

Jerzy PIOTROWSKI

Politechnika Warszawska, Instytut Pojazdów

OPIS PRZEMIESZCZEŃ NIESPRĘŻYSTYCH W SYMULACJI ZUŻYCIA ZA POMOCĄ MODELU CIAŁA PRANDTLA

Streszczenie. Do opisu normalnych przemieszczeń niesprężystych w symulacji zużycia zaproponowano heurystyczny model warstwy wierzchniej koła i szyny w postaci ciała Prandtla, przytwierdzonego do sprężystego materiału rodzimego. Przemieszczenia ciała mogą być niesprężyste. W praktyce symulacji zużycia będzie to prowadzić do modyfikacji profili nie tylko przez ścierny ubytek materiału, lecz także wskutek resztkowych przemieszczeń niesprężystych. Przedstawiono metodę rozwiązywania normalnego zadania kontaktowego z uwzględnieniem warstwy wierzchniej według proponowanego modelu. Praca zawiera przykłady obliczeniowe. Wyznaczenie parametrów modelu wymaga użycia MES.

DESCRIPTION OF INELASTIC DISPLACEMENTS IN WEAR SIMULATION BY MODEL OF THE PRANDTL BODY

Summary. In order to take into account normal inelastic displacements during wear simulation a heuristic model of the surface layer has been proposed in the form of the Prandtl body fixed to the elastic material. The displacements of the Prandtl body may be inelastic. In practise of wear simulation this will lead to the modification of profiles not only by abrasive loss of material but also by inelastic, residual displacements. The method of solving the normal contact problem for bodies with the layer model has been presented. The paper presents numerical results. Determination of parameters of the body requires FEM calculations.

1. WSTĘP

W badaniach zużycia kół i szyn powszechnie stosuje się metodę symulacyjną. Symulacja polega na cyklicznym wyznaczaniu lokalnych wielkości mechanicznych w kontakcie, wynikających z oddziaływania koła i szyny podczas jazdy, i modyfikacji profili zgodnie z przyjętą hipotezą zużycia, wykorzystującą wyznaczone wielkości. Dzięki opracowaniu szybkiej, niezawodnej metody rozwiązywania zadań kontaktowych [4], w symulacji zużycia

możliwa jest obecnie modyfikacja profili po kilku (kilkunastu) krokach całkowania lub w każdym kroku całkowania modelu dynamiki pojazdu [5].

W symulacji zużycia jest powszechnie stosowana hipoteza zużycia ściernego, zgodnie z którą ubytek materiału jest proporcjonalny do pracy tarcia. Hipoteza ta nie jest jednak wystarczająca. Wiadomo, że na zużycie wpływa szereg innych czynników, których wpływ nie jest jeszcze dostatecznie zbadany zarówno teoretycznie, jak i eksperymentalnie, w tym przemieszczenia niesprężyste powierzchni toczonej. W tej sytuacji wyniki symulacyjne są dopasowywane do wyników doświadczalnych przez dobór współczynników zależności opisującej ubytek materiału. Oznacza to, że symulacja nie jest samodzielnym narzędziem prognozowania zużycia.

W niniejszej pracy w celu uwzględnienia niesprężystych przemieszczeń zużywającej się pary toczonej zaproponowano model warstw wierzchnich toczących się po sobie elementów.

W sformułowaniu brzegowym normalnego zadania kontaktowego prowadzącym do szybkich algorytmów obliczeniowych zakłada się, że ciała pozostające w kontakcie są jednorodnie i liniowo-sprężyste, a do wyznaczenia przemieszczeń normalnych zastępuje się je półprzestrzeniami sprężystymi, których odkształcalność opisuje w postaci analitycznej funkcja wpływowa Boussinesqa [3].

Z względu na bardzo dużą liczbę zadań kontaktowych rozwiązywanych podczas symulacji zużycia, również model uwzględniający przemieszczenia niesprężyste musi być z konieczności bardzo uproszczony w tym celu, aby obliczenia były wystarczająco szybkie.

