

Piotr FOŁĘGA, Piotr CZECH, Tomasz FIGLUS

## WYZNACZANIE SZTYWNOŚCI ZAZĘBIENIA ZA POMOCĄ MES

**Streszczenie.** W opracowaniu przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych (MES) w wyznaczaniu sztywności zazębienia kół zębatych. Celem przeprowadzonych obliczeń wstępnych jest weryfikacja zaproponowanej uproszczonej metody obliczeń oraz opracowanego modelu numerycznego koła zębatego. Uzyskane wyniki obliczeń porównano z wynikami zamieszczonymi w literaturze.

## EVALUATE THE STIFFNESS OF MESHING WITH FEM

**Summary.** Application of the Finite Elements Method (FEM) in the numerical analysis of the stiffness of meshing has been presented in the paper. The verification of proposed simplified method of calculations is the aim of conducted preliminary calculations as well as the worked out pattern of numeric toothed wheel. The got results of calculations were compared with put in literature scores.

### 1. WPROWADZENIE

Norma ISO/DIS 6336 określa sztywność zazębienia  $c_z$  jako stosunek przyrostu siły normalnej w „N” do przyrostu odkształcenia w „ $\mu\text{m}$ ” znajdujących się w przyporze par zębów o jednostkowej szerokości równej 1 mm bezodchyłkowej przekładni. Odkształcenia to jest wyznaczone w kierunku prostopadłym do zarysu zęba w przekroju czołowym.

Najważniejszymi czynnikami mającymi wpływ na wartości sztywności zazębienia są [1]:

- dane zazębienia (liczba zębów, współczynnik przesunięcia zarysu, zarys odniesienia itp.),
- wartość obciążenia,
- chropowatość i falistość boków zęba,
- moduł sprężystości.

Sztywność zazębienia zależy więc od geometrii kół zębatych i własności fizycznych ich materiałów. W normie ISO/DIS 6336/1 podano kilka metod wyznaczenia sztywności zazębienia różniących się przede wszystkim dokładnością uzyskiwanych wyników obliczeń. Najdokładniej sztywność zazębienia wyznacza się zgodnie z metodą A, według której należy w przeprowadzonej analizie uwzględnić wpływ wszystkich czynników. Metodami obliczeń, które można tu wykorzystać, są numeryczne metody obliczeń, takie jak metoda elementów skończonych (MES) lub metoda elementów brzegowych (MEB). W metodzie C natomiast po przyjęciu odpowiednich założeń upraszczających przyjmuje się stałe wartości sztywności zazębienia wynoszące odpowiednio:

- sztywność jednej pary zębów  $c' = 14 \text{ N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$ ,
- średnia sztywność zazębienia  $c_\gamma = 20 \text{ N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$ .

W literaturze można również spotkać inne uproszczone metody wyznaczania sztywności zazębienia [2, 3]. W pracy [3] autor zaproponował przy wykorzystaniu wyprowadzonych wzorów następujący analityczny sposób wyznaczania sztywności zazębienia:

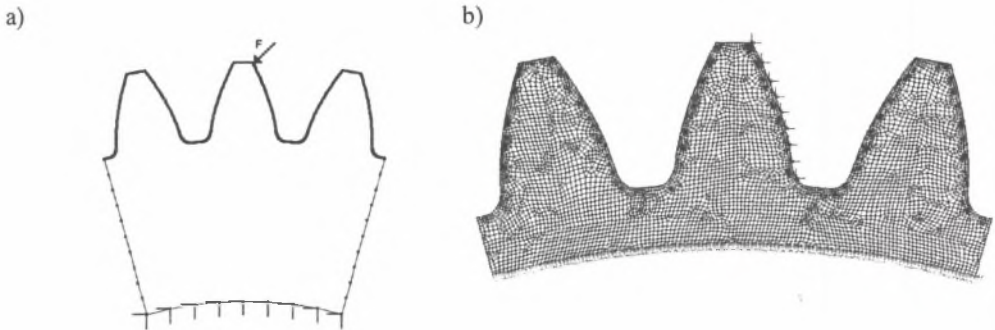
- w pierwszym kroku należy wyznaczyć, po określeniu stałych materiałowych, geometrii zęba i wielkości obciążenia ugięcie zęba pod działaniem siły normalnej do zarysu w wybranych kilku punktach przyłożenia siły,
- następnie w ten sam sposób wyznacza się ugięcia zęba współpracującego w przyjętych uprzednio punktach przyłożenia siły (współpracy zębów),
- dodatkowo należy obliczyć spłaszczenie powierzchni obu zębów w kolejnych punktach styku.

