyskretyzacja wnętrza obszaru

Fig. 4.3. Domain discretization

samyin ciąg laplasjanów uogólnionego obciążenia termicznego oblicza się przez różniczkowanie pola temperatury podług czasu

$$b^{(0)} = \nabla^2 T = -\frac{k}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.48)$$

$$b^{(j)} = \nabla^2 b^{(j-1)} = \nabla^2 T = -\frac{k}{a^{j+1}} \frac{\partial^{j+1} T}{\partial t^{j+1}} \quad (4.49)$$

Numeryczne rozwiązanie równania (3.1) pozwala uzyskać jedynie wartości temperatury w węzłach. Pochodne czasowe pola temperatury wymagają zatem wyznaczenia funkcji aproksymacyjnej i jej zróżniczkowania. W pracach [47] i [48] zastosowano metodę najmniejszych kwadratów do obliczenia współczynników wielomianu aproksymacyjnego.

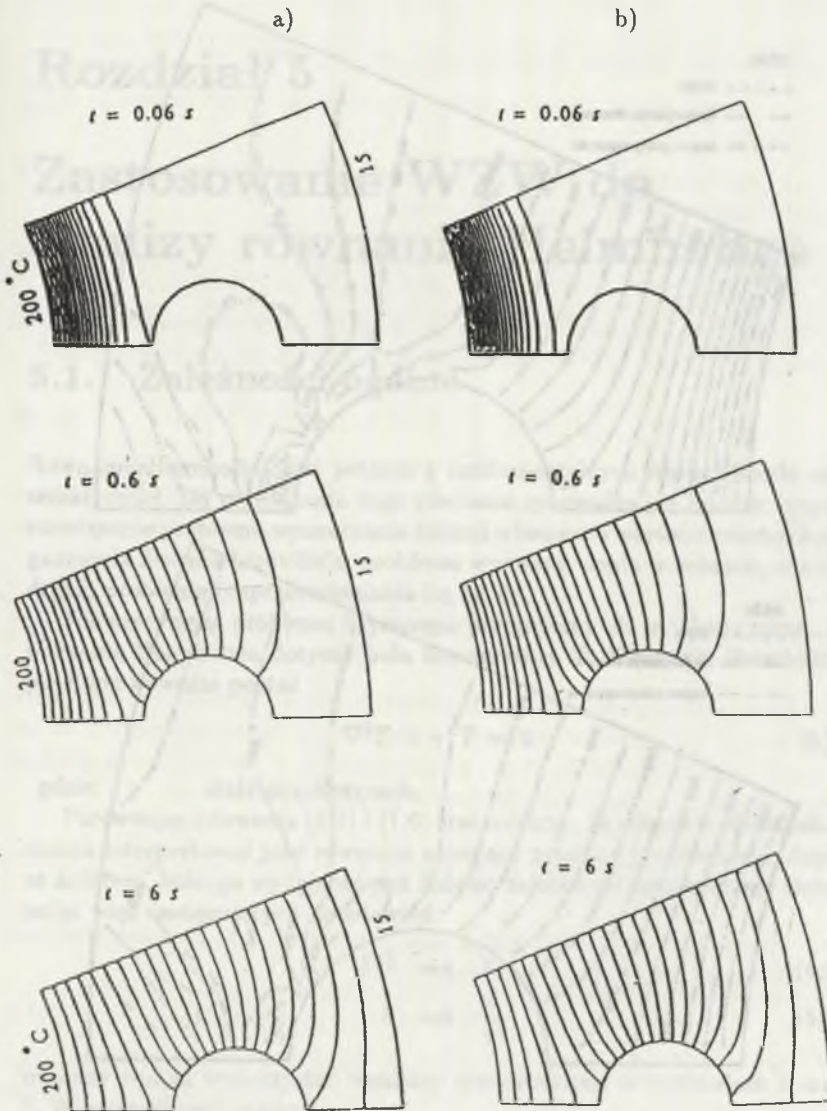
**Przykład 4.3.** Naprężenia termiczne w ścianie zbiornika ciśnieniowego wywołane niestalonym polem temperatury

W obszarze jak w przykładzie 4.2 przeanalizowano wpływ niestalonego pola temperatury na pole przemieszczeń i naprężeń. Jako warunek początkowy przyjęto wyrównaną temperaturę w obszarze wynoszącą  $200^\circ\text{C}$ . W chwili początkowej temperatura na zewnętrznej ścianie zbiornika spada do wartości  $15^\circ\text{C}$ . Na rys.4.4 przedstawione są izotermie w kolejnych chwilach czasu obliczone metodami MEB i MES. Na podstawie uzyskanych wartości temperatury wyznaczono pole przemieszczeń i naprężeń. Rys.4.5 przedstawia porównanie naprężeń zastępczych (hipoteza Hubera-Misesa) obliczonych metodą WZW oraz bezpośrednio przez całkowanie po wnętrzu obszaru. Porównania dokonano dla wybranych chwil czasu. Oba rodzaje linii praktycznie pokrywają się na przeważającej części wykresu z wyjątkiem stosunkowo niewielkiego obszaru w "prawym dolnym narożniku". Pojawiające się różnice są rezultatem zbyt zgrubnego podziału numerycznego.



4.3.2. Niestalona temperatura w zbiorniku ciśnieniowym

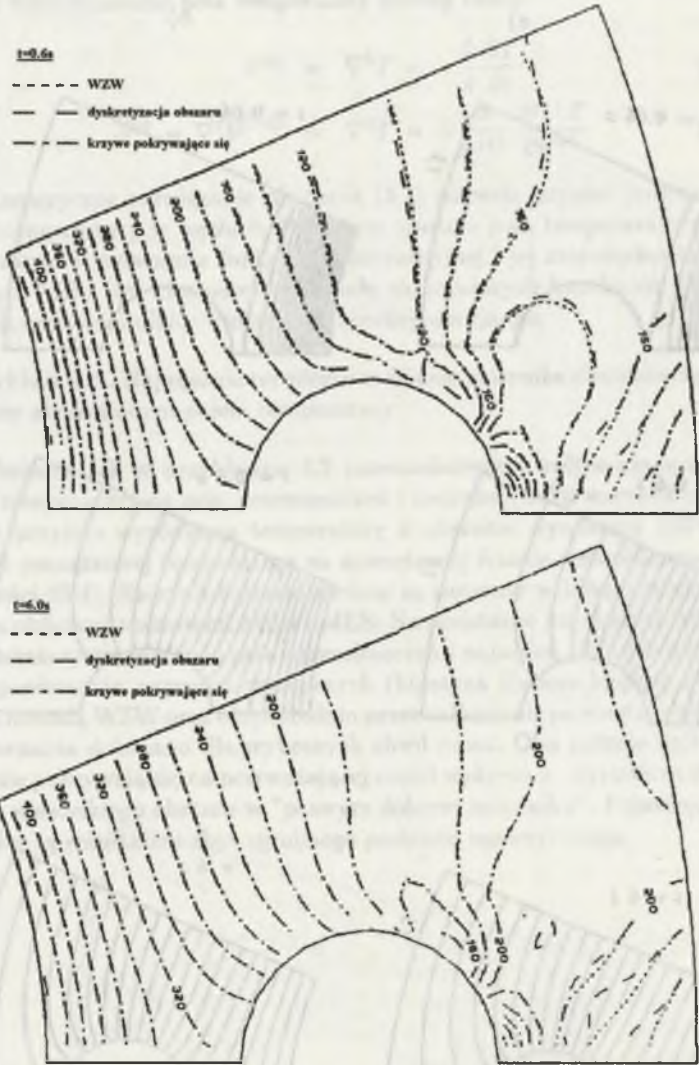
W tym celu przyjęto następujące dane:  $k = 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $a = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $T_0 = 200^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 15^\circ\text{C}$ ,  $t = 10^{-3} \text{ s}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ . Wzrost temperatury w czasie  $t = 10^{-3} \text{ s}$  jest równy  $\Delta T = 185^\circ\text{C}$ .



Rys. 4.4. Rozkład izoterm w kolejnych chwilach czasu; a) rozwiązanie MEB; b) rozwiązanie MES

Fig. 4.4. Isothermal lines at subsequent times; a) BEM solution; b) FEM solution





Rys. 4.5. Porównanie naprężenia  $\sigma_{red}$  [MPa] obliczonego metodą WZW oraz przez całkowanie po wnętrzu obszaru

Fig. 4.5. Comparison of stress  $\sigma_{red}$  [MPa] calculated by MRM and by domain discretization

## Rozdział 5

# Zastosowanie WZW do analizy równania Helmholtza

### 5.1. Zależności ogólne

Równanie Helmholtza jest jednym z fundamentalnych równań fizyki matematycznej. Do rozwiązania tego równania sprowadza się między innymi rozwiązanie problemu wyznaczania funkcji własnych i wartości własnych zagadnienia Sturm-Liouville'a, problemu wymiany ciepła w żebrach, analizy drgań, problemu rozprzestrzeniania się fal itp.

Nie precyzując problemu fizycznego, przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że równanie Helmholtza dotyczy pola temperatury  $T$ . Równanie Helmholtza przyjmie wówczas postać

$$\nabla^2 T + \gamma^2 T = 0 \quad (5.1)$$

gdzie:  $\gamma$  - stały współczynnik.

