

В.Н. СТАРЧЕНКО

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖЕСТКОГО КОЛЕСА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С УПРУГИМ РЕЛЬСОМ

Изложение. Приведены результаты теоретического исследования динамической контактной задачи об угловых колебаниях жесткого колеса при взаимодействии с упругим изотропным рельсом от воздействия вектор-момента пары сил. Показан вывод интегрального уравнения на основании уравнений Лямс с учетом принципа предельного поглощения, изучены свойства его ядра и получено асимптотическое решение задачи.

DYNAMICZNE ZADANIE KONTAKTOWE O DRGANIACH KĄTOWYCH SZTYWNEGO KOŁA PRZY WSPÓŁPRACY ZE SPRĘŻYSTĄ SZYNĄ

Streszczenie. Przedstawiono wyniki badania teoretycznego dynamicznego zadania kontaktowego o drganiach kątowych sztywnego koła przy współpracy ze sprężystą izotropową szyną od wpływu pary sił tworzących, tzn. wektor-moment. Zaprezentowano wyprowadzenie wzoru całkowego na podstawie wzoru Lamego z uwzględnieniem zasad granicznego pochłaniania, zbadano właściwości jądra i otrzymane asymptotyczne rozwiązanie zadania.

Эффективное развитие экономики во многом определяется состоянием и уровнем развития транспортной системы, функционирование которой обеспечивается всеми видами транспорта и соответствующей инфраструктурой. В транспортной системе Украины одно из ведущих мест занимает железнодорожный транспорт, характерной тенденцией развития которого является повышение мощности тяговых единиц подвижного состава, увеличение скорости движения и веса составов поездов. В таких условиях неизбежно увеличение контактных напряжений, возникающих при качении колеса по рельсу и способствующих существенному снижению ресурса по износу, возникновению контактно-усталостных дефектов и усталостных разрушений [1,2].

Характерными для взаимодействия колеса и рельса являются циклические напряжения растяжения-сжатия, что приводит к накоплению пластической деформации и возникновению остаточных напряжений. Особое влияние на несущую способность области контакта оказывают тангенциальные силы, возникающие при относительном проскальзывании колеса по рельсу и определяемые в значительной мере трибологическим состоянием контактных поверхностей.

В общем случае на уровень объемно-напряженного состояния материалов колеса и рельса в контактной зоне оказывают влияние более 60 факторов как детерминированного, так и случайного характера. К основным из них, на наш взгляд, относятся: физико-механические свойства материалов; осевая нагрузка; динамические нагрузки от взаимодействия экипажа и пути, значительно превышающие статические и

зависящие от состояния пути, подвижного состава и его элементов; уменьшение контактной площадки вследствие износа и пластических деформаций профилей колеса и рельса, а также при смещении колеса от центрального положения; силы трения в контакте при относительном проскальзывании в продольном, поперечном и угловом направлениях.

В теории упругости известны решения о распределении давления между поверхностями двух упругих тел [3]; о напряженном состоянии внутри упругого тела от воздействия сосредоточенной силы, приложенной па его поверхности [4]; о напряженном состоянии внутри тела (рельса), вызванного распределенной нагрузкой, приложенной па его поверхности [5,6]; о распределении тангенциальных напряжений в зоне контакта колеса и рельса [7]. В последующие годы значительный вклад в решение задач контактной механики внесли работы: А.Ю.Ишлинского, Н.И.Мухелишвили, И.Я.Штаермана, Л.А.Галица, Горячевой И.Г., Johnsona K.L., Mindlina R.D., Kalkera J.J., Knothe K. и др.

В подавляющем большинстве работ по контактной механике взаимодействие контактирующих тел рассматривается от воздействия статической сосредоточенной силы или от нагрузки распределенной по контактной поверхности; при качении одного тела вращения и другому, или же тела вращения на плоскости, обычно прилагается сжимающая сосредоточенная сила и постоянный крутящий момент.

Целью предлагаемой работы является теоретическое исследование угловых колебаний жесткого колеса, взаимодействующего с упругим изотропным рельсом (плоская деформация), под воздействием вектор-момента пары сил - $M_0 e^{i\omega t}$ и сжимающей осевой нагрузки - P , расчетная схема показана на Рис. 1.

Предполагается, что в области контакта колеса с рельсом силы трения отсутствуют.

Задача формулируется таким образом, что одна из компонент напряжения считается равной нулю на всей границе полуплоскости.

