

Barbara KNORŁUCH

#### MODELE MATEMATYCZNE ROZDZIAŁU POWIETRZA WENTYLACYJNEGO

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono sposoby prognozowania rozdziału powietrza wentylacyjnego w pomieszczeniach na podstawie modelowania matematycznego. Przeanalizowano dwie grupy takich metod, a mianowicie modele oparte na zależnościach empirycznych i na sformułowanych w postaci równań różniczkowych zasadach zachowania masy, pędu i energii dla płynu. Wskazano na konieczność ograniczenia nakładów na rozwiązanie numeryczne modeli z tej drugiej grupy bądź przez przeprowadzanie obliczeń dla układu równań dla parametrów przepływu średniego z wykorzystaniem półempirycznej teorii turbulencji do tworzenia równań zamykających, bądź przez stosowanie równań uproszczonych. Scharakteryzowano też sposoby zadawania warunków brzegowych w strugach nawiewanych i na ścianach stałych. Omówiono wady i zalety przedstawionych metod oraz możliwości i ograniczenia stosowania ich w praktyce.

Bardzo istotną dla prawidłowego działania wentylacji jest możliwość oceny poprawności rozdziału powietrza wentylacyjnego w pomieszczeniu już na etapie projektowania.

Do tego celu służy prognozowanie ruchu powietrza, które jest możliwe dzięki zastosowaniu modelowania przepływów występujących w wentylowanych pomieszczeniach.

Do tej pory najczęściej stosowane było w tym celu modelowanie fizyczne, wymagające budowy skomplikowanych modeli i przeprowadzania pracochłonnych badań.

Obecnie wobec szybkiego rozwoju elektronicznej techniki obliczeniowej coraz istotniejszą rolę odgrywać zaczyna modelowanie matematyczne.

Model taki jest zapisem zachodzących zjawisk w postaci równań matematycznych algebraicznych lub różniczkowych, których rozwiązanie metodami analitycznymi lub numerycznymi stanowi rozkład prędkości i temperatury powietrza w pomieszczeniu wentylowanym, a także pozwala na ustalenie obrazu ruchu tego powietrza.

W artykule niniejszym dokonano przeglądu stosowanych modeli matematycznych rozdziału powietrza, wskazano ich wady i zalety oraz możliwości i ograniczenia ich wykorzystania.

W zagadnieniach związanych z przepływem powietrza wentylacyjnego różnić można dwie podstawowe grupy modeli matematycznych:

- 1) metody znajdowania związków algebraicznych pomiędzy wielkościami wyznaczonymi empirycznie,
- 2) metody oparte na różniczkowym zapisie zjawisk przepływowych.

### 1. Modele matematyczne ruchu powietrza wentylacyjnego oparte na zależnościach empirycznych

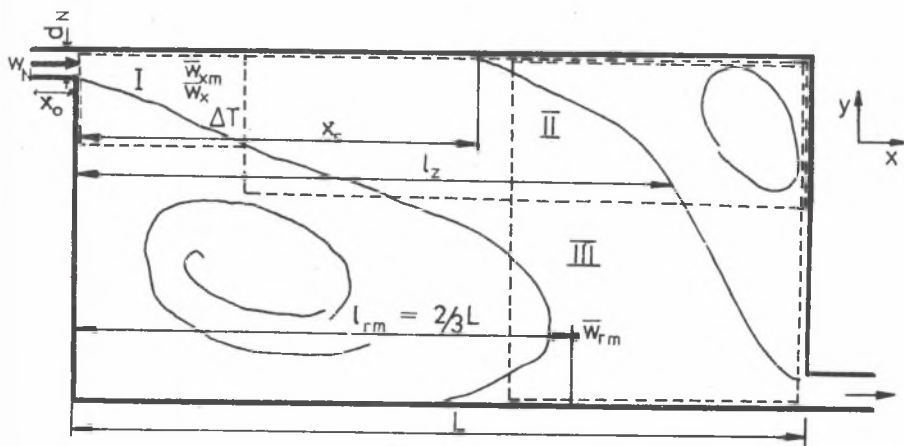
Historycznie rzecz biorąc wcześniej stosowane były metody z tej właśnie grupy, gdyż bazują one na równaniach algebraicznych, nie wymagających stosowania techniki komputerowej do rozwiązania.

Do opisu rozkładu parametrów powietrza w pomieszczeniu wykorzystuje się bowiem uniwersalne, empiryczne zależności dla swobodnych lub półograniczonych strug powietrza.

Związki te zmodyfikowane są na podstawie eksperymentu przeprowadzonego w pomieszczeniach wentylowanych lub ich modelach w celu uwzględnienia możliwie jak największej ilości czynników mających wpływ na rozwój tych strug w warunkach przepływu w przestrzeni ograniczonej przy obecności różnych zakłóceń.

Ze względu na charakter przepływu obserwacja ruchu powietrza pozwala na podział pomieszczenia wentylowanego na 3 strefy (rys. 1) [ 1].

Strefa I to obszar w pobliżu nawiewnika znajdującego się pod bezpośrednim wpływem strugi powietrza nawiewanego.



Rys. 1. Podział pomieszczenia wentylowanego na strefy w modelu opartym na zależnościach empirycznych

Fig. 1. Ventilated room division into zones in the model based on empirical relations

Strefa II obejmuje obszar dalszego rozwoju strugi nawiewanej aż do ściany przeciwległej do otworów nawiewnych. Tutaj zaznacza się również wpływ otaczających ścian na rozkład parametrów powietrza.

W strefie III pomieszczenia tworzą się strugi recyrkulacyjne, które w decydującej mierze wpływają na rozkład parametrów powietrza w strefie przebywania ludzi, wchodzącej w skład tego obszaru.

Jak nietrudno wywnioskować najmniej kłopotów przysparza opisanie przepływu powietrza w strefie I, gdzie zależy on w znacznym stopniu od rodzaju i lokalizacji nawiewnika oraz parametrów powietrza nawiewanego.

Wykorzystuje się więc tutaj wyniki badań nad strugami nawiewanymi Abramowicza [2], Szepielewa [3], Schwarza i Coearta [4] i innych.

Równania uzyskane w wyniku tych badań przedstawiają obrys zmian prędkości i temperatury powietrza z odległością od nawiewnika zarówno w osi strugi, jak i w jej przekroju poprzecznym.