Porównując równania (5.1) i (1.6) stwierdzamy, że równanie Helmholtza można interpretować jako równanie opisujące ustalone przewodzenie ciepła ze źródłem, którego wydajność jest liniowo zależna od temperatury. Dokonując więc następujących podstawień

$$b^{(0)} \implies T \quad (5.2)$$

$$k \implies \frac{1}{\gamma^2} \quad (5.3)$$

możemy wprost wykorzystać rezultaty przedstawione w rozdziałach 1 oraz 2. W szczególności mamy

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (5.4)$$

$$w^{(0)} = -k \frac{\partial b^{(0)}}{\partial n} = q \quad (5.5)$$

$$b^{(1)} = \nabla^2 b^{(0)} = \nabla^2 T = -\gamma^2 T \quad (5.6)$$

$$\bullet w^{(1)} = -k \frac{\partial b^{(1)}}{\partial n} = -\gamma^2 q \quad (5.7)$$

Przekształcając całkę po obszarze, otrzymujemy więc

$$D_0 = \gamma^2 \int_{\Gamma} (T^{*(1)} q - q^{*(1)} T) d\Gamma + D_1 \quad (5.8)$$

Różnica pomiędzy całkami  $D_1$  i  $D_0$  sprowadza się do innego mnożnika i innego rzędu rozwiązania podstawowego

$$D_1 = -\gamma^2 \int_{\Omega} T^{*(1)} T d\Omega \quad (5.9)$$

Kontynuując proces całkowania przez części autor rozprawy sprowadził całkę  $D_0$  po obszarze  $\Omega$  do następującego szeregu całek po brzegu  $\Gamma$  [58]

$$D_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \gamma^{2(j+1)} \int_{\Gamma} (T^{*(j+1)} q - q^{*(j+1)} T) d\Gamma \quad (5.10)$$

Po prostych przekształceniach algebraicznych i uwzględnieniu równań (5.10) oraz (1.9) otrzymuje się następującą brzegową reprezentację równania Helmholtza [58]

$$\frac{1}{\gamma^2} c_i T_i + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \gamma^{2j} \int_{\Gamma} q^{*(j)} T d\Gamma = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \gamma^{2j} \int_{\Gamma} T^{*(j)} q d\Gamma \quad (5.11)$$

Dyskretyzację równania (5.11) przeprowadza się w zwykły sposób, dzieląc brzeg  $\Gamma$  na elementy brzegowe i wprowadzając macierze wpływu. W ten sposób równanie całkowe (5.11) przekształca się w układ równań algebraicznych, który w zapisie macierzowym przybiera postać

$$\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \gamma^{2j} \mathbf{H}_j \right\} \mathbf{T} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \gamma^{2j} \mathbf{G}_j \right\} \mathbf{Q} \quad (5.12)$$

"Zbierając" odpowiednio macierze wpływu  $\mathbf{H}_j$  i  $\mathbf{G}_j$ , można równaniu (5.12) nadać następującą ostateczną formę

$$\mathbf{H} \mathbf{T} = \mathbf{G} \mathbf{Q} \quad (5.13)$$

Warto zauważyć, że w analizowanym problemie człon źródłowy nie generuje macierzy kolumnowej wyrazów wolnych, lecz modyfikuje macierze wpływu.

Wprowadzając warunki brzegowe, równanie (5.13) przekształcamy do postaci (1.29) i rozwiązujemy ze względu na nieznaną temperaturę  $T$  i strumienie ciepła  $q$ .

Przedstawioną metodykę zastosujemy teraz do rozwiązania prostego przykładu.

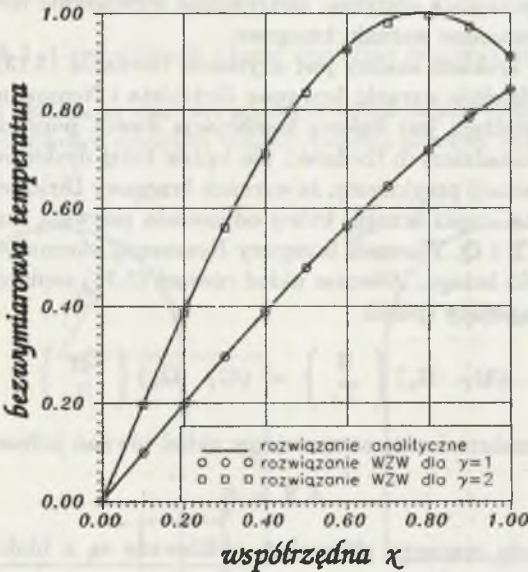


### Przykład 5.1. Rozwiązanie równania Helmholtza

Rozwiązania równania Helmholtza poszukiwać będziemy metodą WZW w prostokącie o wymiarach  $1 \times 0.2$ , którego dyskretyzację pokazano na rys.5.1. Wzdłuż boków AB i CD założono jednorodny warunek brzegowy II rodzaju  $q = 0$ , zaś wzdłuż boków AD i BC zadano wartość temperatury.



Rys. 5.1. *Dyskretyzacja brzegu przy rozwiązywaniu równania Helmholtza*  
 Fig. 5.1. *Boundary discretization when solving Helmholtz equation*



Rys. 5.2. *Porównanie wyników WZW z rozwiązaniem analitycznym równania Helmholtza*

Fig. 5.2. *Comparison of MRM results with analytical solution for Helmholtz equation*

Linie ciągłe na rys.5.2 reprezentują rozwiązanie analityczne problemu dla dwóch różnych wartości współczynnika  $\gamma$ . Kółeczka i kwadraciki oznaczają rezultaty obliczeń numerycznych przeprowadzonych metodą WZW. Jak wynika z rys.5.2, bardzo dobrą dokładność obliczeń osiągnięto przy

uwzględnieniu jedynie trzech wyrazów szeregów w równaniu (5.12). Jednocześnie należy zaznaczyć, że dla większych wartości współczynnika  $\gamma$  potrzebna może być drobniejsza dyskretyzacja brzegu oraz większa liczba wyrazów szeregu w równaniu (5.12).

## 5.2. Obliczanie wartości własnych

Na początku niniejszego rozdziału zakładaliśmy, że współczynnik  $\gamma$  w równaniu Helmholtza jest znany. Dla zadanych warunków brzegowych poszukiwaliśmy rozkładu temperatury  $T$  i strumienia ciepła  $q$ .

Obliczanie wartości własnych zagadnienia brzegowego polega na poszukiwaniu takich wartości (zwykle nieskończonego ciągu wartości) współczynnika  $\gamma$ , które pozwalają otrzymać nietrywialne rozwiązania równania (5.1) spełniające jednorodne warunki brzegowe.

Pierwszym krokiem analizy jest uzyskanie równania (5.13). Następnie grupujemy oddzielnie warunki brzegowe Dirichleta i Neumanna. Warunek brzegowy III rodzaju jest liniową kombinacją dwóch poprzednich i jako nie wnoszący zasadniczych trudności nie będzie tutaj dyskutowany. Celem uproszczenia notacji przyjmiemy, że warunek brzegowy Dirichleta sformułowany jest na tej części brzegu, której odpowiada pierwsza część macierzy kolumnowych  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{Q}$ . Warunek brzegowy Neumanna sformułowany jest na pozostałej części brzegu. Wówczas układ równań (5.13) zapisze się schematycznie w następujący sposób

$$\{\mathbf{H}_T \quad \mathbf{H}_q\} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_q \end{Bmatrix} = \{\mathbf{G}_T \quad \mathbf{G}_q\} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_T \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Po prostym przekształceniu otrzymujemy układ równań jednorodnych

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

przy czym bloki macierzy głównej  $\mathbf{A}$  zbudowane są z bloków macierzy wpływu zgodnie ze schematem

$$\mathbf{A} = \{-\mathbf{G}_T \quad \mathbf{H}_q\} \quad (5.16)$$

W skład macierzy niewiadomych  $\mathbf{X}$  wchodzi odpowiednio

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_T \\ \mathbf{T}_q \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Warunkiem koniecznym otrzymania nietrywialnych rozwiązań układu (5.15) jest zerowanie się wyznacznika głównego macierzy  $\mathbf{A}$

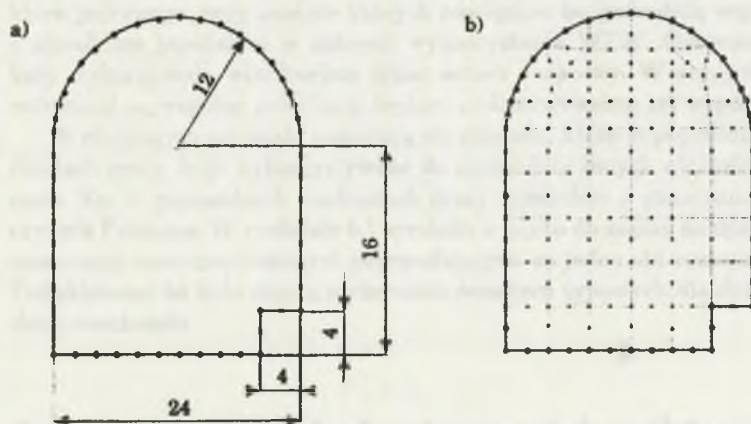
$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (5.18)$$

Należy podkreślić, że w przeciwieństwie do klasycznego sformułowania brzegowego [12], w którym konieczne jest prowadzenie obliczeń w przestrzeni zmiennej zespolonej, przedstawione podejście wykorzystuje jedynie zmienne rzeczywiste. Elementy macierzy  $\mathbf{A}$  są wielomianami ze względu na współczynnik  $\gamma$ . Innymi słowy,  $\gamma$  pojawia się w uzyskanych równaniach bezpośrednio, nie zaś jak w sformułowaniu klasycznym, wpływa na współczynniki macierzy  $\mathbf{A}$  w sposób pośredni (poprzez całkowanie wzdłuż brzegu). Wszystko to prowadzi do znacznego uproszczenia analizy i oszczędności czasu obliczeń.