Po wykonaniu powyższych obliczeń można wyznaczyć trzy krzywe nad odcinkiem przyporu, za pomocą których określa się sumaryczne odkształcenie pary zębów, a następnie sztywność w poszczególnych przyjętych punktach współpracy. Ograniczeniem tej metody obliczeń jest jednak możliwości wyznaczenia wartości sztywności zazębienia tylko nieuszkodzonych zębów kół zębatych. W praktyce ważną informacją w diagnostyce kół zębatych są zmiany sztywności zazębienia spowodowane uszkodzeniami zębów, np. pęknięciem zmęczeniowym zęba u podstawy.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych w wyznaczaniu sztywności zazębienia kół zębatych. Celem przeprowadzonych obliczeń wstępnych jest weryfikacja zaproponowanej uproszczonej metody obliczeń oraz opracowanego modelu numerycznego wieńca zębatego. Uzyskane wyniki obliczeń porównano z wynikami zamieszczonymi w literaturze. Kolejnym etapem pracy będzie oszacowanie wpływu pęknięcia zmęczeniowego zęba u podstawy na zmiany sztywności zazębienia.

## 2. UPROSZCZONA METODA WYZNACZANIA SZTYWNOŚCI ZAZĘBIENIA ZA POMOCĄ MES

Wyznaczenie sztywności zazębienia za pomocą MES z uwzględnieniem kontaktu uwzględnia wszystkie czynniki występujące w kontakcie zębów kół zębatych. Takie pełne podejście do zagadnienia powoduje jednak trudności numeryczne oraz stosunkowo długi czas obliczeń numerycznych. Dlatego w pracy po wykonaniu szeregu eksperymentów numerycznych opracowano uproszczoną metodę wyznaczania sztywności zazębienia opartą na założeniach metody analitycznej podanej w pracy [3]. Po wygenerowaniu zarysu zęba zębniaka i koła wyznaczane są na podstawie obliczeń numerycznych odkształcenia w punktach przyłożenia siły, a następnie zmiany sztywności pojedynczego zęba w funkcji promienia osobno dla zębniaka i koła. Następnie znając przebieg zmian sztywności pojedynczych zębów można wyznaczyć sztywność zazębienia jednej pary zębów w dowolnym punkcie na linii przyporu. Znając sztywność zazębienia jednej pary zębów, można również wyznaczyć sztywność zazębienia w przyporze wieloparowym. Przyjęty w obliczeniach numerycznych sposób obciążenia i podparcia zęba oraz wykorzystany w obliczeniach model numeryczny do wyznaczenia sztywności zęba przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Model koła zębatego: a) geometryczny, b) numeryczny  
 Fig. 1. The model of toothed wheel: a) the geometrical, b) the FEM

