ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

KRZYSZTOF KLUSZCZYŃSKI

MOMENTY PASOŻYTNICZE W MASZYNACH ASYNCHRONICZNYCH

ELEKTRYKA

Z. 102
GLIWICE
1986

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 897

KRZYSZTOF KLUSZCZYŃSKI

MOMENTY PASOŻYTNICZE W MASZYNACH ASYNCHRONICZNYCH

GLIWICE 1986

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Mgr Aleksandra Kłobuszowska

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4688

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 200+85 Ark. wyd. 12,3 Ark. druk. 12,06 Papier offset. kl. III 70x100, 70 g
Oddano do druku 20.08.86 Podpis. do druku 3.11.86 Druk ukończ. w grudniu 1986
Zam. 787/86 O-24 Cena zł 246,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

WYKAZ OZNACZEŃ 9

1. WSTĘP 15

1.1. Cel pracy 15

1.2. Teza i zakres pracy 19

2. MODEL MATEMATYCZNY m-FAZOWEGO UZWOJENIA MASZYNY ASYNCHRONICZNEJ WE WSPÓŁRZĘDNYCH OSIOWYCH 20

2.1. Rozkład prądów m-fazowego uzwojenia na składowe aktywne i zerowe w stanie nieustalonym we współrzędnych fazowych i osiowych 20

2.2. Równania różniczkowe stanu elektromagnetycznego uzwojenia w rzeczywistych i zespolonych współrzędnych osiowych 31

2.3. Rozkład prądów m-fazowego uzwojenia na składowe aktywne i zerowe w stanie ustalonym przy zasilaniu sinusoidalnym 40

2.4. Widmo amplitudowe chwilowego rozkładu przestrzennego przepływu uzwojenia 45

2.5. Uzwojenie klatkowe jako symetryczne uzwojenie wielofazowe 52

3. MODEL MATEMATYCZNY MASZYNY ASYNCHRONICZNEJ WE WSPÓŁRZĘDNYCH OSIOWYCH 56

3.1. Transformacja osiowa równań różniczkowych maszyny asynchronicznej 56

3.2. Schemat rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne 59

3.3. Schematyczna notacja równań maszyny we współrzędnych osiowych 60

3.4. Moment elektromagnetyczny maszyny we współrzędnych osiowych 67

3.5. Rozsprzęganie się układu równań różniczkowych maszyny 71

3.6. Uogólnienie indukcyjności rozproszenia różnicowego 74

Str.

3.7. Redukcja liczby współrzędnych 77

3.8. Rozsprzęganie się układu równań na równanie dla harmonicznych przestrzennych 89

4. PRĄDY STOJANA I WIRNIKA PRZY UWZGLĘDNIENIU WYŻSZYCH HARMONICZNYCH PRZESTRZENNYCH PRZEPŁYWU 93

4.1. Mechanizm generowania prądów obcej częstotliwości w uzwojeniach maszyny 93

4.2. Rozkład prądów maszyny na prądy i-krotnych reakcji uzwojeń elementarnych 100

4.3. Prądy stojana i wirnika w stanie ustalonym 102

5. ELEKTROMAGNETYCZNE MOMENTY PASOŻYTNICZE 112

5.1. Mechanizm generowania momentów pasożytniczych 112

5.2. Pasożytnicze momenty asynchroniczne i synchroniczne 116

5.3. Pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu 121

5.4. Dobór liczby żłobków stojana i wirnika 126

5.5. Wpływ momentów pasożytniczych na rozruch silników indukcyjnych 143

6. PODSUMOWANIE 165

KIERUNKI DALSZYCH PRAC 165

LITERATURA 168

DODATKI 173

STRESZCZENIA 185

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 9

1. ВСТУПЛЕНИЕ 15

1.1. Цель работы 15

1.2. Тезисы и объем работы 19

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ м-ФАЗНОЙ ОБМОТКИ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ В ОСЕВЫХ КООРДИНАТАХ 20

2.1. Разложение токов м-фазной обмотки на активные и нулевые составляющие в неустановившемся режиме 20