W szczególnych wypadkach równanie (5.18) może być numerycznie kłopotliwym warunkiem do poszukiwania wszystkich wartości własnych. W pracach [28], [29] i [30] zaproponowano jego modyfikację, która choć nieco bardziej rozbudowana, jest efektywna numerycznie i wciąż obowiązuje w przestrzeni zmiennej rzeczywistej.

### Przykład 5.2. Częstotliwości własne przekroju poprzecznego tunelu

Zagadnienia obliczania wartości własnych zilustrowano problemem wyznaczenia częstotliwości własnych tunelu, którego przekrój pokazany jest na rys.5.3.



Rys. 5.3. Model geometryczny tunelu: a) dyskretyzacja MEB; b) dyskretyzacja MES

Fig. 5.3. Geometric model of the tunnel: a) BEM discretization; b) FEM discretization

Analizy dokonano, przeszukując przedział  $0 \leq \gamma \leq 9$  i stosując jedynie 18 stałych elementów brzegowych. Ta sama analiza przeprowadzona metodą



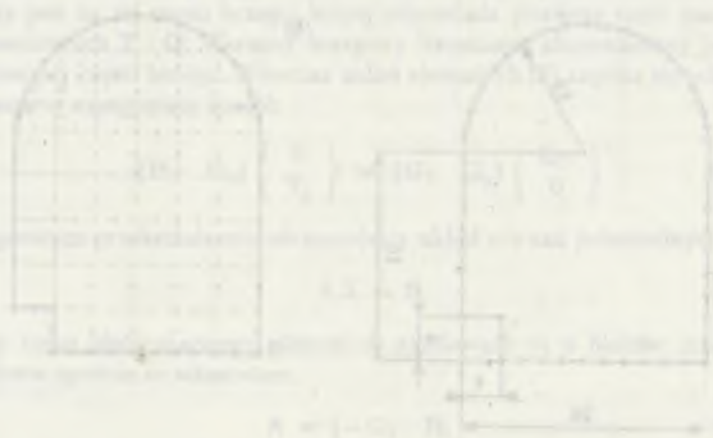
elementów skończonych wymagała 45 elementów kwadratowych ze 158 węzłami. Na podstawie rys.5.3 widać istotne oszczędności na etapie generacji modelu geometrycznego ciała. Oszczędności te stają się jeszcze bardziej widoczne w przypadku zadań trójwymiarowych.

Tabela 5.1

Częstotliwości własne tunelu [Hz]

Rozwiązanie WZW	22.01	25.35	36.73	41.04	48.48	53.34	55.55
Rozwiązanie MES	22.00	25.35	36.65	41.14	48.71	53.38	55.54

Rezultaty obliczeń metodą WZW [28] przeliczono na częstotliwości własne, przyjmując jako prędkość dźwięku 343.51 m/s. Tabela 5.1 zawiera porównanie rezultatów WZW z rezultatami MES.



## Rozdział 6

# Zastosowanie WZW w inżynierii jądrowej

W niniejszym rozdziale zaprezentowano zastosowanie wielokrotnej zasady wzajemności w inżynierii jądrowej. Ta dziedzina wiedzy, operując równaniami całkowymi oraz różniczkowo-całkowymi, stanowi naturalne pole zastosowań metody elementów brzegowych. Występujące tutaj całki obszarowe mogą być po zastosowaniu WZW przekształcone w znacznie prostsze do dyskretyzacji całki brzegowe.

Materiałem ilustracyjnym do rozważań są zagadnienia krytyczności reaktora jądrowego, przy analizie których nawiązano bezpośrednią współpracę z ośrodkiem japońskim w zakresie wykorzystania WZW. Cytowane artykuły wykorzystują wcześniejsze prace autora rozprawy. W przygotowaniu natomiast są wspólne publikacje będące podsumowaniem tej współpracy.

W niniejszym rozdziale pojawiają się symbole, które w poprzednich rozdziałach pracy były wykorzystywane do oznaczenia innych wielkości fizycznych. Np. w poprzednich rozdziałach pracy symbolem  $\nu$  oznaczano współczynnik Poissona. W rozdziale 6.1 symbolu  $\nu$  użyto do zapisu średniej liczby neutronów rozszczepieniowych przypadających na jeden akt rozszczepienia. Podyktowane to było chęcią zachowania oznaczeń typowych dla danej dziedziny mechaniki.

### 6.1. Zagadnienia krytyczności reaktora jądrowego – przybliżenie dyfuzyjne jednogrupowe

Jednym z podstawowych zagadnień teorii reaktorów jądrowych jest tzw. *zagadnienie krytyczności reaktora*. Chodzi o określenie warunków, w których natężenie samopodtrzymującej się reakcji łańcuchowej jest stałe. Podstawą

takiej analizie jest równanie transportu neutronów, które w ogólnym przypadku jest równaniem różniczkowo-całkowym. Trudności obliczeniowe związane z rozwiązaniem takiego równania powodują, że powszechnie stosuje się różnego rodzaju przybliżenia równania transportu neutronów. Dość często stosowanym w tym celu przybliżeniem jest tzw. przybliżenie dyfuzyjne. Warunek krytyczności reaktora można najłatwiej wyprowadzić dla jednogrupowego przybliżenia dyfuzyjnego. Uzyskane w ten sposób wyniki, choć z reguły jeszcze dość dalekie od rzeczywistości, pozwalają jednak na wyciągnięcie pewnych praktycznych wniosków. Dokładniejsze rezultaty uzyskuje się, stosując przybliżenia dyfuzyjne wielogrupowe. W niniejszym rozdziale przedstawiono zastosowanie wielokrotnej zasady wzajemności do analizy krytyczności reaktora jądrowego na podstawie jedynie przybliżenia dyfuzyjnego jednogrupowego. Trzeba jednak zaznaczyć, że po pewnych modyfikacjach WZW może być również zastosowana do analizy przybliżeń wielogrupowych.

W dyfuzji jednogrupowej ustalony w czasie strumień neutronów wynika z następującego równania różniczkowego

$$-D \nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi = \frac{\nu \Sigma_f}{k_e} \phi \quad (6.1)$$

- gdzie:  $\phi$  – strumień neutronów,  
 $D$  – współczynnik dyfuzji,  
 $k_e$  – efektywny współczynnik mnożenia,  
 $\Sigma_a$  – makroskopowy przekrój czynny na absorpcję neutronów,  
 $\Sigma_f$  – makroskopowy przekrój czynny na rozszczepienie neutronów,  
 $\nu$  – średnia liczba neutronów rozszczepieniowych przypadająca na jeden akt rozszczepienia.

Definiując parametr materiałowy reaktora  $B_m$

$$B_m = \frac{\frac{\nu \Sigma_f}{k_e} - \Sigma_a}{D} \quad (6.2)$$

sprowadzamy równanie (6.1) do równania Helmholtza

$$\nabla^2 \phi + B_m^2 \phi = 0 \quad (6.3)$$

Analiza krytyczności reaktora jądrowego sprowadza się do obliczenia wartości własnych, a dokładniej najmniejszej wartości własnej, równania (6.3) przy jednorodnych warunkach brzegowych na brzegu ekstrapolowanym rdzenia. Jeśli tę najmniejszą wartość własną nazwiemy parametrem geometrycznym reaktora  $B_g$ , otrzymamy

$$\nabla^2 \phi + B_g^2 \phi = 0 \quad (6.4)$$

Warunek krytyczności wiąże własności materiałowe rdzenia z jego rozmiarami



$$\begin{aligned}
 B_g &= B_m && \text{reaktor krytyczny} \\
 B_g &> B_m && \text{reaktor podkrytyczny} \\
 B_g &< B_m && \text{reaktor nadkrytyczny}
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Do obliczenia parametru geometrycznego reaktora można wykorzystać wprost algorytmy opisane w rozdziale 5. Należy jednak zauważyć, że procedura ta wymaga rozwiązania równania (5.18), a więc w praktyce przeszukiwania z zadaniem krokiem przewidywanego obszaru istnienia rozwiązania. Z tego powodu w inżynierii jądrowej dość często stosuje się technikę zwaną *techniką iterowanych źródeł rozszczepienia* (ang. *fission source iteration technique*), która polega na iteracyjnym poszukiwaniu wielkości  $B_g$ .

Dokonajmy najpierw modyfikacji równania (6.1) poprzez odjęcie od obu jego stron takiego samego wyrażenia

$$-D \nabla^2 \phi + \left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k_{sz}} \right) \phi = \left( \frac{1}{k_c} - \frac{1}{k_{sz}} \right) \nu \Sigma_f \phi \tag{6.6}$$

gdzie:  $k_{sz}$  - szacunkowa wartość efektywnego współczynnika mnożenia.