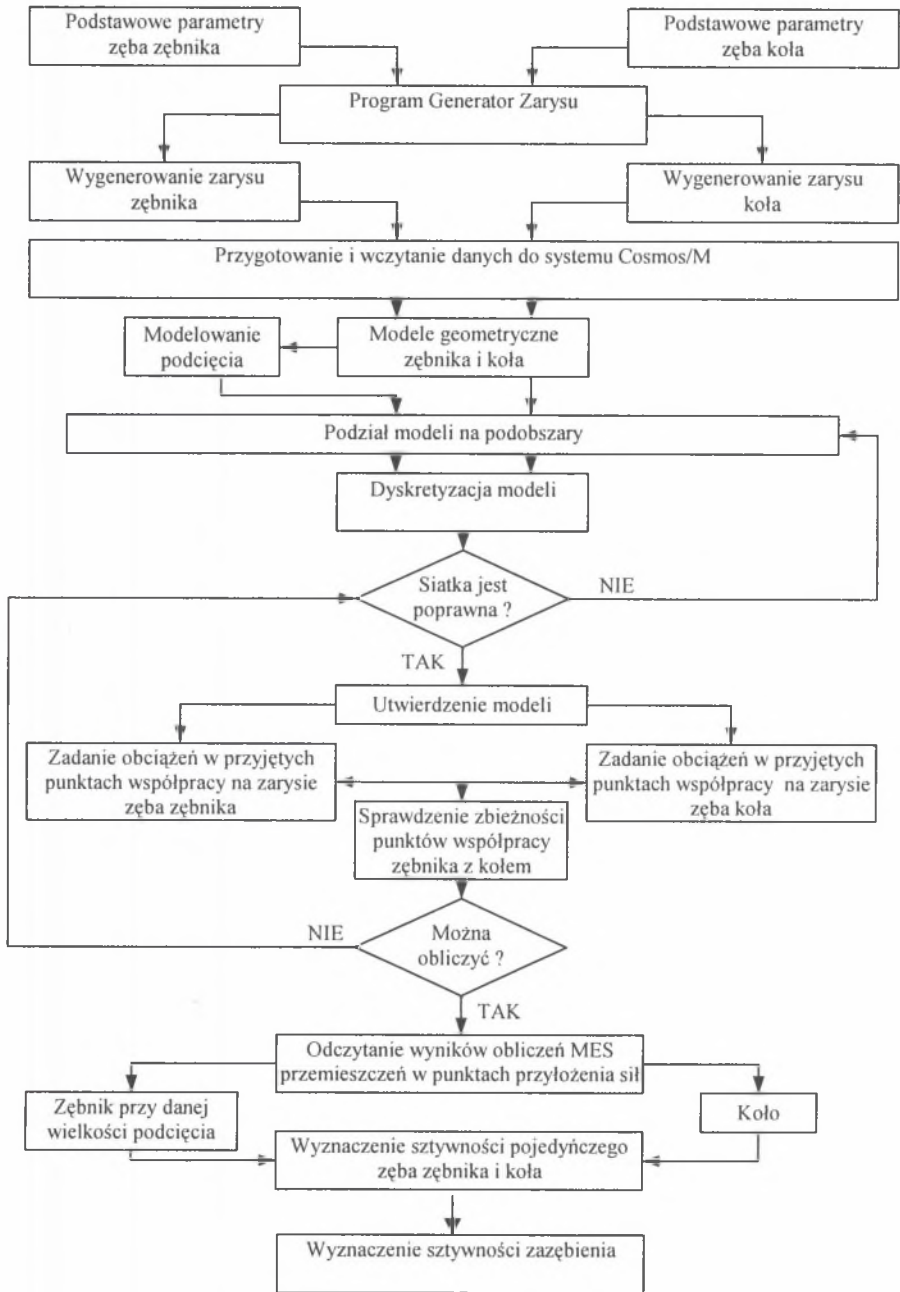
Opracowany model numeryczny uwzględnia rzeczywisty kształt zęba (jego geometrię) oraz odkształcenie wieńca koła zębatego. W przeprowadzonych obliczeniach przy wyznaczeniu sztywności zazębienia nie uwzględniono spłaszczenia powierzchni obu zębów w kolejnych punktach styku spowodowanego kontaktem tych powierzchni. Na rysunku 2 pokazano algorytm opracowanej metody z możliwością uwzględnienia pęknięcia zmęczeniowego stopy zęba poprzez zamodelowanie jego podcięcia.

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ

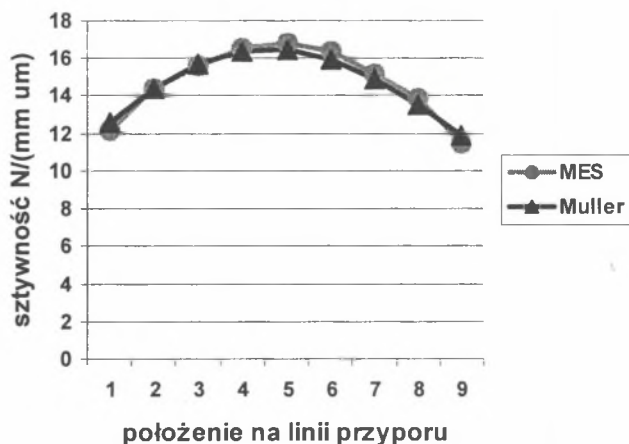
W celu weryfikacji opracowanej uproszczonej metody wyznaczania sztywności zazębienia porównano wyniki obliczeń numerycznych z wykorzystaniem przyjętego modelu numerycznego z wynikami zamieszczonymi w literaturze [3]. W tym celu zamodelowano zęby kół o następujących cechach geometrycznych:

- liczba zębów zębniaka  $z_1=20$ ,
- liczba zębów koła  $z_2=35$ ,
- współczynnik korekcji zębniaka  $x_1=0.3$ ,
- współczynnik korekcji koła  $x_2=0.1$ ,
- oraz przy założeniu zarysu odniesienia
- kąt przyporu  $\alpha_{on}=20^\circ$ ,
- wysokości głowy narzędzia  $h_{ao}=1.25$ ,
- promień zaokrąglenia głowy narzędzia  $\rho_{ao}=0.2$ .