2.2. Дифференциальные уравнения обмотки в действительных и комплексных осевых координатах 31

2.3. Разложение токов м-фазной обмотки на активные и нулевые составные в установившемся режиме 40

2.4. Амплитудный спектр временного пространственного разложения ампервитков машины 45

2.5. Беличья обмотка как симметрическая многофазная обмотка 52

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ В ОСЕВЫХ КООРДИНАТАХ ... 56

3.1. Осевая трансформация дифференциальных уравнений асинхронной машины 56

3.2. Схема разложения многофазной машины на элементарные машины 59

3.3. Схематическая нотация уравнений машины 60

3.4. Электромагнитный момент машины 67

3.5. Распределение системы дифференциальных уравнений машины 71

3.6. Обобщение индуктивности дифференциального рассеяния 74

3.7. Редукция числа координат 77

3.8. Распределение системы уравнений на уравнения для пространственных гармоник 89

Стр.

4. ТОКИ СТАТОРА И РОТОРА ПРИ УЧЕТЕ ВНЕШНИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИК АМПЕРВИТКОВ 93

4.1. Механизм генерирования токов иной частоты в обмотках машины 93

4.2. Разложение токов машины на токи i-кратных реакций элементарных обмоток 100

4.3. Токи статора и ротора в установившемся режиме 102

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПАРАЗИТНЫЕ МОМЕНТЫ 112

5.1. Механизм генерирования паразитных моментов 112

5.2. Паразитные асинхронные и синхронные моменты 116

5.3. Паразитные синхронные моменты I-го порядка 121

5.4. Подбор количества пазов статора и ротора 126

5.5. Влияние паразитных моментов на пуск двигателя 143

6. ВЫВОДЫ 165

НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ РАБОТ 165

ЛИТЕРАТУРА 168

ПРИЛОЖЕНИЯ 173

РЕЗЮМЕ 185

CONTENTS

Page

LIST OF SYMBOLS 9

1. INTRODUCTION 15

1.1. The purpose of the paper 15

1.2. The thesis and the scope of the paper 19

2. THE MATHEMATICAL MODEL OF THE m-PHASE WINDING OF AN ASYNCHRONOUS MACHINE IN AXIS COORDINATES 20

2.1. The decomposition of the current vector of m-phase winding into active and zero components in unsteady state 20

2.2. The differential equations of m-phase winding in axis coordinates 31

2.3. The decomposition of the current vector of m-phase winding into active and zero components in steady state 40

2.4. The amplitude spectrum of the instantaneous magnetomotive force distribution 45

2.5. A squirrel-cage winding as a symmetrical polyphase winding 52

3. THE MATHEMATICAL MODEL OF AN ASYNCHRONOUS MOTOR IN AXIS COORDINATES 56

3.1. The axis transformation of the differential equations of an asynchronous machine 56

3.2. The diagram of the decomposition of a polyphase machine into elementary machines 59

3.3. The schematic notation of the equations of a machine 60

3.4. The electromagnetic torque of a machine 67

3.5. Individual equations for axis coordinates 71

3.6. The generalization of differential leakage inductance 74

3.7. The reduction of the number of coordinates 77

3.8. Individual equations for space harmonics 89

Page

4. STATOR AND ROTOR CURRENTS ALLOWING FOR ALL SPACE HARMONICS 93

4.1. The principle of generation of currents other than mains frequency 93

4.2. The decomposition of currents into components connected with multiple armature reactions 100

4.3. Stator and rotor currents in steady state 102

5. ELEKTROMAGNETIC PARASITIC TORQUES 112

5.1. The principle of generation of parasitic torques 112

5.2. Asynchronous and synchronous parasitic torques 116

5.3. Synchronous parasitic torques of I order 121

5.4. The choice of the number of stator and rotor slots 126

5.5. The influence of parasitic torques on motor start 143

6. RECAPITULATION 165

THE TREND OF FURTHER INVESTIGATIONS 165

REFERENCES 168

APPENDIXES 173

ABSTRACTS 185

WYKAZ OZNACZEŃ

A_ϑ - współczynnik proporcjonalności pomiędzy chwilową wartością amplitudy ϑ-tej harmonicznej przestrzennej przepływu magnetycznego uzwojenia maszyny a chwilową wartością normy wektora prądu

a - najniższy rząd harmonicznej przestrzennej w rozkładzie krzywej przepływu magnetycznego w szereg Fouriera