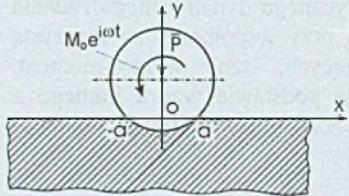


Рис.1.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u = p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

с граничными условиями:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v = p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v(x, 0, t) &= \beta x e^{i\omega t}, |x| \leq a \\ \tau_{xy}(x, 0, t) &= 0, -\infty < x < \infty \\ \sigma_y(x, 0, t) &= 0, |x| > a. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $\sigma(x, y, t)$, $\tau_{xy}(x, y, t)$ – проекции вектора упругого перемещения на оси x и y и компоненты тензора напряжения на площадке с нормалью y , Δ – двумерный дифференциальный оператор Лапласа, θ – относительное изменение объема, p , μ – плотность и модуль сдвига материала упругого рельса, $\lambda = 2v(1-v)^{-1}$, v – коэффициент Пуассона, ω – частота колебаний, t – время.

В соответствии с принципом предельного поглощения [9], уравнения (1) должны быть дополнены членами, характеризующими внутреннее трение. Первое уравнение дополняется членом $\delta \frac{\partial u}{\partial t}$, второе – $\delta \frac{\partial v}{\partial t}$, где $\delta > 0$. Принимаем коэффициент δ в форме $\delta = \rho \omega \epsilon$, ϵ – сколь угодно малое положительное число. В результате получается возмущенная красовая задача в виде:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \varepsilon \varpi \frac{\partial u}{\partial t}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho \varepsilon \varpi \frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3)$$

с граничными условиями (2).

В связи с установившимися колебаниями, положим

$$u(x, y, t) = u_\varepsilon(x, y)e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v_\varepsilon(x, y)e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Тогда, подставляя (4) в (3) и (2), получим

$$\begin{aligned} (1 - 2v)^{-1} \frac{\partial \theta_e}{\partial x} + \Delta u_e &= -k_1^2 \lambda_e^2 u_e, \\ (1 - 2v)^{-1} \frac{\partial \theta_e}{\partial y} + \Delta v_e &= -k_1^2 \lambda_e^2 v_e, \\ v_e(x, 0) &= \beta_e x, |x| \leq a, \\ \tau_{xy}^e(x, 0) &= 0, -\infty < x < \infty, \\ \sigma_y^e(x, 0) &= 0, |x| > a. \end{aligned} \quad (5)$$

В формулах (5) $k_1^2 = \rho \varpi^2 \mu^{-1}$, $\theta_e = \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y}$, $\lambda_e^2 = 1 - i\varepsilon$, ε – коэффициент пропорциональности, характеризующий внутреннее трение. Для решения задачи (5) – (6), используя преобразования Фурье по переменной x и положив:

$$u_e(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, y) \cdot e^{i\omega x} d\alpha, \quad v_e(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha, y) \cdot e^{i\omega x} d\alpha, \quad (7)$$

получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант Фурье U и V , функций u_e и v_e , в виде:

$$\begin{aligned} (1 - 2v) \cdot U_y'' + i\alpha \cdot V_y' + [(1 - 2v) \cdot k_1^2 \lambda_e^2 - 2\alpha^2(1 - v)] \cdot U &= 0, \\ 2(1 - v) \cdot V_y'' + i\alpha \cdot U_y' + (1 - 2v) \cdot (k_1^2 \lambda_e^2 - \alpha^2) \cdot V &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

ограниченное решение которой при $y \rightarrow -\infty$ имеет вид:

$$U = C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y}, \quad V = -\frac{i\lambda_1}{\alpha} C_1 e^{\lambda_1 y} - \frac{i\alpha}{\lambda_2} C_2 e^{\lambda_2 y}. \quad (9)$$

Здесь $\lambda_1 = \sqrt{\alpha^2 - b_0^2 k_1^2 \lambda_e^2}$, $\lambda_2 = \sqrt{\alpha^2 - k_1^2 \lambda_e^2}$, $b_0^2 = (1 - 2v)/2(1 - v)$.