Do opisu niesprężystych przemieszczeń proponuje się, na podstawie przesłanek heurystycznych, ciało Prandtla osadzone na ciele sprężystym jako model warstwy wierzchniej. W ten sposób działanie naprężenia normalnego (ciśnienia kontaktowego) powoduje przemieszczenia normalne zarówno ciała sprężystego, jak i jego warstwy wierzchniej.

W praktyce symulacji zużycia będzie to oznaczać, że modyfikacja profili będzie zachodzić nie tylko jako skutek ściernego ubytku materiału, lecz także niesprężystych przemieszczeń zachodzących w wierzchniej warstwie powierzchni toczonej, co z kolei wpłynie na modyfikację przez ubytek. Zastosowanie proponowanego podejścia umożliwi rozszerzenie symulacyjnego modelu zużycia o rzadko uwzględniany dotychczas efekt.

2. CIAŁO PRANDTLA

Ciało (podłoże) Prandtla tworzy nieskończenie wiele lokalnych elementów sprężystych z tarciami suchymi osadzonych na podłożu, w tym przypadku na ciele liniowo-sprężystym.

Zastosowany element nazywany jest uogólnionym modelem reologicznym Prandtla z liniowym umocnieniem [1]. Żaden z elementów ciała nie jest powiązany z innymi. Podobnymi tworami, lecz prostszymi strukturalnie są ciało (podłoże) Winklera oraz identyczne z nim, lecz odkształcalne stycznie ciało uproszczonej teorii Kalkera [3] toczenia się brył sprężystych.

Element ciała Prandtla przedstawiono na rys. 1. Jest to element podatny, złożony z N sprężyn liniowych i $N-1$ suwaków tarcia suchego, zwanych również elementami de St-Venanta.

Na element działa naprężenie normalne p , pod wpływem którego element się odkształca. Powstaje przemieszczenie normalne u . Sztywność sprężyn elementu jest wyrażona w N/m^3 , a siła zerwania suwaka tarcia suchego w N/m^2 .

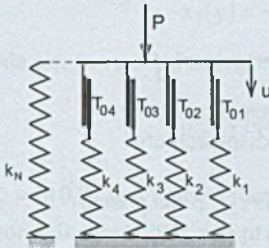
Suwak tarcia suchego jest opisany przez następującą niegładką relację:

$$\Omega_i : T_i \in [-T_{0i}, +T_{0i}], \quad (1)$$

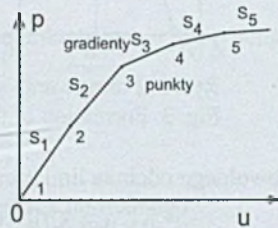
$$v_{si} \in -K_i(T_i, \Omega_i), \quad (2)$$

gdzie v_{si} jest prędkością ślizgania, a stożek K_i jest opisany jako

$$v_{si} \in \begin{cases} \{0\} & \text{if } |T_i| < T_{0i} \\ R^+ & \text{if } |T_i| = +T_{0i}, (i=1, N-1). \\ R^- & \text{if } |T_i| = -T_{0i} \end{cases} \quad (3)$$



Rys. 1. Element ciała Prandtla
Fig. 1. Element of the Prandtl body



Rys. 2. Charakterystyka elementu ciała
Fig. 2. Characteristic of the body element

Na rys. 2 przedstawiono charakterystykę elementu ciała Prandtla. Jest to zależność między przemieszczeniem a naprężeniem przy monotonicznie narastającym naprężeniu. Charakterystyka składa się z odcinków linii prostych. Odcinki charakteryzuje N gradientów i $N+1$ punktów krańcowych. Przypuśćmy, że punkty u_i ($i = 1, N+1$) i gradienty S_i ($i = 1, N$) są znane. Na podstawie charakterystyki można określić parametry elementu, którymi są sztywności sprężyn i siły zerwania suwaków tarcia.