$\underline{a}$ - operator obrotu o kąt $e^{j\frac{2\pi}{m}}$

b - szerokość szczerbiny żłobka

c - liczba całkowita dodatnia

D - średnica wewnętrzna stojana (zewnętrzna wirnika)

$\underline{I}_k$ - wartość symboliczna prądu w k-tym uzwojeniu fazowym ($k = 1,2,3,\ldots$)

$\underline{I}_k^{(s)}$ - k-ta składowa symetryczna prądu ($k = 1,2,3,\ldots$)

I^m - przestrzeń prądów fazowych uzwojenia

I_o - przestrzeń zerowa prądów

I_1 - przestrzeń aktywna prądów

$I_1^2, I_2^2\ldots$ - 2-wymiarowe przestrzenie aktywne prądów uzwojenia m-fazowego

$I^1_{\frac{m+1}{2}}, I^1_{\frac{m+1}{2}}, I^1_{\frac{m}{2}}$ - 1-wymiarowe przestrzenie aktywne prądów uzwojenia m-fazowego

i_k - wartość chwilowa prądu w k-tym uzwojeniu fazowym (k-ta współrzędna prądu w fazowym układzie współrzędnych)

$i_l^{(k)}$ - l-ta współrzędna osiowa prądu

$\underline{i}_l^{(k)}$ - l-ta zespolona współrzędna osiowa prądu

$\underline{i}_{rl}^{(k,s\vartheta)}$ - l-ta zespolona współrzędna osiowa prądu wirnika wyrażona na płaszczyźnie ϑ-tego stojana elementarnego

$\underline{i}_{r\lambda(\vartheta)}^{(k)}$ - prądy reakcji pierwotnej wirnika

$\underline{i}_{r\lambda(\vartheta,\rho,\mu)}^{(k)}$ - prądy reakcji wtórnej wirnika

$\underline{i}_{r\mu(\varkappa\ldots)}^{(k)}$ - prądy j-tej reakcji wirnika

$\underline{i}_{s1(0)}^{(k)}$ - prąd reakcji pierwotnej stojana

$\underline{i}^{(k)}_{s\lambda(\vartheta,\varrho)}$ - prądy reakcji wtórnej stojana

$\underline{i}^{(k)}_{s\lambda(\varrho\ldots)}$ - prądy i-tej reakcji wirnika

i, j - krotność reakcji uzwojenia stojana i wirnika w określeniu: prąd i-tej reakcji stojana oraz prąd j-tej reakcji wirnika

$\underline{i}$ - wektor prądu uzwojenia

$i_{\perp}$ - składowa aktywna wektora prądu

i_o - składowa zerowa wektora prądu

i_l - l-ta składowa ortogonalna wektora prądu i odpowiadająca l-tej zespolonej współrzędnej osiowej $\underline{i}^{(k)}_l$

$\|\underline{i}(t)\|$ - norma euklidesowa wartości chwilowej wektora prądu

J - moment bezwładności na wale maszyny (łącznie z wirnikiem)

J_r - moment bezwładności wirnika

$\varkappa$ - stosunek momentu bezwładności maszyny i liczby żłobków wirnika

[K] - macierz transformacji osiowej

$[K_r]$ - macierz transformacji osiowej dla wirnika

$[K_s]$ - macierz transformacji osiowej dla stojana

(k) - indeks górny dla określenia współrzędnych osiowych (współrzędnych w osiowym układzie współrzędnych)

$L_{r\vartheta}$ - indukcyjność główna (szczelinowa) wirnika dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$L_{s\vartheta}$ - indukcyjność główna stojana dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$L_{sr\vartheta}$ - indukcyjność wzajemna stojan-wirnik dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$L_{\mu\vartheta}$ - indukcyjność magnesowania dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