Неизвестные коэффициенты C_1 и C_2 определяются из граничных условий вспомогательной задачи о колебании упругой изотропной полуплоскости

$$\sigma_y^e(x, 0) = -q_e(x), |x| \leq a; \quad \tau_{xy}^e(x, 0) = 0, -\infty < x < \infty. \quad (10)$$

По известным формулам [8], зная перемещения (9), определяются напряжения

$$\sigma_y^e = \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}(1 - 2v)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial V}{\partial y} (1 - v) + i\alpha v U \right] \cdot e^{i\omega x} d\alpha,$$

$$\tau_{xy}^e = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + i\alpha V \right) e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (11)$$

Представим функцию $q_e(x)$ интегралом Фурье

$$q_e(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha) \cdot e^{i\alpha x} d\alpha, \quad Q(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_e(\xi) \cdot e^{-i\alpha \xi} d\xi. \quad (12)$$

Удовлетворяя граничным условиям (10), получим неоднородную систему двух линейных уравнений относительно C_1 и C_2 , решив которую, найдем

$$C_1 = \frac{i\alpha(\lambda^2 - \alpha^2) \cdot Q(\alpha)}{2\mu \left[2\alpha^2 \lambda_1 \lambda_2 - \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} k_1^2 \right) \cdot (\alpha^2 + \lambda_2^2) \right]},$$

$$C_2 = -\frac{i\alpha \lambda_1 \lambda_2 Q(\alpha)}{\mu \left[2\alpha^2 \lambda_1 \lambda_2 - \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} k_1^2 \right) \cdot (\alpha^2 + \lambda_2^2) \right]}. \quad (13)$$

Используя вторые соотношения (7) и (9) и первое соотношение (10), получим интегральное уравнение задачи относительно амплитудного значения неизвестного контактного напряжения $q_e(x)$ в виде:

$$\int_{-a}^a q_e(\xi) k_e [k_1(\xi - x)] \cdot d\xi = 2\pi \mu \beta_e x, |x| \leq a, \quad (14)$$

$$k_e(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_e(u) e^{-i|x|u} du, \quad (15)$$

где $\beta_e = \beta_{1e} + i\beta_{2e}$, - комплексная амплитуда угла поворота колеса;

$$K_e(u) = \frac{\sqrt{u^2 - \lambda_e^2 b_0^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - \lambda_e^2 b_0^2} \sqrt{u^2 - \lambda_e^2} - (2u^2 - \lambda_e^2)^2}. \quad (16)$$

Совершив в соотношении (16) предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$, можно обнаружить у предельной функции две пары точек ветвления и два полюса на действительной оси,

симметрично расположенных относительно начала координат. Контур интегрирования (Рис.2) в представлении (14) на основании [10] деформируем таким образом, чтобы при $\epsilon \rightarrow 0$ смещающиеся на вещественную ось полюсы и точки ветвления функции $K_e(u)$ не пересекали бы его. В результате уравнения (14) – (16) принимают вид:

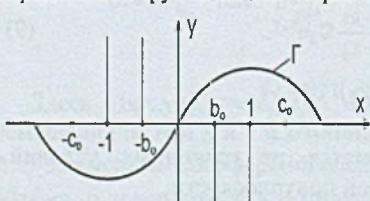


Рис.2.

$$\int_{-a}^a q(\xi) \cdot [k_1(\xi - x)] \cdot d\xi = 2\pi \mu \delta(x), |x| \leq a, \quad \delta(x) = \beta x, \quad (17)$$

$$k(x) = \int_{\Gamma} K(u) e^{-i|x|u} du, \quad (18)$$

$$K(u) = \frac{\sqrt{u^2 - b_0^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - b_0^2} \sqrt{u^2 - 1 - (2u^2 - 1)^2}}. \quad (19)$$

Здесь $\sigma_y = q(x)e^{i\omega t}$ – неизвестная функция распределения нормальных контактных напряжений под колесом, $\delta(x)e^{i\omega t}$ – величина вертикального перемещения колеса, вызываемого приложенной нагрузкой, причем $\delta(x) = \delta_0(x) e^{-i\phi}$, где ϕ – угол сдвига фаз между колебаниями колеса и возмущающей нагрузки, $\delta_0(x)$ – модуль комплексной амплитуды колебания колеса, $q(x) = q_1(x) + iq_2(x)$, $\delta(x) = \delta_1(x) + i\delta_2(x)$, $k(x)$, $K(u)$ – представляют предельные функции при $\epsilon \rightarrow 0$ от функций $k_\epsilon(x)$ и $K_\epsilon(u)$.