Wartość  $k_{sz}$  dobieramy zwykle w ten sposób, aby spełniona była nierówność

$$\Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k_{sz}} > 0 \tag{6.7}$$

W ten sposób problem obliczania wartości własnych został zamieniony na problem rozwiązania równania Helmholtza z członem źródłowym. Ponieważ człon ten jest zależny od rozwiązania  $\phi$  oraz od poszukiwanej wielkości  $k_c$ , konieczna staje się procedura iteracyjna. Dla  $m$ -tej iteracji mamy zatem

$$-D \nabla^2 \phi^{(m)} + \left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k_{sz}} \right) \phi^{(m)} = \left( \frac{1}{k_c^{(m-1)}} - \frac{1}{k_{sz}} \right) \nu \Sigma_f \phi^{(m-1)} \tag{6.8}$$

Wprowadzając następujące oznaczenia

$$B_{sz}^2 = \frac{\nu \Sigma_f}{D} - \Sigma_a \tag{6.9}$$

$$S^{(m)} = \frac{\nu \Sigma_f}{\lambda^{(m-1)}} \phi^{(m-1)} \tag{6.10}$$

$$\frac{1}{\lambda^{(m-1)}} = \frac{1}{k_c^{(m-1)}} - \frac{1}{k_{sz}} \tag{6.11}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\nabla^2 \phi^{(m)} + B_{sz}^2 \phi^{(m)} + \frac{1}{D} S^{(m)} = 0 \tag{6.12}$$

### 6.1.1. Transformacja zagadnienia brzegowego w równanie całkowe

Definiując rozwiązanie podstawowe rzędu zerowego dla równania Helmholtza jako

$$\nabla^2 \phi^{*(0)} + B_{sz}^2 \phi^{*(0)} + \delta(Y_b, Y_z) = 0 \quad (6.13)$$

oraz wykorzystując zasadę wzajemności, przekształcamy zagadnienie (6.12) w następujące równanie całkowe

$$D c_i \phi_i^{(m)} = \int_{\Gamma} J^{*(0)} \phi^{(m)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi^{*(0)} J^{(m)} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi^{*(0)} S^{(m)} d\Omega \quad (6.14)$$

gdzie:  $J = -D \frac{\partial \phi}{\partial n}$  – składowa normalna gęstości prądu neutronów. Równanie to po zdyskretyzowaniu prowadzi do układu równań algebraicznych o postaci macierzowej

$$\mathbf{H} \Phi = \mathbf{G} \mathbf{J} + \mathbf{R} \quad (6.15)$$

Wielokrotna zasada wzajemności zastosowana do transformacji całki po obszarze występującej w równaniu (6.14) pozwala uniknąć dyskretyzacji obszaru. Pomijając szczegóły przekształceń, zapisujemy całkę po obszarze jako [26]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi^{*(0)} S^{(m)} d\Omega &= \left( \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\nu \Sigma_f}{\lambda^{(m-s)}} \right) Z(1, m-1) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \left( \prod_{s=1}^j \frac{\nu \Sigma_f}{\lambda^{(m-s)}} \right) \left\{ \int_{\Gamma} J^{*(j)} \phi^{(m-j)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi^{*(j)} J^{(m-j)} d\Gamma \right\} \quad (6.16) \end{aligned}$$

gdzie dla każdego  $m \geq 2$  zachodzi następująca rekurencja

$$Z(1, m-1) = -\frac{1}{B_{sz}^2} \left\{ Z(1, m-2) - \frac{1}{D} \int_{\Gamma} J^{*(m-j)} d\Gamma \right\} \quad (6.17)$$

Wartością startową rekurencji jest wyrażenie

$$Z(1, 0) = -\frac{1}{D B_{sz}^2} \left\{ D c_i - \int_{\Gamma} J^{*(0)} d\Gamma \right\} \quad (6.18)$$

Powyższe zależności wymagają znajomości rozwiązań podstawowych aż do rzędu  $(m-1)$  włącznie oraz strumienia neutronów i gęstości prądu neutronów z poprzednich  $(m-1)$  iteracji.

### 6.1.2. Rozwiązania wyższych rzędów

Rozwiązania wyższych rzędów spełniają następujące równanie różniczkowe

$$\nabla^2 \phi^{*(j)} + B_{sz}^2 \phi^{*(j)} + \phi^{*(j-1)} = 0 \quad (6.19)$$

Rozwiązania te wyrażają się, zależnie od znaku współczynnika  $B_{sz}^2$ , przez funkcje Bessela drugiego rodzaju  $Y_j$  lub przez zmodyfikowane funkcje Bessela  $K_j$ , [21], [22]

$$\phi^{*(j)} = A_j (B_{sz} r)^j Y_j(B_{sz} r) \quad \text{dla } B_{sz}^2 > 0 \quad (6.20)$$

$$\phi^{*(j)} = A_j (B_{sz} r)^j K_j(B_{sz} r) \quad \text{dla } B_{sz}^2 < 0 \quad (6.21)$$

Współczynniki  $A_j$  spełniają zależności rekurencyjne

$$A_j = \frac{A_{j-1}}{2j B_{sz}^2} \quad A_0 = -\frac{1}{4} \quad (6.22)$$

Rozwiązania podstawowe wyższych rzędów, podobnie jak w przypadku innych zagadnień inżynierskich, nie mają żadnych osobliwości dla  $j > 0$ . Tym samym ich całkowanie numeryczne nie wymaga żadnych specjalnych technik.

### 6.1.3. Obliczanie parametru geometrycznego reaktora

Po obliczeniu z układu równań (6.15) rozkładu strumienia neutronów  $\phi$  wyznaczamy parametr geometryczny reaktora. Zgodnie z równaniem (6.4) jest on dla danej iteracji równy

$$B_g^2 = - \frac{\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega}{\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega} \quad (6.23)$$

Korzystając z twierdzenia o dywergencji, przekształcamy całkę w liczniku wyrażenia (6.23) następująco

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega = -\frac{1}{D} \int_{\Gamma} J^{(m)} d\Gamma \quad (6.24)$$

Całka w mianowniku wymaga większej liczby operacji. Uwzględniając równania (6.10) i (6.12), otrzymujemy dla każdego  $m \geq 2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega &= \frac{1}{D B_{sz}^2} \int_{\Omega} S^{(m)} d\Omega + \frac{1}{B_{sz}^2} \int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega = \\ &= \frac{\nu \Sigma_f}{B_{sz}^2 \lambda^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} d\Omega - \frac{1}{B_{sz}^2} \int_{\Gamma} J^{(m)} d\Gamma \quad (6.25) \end{aligned}$$



Tym samym całka po obszarze dla danej iteracji została uzależniona od analogicznej całki dla iteracji poprzedniej. Dla pierwszej iteracji obowiązuje

$$\int_{\Omega} \phi^{(1)} d\Omega = \frac{A_{\Omega}}{B_{zz}^2} - \frac{1}{B_{zz}^2} \int_{\Gamma} J^{(1)} d\Gamma \quad (6.26)$$

gdzie:  $A_{\Omega}$  – pole powierzchni obszaru  $\Omega$ .

Po obliczeniu parametru geometrycznego reaktora dokonuje się korekty wielkości  $k_c$ . Mamy bowiem

$$k_c^{(m)} = \frac{\nu \Sigma_f}{D B_{zz}^2 + \Sigma_a} \quad (6.27)$$

Nowa wartość  $k_c$  pozwala uaktualnić wielkość członu źródłowego w równaniu (6.8) i powtórzyć obliczenia. Iteracje prowadzi się aż do spełnienia założonego kryterium dokładności.

Stosując opisaną technikę, Itagaki [26] obliczył między innymi parametr geometryczny reaktora dla wielokątów: trójkąta równobocznego, kwadratu, pięciokąta równobocznego, sześciokąta równobocznego i osmiokąta równobocznego. Uzyskany dla kwadratu rezultat zgadza się bardzo dobrze z rozwiązaniem analitycznym.

## Rozdział 7

# Zastosowanie WZW w innych dziedzinach mechaniki

W niniejszym rozdziale zaprezentowano ostatnie, znane z literatury MEB, zastosowania wielokrotnej zasady wzajemności. Nie stanowią one osobistego dorobku autora pracy, ale cytowane w nich artykuły wykorzystują bezpośrednio opublikowane przez niego algorytmy i poszerzają znacznie pole zastosowań WZW. Materiał potraktowano bardzo skrótowo, ograniczając się praktycznie do sformułowania problemu oraz podania głównej idei omawianych prac. Więcej informacji zainteresowany Czytelnik będzie mógł znaleźć w cytowanych publikacjach.

### 7.1. Zagadnienia opływu ciał

Jednym z podstawowych problemów hydromechaniki jest zagadnienie opływu ciał o skomplikowanym kształcie przez lepki płyn. Analiza takiego problemu zewnętrznego wymaga rozwiązania równań Naviera-Stokesa. Trudności matematyczne i numeryczne związane z takim podejściem powodują, że dość często stosuje się różnego rodzaju przybliżenia. Jednym z częściej stosowanych przybliżeń jest aproksymacja omawianego problemu za pomocą równań Oseena [62]. Rozwiązanie Oseena jest traktowane jako pierwsza aproksymacja równań Naviera-Stokesa pozwalająca również na zbadanie problemu istnienia rozwiązania.