Nielsen [1] proponuje stosowanie dla takich obliczeń wzoru:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_N} = K_{\varphi} \left( \frac{x + x_0}{d_N} \right)^{-b}, \quad (1)$$

w którym  $\varphi(x)$  jest odpowiednio maksymalną wartością prędkości lub nadwyżki temperatury w odległości  $x$  od nawiewnika, natomiast  $K_{\varphi}$ ,  $x_0$ ,  $b$  parametrami ustalonymi drogą eksperymentalną, charakterystycznymi dla konstrukcji i lokalizacji otworów nawiewnych.

W celu określenia rozkładów parametrów w przekrojach poprzecznych strugi stosuje się zazwyczaj rozkład gaussowski lub z powodzeniem zastępujący go dla prędkości profil Abramowicza [2]:

$$w(x, y) = w_{\max}(x) \left[ 1 - \left( \frac{y}{y_p} 0,441 \right)^2 \right]^2 \quad (2)$$

Badania nad modyfikacją tych równań idą w kierunku znalezienia współczynników eksperymentalnych, mających na celu uwzględnienie szeregu czynników. Należy jednak zauważyć, iż dane literaturowe na ten temat są skąpe i nie stwarzają możliwości uogólnień.

Jeszcze więcej trudności napotyka się przy próbie opisu rozkładu parametrów w II strefie pomieszczenia gdzie na rozwój strugi powietrza wpływają nie tylko jej parametry początkowe, ale także ściany ograniczające. Oddziaływanie tych ścian, a zwłaszcza ściany przeciwległej do otworów nawiewnych uwzględni Regenscheit [5] przy obliczaniu wartości prędkości maksymalnej w strudze:

$$\frac{w_{\max}(x)}{w_N} = \left( \frac{d_N}{mx} \right)^n \left( \frac{L-x}{L-x_0} \right)^p, \quad (3)$$

gdzie  $L$  jest długością pomieszczenia.

Wartości współczynników eksperymentalnych  $m$ ,  $x_0$ ,  $n$  i  $p$  wyznaczone są jedynie dla przypadku strugi szczelinowej przysufitowej.

W strefie II pojawia się tendencja do uproszczeń opisu rozkładu parametrów powietrza przez wprowadzenie wielkości charakterystycznych dla ruchu strugi. Nielsen [1] określa eksperymentalnie wzór na przewidywany zasięg strugi:

$$l_z = K_p d_N \left[ \frac{w(x)}{w_N} \right]^{1/6} - x_0 \quad (4)$$

zależny od parametrów początkowych strugi nawiewanej, ale także od konstrukcji nawiewnika, charakteryzowanej przez współczynnik  $K_p$ . Dla strug nieizotermicznych podaje też wzór na tzw. długość penetracji strugi  $x_s$ , określającą odległość od wylotu do miejsca, w którym następuje oderwanie strugi płaskiej przysciennej od sufitu:

$$x_s = K_s K_p \left( \frac{w_N}{\Delta t_N} \right)^{2/3} d_N^{1/3} \quad (5)$$

Wartość współczynnika  $K_s$  uzależniona jest od geometrii pomieszczenia i lokalizacji w nim źródeł ciepła.

Najtrudniejszą do opisu strefę III charakteryzuje się jedynie dla uproszczonych pustych pomieszczeń.

Ze względu na skomplikowane zależności pomiędzy przepływającymi strugami nie podejmuje się próby zapisu algebraicznego rozkładu parametrów powietrza w całej strefie, lecz jedynie w punkcie charakterystycznym, w którym prędkość jest maksymalna w całej strudze cyrkulacyjnej, a więc zazwyczaj również w strefie przebywania, co spowodowało, iż jest to wartość bardzo istotna z punktu widzenia mikroklimatu pomieszczenia. Występuje ona, jak wskazywały doświadczenia, w odległości  $2/3L$  w pobliżu podłogi, a różni autorzy proponują różne sposoby jej określania:

Nielsen [1]:

$$w_{rm} = 0,7 w_N K_p \left( \frac{d_N}{L+x_0} \right)^m \quad (6)$$

Regenscheit [5]:

$$w_{rm} = 0,92 w_N \zeta^{1/2} \left( \frac{d_N}{mx} \right)^{0,375} \quad (7)$$

gdzie  $\zeta$  przedstawia część energii nawiewu przekazaną strudze powrotnej,

Bacharew-Trojanowski [5]:

$$w_{rm} = 8 w_N \left(\frac{d_N}{H}\right)^{1/2} x \exp(-11,57 \hat{x} + 47 \hat{x}^2 - 98 \hat{x}^3) \quad (8)$$

$$\hat{x} = ax(HB)^{1/2}, \quad (9)$$

gdzie  $a$  było współczynnikiem turbulencji uzyskanym eksperymentalnie.

Jak wynika z analizy przedstawionych metod opisu algebraicznego rozdziału powietrza wentylacyjnego, występuje w nich szereg uproszczeń uniemożliwiających pełne uwzględnienie istotnych czynników kształtujących przepływ. Wykorzystywanie w opisie eksperymentalnych parametrów ogranicza stosowanie metod do konkretnych, przebadanych przypadków przepływu i nie pozwala na uogólnienie proponowanych zależności.

## 2. Modele matematyczne ruchu powietrza oparte na równaniach różniczkowych

Pełny uniwersalny opis ruchu powietrza w pomieszczeniu wentylowanym staje się możliwy przez zastosowanie równań różniczkowych, będących matematyczną formą zapisu zjawisk fizycznych, związanych z przepływem powietrza.

Ze względu na pomijalnie małe zmiany ciśnienia powietrza w pomieszczeniu, powietrze potraktować można jako płyn nieściśliwy i jego przepływ opisać ze pomocą trzech zasad zachowania masy, pędu i energii w następującej postaci:

- równania ciągłości przepływu:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = 0 \quad (10)$$

- równania przepływu Nawiera-Stokesa:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_1}{\partial x_j} = g_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_j \partial x_j} \quad (11)$$

- równania energii:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (12)$$

Rozwiązanie tego układu z uwzględnieniem, poprzez odpowiednie zadanie warunków brzegowych i początkowych, czynników kształtujących przepływ w pomieszczeniu, takich jak jego geometria i wyposażenie, konstrukcja i lokalizacja otworów nawiewnych i wywiewnych, parametry strug powietrza nawiewanego, wielkość, moc, rozmieszczenie źródeł ciepła itp., stanowi w pełni odwzorowujący przebieg procesu fizycznego, rozkład chwilowych wartości parametrów powietrza w pomieszczeniu.