Sztywności sprężyn określają wzory

$$k_N = S_N, \quad (4)$$

$$k_i = S_i - S_{i+1}, (i = 1, N-1). \quad (5)$$

Siły zerwania suwaków tarcia oblicza się według wzorów

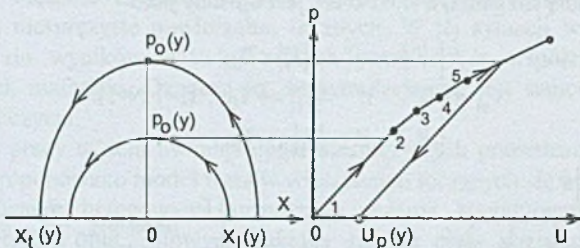
$$T_{0i} = k_i u_{i+1}, (i = 1, N-1). \quad (6)$$

3. PRZEMIESZCZENIE NORMALNE ELEMENTU WARSTWY WIERZCHNIEJ

Gdy cząsteczka koła (szyny) przepływa od krawędzi wiodącej $x_1(y)$ obszaru styku do krawędzi tylnej $x_t(y)$, jest ona obciążana naprężeniem normalnym o rozkładzie $p(x, y)$ wzdłuż ścieżki toczonej $y = \text{const}$, pokazanym w lewej części rys. 3. Naprężenie narasta od wartości 0 do wartości maksymalnej $p_0(y) = p(0, y)$, po czym spada do zera na krawędzi tylnej. Wykres w prawej części rysunku ilustruje charakterystykę elementu.

Rysunek przedstawia sytuację, gdy przed wejściem do obszaru styku elementy ciała warstwy wierzchniej nie były napięte. Oznacza to, że $T_i = 0$, ($i = 1, N-1$).

Element odkształca się, jak pokazano na rys. 3. Gdy naprężenie maksymalne $p_0(y)$ nie osiąga punktu 2, to element odkształca się sprężysto. W innych przypadkach powstaje niesprężyste przemieszczenie resztkowe $u_p(y)$.



Rys. 3. Formowanie się przemieszczenia resztkowego
Fig. 3. Formation of the residual inelastic displacement

Równanie dowolnego odcinka linii prostej charakterystyki na rys. 3 ma postać

$$p = p_i + S_i(u - u_i), \quad (i = 1, N). \quad (7)$$

Gdy $p_{i+1} > p_0(y) \geq p_i$, ($i = 2, N$), powstaje przemieszczenie resztkowe $u_p(y)$. Aby je obliczyć, znajdujemy przecięcie linii poziomej $p_0(y)$ z odcinkiem linii przechodzącą przez punkty i oraz $i+1$, kreślimy w dół linię równoległą do odcinka 1-2 i obliczamy jego przecięcie z linią $p=0$.

Łatwo wykazać, że przy indeksie i spełniającym powyższą nierówność

$$u_p(y) = u_i + \frac{p_0(y) - p_i}{S_i} - \frac{p_0(y)}{S_1}. \quad (8)$$

4. OBLICZENIE OBSZARU STYKU

Proponuje się obliczanie obszaru styku szybką metodą przybliżoną opisaną w pracy [4] z iteracją przemieszczeń elementów ciała Prandtla. Wielkościami wejściowymi są: separacja profili, hertzowski promień krzywizny w kierunku toczenia oraz siła normalna obciążająca koło i szynę oraz charakterystyka ciała Prandtla. Wynikiem obliczenia będzie obszar styku, rozkład naprężenia normalnego w obszarze oraz niesprężyste przemieszczenia resztkowe.

Adaptacja szybkiej, przybliżonej metody obliczeń kontaktowych [4], uwzględniająca model warstwy wierzchniej, zostanie opisana na przykładzie, gdy charakterystyka warstwy jest liniowa, a więc jest ciałem Winklera. W obliczeniach uwzględniających ciało Prandtla niezbędna jest iteracja.

Idea szybkiej, przybliżonej metody obliczeń kontaktowych polega na tym, że za obszar styku przyjmuje się obszar interpenetracji powstały przez przenikanie się powierzchni brył przy zbliżeniu $\delta_0 = \alpha \cdot \delta$, gdzie δ jest zbliżeniem ciał, a znany współczynnik $\alpha < 1$. Możliwe jest ulepszenie (korekta) kształtu obszaru, które tutaj nie będzie zastosowane.

Obszar styku jest opisany przez funkcję interpenetracji oraz współrzędne jego krawędzi wiodącej $x_1(y)$ i tylnej $x_t(y)$.