2. Свойства функции $K(u)$ и ядра интегрального уравнения $k(t)$

Функция $K(u)$:

- четная, аналитическая в комплексной плоскости с разрезами, соединяющими точки ветвления с бесконечно удаленной точкой, лежащими во 2-ом и 4-ом квадрантах (Рис.2.);
- на вещественной оси имеет два полюса $x_1=c_0$, $x_2=-c_0$ и две пары точек ветвления $x_3=b_0$, $x_4=-b_0$, $x_5=1$, $x_6=-1$, симметрично расположенных относительно начала координат;
- комплексная на отрезке вещественной оси $[-1, 1]$, вещественна вне его;
- в нуле ведет себя как $c_1[1+q_1u^2+O(u^4)]$, на бесконечности как $q_2u^{-1}+q_3u^{-3}+O(u^{-5})$, причем значение коэффициентов $c_1 = -ib_0$, $q_1 = (2b_0^2)^{-1} - 4(1-b_0^2)$, $q_2 = [2(1-b_0^2)]^{-1}$, $q_3 = 0.5(0.75 - b_0^2 + 0.75b_0^4)/(1-b_0^2)^2$.

Ядро $k(t)$:

- в нуле ведет себя как $\ln|t|$ при $t \rightarrow 0$;
- на бесконечности имеет место представление

$$k(t) \cong \frac{\sqrt{2\pi i}}{|t|^{3/2}} \left(A e^{-i|\xi|} + B e^{-ib_0|\xi|} \right) - 2\pi i \sum_{j=1}^3 B_j e^{-iz_j|\xi|}, \quad (j=1,2,3)$$

Здесь $A = 4(1-b_0^2)$, $B = \sqrt{b_0}(1-2b_0^2)^{-1}$, $B_j = \lim_{z \rightarrow z_j} (z-z_j)K(z)$, $z_1=c_0$ – полюс на действительной оси, z_2 , z_3 – комплексные полюсы в нижней полуплоскости.

3. Решение задачи для малых частот колебаний

Запишем интегральное уравнение (17) в безразмерных переменных

$$\int_{-1}^1 q(\xi) K[\chi(\xi-x)] d\xi = 2\pi \Delta \delta(x), \quad |x| \leq 1, \Delta = \mu a^{-1}, \quad (20)$$

$$K(t) = \int_{\Gamma} K(u) e^{-itu} du, \quad (21)$$

$$K(u) = \frac{\sqrt{u^2 - b_0^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - b_0^2} \sqrt{u^2 - 1 - (2u^2 - 1)^2}}. \quad (22)$$

Представим ядро (21) в виде

$$k(t) = \int_{\Gamma} F(u) e^{-itu} du + A_0 \int_{\Gamma} \frac{e^{-itu} du}{u^2 - c_0^2}, \quad (23)$$

$$F(u) = K(u) - A_0(u^2 - c_0^2)^{-1}, \quad A_0 = \lim_{u \rightarrow c_0} K(u)(u^2 - c_0^2),$$

где $\pm c_0$ – полюсы на действительной оси функции $K(u)$.

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-|t|u} du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-|t|u} du$, (так как подынтегральная функция абсолютно суммируема во всех особых точках вещественной оси), и вычисля второй интеграл в (23) с помощью теории вычетов, получим для ядра $k(t)$ следующее выражение:

$$k(t) = 2 \left[\int_0^{\infty} F(u) \cos(tu) du - \frac{\pi i A_0}{2c_0} e^{-|t|c_0} \right]. \quad (24)$$

Здесь последнее слагаемое в правой части представляет собой половину вычета в полюсе Реля. Из (24) легко получается представление для ядра $k(t)$:

$$\begin{aligned} k(t) = & 2 \cdot \left[\int_0^{b_0} K(u) \cos(tu) du + \int_{b_0}^1 K(u) \cos(tu) du + \int_1^{\infty} F(u) \cos(tu) du + \right. \\ & \left. + A_0 \int_1^{\infty} \frac{\cos(tu) du}{u^2 - c_0^2} - \frac{\pi i A_0}{2c_0} e^{-|t|c_0} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее, принимая $v = 0.3$, получим $c_0 = \pm 1.0783$, $b_0 = \sqrt{(1-2v)/2(1-v)}$, $b_0 = 0.5345$, $A_0 = 0.3588$.