Mimo iż znane są sposoby rozwiązywania metodami numerycznymi tak rozbudowanego układu, to jednak nie mogą one jeszcze znaleźć praktycznego zastosowania z powodu niedoskonałości maszyn cyfrowych.

Metody te wymagają prowadzenie obliczeń z użyciem siatki dyskretyzacji zawierającej  $10^9$  węzłów i czasowego kroku całkowania wynoszącego około  $10^{-4}$  s, co powoduje, iż należałoby stosować komputery o ogromnych pamięciach operacyjnych i dużych prędkościach obliczeń.

Wynika z tego wniosek, iż przy obecnie dostępnych maszynach możliwe jest rozwiązanie układu równań po wprowadzeniu uproszczeń powodujących zmniejszenie wymaganej pamięci operacyjnej i szybkości obliczeń. Efekt taki uzyskuje się poprzez zastąpienie wartości chwilowych parametrów ich średnimi czasowymi.

### 2.1. Modele matematyczne oparte na równaniach różniczkowych dla parametrów przepływu średniego

Podstawiając wartości chwilowe parametrów powietrza w postaci sumy wartości średniej i wartości pulsacyjnej:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad (13)$$

do równań (10-12) i dokonując ich uśrednienia, otrzymuje się układ równań różniczkowych dla parametrów przepływu średniego:

- równanie ciągłości przepływu:

$$\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_j} = 0 \quad (14)$$

- równanie Reynoldsa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t} + \bar{w}_j \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_j} = & -\beta g_1 (\bar{T} - T_0) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \\ & + \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial x_j^2} + \nu_t \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

- równanie energii:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{w}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_{p0}} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} - \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} \quad (16)$$

Równania te zawierają korelacje prędkości, stanowiące składowe tensora dodatkowych naprężeń Reynolda -  $\mathcal{G} w'_i w'_j$ .

Obecność ich powoduje, że układ równań opisujących ruch turbulentny staje się układem niezamkniętym.

Hipotezy zamykające uzyskuje się przez wykorzystanie odpowiednich modeli turbulencji, stanowiących dodatkowy układ równań, które rozwiązane wspólnie z równaniami ruchu średniego umożliwiając obliczenie podstawowych wartości, charakteryzujących lokalny stan turbulencji przepływu. Modele te dzieli się na dwie grupy.

W modelach grupy pierwszej [6] naprężenia Reynolda wyznaczone zostają bezpośrednio z własnych równań transportu, które wyrażają przestrzenną zmianę naprężeń jako sumę efektów produkcji, dyfuzji, konwekcji i dysypacji. Trudność w ich stosowaniu polega na tym, iż równania dla korelacji drugiego rzędu zawierają korelacje rzędu trzeciego, które obliczone mogą być z równań zawierających korelacje czwartego rzędu, a każde dalsze równanie wprowadza korelacje następnego rzędu. Prowadzi to do tego, iż dla uzyskania uniwersalnego i dokładnego rozwiązania układu konieczne jest rozwiązanie 23 a nawet 28 równań, co zwiększa znacznie nakłady na obliczenia komputerowe.

Modele grupy drugiej oparte są na hipotezie Bousinesq, wykorzystującej pojęcie lepkości turbulentnej  $\nu_t$ , wiążącej tensor naprężeń Reynolda z tensorem prędkości deformacji przepływu średniego:

$$-\mathcal{G} w'_i w'_j = \mathcal{G} \cdot \nu_t \left( \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right) \quad (17)$$

Współczynnik lepkości turbulentnej  $\nu_t$  określany jest bądź algebraicznie w zależności od parametrów ruchu średniego, bądź na podstawie różniczkowych równań transportu znanych lub możliwych do obliczenia wielkości, charakteryzujących turbulencję przepływu. Nazwa stworzonych w ten sposób modeli turbulencji zależy od ilości tych parametrów, a są to teorie pół-empiryczne, gdyż równania zawierają współczynniki eksperymentalne.

W przypadku gdy  $\nu_t$  aproksymowany jest algebraicznie w zależności od parametrów przepływu średniego, mamy do czynienia z modelem zero-parametrowym.

W modelu tym współczynnik  $\nu_t$  uzależniony został od długości drogi mieszania Prandtla  $l_m$  [6]:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right| \quad (18)$$

Model ten znajduje zastosowanie dla niektórych prostych przepływów. Jego podstawowym mankamentem jest konieczność, odrębnego dla każdego typu przepływu, uzależniania drogi mieszania  $l_m$  od parametrów pola prędkości średniej i wykorzystaniem współczynników empirycznych.

[Niecو inne podejście do zagadnienia proponuje w swoim modelu Tauchiya [7]. Opiera się on również na prandtlowskiej teorii drogi mieszania. Wprowadza jednak w miejsce  $\nu_t$  współczynniki lepkości wirowej:

$$k_{x_i} = \frac{-w'_i \omega'}{\frac{\partial \omega}{\partial x_i}} \quad (19)$$

powiązane z nią przez oszacowane na drodze optymalizacji komputerowej współczynniki :

$$k_{x_i} = \nu_t l_m^3 \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right| \quad (20)$$

Formę zadania wartości  $l_m$  w strefie brzegowej i we wnętrzu modelowanego obszaru wybiera na drodze porównania wyników obliczeń parametrów przepływu z eksperymentem.

Określony w ten sposób model turbulencji rzutuje na postać równań dla parametrów przepływu średniego, w których dokonuje się zamiany zmiennych ze składowych prędkości i ciśnienia na wirowość  $\omega$  i funkcję prądu  $\psi$ . Tsuchiya przedstawia przykład wykorzystania tej metody do przewidywania izotermicznego płaskiego przepływu powietrza w pomieszczeniu wentylowanym, dokonując dla jej weryfikacji i uzupełnienia eksperymentalnego pomiarów w modelu fizycznym. Porównanie wyników obliczeń z eksperymentem pozwala stwierdzić dobre możliwości aplikacyjne metody dla badanych przepływów.