Funkcja interpenetracji ma postać

$$g(y) = \begin{cases} \delta_0 - f(y) & \text{if } f(y) \leq \delta_0 \\ 0, & \text{if } f(y) > \delta_0 \end{cases}, \quad (9)$$

gdzie: $f(y) = z(y) = z_1(y) + z_2(y)$ - separacja profili, $z_i(y)$, $(i = -1, 2)$ - równania profili.

Krawędzie obszaru styku opisane są wyrażeniem

$$x_1(y) = -x_t(y) \approx \sqrt{2Rg(y)}. \quad (10)$$

Zakłada się, że rozkład naprężenia normalnego w kierunku toczenia jest półeliptyczny

$$p(x, y) = \frac{p_0}{x_1(0)} \sqrt{x_1^2(y) - x^2}, \quad (11)$$

gdzie $p_0 = p(0, 0)$ jest naprężeniem szczytowym.

Siła normalna jest obliczana przez całkowanie naprężenia normalnego

$$N = \frac{p_0}{x_1(0)} \int_{y_r}^{y_l} \int_{x_t}^{x_1} \sqrt{x_1^2(y) - x^2} dx dy. \quad (12)$$

Przemieszczenie normalne w geometrycznym punkcie styku $(0, 0)$ jest określone wyrażeniem

$$w(0, 0) = w_0 = p_0 \left[\frac{1}{2k} + \frac{1 - \sigma^2}{\pi E x_1(0)} \int_{y_r}^{y_l} \int_{x_t}^{x_1} \frac{\sqrt{x_1^2(y) - x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \right], \quad (13)$$

gdzie: k - sztywność ciała, E - moduł Younga, σ - współczynnik Poissona,

y_l, y_r - współrzędne skrajnych końców obszarów lewego i prawego.

Warunek kontaktowy w punkcie $(0, 0)$ ma postać $2w_0 = \delta$. Stąd

$$N = \frac{\pi E k \delta \int_{y_r}^{y_l} \int_{x_t}^{x_1} \sqrt{x_1^2(y) - x^2} dx dy}{\pi E x_1(0) + 2k(1 - \sigma^2) \int_{y_r}^{y_l} \int_{x_t}^{x_1} \frac{\sqrt{x_1^2(y) - x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy}, \quad (14)$$

oraz

$$p_0 = \frac{N \sqrt{2R\delta_0}}{\int_{y_r}^{y_l} \int_{x_t}^{x_1} \sqrt{x_1^2(y) - x^2} dx dy}. \quad (15)$$

Całki występujące w powyższych wyrażeniach są obliczane numerycznie.

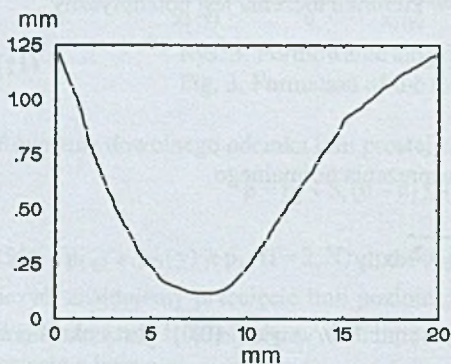
W przypadku zadanej siły normalnej i nieliniowej charakterystyki warstwy wierzchniej, jak w przypadku ciała Prandtla, realizowane są dwie iteracje: iteracja zbliżenia δ w celu

otrzymania zadanej siły normalnej i iteracja sztywności w celu osiągnięcia rozwiązania na charakterystyce ciała Prandtla. Obie iteracje są szybko i niezawodnie zbieżne.

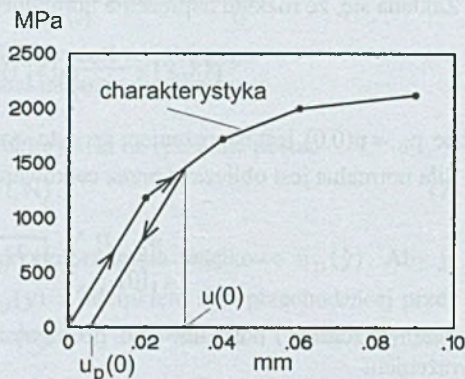
5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Rozpatrujemy przykład, który posłuży do prezentacji przykładowych wyników. Przyjęte parametry są arbitralne i zostały tak dobrane, aby wyniki wyraziście ilustrowały jakościowe cechy rozwiązania.