Równania Oseena są w istocie niejednorodnymi równaniami Stokesa i mają następującą postać

$$\sigma_{im,m} = f_i \quad (7.1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (7.2)$$

gdzie niejednorodność  $f_i$  jest funkcją liczby Reynoldsa  $Re$

$$f_i = Re u_{i,1} \quad (7.3)$$

Składowe tensora naprężeń zależą od ciśnienia  $p$ , pola prędkości  $u$  oraz lepkości dynamicznej  $\mu$  i wyrażają się następująco

$$\sigma_{im} = -p \delta_{im} + \mu (u_{i,m} + u_{m,i}) \quad (7.4)$$

Całkową reprezentację rozwiązania problemu (7.1)-(7.3) podała Ladyzhenskaya [34]

$$u_k + \int_{\Gamma} \sigma_{im}(U_i^k) u_i n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_i^k \sigma_{im} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} U_i^k f_i d\Omega \quad (7.5)$$

gdzie  $\vec{U}^k$  jest polem prędkości w rozwiązaniu podstawowym równania Stokesa (ang. *Stokeslet*)

$$U_i^k(Y_z, Y_b) = -\frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{(Y_{zi} - Y_{bi})(Y_{zk} - Y_{bk})}{r^3} \right] \quad (7.6)$$

Uwzględniając równanie (7.3), zapiszemy całkę po obszarze występującą w powyższym równaniu jako

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_i^k f_i d\Omega &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} U_i^k u_{i,1} d\Omega = \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} ((U_i^k u_i)_{,1} - u_i U_{i,1}^k) d\Omega \end{aligned} \quad (7.7)$$

Po wprowadzeniu szeregu rozwiązań podstawowych wyższego rzędu zdefiniowanych zależnością rekurencyjną

$$\sigma_{im,m}(\vec{U}^{k(j)}) = U_{i,m,m}^{k(j)} = U_i^{k(j-1)} \quad (7.8)$$

$$U_i^{k(0)} = U_i^k \quad (7.9)$$

i zastosowaniu WZW, H. Power i B.F. Power [69] uzyskali całkowite, w pełni brzegowe, sformułowanie problemu wewnętrznego. Ponadto wykazali oni, że otrzymane w ten sposób równanie jest szeregiem wyrażen *Stokeslet* i stanowi "analityczne" rozwiązanie problemu Oscena.

Ci sami autorzy analizowali również [68] wykorzystanie WZW do rozwiązania zewnętrznego zagadnienia Stokesa. Uzyskane przez nich rezultaty obliczeń numerycznych wykazują zadowalającą zgodność z wynikami obliczeń analitycznych dla ciał o prostych kształtach, jak np. sfera.

## 7.2. Drgania harmoniczne w cienkich płytach sprężystych

W niniejszym podrozdziale rozpatrzono drgania harmoniczne cienkich płyt sprężystych. Założono, że materiał płyty jest jednorodny i izotropowy, a



plyta jest poddana działaniu pewnego dynamicznego obciążenia oznaczonego przez  $p$ . Równanie różniczkowe opisujące ugięcie plyty wynika z klasycznej teorii małych odkształceń Kirchhoffa [35] i ma postać

$$D_p \nabla^4 y + \rho h \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \quad (7.10)$$

gdzie:  $y$  – ugięcie plyty,  
 $t$  – czas,  
 $\rho$  – gęstość materiału,  
 $h$  – grubość plyty,  
 $p$  – obciążenie zginające na jednostkę powierzchni,  
 $D_p$  – sztywność plyty na zginanie, wyrażona przez moduł Younga  $E$  oraz współczynnik Poissona  $\nu$

$$D_p = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7.11)$$

W przypadku tłumienia lepkiego równanie (7.10) przyjmuje postać

$$D_p \nabla^4 y + \rho h \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \frac{\partial y}{\partial t} = p \quad (7.12)$$

gdzie:  $g$  – współczynnik tłumienia lepkiego.

Zakładając harmoniczne wymuszenie  $p(Y_b, t) = p(Y_b) \exp(i\omega t)$ , otrzymujemy następujące równanie różniczkowe wiążące amplitudę drgań harmonicznych plyty  $y$  z amplitudą wymuszenia  $p$

$$D_p \nabla^4 y - \kappa y = p \quad (7.13)$$

Parametr  $\kappa$  jest równy

$$\kappa = \omega^2 \rho h - i\omega g; \quad i = \sqrt{-1} \quad (7.14)$$

Definiując rozwiązania podstawowe następującymi zależnościami

$$D_p \nabla^4 y^{*(0)} = \delta(r) \quad (7.15)$$

$$\nabla^4 y^{*(j+1)} = y^{*(j)} \quad (7.16)$$

oraz stosując WZW, V. Sladek, J. Sladek i M. Tanaka [72] otrzymali brzegowe sformułowanie problemu. Godny podkreślenia jest fakt, że macierze wpływu nie zależą od częstotliwości, co znakomicie upraszcza problem. Autorzy zauważają ponadto, że otrzymane przez nich równania całkowite nie zawierają osobliwości. Tym samym całkowanie wzdłuż elementów brzegowych nie wymaga stosowania żadnych specjalnych procedur numerycznych.

Przeprowadzone przez autorów obliczenia wykazały doskonałą zgodność zarówno obliczonych częstotliwości, jak i amplitud drgań płyt z rezultatami analitycznymi.

## Rozdział 8

# Podsumowanie i wnioski końcowe

Celem rozprawy było opracowanie w pełni brzegowego sformułowania metody elementów brzegowych pozwalającego rozwiązywać zagadnienia inżynierskie bez dyskretyzacji wnętrza obszaru. Opracowana przez autora metoda, nazwana wielokrotną zasadą wzajemności, zachowuje zatem najcenniejszą zaletę MEB i jest jej pierwszą, w pełni brzegową wersją. Z punktu widzenia użytkownika programu komputerowego oznacza to istotne uproszczenia na etapie tworzenia siatki podziału numerycznego. Dyskretyzacji należy poddać tylko brzeg obszaru.

Podstawy metody przedstawione zostały w rozdziale 2 pracy. Z matematycznego punktu widzenia WZW polega na wykonaniu całkowania przez części nieskończoną liczbę razy przy wykorzystaniu tzw. rozwiązań podstawowych wyższych rzędów. W pracy zaprezentowano rozwiązania podstawowe wyższych rzędów dla zagadnień potencjalnych, zagadnień sprężystości i termosprężystości oraz wskazano publikacje, w których rozwiązania te są podane dla innych rodzajów problemów brzegowych. WZW jest metodą ogólną i nowe zastosowania wymagać będą jedynie wyznaczenia nowych rozwiązań podstawowych. Warto również zauważyć, że w wielu przypadkach znalezione już rozwiązania podstawowe mogą być z powodzeniem wykorzystane do analizy problemu.

Wielokrotna zasada wzajemności jest metodą alternatywną do cieszącej się już dużą popularnością podwójnej zasady wzajemności. PZW wykorzystując jedynie standardowe rozwiązanie podstawowe, wymaga zwykle znacznej liczby tzw. biegunów wewnętrznych, których położenie i liczba zależą od analizowanego problemu. Tak jak w WZW odpowiedni dobór liczby wyrazów szeregu decyduje o dokładności metody, tak w przypadku PZW czynnikami tymi są liczba i położenie biegunów wewnętrznych.

Komputerowa implementacja WZW jest naturalna i prosta, a kody komputerowe realizujące tę metodę są jedynie niewielkimi modyfikacjami standardowych programów MEB. Ponieważ rozwiązania podstawowe wyższych

rzędów są funkcjami regularnymi (nie zawierają punktów osobliwych), ich całkowanie numeryczne nie przedstawia żadnych problemów. Również w sposób bezpośredni wykorzystuje się w programach WZW klasyczne procedury uwzględniania warunków brzegowych oraz rozwiązywania końcowego układu równań. Staje się więc jasne, że generując dane dla WZW, można również wykorzystywać opracowane dla MEB preprocesory, zaś istniejące postprocesory ułatwiają wizualizację wyników obliczeń.

Najpoważniejszą wadą zaprezentowanej metody jest konieczność wyznaczenia ciągu laplasjanów funkcji źródła (uogólnionego obciążenia). Proces ten, choć niełatwy, można już dziś zautomatyzować, wykorzystując współczesne oprogramowanie pozwalające na operacje symboliczne. W ten sposób można uzyskać nie tylko analityczne wyrażenia dla kolejnych laplasjanów funkcji źródła, ale nawet gotowe procedury komputerowe.

WZW jest metodą dość efektywną numerycznie. Najbardziej czasochłonną operacją jest obliczenie macierzy wpływu, które następnie mnożone przez macierze kolumnowe dają prawą stronę równania. Nie jest zatem wymagane żadne odwracanie ani mnożenie macierzy kwadratowych. Faktoryzacji poddawana jest tylko macierz główna końcowego układu równań.

Transformacja całek po obszarze w całki brzegowe metodą WZW nie wymaga przyjmowania żadnych dodatkowych założeń upraszczających. Uproszczenia są dla zagadnień liniowych wprowadzane jedynie na etapie dyskretyzacji równania całkowego. W konsekwencji WZW pozwala, przy prawidłowej dyskretyzacji, uzyskać bardzo wysoką dokładność obliczeń.