Przykładem modelu jednoparametrowego jest model zamknięty za pomocą równania transportu energii kinetycznej turbulencji [8]:

$$k = \frac{1}{2} \overline{w'_i w'_i} \quad (21)$$

definiowanej jako ta część energii kinetycznej przepływu, której źródłem są fluktuacje prędkości.

Równanie to tworzy się jako różnicę uśrednionego iloczynu równania Naviera-Stokesa przez prędkość chwilową i iloczynu równania Reynoldsa przez prędkość średnią.

Przybiera ono postać:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{w}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_j} \right) +$$



$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + g_j \beta \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - c_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (22)$$

W równaniu występują wielkości, które wykorzystano do aproksymacji korelacji pulsacji prędkości wyrażeniami zawierającymi parametry uśrednione. Wielkość  $Pr_k$  oznacza efektywną energijną liczbę Prandtla, stałą eksperymentalną modelu turbulencji. Stałą modelu jest również współczynnik  $c_D$ , natomiast  $l$  to skala długości, zmienna w przestrzeni, określana doświadczalnie odrębnie dla każdego typu przepływu.

W modelu tym współczynnik lepkości turbulentnej  $\nu_t$  wyrażony zostaje w postaci hipotezy Prandtla-Koźmogorowa:

$$\nu_t = c_{\mu} k^{1/2} l \quad (23)$$

Korzyści ze stosowania tego modelu w porównaniu z modelem zero-parametrowym są istotne zwłaszcza dla przepływów, w których dominują zjawiska konwekcji i dyfuzji, niemniej jednak wykorzystywany jest z powodzeniem jedynie dla prostych przypadków przepływów w rurach, kanałach i w warstwie przysciennej, dla których łatwe jest wyznaczenie skali  $l$ .

Bardziej złożone, ale zapewniające większą dokładność są modele dwuparametrowe. Uwzględniają one równania transportu energii kinetycznej turbulencji  $k$  oraz skali długości  $l$  lub wielkości złożonej  $z = ck^m l^n$ , gdzie  $c$  jest stałą modelu.

W literaturze spotyka się różne postaci wielkości  $z$ . Może to być np.: częstościowość charakterystyczna  $n$ :

$m = 1/2$ ,  $n = -1$ , charakterystyka turbulencji Spaldinga  $W$ :  $m = 1$ ,  $n = -2$ . Jednak najczęściej stosowana jest szybkość dyssypacji energii kinetycznej  $\mathcal{E}$ :  $m = 3/2$ ,  $n = -1$ . Wielkość tę interpretuje się fizycznie jako szybkość zamiany energii kinetycznej turbulencji na ciepło i wyraża się zależnością:

$$\mathcal{E} = \nu \frac{\partial w'_1 \partial w'_1}{\partial x_j \partial x_j} \quad (24)$$

Równanie transportu  $\mathcal{E}$  tworzy się przez zróżniczkowanie równania Naviera-Stokesa dla pulsacji prędkości względem  $x_k$ , a następnie wymnożenie obustronne przez:

$$2 \nu \frac{\partial w'_1}{\partial x_k}$$

Ma ono postać [9]:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{w}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = c_1 \frac{\bar{c}}{k} \nu_t \left( \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\bar{c}}} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \right] - c_2 \frac{\bar{c}^2}{k} + c_3 \frac{\bar{c}}{k} g_j \beta \frac{\nu_t}{Pr_{\bar{c}}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (25)$$

Zawiera ono eksperymentalną stałą modelu turbulencji - dysypacyjną liczbę Prandtla  $Pr_{\bar{c}}$  oraz uzyskane drogą optymalizacji komputerowej współczynniki  $c_1, c_2, c_3$ .

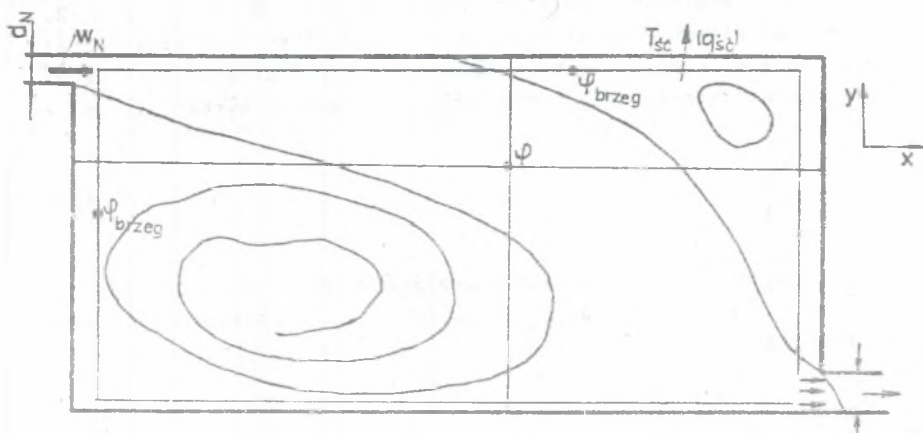
Służą one do skonstruowania wyrażeń zastępujących korelacje pulsacji prędkości.

U różnych autorów spotyka się zróżnicowane wartości tych stałych, co zestawiono w pracy [10].

Jak wynika z doświadczeń wielu autorów [11, 5], właśnie ten model najlepiej nadaje się do opisywania przepływów w przestrzeniach ograniczonych.

W literaturze szeroko dyskutowane są zastosowania modelu dla przypadku przepływu ustalonego 2-wymiarowego dla zmiennych  $\bar{w}_x, \bar{w}_y, \bar{p}, \bar{T}, k, \bar{c}$ , np. Gosman i in. [12], Reinartz [13], Kolniak i in. [14], Schmitz [15] lub dla zmiennych  $\omega, \psi, \bar{T}, k, \bar{c}$  np. Gosman [16], Nielsen [4], Scholz [9], Rheinländer [17], a także prace autorki [18].

Spotyka się również próby rozwiązania przypadku 3-wymiarowego Nielsen [19], Gosman i in. [20], Sakamoto [21] związane z postępowaniem techniki komputerowej.