Zakładamy, że charakterystyka warstwy wierzchniej w postaci ciała Prandtla ma postać przedstawioną na rys. 5 i obowiązuje w każdym punkcie powierzchni koła i szyny. Separację profili pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Separacja profili
Fig. 4. Separation of profiles



Rys. 5. Charakterystyka ciała Prandtla
Fig. 5. Characteristic of the Prandtl body

Inne parametry przykładu to hertzowski promień krzywizny w kierunku toczenia $R=1600$ mm oraz siła normalna 100 kN. Jednocześnie z zadaniem normalnym rozwiązujemy styczne zadanie kontaktowe, przyjmując następujące warunki toczenia:

$$v_x = 0.002, v_y = 0., \varphi = 0.0012 [1/\text{mm}],$$

gdzie: v_x - względny poślizg wzdłużny, v_y - względny poślizg poprzeczny, φ - poślizg wiertny.

Rozwiązanie stycznego zadania kontaktowego uzyskujemy w ramach teorii uproszczonej stosując przedstawione w pracy [6] rozszerzenie algorytmu Fastsim Kalkera. Celem jest poznanie na tym przykładzie wpływu odkształceń warstwy wierzchniej na wielkości decydujące o zużyciu ściernym.

Na rysunkach 6, 7, 8 przedstawiono obszary styku i naprężenia powierzchniowe podczas toczenia z założonymi poślizgami. Obszary są wyznaczone przez kwadratowe elementy dyskretyzacji. Dyskretyzacja jest niezbędna do obliczenia całek wchodzących do wyrażeń (14), (15). Elementy obszaru styku, w których występuje ślizganie, są wypełnione kolorem szarym.

Obszar styku obliczony z uwzględnieniem ciała Prandtla jako modelu warstwy wierzchniej pokazano na rys. 6.

Dla porównania na rys. 7 pokazano obszar styku obliczony bez uwzględnienia warstwy wierzchniej. Wielkości charakteryzujące oba rozwiązania opisano w tab.1. Obszar obliczony

bez uwzględnienia modelu warstwy ma nieco mniejszą długość i szerokość, pole jego powierzchni jest o 14% mniejsze, a szczytowe naprężenie normalne o 18% wyższe.

Przemieszczenie normalne elementu ciała Prandtla w geometrycznym punkcie styku (0,0) pokazano na rys. 4. Wynosi ono $u(0)=0.0301\text{mm}$. Po całkowitym odciążeniu przemieszczenie resztkowe w punkcie (0,0) wynosi $u_p(0)=0.0055\text{mm}$.

Największe przemieszczenia resztkowe występują w punktach obszaru styku położonych na linii $x=0$. Przemieszczenia te modyfikują separację profili. Zakładając nową separację profili

i brak napięcia elementów ciała przed następnym obciążeniem, przetoczenie koła doprowadzi do powstania innego obszaru styku niż przy pierwszym przetoczeniu, nawet wówczas gdy obciążenie normalne jest takie samo co do wartości.

1x1 mm box



Rys. 6. Obszar styku z warstwą wierzchnią Prandtla
Fig. 6. Contact patch with the Prandtl surface layer

1x1 mm box

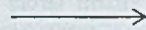


Rys. 7. Obszar styku bez warstwy wierzchniej
Fig. 7. Contact patch without surface layer

1x1 mm box



kierunek toczenia



Rys. 8. Obszar styku po 19 cyklach obciążania
Fig. 8. Contact patch after 19 loading cycles

Wykonując symulacyjnie szereg przetoczeń ze stałą siłą normalną, można zaobserwować powiększanie się pola obszaru styku i spadek szczytowego naprężenia normalnego w kolejnych cyklach.

Proces ten kończy się po kilku lub kilkunastu cyklach, gdy szczytowe naprężenie normalne osiągnie wartość określoną przez drugi punkt charakterystyki na rys. 2, a więc gdy następne obciążenie tą samą siłą spowoduje tylko przemieszczenia sprężyste.

Proces obliczeniowy przebiega podobnie do zjawiska fizycznego zwanego przystosowaniem plastycznym (shakedown) [2].