L_{σ} - indukcyjność rozproszenia uzwojenia

$L_{\sigma r}$ - indukcyjność rozproszenia wirnika

$L_{\sigma s}$ - indukcyjność rozproszenia stojana

$L_{\sigma p}$ - indukcyjność rozproszenia wycinka pierścienia klatki wirnika

$L_{\sigma pr}$ - indukcyjność rozproszenia pręta klatki wirnika

l - długość maszyny

[M] - macierz indukcyjności głównych pojedynczego uzwojenia maszyny

$[M_{rr}]$ - macierz indukcyjności głównych wirnika

$[M_{sr}]$ - macierz indukcyjności głównych stojan-wirnik

$[M_{ss}]$ - macierz indukcyjności głównych stojan-stojan

M_a - moment asynchroniczny maszyny w stanie ustalonym

M_e - moment elektromagnetyczny maszyny

M_O - moment obciążenia maszyny

M^r - moment elektromagnetyczny r-tego rzędu (r=I,II,III...)

M_s - pasożytniczy moment synchroniczny

M_{smx} - amplituda pasożytniczego momentu synchronicznego

$M_{s\Sigma}$ - przybliżona amplituda pasożytniczego momentu synchronicznego wyznaczona jako suma algebraiczna amplitud momentów składowych

M_{ϑ} - moment elektromagnetyczny ϑ-tej maszyny elementarnej

$M_{\vartheta(\varrho\ldots)(\varkappa\ldots)}$ - moment elektromagnetyczny ϑ-tej maszyny elementarnej związany z prądem reakcji wielokrotnej stojana $\underline{i}^{(k)}_{s\lambda(\varrho\ldots)}$ oraz prądem reakcji wielokrotnej wirnika $\underline{i}^{(k)}_{r\mu(\varkappa\ldots)}$

m - liczba faz pojedynczego uzwojenia maszyny, liczba faz uzwojenia stojana

m' - liczba faz uzwojenia elementarnego stojana (m' = 2 lub 1)

n - liczba faz uzwojenia wirnika

n' - liczba faz uzwojenia elementarnego wirnika (n' = 2 lub 1)

n_n - prędkość znamionowa silnika $\left[\frac{obr}{min}\right]$

p - prawdopodobieństwo utknięcia silnika indukcyjnego podczas rozruchu pod wpływem pasożytniczych momentów synchronicznych

P_n - moc znamionowa silnika

p - liczba par biegunów

q - liczba żłobków na biegun i fazę

R - rezystancja uzwojenia fazowego

R_p - rezystancja wycinka pierścienia klatki wirnika

R_{pr} - rezystancja pręta klatki wirnika

r - indeks górny określający rząd momentu elektromagnetycznego (r = I, II, III,...)

r - indeks dolny, wyróżniający wielkości elektromagnetyczne związane z wirnikiem

rz - rząd macierzy

s - indeks dolny, wyróżniający wielkości elektromagnetyczne związane ze stojanem

(s) - indeks górny, określający składowe symetryczne

t - podziałka żłobkowa

u_k - wartość chwilowa napięcia fazowego k-tej fazy

$u_l^{(k)}$ - l-ta współrzędna osiowa napięcia

$\underline{u}_l^{(k)}$ - l-ta zespolona współrzędna osiowa napięcia

w - wartość chwilowa dowolnej fazowej wielkości elektromagnetycznej

y - poskok uzwojenia

z - liczba zwojów uzwojenia fazowego

z_r - liczba zwojów uzwojenia stojana

z_s - liczba zwojów uzwojenia wirnika

Z_1 - liczba żłobków stojana

Z_2 - liczba żłobków wirnika

α - kąt pomiędzy osiami faz uzwojenia symetrycznego, współrzędna kątowa dla harmonicznych przestrzennych przepływu