После приближенного вычисления интегралов в (25), получим

$$k(t) = A + Bt^2 + Ct^4 + (D + Et^2 + Ft^4) \ln|t| + (L + Mt^2 + Nt^4), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} A = -0.08081, \quad D = 0.6999, \quad L = 1.0995, \\ B = -0.2442, \quad E = -0.2575, \quad M = -0.4045, \\ C = 0.03228, \quad F = 0.02190, \quad N = 0.03435. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (26) в (20) и разделяя действительную и мнимую части, получим систему двух интегральных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{q_1(\xi)[F_1(t) + \ln|t|(F_2(t) + D)] + q_2(\xi)F_3(t)\} d\xi &= \pi \Delta \delta_1(x), \quad |x| \leq 1, \\ \int_{-1}^1 \{q_2(\xi)[F_1(t) + \ln|t|(F_2(t) + D)] - q_1(\xi)F_3(t)\} d\xi &= \pi \Delta \delta_2(x), \quad |x| \leq 1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$F_1(t) = A + Bt^2 + Ct^4 + O(t^6), \quad F_2(t) = Et^2 + Ft^4 + O(t^6), \quad F_3(t) = L + Mt^2 + Nt^4 + O(t^6),$$

$q(\xi) = q_1(\xi) + iq_2(\xi)$, $\delta(x) = \delta_1(x) + i\delta_2(x)$, $t = \chi(\xi - x)$ – мало, так как рассматривается случай малых χ , $|t| \leq 2\chi$.

Обращая логарифмическую часть в уравнениях (28), приведем их к эквивалентной в $L_p(-1,1)$, $1 < p < 2$, системе интегральных уравнений второго рода

$$q_j(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[P_j - \int_{-1}^1 \frac{\psi_j(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-x} d\tau \right], \quad (j=1,2), \quad (29)$$

$$P_j = \int_{-1}^1 q_j(\xi) d\xi = \frac{1}{\ln(2/\chi)} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad (j=1,2), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi_j(x) = -\Delta D^{-1} \delta_j(x) + \frac{1}{\pi D} & \int_{-1}^1 \{q_j(\xi)[F_1(t) + \ln|t|F_2(t)] \pm q_s(\xi)F_3(t)\} d\xi, \\ j=1,2; s=1,2. \end{aligned} \quad (31)$$

Разыскивая решение уравнений (29) в виде

$$q_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{jmnm}(x) \chi^{2m} \ln^n \chi, \quad (j=1,2), \quad (32)$$

получим с точностью до $\chi^4 \ln^2 \chi$ для $q_n(x)$ асимптотические формулы вида:

$$q_1(x) = \frac{P_1}{\pi D \sqrt{1-x^2}} [A_1 + B_1 x^2 + C_1 x^4 + O(\chi^6 \ln^3 \chi)] +$$

$$+ \frac{P_2}{\pi D \sqrt{1-x^2}} [A_2 + B_2 x^2 + C_2 x^4 + O(\chi^6 \ln^3 \chi)],$$

$$q_2(x) = \frac{P_2}{\pi D \sqrt{1-x^2}} [A_1 + B_1 x^2 + C_1 x^4 + O(\chi^6 \ln^3 \chi)] -$$

$$- \frac{P_1}{\pi D \sqrt{1-x^2}} [A_2 + B_2 x^2 + C_2 x^4 + O(\chi^6 \ln^3 \chi)],$$

$$A_1 = D - [B + 3/2E - E \ln(2/\chi)] \cdot \chi^2 + [-7/2C - 103/24F + 7/2F \ln(2/\chi) +$$

$$+ 5/12BE + 5/8E^2 - 5/12E^2 \ln(2/\chi)] \cdot \chi^4,$$

$$B_1 = [2B + 3E - 2E \ln(2/\chi)] \cdot \chi^2 + [4C + 7/3F - 4F \ln(2/\chi) - 4/3BE - 2E^2 +$$

$$+ 4/3E^2 \ln(2/\chi)] \cdot \chi^4,$$

$$C_1 = [4C + 25/3F - 4F \ln(2/\chi) + 2/3BE + E^2 - 2/3E^2 \ln(2/\chi)] \cdot \chi^4,$$

$$A_2 = -M\chi^2 + (5/12ME - 7/2N) \cdot \chi^4, \quad B_2 = 2M\chi^2 + (4N - 4/3ME) \cdot \chi^4,$$

$$C_2 = (2/3ME + 4N) \cdot \chi^4, \quad P_1 = A_{11}\delta_1 + A_{12}\delta_2, \quad P_2 = A_{21}\delta_1 + A_{22}\delta_2,$$

$$A_{11} = A_{22} = \pi G a_1 (aa_3)^{-1}, \quad A_{12} = -A_{21} = \pi G a_2 (aa_3)^{-1},$$