Obliczenia wykonano przy wykorzystaniu systemu COSMOS/M. Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych uzyskane przy wykorzystaniu MES oraz metody analitycznej [3] przedstawiono na rysunku 3 oraz w tabeli 1. Analizując wartości sztywności zazębienia wyznaczone metodą numeryczną i analityczną można stwierdzić ich zgodność jakościową i ilościową. Różnice w otrzymanych wynikach mogą być spowodowane nieuwzględnieniem w obliczeniach numerycznych efektów kontaktowych (spłaszczenia powierzchni zębów). Przykładową mapę przemieszczeń pokazano na rysunku 4.



Rys. 2. Algorytm wyznaczania sztywności zazębienia z wykorzystaniem MES  
 Fig. 2. Algorithm of evaluate the stiffness of meshing with FEM



Rys. 3. Porównanie sztywności zazębienia  
Fig. 3. Comparison of stiffness of meshing

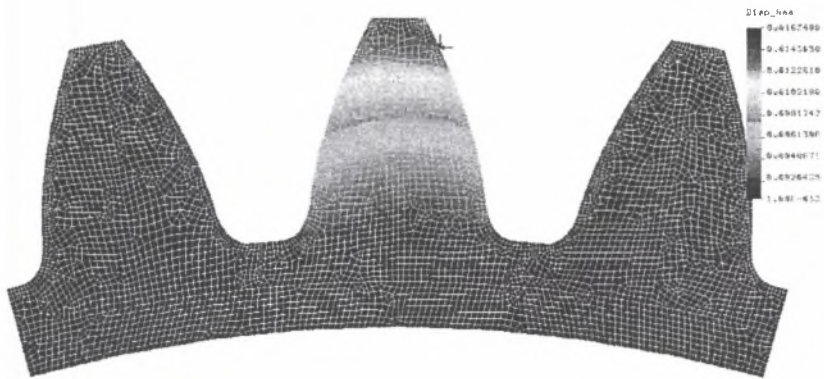
Tabela 1

Porównanie wyników obliczeń sztywności

Punkty współpracy	Muller [N/mm μm]	MES [N/mm μm]	Różnice procentowe
1	12,573	12,126	3,55%
2	14,363	14,414	0,35%
3	15,664	15,622	0,27%
4	16,369	16,552	1,12%
5	16,45	16,822	2,26%
6	15,943	16,366	2,65%
7	14,936	15,147	1,41%
8	13,551	13,898	2,56%
9	11,92	11,460	3,86%

#### 4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych do wyznaczania wartości sztywności zazębienia kół zębatach. Celem przeprowadzonej analizy była weryfikacja zaproponowanej uproszczonej metody obliczeń oraz opracowanego modelu numerycznego wienca zębatego. Uzyskane wyniki obliczeń są zgodne jakościowo oraz ilościowo (rys. 3) z wynikami zamieszczonymi w literaturze [3]. Następnym etapem pracy będzie próba oszacowanie wpływu pęknięcia zmęczeniowego zęba u podstawy na zmiany sztywności zazębienia z wykorzystaniem opracowanej metody oraz modelu numerycznego.



Rys. 4. Przykładowa mapa przemieszczeń  
Fig. 4. The example - map of displacement

#### Literatura

1. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: Przekładnie walcowe, WKiŁ, Warszawa 1992.
2. Ryś J.: Sztywność zębów prostych walcowych kół zębatach, Przegląd Mechaniczny, nr 10, Warszawa 1977.
3. Müller L.: Przekładnie zębate – dynamika, WNT, Warszawa 1986.

Recenzent: Prof. dr hab. inż Zbigniew Dąbrowski

Praca wykonana w ramach grantu numer 5T07B02425