Rys. 2. Schemat pomieszczenia wentylowanego w modelu bazującym na równaniach dla parametrów przepływu średniego

Fig. 2. Ventilated room diagram in the model based on the equations of mean flow parameters

Przykładem modelu trójparametrowego może być model zaproponowany przez Hanjalica [22], w którym w stosunku do modelu  $k - \epsilon$  wprowadzono dodatkowy parametr w postaci składowej naprężenia Reynoldsa -  $\rho \overline{w_1' w_1'}$ .

Uwzględnienie równań wynikających z zastosowanej teorii turbulencji sprawia, iż układ równań (14-16) staje się układem zamkniętym.

Uzupełnienie modelu w celu przystosowania go do rozwiązania przypadku przepływu powietrza w ograniczonej przestrzeni stanowią geometryczne, aerodynamiczne i cieplne warunki brzegowe (rys. 2) w otworach wentylacyjnych i na ścianach ograniczających modelowane pomieszczenie.

Poprzez odpowiedni dobór warunków brzegowych w strugach nawiewanych wprowadza się informacje o rodzaju, kształcie i parametrach strugi powietrza nawiewanego.

W stosowanych metodach obliczania przepływów płaskich warunki te zadawane są:

- w płaszczyźnie otworu nawiewnego [16] (rys. 3a),
- na brzegu strefy początkowej strugi wydzielonej z obliczeń [4] (rys. 3b), [18] (rys. 3c),
- na brzegu strefy ograniczającej rdzeń strugi [17] (rys. 3d).

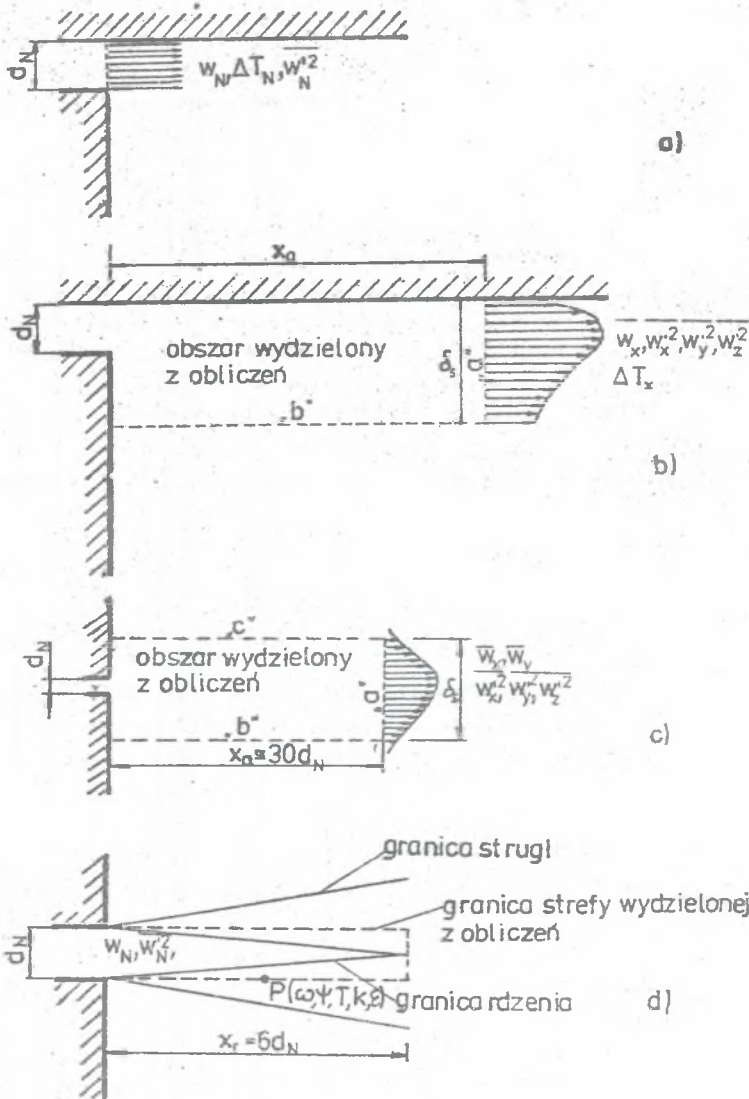
Dobór właściwej dla danego przypadku metody obliczeń oraz określenie wymiarów strefy wydzielonej z obliczeń zależą od geometrii pomieszczenia i lokalizacji otworów nawiewnych i mają bardzo silny wpływ na uzyskane rozkłady parametrów w całym obszarze [18].

Natomiast warunki brzegowe opisujące rozkłady parametrów powietrza w pobliżu ścian stałych zadaje się następująco:

- z wykorzystaniem równań wynikających z teorii przepływów o niewielkiej wartości liczby  $Re$  w warstwie przyściennej [17],
- z zastosowaniem równań różniczkowych obowiązujących dla wnętrza obszaru modelowanego z pominięciem zmian parametrów w kierunku równoległym do ściany [23],
- z wykorzystaniem uniwersalnych rozkładów parametrów w pobliżu ściany, wynikających z prandtlowskiej teorii warstwy przyściennej [9].

Zastosowanie tej trzeciej metody pozwala na mniejsze zagęszczenia siatki dyskretyzacji w pobliżu ściany, co umożliwia zmniejszenie obszaru wymaganej pamięci operacyjnej maszyny i skrócenie czasu obliczeń.

Wszystkie równania modelu zapisać można, niezależnie od przyjętego układu zmiennych niewiadomych, w jednolitej postaci równania różniczkowego cząstkowego eliptycznego, typu "konwekcja + dyfuzja = źródło", co ułatwia budowę uniwersalnego algorytmu rozwiązania numerycznego.



Rys. 3. Sposoby zadawania warunków brzegowych w strudze nawiewanej  
 Fig. 3. Various types of boundary conditions in a supply jet

Rozwiązanie to przeprowadza się metodą różnic skończonych. Zmiany postaci różniczkowej równań na postać różnicową dokonuje się metodą całkowania po objętości kontrolnej. Metodą iteracji z przeskokiem Gaussa-Seidela oblicza się wartości parametrów w każdym węzle nierównomiernej siatki dyskretyzacji całego modelu

nego pomieszczenia. Szczegółowy przebieg postępowania podaje szereg źródeł literaturowych [16, 17]. Istnieje również możliwość rozwiązania układu metodami spektralnymi, opisanymi w pracy [24].