$$a_1 = A - D \ln(2/\chi) + [B + E - E \ln(2/\chi)] \chi^2 + 0.25 D^{-1} [B + 1.5E - E \ln(2/\chi)]^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + 9[C + 1.167F - E \ln(2/\chi)] - M^2 D^{-1} \chi^4 + O(\chi^6 \ln^3 \chi), \\
 a_2 = & L + M\chi^2 + 0.25 \left[2D^{-1}M[B + 1.5E - E \ln(2/\chi)] + 9N \right] \chi^4 + O(\chi^6 \ln^3 \chi), \\
 a_3 = & [A - D \ln(2/\chi)]^2 + L^2 + 2 \cdot [A - D \ln(2/\chi)] \cdot [B + E - E \ln(2/\chi)] + \\
 & + LM \chi^2 + 0.5 \left([A - D \ln(2/\chi)] D^{-1} [B + 1.5E - E \ln(2/\chi)]^2 + 9[C + 1.167F - \right. \\
 & \left. - F \ln(2/\chi)] - D^{-1} M^2 \right) + 2[B + E - E \ln(2/\chi)]^2 + \\
 & + L \left\{ 2D^{-1}M[B + 1.5E - E \ln(2/\chi)] + 9N \right\} + 2M^2 \chi^4 + O(\chi^6 \ln^3 \chi). \tag{33}
 \end{aligned}$$

Как показывают вычисления, формулы (33) имеют практическое значение и могут быть использованы для определения контактных напряжений при малых значениях $\chi = \tau a(\rho/\mu)^{1/2} \leq 1$, где ρ и μ – соответственно плотность и модуль сдвига материала упругого изотропного рельса.

ВЫВОДЫ:

- На основании уравнений Ляме при отсутствии массовых сил и при соответствующих граничных условиях, используя принцип предельного поглощения и преобразование Фурье, получено интегральное уравнение для решения динамической контактной задачи об угловых колебаниях колеса на упругом изотропном рельсе при воздействии вектор-момента пары сил $M_0 e^{i\omega t}$ и сосредоточенной вертикальной (осевой) нагрузки.
- Контур интегрирования в представлении интегрального уравнения относительно амплитудного значения неизвестного контактного напряжения $q_\varepsilon(x)$ деформирован таким образом, чтобы при $\varepsilon \rightarrow 0$ смещающиеся на вещественную ось полюсы и точки ветвления функции $K_\varepsilon(u)$ не пересекали бы его.
- Исследованы свойства функции $K(u)$, имеющей два полюса и две точки ветвления на вещественной оси и размещенной симметрично относительно начала координат, и ядра интегрального уравнения $k(t)$.
- Разработан асимптотический метод для определения контактных напряжений из интегрального уравнения, вывод которого получен на основании математической теории упругости при указанных условиях, для малых относительных частот колебаний при взаимодействии жесткого тела с упругой изотропной полуплоскостью (рельсом).
- Показано, что асимптотические методы достаточно эффективны при решении интегральных уравнений динамических контактных задач, ядра которых являются осциллирующими.
- Практически, получено решение для определения контактных напряжений по асимптотическим формулам (33) может быть использовано при значениях относительной частоты $\chi \leq 1$.
- Приведенные математические методы могут быть рекомендованы для уточненных расчетов прочности и жесткости узлов и механизмов машин общего и транспортного машиностроения.

Литература

1. Блохин Е.П., Пшинько А.Н., Лашко А.Д. К проблеме износа колес и рельсов. Залізничний транспорт України, №1, 2001, с. 2 – 6.
2. Обобщение передового опыта тяжеловесного движения: вопросы взаимодействия колеса и рельса. У. Харрис, С. Захаров, Д. Ландгрен, Х.Турне, В.Эберсон. Перевод с англ. – М.: Интекст, 2002, 416с.
3. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. – J. Reine und angewandte Mathematik, 1882, 92, S. 156-171.
4. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4-rd edition. Cambridge, University Press, 1927, 643 p.
5. Беляев Н.М. Применение теории Герца к подсчетам местных напряжений в точках соприкосновения колеса и рельса. Вестник инженеров, 1917, том 3, №12, с. 281-288.
6. Thomas H.R., Hoersch V.O. Stresses due to the pressure of one elastic solid upon another. With special reference to railroad rails. University of Illinois, Bulletin, 1930, vol. 27, №46, Engineering Experiment Station, Bulletin, №212, 56 p.
7. Carter F.W. On the Action of a Locomotive Driving Wheel. Royal society (GB). Proceedings of the Royal society of London. Series A, Vol. CXII, No. A 760, August 3, 1926, pp. 151-157.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
10. Бабешко В.А. Об условиях излучения для упругого слоя. – Докл. АН СССР, т. 213, №3, 1973.