Problemem nie do końca rozwiązany jest problem zbieżności szeregu WZW. W wielu sytuacjach praktycznych szereg ten redukuje się do sumy skończonej i problem zbieżności nie występuje. Wydaje się jednak konieczne bardziej formalnie od strony matematycznej zbadać zbieżność szeregu i opracowanie ogólnych kryteriów tej zbieżności. W pracy podano bowiem jedynie ogólne wskazówki, jak kontrolować wymaganą liczbę sumowanych wyrazów i pewne oszacowania reszty szeregu.

WZW była już z powodzeniem stosowana do rozwiązywania wielu zagadnień inżynierskich. We wszystkich wypadkach stwierdzono bardzo wysoką dokładność metody. Świadczą o niej choćby zamieszczone w pracy wybrane przykłady obliczeniowe. Również literatura MEB dostarcza dowodów na to, że WZW jest metodą efektywną i dokładną. Jej przydatność jest szczególnie widoczna przy rozwiązywaniu zagadnień potencjalnych oraz w analizie drgań. W tych ostatnich problemach uzyskane sformułowania charakteryzują się stałymi, niezależnymi od częstotliwości macierzami wpływu.



## Bibliografia

- [1] E. Alarcon and A. Reverter. P-adaptive Boundary Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **23**, 801-829, 1986.
- [2] J.P.S. Azevedo and C.A. Brebbia. An efficient technique for reducing domain integrals to the boundary. In C.A. Brebbia, editor, *Boundary Elements Method X - Vol.1 Mathematical and Computational Aspects*, pages 347-365, Berlin, 1988. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag.
- [3] P.K. Banerjee and R. Butterfield. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, 1981.
- [4] M. Benjamin. Heat generation and temperature distributions in cylindrical reactor pressure vessels. *Nuclear Engineering Design*, **11**, 1-15, 1969.
- [5] R. Bialecki, R. Nahlik, and A.J. Nowak. Zastosowanie Metody Brzegowych Równań Całkowych w teorii przewodzenia ciepła. *Mechanika i Komputer*, **6**(1), 154-205, 1986.
- [6] R. Bialecki and A.J. Nowak. Boundary value problems for nonlinear material and nonlinear boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, **5**, 417-421, 1981.
- [7] B.A. Boley and J.H. Weiner. *Theory of Thermal Stresses*. John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [8] C.A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, 1978.
- [9] C.A. Brebbia and J. Domingucz. *Boundary Elements - An Introductory Course*. Comp. Mech. Publications and McGraw-Hill Book Co., Southampton and Boston, second edition, 1992.
- [10] C.A. Brebbia and A.J. Nowak. A new approach for transforming domain integrals to the boundary. In R. Gruber, J. Periaux, and R.P.

- Shaw, editors, *Proceedings of the fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering - Vol.1.*, pages 73-85. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag, 1989. Lausanne, Switzerland, 11-19 Sep. 1989.
- [11] C.A. Brebbia and A.J. Nowak. Solving heat transfer problems by the Dual Reciprocity BEM. In L.C. Wrobel and C.A. Brebbia, editors, *Boundary Elements Method for Heat Transfer*, chapter 1, pages 1-32. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. International Series on Computational Engineering.
- [12] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel. *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, 1981.
- [13] C.A. Brebbia and S. Walker. *The Boundary Element Technique in Engineering*. Newnes-Butterworths, London, 1979.
- [14] T. Buczynski. *Metoda elementów brzegowych w wybranych zagadnieniach analizy i optymalizacji układów odkształcalnych*. Mechanika, Z.97. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 1050, 1989. Praca habilitacyjna.
- [15] T.A. Cruse. Boundary Integral Equation Method for three dimensional elastic fracture mechanics analysis. Technical Report AFOSR-TR-75-0813, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1975.
- [16] T.A. Cruse. Mathematical foundations of the Boundary Integral Equation Method in solid mechanics. Technical Report AFOSR-TR-77-1002, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977.
- [17] T.A. Cruse, S.T. Raveendra, and B.H. Thacker. BIE solutions for thermoplasticity by collocation. In G. Kuhn and H. Mang, editors, *Discretization Methods in Structural Mechanics*, pages 29-38. Springer-Verlag, 1990. IUTAM/IACM Symposium, Vienna, Austria, 5-9 June 1989.
- [18] B.A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, New York, 1972.
- [19] S.J. Gdula, R. Bialecki, K. Kurpisz, A.J. Nowak, and A. Sucheta. *Przewodzenie ciepła*. PWN, Warszawa, 1981.
- [20] G.S. Gipson. *Boundary Element Fundamentals - Basic Concepts and Recent Developments in the Poisson Equation*, volume 2 of *Topics in Engineering*. Comp. Mech. Publications, Southampton and Boston, 1987. C.A. Brebbia and J.J. Connor, editors.

- [21] M. Itagaki and C.A. Brebbia. Generation of higher order fundamental solutions to the two-dimensional modified Helmholtz equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. in press.
- [22] M. Itagaki and C.A. Brebbia. Multiple Reciprocity Boundary Element formulation for one-group fission neutron source iteration problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. in press.
- [23] M. Itagaki and C.A. Brebbia. Remedy for round-off error accumulation observed in a neutron diffusion calculation using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. submitted for publication.
- [24] M. Itagaki and C.A. Brebbia. Round-off error accumulation observed in a neutron diffusion calculation using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method. *Boundary Elements Abstracts and Newsletter*. research note in press.
- [25] M. Itagaki and C.A. Brebbia. Boundary Element Method applied to neutron diffusion problems. In C.A. Brebbia, editor, *Boundary Elements Method X - Vol.2 Heat Transfer, Fluid Flow and Electrical Applications*, pages 45-53. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag, 1988.
- [26] M. Itagaki and C.A. Brebbia. Dual and Multiple Reciprocity Formulations applied to Fission Neutron Source Problems. In C.A. Brebbia, J. Dominguez, and F. Paris, editors, *Vol.1 - Field Problems and Applications*, pages 25-38. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. Boundary Elements Method XIV.
- [27] M.A. Jaswon and G.T. Symm. *Integral Equation Method in Potential Theory and Elastostatics*. Academic Press, London, 1977.
- [28] N. Kamiya and E. Andoh. Eigenvalue analysis by Boundary Element Method. *Journal of Sound and Vibration*. in press.
- [29] N. Kamiya and E. Andoh. Robust Boundary Element scheme for Helmholtz eigenvalue equation. In C.A. Brebbia and G.S. Gipson, editors, *Boundary Elements Method XIII*, pages 839-850. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1991.
- [30] N. Kamiya and E. Andoh. Eigenvalue analysis by Boundary Element Method. In C.A. Brebbia, J. Dominguez, and F. Paris, editors, *Vol.2 - Stress Analysis and Computational Aspects*, pages 673-690. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. Boundary Elements Method XIV.



- [31] N. Kamiya and E. Andoh. Relation between Multiple Reciprocity Formulation and conventional formulation. In C.A. Brebbia, J. Dominguez, and F. Paris, editors, *Vol.2 - Stress Analysis and Computational Aspects*, pages 605–612. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. Boundary Elements Method XIV.
- [32] G.A. Korn and T.M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill Book Comp., New York, second edition, 1968.
- [33] G. Kuhn. Boundary element technique in elastostatics and linear fracture mechanics. In *Finite Element Method and Boundary Element Method from the Mathematical and Engineering Point of View*. Springer Verlag, Wien and New York, 1988. Courses and Lectures No.301 of International Centre for Mechanical Sciences.
- [34] O.A. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, New York, 1963.
- [35] A.E.H. Love. *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.
- [36] W. Łukaszek. Wyznaczanie rozkładów wydajności wewnętrznych źródeł ciepła w układzie osłonnym reaktora jądrowego generowanych w wyniku oddziaływań promieniowania gamma i neutronów. Sprawozdanie z pracy naukowo-badawczej NB-400/RAu-2/RME-3/88, ITC, Gliwice, 1990. Praca nie publikowana.
- [37] E. Majchrzak. *Zastosowanie metody elementów brzegowych w termodynamice procesów odlewniczych*. Mechanika, Z.102. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 1108, 1991. Praca habilitacyjna.
- [38] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill Book Comp., 1953.
- [39] R. Nahlik. *Zastosowanie metody elementów brzegowych do rozwiązywania nieliniowych zagadnień przepływu ciepła*. Praca doktorska, Instytut Techniki Ciepłej Politechniki Śląskiej, 1989.
- [40] D. Nardini and C.A. Brebbia. A new approach to free vibration analysis using Boundary Elements. In C.A. Brebbia, editor, *Boundary Element Methods in Engineering*, pages 312–326. Springer-Verlag, 1982. Proceedings of the fourth International Seminar, Southampton, England.
- [41] D. Nardini and C.A. Brebbia. *Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis*, volume 2 of *Topics in Boundary Elements Research*, chapter 7, pages 191–208. Springer-Verlag, 1985. C.A. Brebbia, editor.