## 2.2. Modele oparte o uproszczone równania różniczkowe

W celu zmniejszenia nakładów na rozwiązanie dokonuje się uproszczenia układu równań różniczkowych (10-12) poprzez odrzucenie opisu pewnych zjawisk. Umożliwia to analityczne lub uproszczone numeryczne rozwiązanie modelu.

Stosując takie podejście, należy zdać sobie jednak sprawę, że wpływa to w stopniu zależnym od zakresu uproszczeń na dokładność, a nawet wiarygodność uzyskiwanych rozkładów parametrów powietrza.

Przykładem takiego modelu może być metoda zaproponowana przez Timmonsa i Albrighta [25] dla przepływu płaskiego izotermicznego, w której przyjmuje się założenie, iż powietrze jest płynem nielepkiem. Nie uwzględnia się również wpływu przegród ograniczających na przepływ w pomieszczeniu, przewidując jedynie ślizganie się strug powietrza po ścianach.

Przy tak przyjętych założeniach i układzie zmiennych rozwiązanie modelu sprowadza się do rozwinięcia równania definiującego wirowość przez funkcję prądu:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (26)$$

Wobec założenia nielepkości równanie transportu wirowości ma postać:

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0, \quad (27)$$

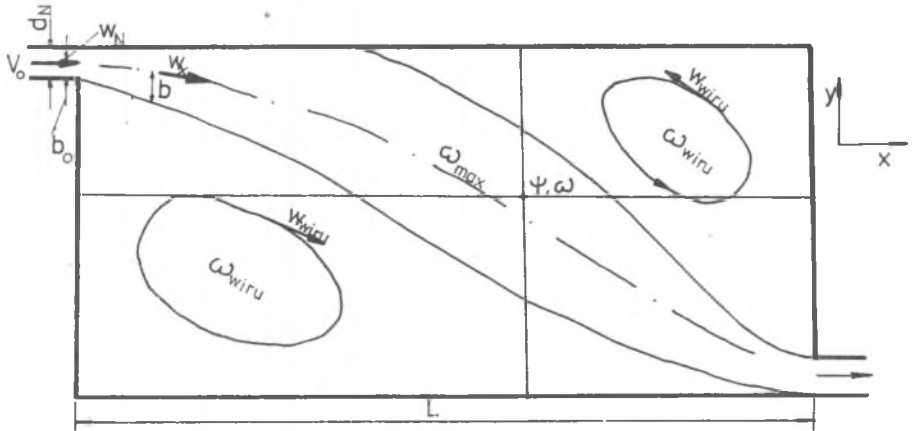
z której wynika, iż wirowość strugi nawiewanej nie może być tworzona ani niszczona, gdyż przyczyną tych zjawisk jest lepkość płynu. Ulega one jedynie rozdziałowi w pomieszczeniu, albowiem wiry poruszają się wraz z powietrzem nawiewanym i oddziałują na wartość wirowości w ustalonym wirze recyrkulacyjnym, tworzącym się nad lub pod strumieniem (rys. 4).

Oznacza to, że wirowość posiada stałą wartość wzdłuż linii prądu, na której zgodnie z definicją stała jest również funkcja prądu. Można zatem przyjąć, że:

$$\omega = f(\psi) \quad (28)$$

Zatem równanie (26) ma postać:

$$\nabla^2 \psi = f(\psi) \quad (29)$$



Rys. 4. Schemat pomieszczenia wentylowanego w modelu uproszczonym ruchu powietrza

Fig. 4. Ventilated room diagram in the simplified model of air flow

Rozwinięcie modelu polega na znalezieniu funkcji (29) dla strugi powietrza niewiananego oraz dla wiru stacjonarnego poprzez uzależnienie wirowości i funkcji prądu od współrzędnej  $y$  w przyjętym układzie.

W celu określenia rozkładu wirowości w strudze różniczkuje się profil poprzeczny prędkości w strumieniu swobodnym, np. wg Abramowicza [2] i wyznacza przez maksymalną wartość wirowości w strudze:

$$\omega(y) = [(-3y^{0,5} + 3y^2)/1,42] \omega_{max} \quad (30)$$

Maksymalną wirowość w strudze wyznacza się z uproszczonego wzoru definicyjnego:

$$\omega_{max} = \frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y} \approx \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{w_x - w_{wiru}}{b} \quad (31)$$

Prędkość osiowa  $w_x$  strugi jest funkcją odległości od wylotu strugi i podobnie jak szerokość strugi  $b$  może być obliczona ze wzoru Abramowicza. Natomiast prędkość styczną ustalonego wiru  $w_{wiru}$  określa się z zależności od prędkości osiowej strugi, korzystając z twierdzenia Stokesa o cyrkulacji.

Wirowość w stałym wirze wyznacza się na podstawie wartości prędkości stycznej wiru  $w_{wiru}$  równej prędkości na brzegu strugi i określenie na tej podstawie rzędnej miejsca jej występowania z rozkładu poprzecznego prędkości w strudze, a następnie wprowadzenie tej rzędnej do rozkładu wirowości w strudze.

Zależność funkcji prądu  $\varphi$  od  $y$  przyjmowana jest jako liniowa i wyrażona z uwzględnieniem równania określającego ilość płynu wzbudzonego w strudze i faktu, że różnica funkcji prądu  $\Delta\varphi$  odpowiada natężeniu przepływu pomiędzy liniami prądu a masę powietrza przepływającego przez pomieszczenie, jest równa jedności:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \Delta\varphi = \frac{1}{2} \left[ (v_0 + 0,08 \frac{L}{25} v_0) - v_0 \right] \quad (32)$$

$$\varphi = 0,5 - \left( 0,5 + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) y \quad (33)$$

Przystosowanie modelu do przypadku ruchu strugi w pomieszczeniu polega na ograniczeniu obszaru przepływu oraz uwzględnieniu lokalizacji i wielkości otworów wentylacyjnych przez odpowiednie zadanie warunków brzegowych dla funkcji prądu.

Wyniki weryfikacji fizycznej modelu przeprowadzone w pracy [25] wskazują, iż zbieżność pomiarów z obliczeniami zależna jest od wartości liczby  $Re$  i największe odchylenia występują w pobliżu ścian ze względu na duży wpływ lepkości na przepływ w warstwie przyściennej, a także ze względu na uproszczony sposób zadawania warunków brzegowych.