Ustabilizowany po 19 cyklach obszar styku pokazano na rys. 8. Wielkości opisujące rozwiązanie umieszczono w tab. 1. Obszar styku jest krótszy i szerszy niż w pierwszym cyklu, pole powierzchni obszaru jest o 14% większe, szczytowe naprężenie normalne spada o 18%.

Zmiana kształtu i wielkości obszaru styku wpływa również na generowane siły styczne, prędkości ślizgania i pracę tarcia, więc na dynamikę pojazdu i zużycie ściernie. Wyniki dotyczące tych wielkości podano w tab. 1. Dotyczą one gęstości mocy tarcia P_T wpływającej na temperaturę w kontakcie oraz jednostkowej pracy tarcia W_T . Ta ostatnia decyduje o zużyciu ściernym. Maksymalna jednostkowa praca tarcia w przypadku z ciałem Prandtla jest ok. 18% wyższa niż w przypadku bez warstwy wierzchniej.

Zużycie jest procesem długotrwałym, w którym zmiany wszystkich wielkości kontaktowych umieszczonych w tab. 1 wpływają na przebieg zużycia.

Tabela 1

Porównanie wyników obliczeń kontaktowych

wielkość	z ciałem Prandtla	bez ciała	przystosowanie (shakedown)
długość obszaru styku [mm]	29.97	27.36	28.1
szerokość obszaru styku [mm]	4.18	3.85	4.51
pole powierzchni [mm ²]	100.5	85.8	114.2
zbliżenie δ [mm]	0.127601	0.106330	0.11217
siła wzdłużna F_x [kN]	-14.44	-14.84	-18.42
siła poprzeczna F_y [kN]	-18.98	-21.24	-16.69
max napr. normalne [MPa]	1456	1724	1190
max praca tarcia W_T [Nm/m]	43.11	35.37	37.87
max gęstość mocy tarcia P_T [W/mm ²] przy $V=1$ m/s	5.90	6.48	4.72

W przypadku zaistnienia przystosowania plastycznego zmiana kształtu i wielkości obszaru styku silnie wpływa na siły styczne, pracę tarcia i gęstość mocy tarcia.

Inne zjawisko, które może być uwzględnione przy zastosowaniu zaproponowanego modelu to umocnienie odkształceniowe (strain hardening) [2]. W tym celu po każdym obciążeniu należy rejestrować stan sprężyn elementów ciała. Gdy po odciążeniu występują przemieszczenia resztkowe, to sprężyny ciała będą napięte. Napięcia sprężyn są równoważone statycznymi siłami tarcia w unieruchomionych suwakach de St-Venata (sticking). Element ciała nie dozna przemieszczenia przy kolejnym obciążeniu, jeśli obciążenie nie przekroczy najmniejszej z sił tarcia w suwakach tego elementu. Oznacza to, że element został umocniony przez poprzednie odkształcenie.

6. PARAMETRY CIAŁA PRANDTLA

W uproszczonej teorii toczenia Kalkera [3] wartość parametru konstytutywnego ciała tej teorii jest dobierana w taki sposób, aby jej wyniki były możliwie bliskie wynikom uzyskiwanym przy użyciu tzw. teorii kompletnej [3], gdzie równaniem konstytutywnym jest funkcja wpływowa Cerruti dla półprzestrzeni sprężystej. Postać wyników teorii uproszczonej uniemożliwia utożsamienie obu teorii, a to oznacza, że dobór może być dokonany na wiele sposobów. Obecnie, po latach doświadczeń z różnymi sposobami doboru parametrów, teoria uproszczona jest szeroko stosowana w modelowaniu dynamiki pojazdów.

W przypadku ciała Prandtla odniesienie się do teorii „kompletnej” jako wzorca nie jest możliwe, gdyż taka teoria nie istnieje. W związku z tym parametry ciała Prandtla mogą być

wyznaczone tylko na drodze obliczeń metodą elementów skończonych. Przesłanką, która zachęca do takiego podejścia, jest to, że przekroje szyny i obręczy koła są standaryzowane, a więc wyniki obliczeń będą przydatne w większości sytuacji geometrycznych. Ponadto, do wykonania takich obliczeń istnieje odpowiednie oprogramowanie profesjonalne. Należy przypuszczać, że parametry elementów ciała nie będą jednakowe dla różnych fragmentów profili koła i szyny. Uwzględnienie zmiennych wzdłuż profili parametrów nie stanowi żadnej trudności podczas rozwiązywania normalnego zadania kontaktowego opisaną wyżej metodą.