- [42] A.C. Neves. *The Multiple Reciprocity Method Applied to Steady-State and Transient Problems*. PhD thesis, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth, UK, October 1992.
- [43] A.C. Neves and C.A. Brebbia. The Multiple Reciprocity Boundary Elements Method in elasticity: New approach for transforming domain integrals to the boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**(4). 709-727, 1991.
- [44] A.C. Neves and C.A. Brebbia. The Multiple Reciprocity Method applied to thermoelastic problems with concentrated and distributed heat sources. In C. A. Brebbia, editor, *Boundary Elements Technology VI*, pages 201-214. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1991.
- [45] A.C. Neves and C.A. Brebbia. The Multiple Reciprocity Method applied to thermal stress problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **35**, 443-455, 1992.
- [46] A.C. Neves and A.J. Nowak. Steady-state thermoelasticity by Multiple Reciprocity Method. *International Journal of Numerical Methods in Heat & Fluid Flow*, **2**(5), 429-440, 1992. in press.
- [47] A.C. Neves, L.C. Wrobel, and A.J. Nowak. Transient thermoelasticity by Multiple Reciprocity Method. *International Journal of Numerical Methods in Heat & Fluid Flow*. in press.
- [48] A.C. Neves, L.C. Wrobel, and A.J. Nowak. Solution of transient thermoelasticity by the Multiple Reciprocity Method. In L.C. Wrobel, C.A. Brebbia, and A.J. Nowak, editors, *Vol.1 - Heat Conduction, Radiation and Phase Change*, pages 599-608. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. *Advanced Computational Methods in Heat Transfer II*, Milan, 1992.
- [49] W. Nowacki. *Thermoelasticity*. Pergamon Press and Polish Scientific Publishers, Warsaw, second edition, 1986.
- [50] A.J. Nowak. Temperature fields in domains with heat sources using boundary-only formulation. In C.A. Brebbia, editor, *Boundary Elements Method X - Vol.2 Heat Transfer, Fluid Flow and Electrical Applications*, pages 233-247. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag, 1988.

- [51] A.J. Nowak. The Multiple Reciprocity Method of solving heat conduction problems. In C.A. Brebbia and J.J. Connor, editors, *Advances in Boundary Elements - Vol.2. Field and Fluid Flow Solutions*, pages 81–95. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag, 1989. Proceedings of the eleventh International Conference on Boundary Element Methods, Cambridge, Massachusetts, USA, August, 1989.
- [52] A.J. Nowak. Time dependent or time independent fundamental solution for transient heat problems. *BEM Abstracts and Newsletter*, 2(5), 196–197, 1991. Research note.
- [53] A.J. Nowak. Application of the Multiple Reciprocity Method for solving nonlinear problems. In L.C. Wrobel, C.A. Brebbia, and A.J. Nowak, editors, *Vol.1 - Heat Conduction, Radiation and Phase Change*, pages 81–98. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. *Advanced Computational Methods in Heat Transfer II*, Milan, 1992.
- [54] A.J. Nowak. The Multiple Reciprocity Method for nonlinear problems. In C.A. Brebbia, J. Dominguez, and F. Paris, editors, *Vol.2 - Stress Analysis and Computational Aspects*, pages 691–706. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. *Boundary Elements Method XIV*.
- [55] A.J. Nowak. Nonlinear thermal problems solved by the Multiple Reciprocity Method. Referaty VIII Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, str. 359–366. PAN, Komitet Termodynamiki i Spalania, Białowieża 1992.
- [56] A.J. Nowak. Solving linear heat transfer problems by the Multiple Reciprocity Method. In L.C. Wrobel and C.A. Brebbia, editors, *Boundary Elements Method for Heat Transfer*, chapter 3, pages 63–122. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. *International Series on Computational Engineering*.
- [57] A.J. Nowak and C.A. Brebbia. The Multiple Reciprocity Method - A new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(3), 164–167, 1989.
- [58] A.J. Nowak and C.A. Brebbia. Solving Helmholtz equation by Boundary Elements using the Multiple Reciprocity Method. In G.M. Carlomagno and C.A. Brebbia, editors, *Computers and Experiments in Fluid Flow*, pages 265–270. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag, 1989. Proceedings of the fourth International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements, Capri, Italy, May, 1989.



- [59] A.J. Nowak and C.A. Brebbia. Solving transient heat conduction by BEM with global energy balance incorporated. In L.C. Wrobel, C.A. Brebbia, and A.J. Nowak, editors, *Vol.1 - Heat Conduction, Convection and Radiation*, pages 119–127. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag, 1990. 1st International Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Portsmouth, 1990.
- [60] A.J. Nowak and C.A. Brebbia. Numerical verification of the Multiple Reciprocity Method for linear potential problems with body forces. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10(3), 259–266, 1992.
- [61] A.J. Nowak and P.W. Partridge. Comparison of the Dual Reciprocity and the Multiple Reciprocity Methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10(2), 155–160, 1992.
- [62] C.W. Oseen. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leiptzig, 1927.
- [63] M.N. Özışik. *Boundary Value Problems of Heat Conduction*. International Textbook Comp., Scranton, 1968.
- [64] P.W. Partridge and C.A. Brebbia. Computer implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the solution of Poisson type equations. *Software for Engineering Workstations*, 5(4), 199–206, 1989.
- [65] P.W. Partridge and C.A. Brebbia. Computer implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the solution of general field problem. *Communications in Applied Numerical Methods*, 6, 83–92, 1990.
- [66] P.W. Partridge, C.A. Brebbia, and L.C. Wrobel. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992.
- [67] P.W. Partridge and L.C. Wrobel. Boundary Element analysis of spontaneous ignition problems. In L.C. Wrobel, C.A. Brebbia, and A.J. Nowak, editors, *Vol.3 - Phase Change and Combustion Simulation*, pages 145–155. Comp. Mech. Publications and Springer-Verlag, 1990. 1st International Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Portsmouth, 1990.
- [68] H. Power and B.F. Power. Multiple Reciprocity Method for external problems: with application to non-permanent Stokes flow past a body of arbitrary shape. In C.A. Brebbia, J. Dominguez, and F. Paris, editors, *Vol.2 - Stress Analysis and Computational Aspects*, pages 651–661. Comp. Mech. Publications and Elsevier Applied Science, 1992. Boundary Elements Method XIV.

- [69] H. Power and B.F. Power. Solving Ossen's system of equations by Boundary Elements using Multiple Reciprocity Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **10**(1), 69-74, 1992.
- [70] E. Rank. Adaptive h, p and hp versions for boundary integral element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 1335-1349, 1989.
- [71] J.J. Rencis and K.Y. Jong. A self-adaptive h-refinement technique for the Boundary Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, **73**, 295-316, 1989.
- [72] V. Sladek, J. Sladek, and M. Tanaka. Multiple Reciprocity Method for harmonic vibration of thin elastic plates. *Applied Mathematical Modelling*. submitted for publication.
- [73] Soft Warehouse, Inc., Honolulu, USA. *Derive User Manual - A Mathematical Assistant for Your Personal Computer*, fourth edition, 1990. version 2.
- [74] A.H. Stroud and P. Secrest. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [75] J. Szargut, red. *Modelowanie numeryczne pól temperatury*. WNT, Warszawa, 1992.
- [76] W. Tang. *Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM - A Generalized Approach*, volume 35 of *Lecture Notes in Engineering*. Springer-Verlag, 1988. C.A. Brebbia and S.A. Orszag, editors.
- [77] H. Tautz. *Wärmeleitung und Temperaturlausgleich*. Akademie Verlag, Berlin, 1971.
- [78] J.C.F. Telles. *Two-Dimensional Elastostatic Analysis Using Boundary Elements*. Comp. Mech. Publications, 1986.
- [79] J.C.F. Telles. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general Boundary Element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, 959-973, 1987.
- [80] S. Wolfram. *Mathematica - A System for Doing Mathematics by Computer*, 1988.
- [81] L.C. Wróbel and C.A. Brebbia. The Dual Reciprocity Boundary Element formulation for nonlinear diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, **65**(2), 147-164, 1987.

- [82] L.C. Wrobel and C.A. Brebbia. Boundary Elements for non-linear heat conduction. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4, 617-622, 1988.
- [83] O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. Mc Graw-Hill, New York, third edition, 1977.



## Dodatek A

# Rozwiązania podstawowe wyższych rzędów dla zagadnień potencjalnych

W niniejszym Dodatku udowodniono metodą indukcji matematycznej, że funkcja (2.25) jest rozwiązaniem równania rekurencyjnego (2.11) z warunkiem początkowym rekurencji określonym zależnością (1.3). Pokazano również, że dowolne stałe całkowania będące rezultatem rozwiązania równania (2.11) spełniają warunek (2.24).

Zauważmy na początek, że podstawiając w zależności (2.25)  $j = 0$  oraz przyjmując  $A_0 = 1$  i  $B_0 = 0$ , otrzymujemy klasyczne rozwiązanie podstawowe, tj. rozwiązanie podstawowe rzędu zerowego zdefiniowane równaniem (1.3). Załóżmy teraz, że wyrażenie (2.25) jest dla pewnego  $j = k$  rozwiązaniem równania (2.11). Rozwiązanie podstawowe rzędu  $j = k + 1$  znajdziemy przez całkowanie następującego równania różniczkowego

$$\nabla^2 T^{*(k+1)} = T^{*(k)} \quad (\text{A.1})$$

Jeśli początek układu współrzędnych umieszczony jest w punkcie działania źródła, to ze względu na symetrię osiową zagadnienia brzegowego powyższe równanie można zapisać w następującej formie

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT^{*(k+1)}}{dr} \right) = \frac{1}{2\pi} r^{2k} (A_k \ln r - B_k) \quad (\text{A.2})$$

Bezpośrednie całkowanie według zmiennej  $r$  daje

$$T^{*(k+1)} = \frac{1}{2\pi} r^{2(k+1)} \left[ \frac{A_k}{4(k+1)^2} \ln r - \left( \frac{A_k}{k+1} + B_k \right) \frac{1}{4(k+1)^2} \right] + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{A.3})$$

gdzie:  $C_1$  i  $C_2$  - stałe całkowania.