### 3. Możliwości i ograniczenia stosowania modelowania matematycznego

a) Stosowanie modelowania matematycznego do określania rozdziału powietrza wentylacyjnego pozwala na szybką ocenę poprawności proponowanych rozwiązań jeszcze w fazie projektowania przed wykonaniem instalacji. Stąd też wynika szerokie zainteresowanie tym problemem.

b) Ponieważ większość modeli rozwiązywana jest metodami numerycznymi z wykorzystaniem elektronicznej techniki obliczeniowej, możliwości dostępnych komputerów stanowią ograniczenie dla pełnego rozwiązania zagadnienia. Z powodu konieczności zmniejszenia wymaganej pamięci operacyjnej i skrócenia czasu obliczeń rozwiązuje się jedynie równania dla parametrów przepływu średniego.

Z tych samych powodów przyjmuje się założenie, iż przepływ jest ustalony; w przypadku wentylacji jest ono prawdziwe, gdy nie występują zmienne w czasie strugi zakłócające.

Przy obecnie powszechnie dostępnych komputerach klasy IBM PC XT możliwe jest przeprowadzenie obliczeń dla przepływów dwuwymiarowych, co związane jest z ograniczeniem ilości rozwiązywanych iteracyjnie równań. Obliczenia numeryczne przeprowadzane jedynie dla przepływów dwuwymiarowych ograniczają stosowanie modelowania do przypadków, w których nawiew powietrza następuje przez otwory szczelinowe lub osiowo symetrycznie rozmieszczone w pomieszczeniu.

Niemniej jednak istnieją już obecnie maszyny cyfrowe umożliwiające rozwiązanie trójwymiarowe, a postęp w dziedzinie komputeryzacji pozwala sądzić, iż ich dostępność będzie w najbliższych latach rosła.

Zmniejszenie nakładów na obliczenia komputerowe mają też na celu autorzy modeli uproszczonych. Przy ich stosowaniu należy jednak brać pod uwagę, czy jest to opłacalne z punktu widzenia dokładności uzyskanych wyników.

c) Przy modelowaniu matematycznym uporano się w zasadzie do tej pory z geometrią pomieszczeń wentylowanych. Istnieją w literaturze przykłady rozwiązań dla różnych kształtów, np. ukośne ściany [9], przeszkód stałych w przepływie strug [26], różnej lokalizacji otworów wentylacyjnych [17, 18, 26].

d) Nieco gorzej wygląda sprawa z uwzględnianiem innych niż strugi nawiewane i wywiewane czynników wpływających na kształtowania rozdziału powietrza w pomieszczeniu. W przypadku przepływu nieizotermicznego istniejące źródła ciepła uwzględniane są w stosowanych do tej pory metodach [17] w sposób bierny, a efekt ich działania zadawany w postaci temperatur powierzchni lub strumieni ciepła dopływających do pomieszczenia [9]. Nie stworzono dotąd sposobu na uwzględnienie w obliczeniach rozdziału powietrza silnych lub słabych strug konwekcyjnych.

Podobnie nie uwzględnia się dotychczas zakłóceń rozkładu ciśnień w pomieszczeniu spowodowanych napływem powietrza przez infiltrację, przez sporadycznie otwierane okna, drzwi, ruchem ludzi i mechanizmów, działaniem wiatru na budynek.

e) Z przeprowadzonej analizy [18] wynika, iż zwiększenie możliwości stosowania metod matematycznych, a także poprawa dokładności obliczeń są możliwe przez uzupełnienie eksperymentalne niektórych modeli, zwłaszcza w zakresie wartości współczynników eksperymentalnych, wynikających z przyjętej teorii turbulencji, a także warunków brzegowych w strugach nawiewanych.

#### LITERATURA

- [1] Nielsen P.V.: Mathematical Models for Room Air Distribution. Int. Conf. on System Simulation on Buildings, Univ. of Liege 1982.
- [2] Abramowicz G.N.: Teoria turbulentnych strug. Fizmatgiz, Moskwa 1960.
- [3] Šepielew I.A.: Aerodinamika wozдушnych potokow w pomieszczeni. Strojizdat, Moskwa 1978.
- [4] Nielsen P.W.: Flow in air conditioned rooms. Praca doktorska, Nordberg 1976.
- [5] Hanel B., Köthnig G.: Methoden zur Vorausbestimmung von Strömungsvorgängen in Klimatisierten Raum. "Luft- und Kältetechnik" 4/1983.
- [6] Elsner J.W.: Turbulencja przepływów. PWN, Warszawa 1987.
- [7] Teuchiya T.: Numerical Calculation of room air movement. Isothermal turbulent two-dimensional case. BRI-Research Paper 62, 1976.