α_k - kąt fazowy k-tej zespolonej współrzędnej osiowej prądu

α_r - kąt pomiędzy osiami faz wirnika

α_s - kąt pomiędzy osiami faz stojana

α_y - rozpiętość kątowa zezwoju

α_z - rozpiętość kątowa podziałki żłobkowej

α_ϑ - wartość chwilowa kąta położenia ϑ-tej harmonicznej przestrzennej przepływu

β_0, β_1 - kąty określający położenie krzywej separującej przy przybliżonej analizie procesu samosynchronizacji

γ - rozpiętość kątowa szczerbiny żłobka

δ - grubość szczeliny powietrznej pomiędzy stojanem i wirnikiem, kąt elektryczny pomiędzy przepływem stojana i wirnika w elementarnej maszynie synchronicznej

Θ_ϑ - przepływ magnetyczny ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

ξ_ϑ - współczynnik uzwojenia dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$\xi_{c\vartheta}$ - współczynnik skrótu (cięciwy) dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$\xi_{g\vartheta}$ - współczynnik grupy dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$\xi_{o\vartheta}$ - współczynnik szczerbinki dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

ξ_r - współczynnik uzwojenia wirnika dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$\xi_{s\vartheta}$ - współczynnik uzwojenia stojana dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

$\xi_\varkappa$ - współczynnik skosu dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej

Λ - permeancja (przewodność magnetyczna) dla strumienia głównego podstawowej harmonicznej przestrzennej

μ, μ_0 - względna przenikalność magnetyczna żelaza, przenikalność magnetyczna próżni

$\vartheta, \rho, \lambda, \mu, \varkappa$ - rzędy harmonicznych przestrzennych

ϑ' - względne rzędy harmonicznych, odniesione do p-tej harmonicznej (harmonicznej głównej)

ϑ'' - względne rzędy harmonicznych, odniesione do a-tej harmonicznej (harmonicznej o najniższym rzędzie)

σ - indeks dolny dla parametrów związanych ze strumieniami rozproszenia

τ - podziałka biegunowa dla harmonicznej podstawowej

$\tau_\varkappa$ - skos żłobków wirnika

φ - kąt pomiędzy osiami faz odniesienia stojana i wirnika

φ_0 - kąt początkowego położenia wirnika, kąt pomiędzy osiami faz odniesienia stojana i wirnika w chwili zaistnienia stanu ustalonego

ψ - wartość chwilowa strumienia magnetycznego skojarzonego

Ω - rząd najwyższej uwzględnionej harmonicznej przestrzennej przepływu uzwojenia

ω - prędkość kątowa wirnika

ω_0 - częstotliwość sieci

ω_s - prędkość synchroniczna dla pasożytniczego momentu synchronicznego

1. WSTĘP

1.1. Cel pracy

Własności eksploatacyjne maszyn asynchronicznych w istotny sposób zależą od harmonicznych przestrzennych (wyższych harmonicznych przestrzennych i podharmonicznych) pola magnetycznego w szczelinie maszyny. Są one przyczyną drgań, hałasów oraz strat dodatkowych. W wyniku elektrodynamicznego współdziałania harmonicznych przestrzennych powstają w maszynie pasożytnicze momenty elektromagnetyczne, zniekształcające charakterystykę mechaniczną, związaną z główną harmoniczną przestrzenną. Pasożytnicze momenty synchroniczne, pojawiające się w maszynie przy zatrzymanym wirniku, są jedną z zasadniczych przyczyn zależności momentu rozruchowego od kąta położenia wirnika, zaś momenty synchroniczne związane z pracą silnikową mogą utrudnić bądź nawet w skrajnym przypadku uniemożliwić przeprowadzenie rozruchu.

Głównymi przyczynami powstawania harmonicznych przestrzennych w polu magnetycznym szczeliny powietrznej maszyny są harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojeń stojana i wirnika, nierównomierność szczeliny powietrznej (wywołana użłobkowaniem żelaza i niecentrycznym ułożeniem osi wału) oraz nasycanie się obwodu magnetycznego. W przypadku poprawnie zaprojektowanej i wykonanej maszyny zasadniczą rolę odgrywa pierwsza z wymienionych przyczyn.