Podobnie jak w przypadku uproszczonej teorii Kalkera, w celu dobrania parametrów będzie konieczne przeprowadzenie wielu testów obliczeniowych.

Weryfikacja efektywności i użyteczności zaproponowanego modelu wymagać będzie porównywania wyników symulacji z wynikami pomiarów zużycia.

7. PODSUMOWANIE

Przedstawiony model warstwy wierzchniej w symulacji zużycia koła i szyny jest pewną propozycją heurystycznego sposobu uwzględnienia wpływu niesprężystych przemieszczeń powierzchni na modyfikację profili podczas symulacji zużycia. Proponowany model to ciało Prandtla przytwierdzone do sprężystego materiału rodzimego koła (szyny).

Niezbędnym elementem procesu symulacyjnego jest przedstawiona metoda rozwiązywania zadania kontaktowego normalnego z uwzględnieniem warstwy wierzchniej według proponowanego modelu.

W pracy przedstawiono wyniki przykładowych rozwiązań normalnego zadania kontaktowego zaproponowaną metodą. Porównano rozwiązania bez modelu warstwy wierzchniej i z zastosowaniem modelu. Pokazano, że cykliczne rozwiązywanie zadań prowadzić może do wystąpienia efektu przystosowania plastycznego (shakedown). Model umożliwia również uzyskanie efektu umocnienia odkształceniowego (strain hardening).

Dobór parametrów ciała Prandtla wymaga użycia MES.

Literatura

1. Bastien J., Schatzman M., Lamarque C-H.: Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom. *Eur. J. Mech.A/Solids* 19 (2000), p. 277-307.
2. Johnson K.L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press. 1985.
3. Kalker J.J.: *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/ Boston/ London 1990.
4. Kik W., Piotrowski, J.: A Fast, Approximate Method to calculate Normal Load at Contact between Wheel and Rail and Creep Forces during Rolling. "Contact Mechanics and Wear of Wheel/ Rail Systems". Ed. I. Zobory. TU Budapest 1996.
5. Kik W., Moelle D.: *Verschleiß in einer S-Bahn Wendeschleife, Messung und Simulation*. Eisenbahn Kalender 2005.
6. Nagórski Z., Piotrowski J.: Modelowanie pola temperatury w szynie wywołanego toczaniem się koła. *Zeszyty Instytutu Pojazdów* 4(39)2000, s. 5-28

Abstract

In order to account for inelastic displacements during wear simulation of wheel and rail a heuristic model of the surface layer has been proposed. The model consists of the Prandtl body fixed to the elastic material of wheel (rail).

The element of the Prandtl body is composed of N parallel linear springs and $N-1$ dry friction sliders (de St-Venants' s elements). The normal displacements of the body may be inelastic. In practise of wear simulation this will lead to the modification of profiles not only by abrasive loss of material but also due to residual inelastic displacements. The method for solving the normal contact problem for bodies with the layer model has been given.

The method is an extension of the approximate method described in [4] with the iteration to find the solution on the characteristic of the Prandtl body.

An example is presented, which refers to the contact of wheel and rail. The normal contact has been calculated for the situations when the Prandtl body is included and when it is not. The solutions give reasonable results such that when the body is taken into account the contact area is bigger and the maximum normal stresses lower than in case when it is not.

The sample solutions of the tangential contact problem illustrate the impact of the layer displacements on quantities influencing abrasive wear.

Also the process of subsequent loading/unloading with the same normal force has been calculated. In the process the area of contact increases, normal pressure decreases and the shape of the contact zone becomes more compact. Eventually, the solution stabilises without any further residual inelastic displacements. The history of the process is similar to that of the shakedown phenomenon. The model also makes it also possible to include in a simplified manner the strain-hardening feature.

Determination of parameters of the body requires FEM calculations.