- [8] Launder B.E., Spalding D.B.: *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London, New York 1972.
- [9] Hanel B., Scholz R.: Beitrag zur Modellierung zweidimensionaler isothermer und nichtisothermer turbulenter Strömungen in Räumen. Teil I, II, "Luft - und Kältetechnik", 3, 4/1979.
- [10] Praca zbiorowa: "Modelowanie matematyczne i eksperymentalne ruchu powietrza wentylacyjnego w budownictwie mieszkaniowym i towarzyszącym". IOWiOP, Politechnika Śląska, 1986.
- [11] Lipiński D.M.: Komputerowa symulacja ruchu płynu w przestrzeni dwuwymiarowej. Raport Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1984.
- [12] Gosman A.D., Ideriah F.J.K.: A general computer program for two dimensional, turbulent, recirculating flows. Dept. of Mechanical Engineering, London 1976.
- [13] Reinartz A.: Berechnung von Strömungs und Temperaturfeldern in belüfteten Räumen. Dissertation, RWTH Aachen 1984.
- [14] Kolniak P., Przekwas A., Wanik A.: Metoda modelowania przepływów recyrkulacyjnych. Monografie Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1983.
- [15] Smitz R.M.: Berechnung turbulenter Raumluftströmungen bei gekoppelten Impuls-, - Wärme - und Stoffaustausch. Dissertation, RWTH Aachen 1985.
- [16] Gosman A.D., Pun W.M. i inni: Heat and mass transfer in recirculating flows. Academic Press, London and New York 1969.
- [17] Rheinländer J.: Numerische Berechnung von vorwiegend durch die Schwerkraft angetriebenen Raumströmungen. Dissertation, VDI Zeitschriften Reihe 7, Nr 60, Düsseldorf 1980.
- [18] Knobloch B.: Eksperymentalny dobór parametrów strugi nawiewanej dla matematycznego modelowania ruchu powietrza wentylacyjnego. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1987.
- [19] Nielsen P.W.: The distributions of air velocity in large rooms with small side - wall mounted supply openings. XV International Congress of Refrigeration, Wenezja 1979.
- [20] Gosman A.D., Nielsen P.W., Restivo A., Whitelaw J.H.: The Flow Properties of Rooms with small ventilation Opening. "Transactions of the ASME", Vol 102, September 1980.
- [21] Sakamoto Y., Matsuo Y.: Numerical predictions of three dimensional flow in a ventilated room using turbulence models. "Appl. Math. Modeling" 1980, vol. 3, February.
- [22] Cadiergues R.: La calcul numerique des acoulements et transferts turbulents. "Promoclim, PM 80/E/1/2 1980 PM80E2/4/1980.
- [23] Jones W.P., Launder B.E.: The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. "Journal Heat Mass Transfer", Vol. 16, pp. 1119-1130. Pergamon Press, 1973.
- [24] Mathieu J., Jeandel D.: La simulation des modeles de turbulence et leurs application. Volume 1. Editions Eyrolles, Paris 1984.
- [25] M. Timmons P.E., Albright L.E. i inni: Experimental and numerical study of air movement in slot - ventilated enclosures. "ASHRAE TRANS" Vol. 83, Part. 1., 1980.
- [26] Scholz R.: Modellierung und Berechnung nichtisothermer turbulenter zweidimensionaler Strömungen. 4 Schulle junger Mechaniker A d W der DDR, Berlin 1982.

## SPIS STOSOWANYCH OZNACZEŃ

a	- współczynnik turbulencji
B	- szerokość modelowanego pomieszczenia
b	- wykładnik eksperymentalny lub szerokość strugi
$c, c_a, c_b$	- współczynniki w modelach turbulencji
$C_1, C_2, C_3$	- współczynniki w równaniu transportu szybkości dysypacji energii kinetycznej turbulencji
$c_p$	- ciepło właściwe
$d_N$	- wymiar charakterystyczny otworu nawiewnego
g	- przyspieszenie ziemskie
H	- wysokość modelowanego pomieszczenia
k	- energia kinetyczna turbulencji
$K_\varphi, K_p, K_s$	- współczynniki eksperymentalne
$k_{x_i}$	- współczynnik lepkości wirowej
l	- skala długości
$l_m$	- długość drogi mieszania Prandtla
$l_z$	- zasięg strugi nawiewanej
L	- długość modelowanego pomieszczenia
m	- współczynnik eksperymentalny
n	- wykładnik eksperymentalny
p	- ciśnienie lub wykładnik eksperymentalny
T	- temperatura
t	- czas
W	- charakterystyka turbulencji
w	- prędkość powietrza
V	- natężenie przepływu powietrza
x, y, z	- współrzędne punktów
$x_0$	- biegun strugi
$y_p$	- promień połówkowy
$\beta$	- współczynnik rozszerzalności objętościowej
$\gamma$	- współczynnik eksperymentalny
$\Delta$	- różnica

- $\mathcal{E}$  - szybkość dyssypacji energii kinetycznej turbulencji  
 $\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła  
 $\rho$  - współczynnik podziału energii nawiewu  
 $\nu$  - współczynnik lepkości kinematycznej  
 $\rho$  - gęstość powietrza  
 $\varphi$  - zapis ogólny zmiennych  
 $\psi$  - funkcja prądu  
 $\omega$  - wirowość

### Indeksy

- $i, j, k$  - dotyczy współrzędnych w zapisie tensorowym  
 $m, \max$  - dotyczy wartości maksymalnej  
 $N$  - dotyczy otworu nawiewnego  
 $o$  - dotyczy wartości odniesienia lub początkowej  
 $r$  - dotyczy rdzenia strugi lub strefy roboczej  
 $wiru$  - dotyczy wartości w wirze  
 $x, y$  - dotyczy współrzędnej punktu  
 $t$  - dotyczy przepływu turbulentnego  
 $\varphi$  - dotyczy zmiennej

### Liczby

- $Pr$  - liczba Prandtla  
 $Pr_k$  - energijna liczba Prandtla  
 $Pr_{\mathcal{E}}$  - dyssypacyjna liczba Prandtla  
 $Re$  - liczba Reynoldsa

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕНТИЛЯЦИОННОГО ВОЗДУХА  
- ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

Р е з ю м е

В статье представлены способы прогнозирования распределения вентиляционного воздуха в помещениях опираясь на математическом моделировании.

Проанализированы две группы этих методов, именно модели на базе эмпирических зависимостей и на базе сформулированных в виде дифференциальных уравнений законов сохранения массы, количества движения и энергии для жидкости. Указана необходимость ограничения затрат на численные решения модели из второй группы, либо через произведение расчетов для системы уравнения для параметров среднего течения с использованием полуэмпирических теории турбулентности для основания замыкающих уравнений, либо через применение упрощенных уравнений.

Определены тоже способы задавания краевых условий в приточных струях и поблизости постоянных стен.

Обсуждены недостатки и достоинства представленных методов возможности и ограничения их применения в практике.

MATHEMATICAL ARCHETYPES (MODELS) OF VENTILATING AIR DISTRIBUTION

S u m m a r y

The paper presents some methods of predicting ventilating air distribution in rooms on the basis of mathematical models. Two types of such the methods have been analysed: models based on empirical relation and models in a form of differential equations of mass, momentum and energy conservation in fluid. It has been pointed out that the expenditure related to the numerical solution of the models of the latter type should be decreased. This can be done either by solving the equation set for mean flow parameters with the use of semiempirical theory of turbulence for closure equations or by using simplified equations.

The ways in which boundary conditions are defined in supply jets and close to walls have been characterized in the paper. Shortcomings and advantages of the presented methods as well as the possibilities and limitations of their use in practice have been discussed.