Harmoniczne przestrzenne przepływu mogą pogorszyć własności eksploatacyjne maszyn, a nawet uniemożliwić ich eksploatację poprzez np. niemożność przeprowadzenia rozruchu bądź też nadmierny hałas. Przypadki takie zdarzały się na wczesnym etapie rozwoju konstrukcji maszyn elektrycznych (przede wszystkim w wyniku nieprawidłowego doboru liczby żłobków) i spowodowały, że dość wcześnie zainteresowano się zjawiskami związanymi z harmonicznymi przestrzennymi.

Pierwsze prace dotyczyły powstawania i ograniczenia wartości pasożytniczych momentów asynchronicznych (Görges, Pung, Möller). Na pasożytnicze momenty synchroniczne zwrócono uwagę nieco później, w latach dwudziestych (Krondl, Dreese, Dreyfus). Do czasu pojawienia się maszyn matematycznych metody badania momentów pasożytniczych miały charakter przybliżony i były w znacznej mierze oparte na rozważaniach fizykalnych. Odnosiły się przede wszystkim do warunków powstawania momentów pasożytniczych, do przybliżonego wyznaczania ich wartości w stanie ustalonym oraz do badania ich związków z najważniejszymi parametrami konstrukcyjnymi (liczbą żłobków stojana i wirnika, skosem żłobków, grubością szczeliny, zamknięciem żłobków itp.).

trzeby jego rozwiązywania. Metoda ta w szczególności eksponuje związki pomiędzy parametrami konstrukcyjnymi i warunkami zasilania maszyn (składowymi symetrycznymi, harmonicznymi czasowymi prądów i napięć fazowych, układami połączeń faz itd.) a własnościami maszyn w zakresie generowanych momentów pasożytniczych. W ten sposób pozwala na wysnuwanie ogólnych wniosków dotyczących budowy obwodu elektromagnetycznego (np. doboru liczby żłobków) bez konieczności wielokrotnego powtarzania obliczeń na maszynie cyfrowej. Model matemetyczny maszyny asynchronicznej we współrzędnych osiowych, umożliwiający opracowanie takiej właśnie metody, został przez autora przedstawiony w pracach [21 ; 19 ; 23 ; 24 ;i 25]. Metoda oraz możliwości jej praktycznego wykorzystania zostaną rozwinięte w niniejszej pracy.

Wykorzystanie ETO umożliwiło znacznie dokładniejsze obliczanie wartości momentów pasożytniczych w stanach ustalonych, oparte na modelach uwzględniających wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu. Wpływ użłobkowania oraz nieliniowość obwodu magnetycznego uwzględnia się jednak nadal w sposób przybliżony [12 ; 62]. Maszyny matematyczne prócz dokładniejszego wyznaczania momentów pasożytniczych w stanach stacjonarnych umożliwiają również badanie wpływu harmonicznych przestrzennych na stany nieustalone maszyn asynchronicznych. Liczba prac poświęconych temu zagadnieniu jest wciąż nieznaczna. Wyniki tych publikacji potwierdzają potrzebę prowadzenia dalszych badań. Wśród nielicznych prac poświęconych symulacji rozruchu maszyny indukcyjnej z uwzględnieniem wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu zwracają uwagę dwie: [13 i 46]. Pierwsza z nich dotyczy symulacji rozruchu silnika klatkowego na maszynie cyfrowej, zaś druga - symulacji rozruchu silnika pierścieniowego na maszynie analogowej. Stwierdzono, że momenty pasożytnicze mogą w istotny sposób powiększać wartości szczytowe momentu elektromagnetycznego i prądu łączeniowego.

Z prac teoretycznych [12 ; 8 ; 9], bazujących na przybliżonych metodach analitycznych wynika, że zasadnicze znaczenie dla przebiegu rozruchu ma początkowy kąt położenia wirnika. Tego nie uwzględniono ani w publikacji [13], ani [46]. Dlatego też w niniejszej pracy zbadano wpływ warunku początkowego dla kąta wirnika. Wykazano, że może on decydować o pomyślnym (silnik osiąga prędkość znamionową) lub też niepomyślnym (silnik utyka w wyniku samosynchronizacji momentu pasożytniczego) przebiegu rozruchu.