Definiując następujące współczynniki

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{4(k+1)^2} \quad (\text{A.4})$$

$$B_{k+1} = \frac{1}{4(k+1)^2} \left( \frac{A_k}{k+1} + B_k \right) \quad (\text{A.5})$$

otrzymujemy ostatecznie

$$T^{*(k+1)} = \frac{1}{2\pi} r^{2(k+1)} (A_{k+1} \ln r - B_{k+1}) + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{A.6})$$

Po zróżniczkowaniu według normalnej zewnętrznej daje to

$$q^{*(k+1)} = -k \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{2\pi} r^{2k+1} \{ 2(k+1) A_{k+1} \ln r - [2(k+1) B_{k+1} - A_{k+1}] \} + \frac{C_1}{r} \right\} \quad (\text{A.7})$$

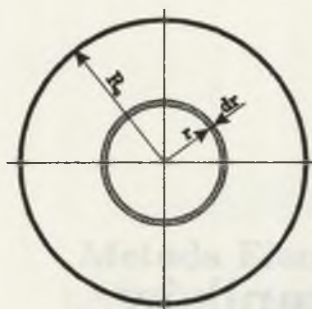
Rozwiązania podstawowe  $T^{*(k+1)}$  oraz  $T^{*(k)}$  powinny spełniać warunek (2.24). Równanie to jest słuszne dla obszaru  $\Omega$  o dowolnym kształcie. Celem wyznaczenia stałych  $C_1$  oraz  $C_2$  obliczenia wykonamy dla okręgu o promieniu  $R_0$ , którego środek znajduje się w punkcie działania źródła. Uwzględniając zależności geometryczne pokazane na rys.A.1, otrzymujemy

- dla całki po obszarze

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T^{*(k)} d\Omega &= \int_0^{R_0} T^{*(k)} 2\pi r dr = \\ &= \frac{A_k}{2(k+1)} R_0^{2k+2} \ln R_0 - \\ &- \frac{1}{2(k+1)} \left( \frac{A_k}{2(k+1)} + B_k \right) R_0^{2k+2} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

- dla całki po brzegu obszaru

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} \int_{\Gamma} q^{*(k+1)} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{\partial T^{*(k+1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} d\Gamma = \\ &= 2\pi R_0 \frac{\partial T^{*(k+1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 2\pi C_1 + \\ &+ 2(k+1) A_{k+1} R_0^{2k+2} \ln R_0 - \\ &- [2(k+1) B_{k+1} - A_{k+1}] R_0^{2k+2} = \\ &= 2\pi C_1 + \frac{A_k}{2(k+1)} R_0^{2k+2} \ln R_0 - \\ &- \frac{1}{2(k+1)} \left( \frac{A_k}{2(k+1)} + B_k \right) R_0^{2k+2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$



Rys. A.1. Oznaczenia stosowane przy wyznaczaniu stałych całkowania

Fig. A.1. Notation adopted when calculating integration constants

Porównanie zależności (A.8) i (A.9) prowadzi natychmiast do wniosku, że

$$C_1 = 0 \quad (\text{A.10})$$

Stała całkowania  $C_2$  nie występuje w równaniach (A.8) oraz (A.9), zatem jej wartość może być zupełnie dowolna. Najwygodniej jest przyjąć ją jako zero

$$C_2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

Podstawiając zerowe wartości stałych całkowania do równania (A.6), otrzymujemy ostatecznie

$$T^{(k+1)} = \frac{1}{2\pi} r^{2(k+1)} (A_{k+1} \ln r - B_{k+1}) \quad (\text{A.12})$$

Tym samym z założenia prawdziwości równania (2.25) dla  $j = k$  wykazano jego prawdziwość dla następnego  $j = k + 1$ , co kończy dowód indukcyjny.



## Dodatek B

# Stosunek współczynników liczbowych w rozwiązaniu podstawowym

W niniejszym Dodatku przedstawiono dowód indukcyjny zależności wyrażającej stosunek współczynników liczbowych  $A_j$  oraz  $B_j$  w rozwiązaniu podstawowym

$$\frac{B_j}{A_j} = \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{1+l} \quad (\text{B.1})$$

wykorzystanej w równaniu (2.32).

Na podstawie równań (2.26) i (2.27) obliczamy  $A_1 = B_1 = 0.25$ , co dla początkowego  $j = 1$  pozostaje w zgodzie z równaniem (B.1). Mamy bowiem

$$\frac{B_1}{A_1} = \sum_{l=0}^0 \frac{1}{1+l} = 1 \quad (\text{B.2})$$

Zalóżmy teraz, że równanie (B.1) jest prawdziwe dla pewnego  $j = k$ . Zatem

$$\frac{B_k}{A_k} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{1+l} \quad (\text{B.3})$$

Stosunek współczynników  $B_{k+1}$  do  $A_{k+1}$  wyznaczmy, dzieląc przez siebie równania (2.27) i (2.26). Otrzymamy

$$\frac{B_{k+1}}{A_{k+1}} = \frac{B_k}{A_k} + \frac{1}{1+k} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{1+l} + \frac{1}{1+k} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{1+l} \quad (\text{B.4})$$

Tym samym wykazano, że jeśli równanie (B.1) jest spełnione dla dowolnego  $j = k$ , to jest również prawdziwe dla następnego  $j = k+1$ , co kończy dowód indukcyjny.

# **Metoda Elementów Brzegowych z zastosowaniem wielokrotnej zasady wzajemności**

## **Streszczenie**

W pracy zaprezentowano w pełni brzegową wersję metody elementów brzegowych. Sformułowanie oparte na tzw. wielokrotnej zasadzie wzajemności wykorzystuje rozwiązania podstawowe wyższych rzędów i prowadzi do równania całkowitego zawierającego tylko całki po brzegu ciała.

Przedstawiono podstawy wielokrotnej zasady wzajemności, a następnie jej zastosowania do modelowania pól temperatury, pól przemieszczeń i naprężeń, do rozwiązywania równania Helmholtza oraz w inżynierii jądrowej do badania krytyczności reaktora jądrowego. Główny nacisk położono na rozwiązywanie zagadnień liniowych, choć przedyskutowano również zastosowanie WZW do badania nieliniowych procesów przewodzenia ciepła. Praca zawiera liczne przykłady numeryczne świadczące o dokładności i efektywności numerycznej omówionej techniki.

Poszerzenie pola zastosowań wielokrotnej zasady wzajemności wymagać będzie znalezienia nowych rozwiązań podstawowych wyższych rzędów.

Dodatek B

# Boundary Element Method with an application of the Multiple Reciprocity Method

## Summary

The boundary only formulation of Boundary Element Method has been presented. Approach is based on so called Multiple Reciprocity Method and utilizes higher order fundamental solutions. Obtained integral equation contains only boundary integrals.

Fundamentals of Multiple Reciprocity Method has been presented which is followed by its applications to modelling temperature fields, displacements and stresses, solving Helmholtz equation and criticality safety problems of nuclear engineering. The emphasis is on solving linear problems, although discussion on application of MRM to analyse nonlinear heat conduction is also included. Number of numerical examples demonstrate accuracy and efficiency of above technique.

New applications require the new higher order fundamental solutions to be found.

$$\frac{R_1}{R_2} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{R_{2n}}{R_{2n-1}} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{1 + \lambda_n^2} = \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{1 + \lambda_m^2} + \frac{1}{1 + \lambda_n^2} = \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{1 + \lambda_m^2} \quad (2.4)$$

This paper presents the full version of the Boundary Element Method with the application of the Multiple Reciprocity Method to solve the problem of heat conduction in a rectangular domain.



# **Methode der Randelemente mit Anwendung der Methode der mehrfachen Reziprozität**

## **Kurzfassung**

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Variante der Randelementmethode vorgestellt in der die Gleichungen ausschließlich auf dem Rand formuliert sind. Die Formulierung basiert auf der sogenannten Methode der mehrfachen Reziprozität und verwendet Fundamentallösungen höher Ordnung. Die resultierende Integralgleichung enthält nur Integrale auf dem Rand des betrachteten Gebiets.

Die Grundlagen der Methode der mehrfachen Reziprozität wurden erörtert. Die Methode wurde für die Modellierung der Temperatur-, Verschiebungs-, und Spannungsfelder sowie auch zur Lösung der Helmholtz-Gleichung und zur Untersuchung der Kritikalität in der Kernenergietechnik verwendet. Obwohl die in der Arbeit behandelten Probleme überwiegend linear sind, ist die Anwendung der MMR in der nichtlinearen, instationären Wärmeleitung ebenso beschrieben worden. Zahlreiche numerische Beispiele für den Einsatz des entwickelten Verfahrens zeigen die Genauigkeit und Effektivität der vorgeschlagenen Methode.

Um den Anwendungsbereich der MMR zu erweitern, müssen neue Fundamentallösungen höherer Ordnung gefunden werden.

11.900,-

BIBLIOTEKA GŁÓWNA  
Politechniki Śląskiej

P.3349/93 /MG