Zainteresowanie wyższymi harmonicznymi przestrzennymi i momentami pasożytniczymi wzrosło w ostatnich latach głównie z dwóch przyczyn. Pierwsza z nich, to wciąż podnoszone wymagania co do jakości pracy maszyn, znajdujące odzwierciedlenie w normach wielu krajów (dotyczą one ograniczania hałasów, wibracji itp.). Druga - to szerokie zastosowanie energoelektronicznych układów zasilania i regulacji maszyn elektrycznych. W maszynach zasilanych odkształconymi przebiegami prądów bądź napięć, zjawiska związane z wyższymi harmonicznymi są wyraźniejsze i bardziej złożone niż przy symetrycznej sieci 3-fazowej. Tradycyjne metody i wysnuwane na ich podstawie wnioski odnośnie do konstrukcji maszyn (np. doboru liczby żłobków,

skosu żłobków klatki itp.), wiązały się z sinusoidalnym zasilaniem maszyn i nie brały pod uwagę odkształcenia przebiegów. Możliwość uwzględnienia wyższych harmonicznych czasowych w prądach lub napięciach zasilających stwarzają formalnie różne modele maszyn, jednakże przeprowadzenie takiej analizy wiąże się z nowymi trudnościami. W pracy [47] wyznaczono momenty pasożytnicze, powstające w 3-fazowej maszynie klatkowej, zasilanej z falownika prądu. Przy wykorzystaniu tej metody zbadanie wpływu dowolnego parametru konstrukcyjnego wymagałoby wielokrotnego przeprowadzania obliczeń na maszynie cyfrowej (a nawet różnych programów, np. przy zmianie liczby żłobków wirnika), albowiem model nie daje możliwości wyciągania wniosków bez uprzedniego rozwiązania.

Do istotnych walorów modeli matematycznych maszyn należy możliwość interpretacji fizycznej równań w różnych układach współrzędnych i na różnych etapach przekształceń w postaci tzw. modeli fizycznych oraz możliwość formułowania schematów zastępczych, pozwalających na uzyskiwanie przy odpowiednich założeniach upraszczających rozwiązań analitycznych. W przeszłości dużą uwagę przykładano do obrazowego i przejrzystego prezentowania wyników. Stąd m.in. wywodzi się koncepcja wektorów przestrzennych, umożliwiających graficzne unaocznienie procesów fizycznych zachodzących w maszynie. Często przy analizowaniu różnych zagadnień odwoływano się do intuicji inżyniera, do jego znajomości natury fizycznej procesów, zastępując ścisłe, ale żmudne i pracochłonne obliczenia uproszczonym rozumowaniem, prowadzącym do wyników poprawnych jakościowo, chociaż obarczonych pewnym błędem. Ponadto wiele interesujących wniosków wyprowadzano bezpośrednio z modeli fizycznych i ze schematów zastępczych maszyn.

Zasadniczy przełom w takim podejściu do maszyn elektrycznych dokonał się na skutek wprowadzenia maszyn matematycznych, przede wszystkim dlatego, że umożliwiły one szybkie rozwiązywanie układów równań różniczkowych nieliniowych oraz układów równań algebraicznych wysokiego stopnia. Na plan pierwszy wysunęły się zupełnie nowe i odmienne własności modeli matematycznych, związane przede wszystkim z ich uniwersalnością oraz z oszczędnością czasu potrzebnego do numerycznego całkowania równań. Istotnego znaczenia poczęła nabierać liczba równań, liczba współczynników, szybkość zmian współczynników w czasie itp. Punkt ciężkości, spoczywający pierwotnie na samym rozwiązywaniu równań oraz badaniu modeli fizycznych i schematów zastępczych, przesunął się w kierunku zagadnień związanych z formułowaniem optymalnych z punktu widzenia ETO modeli matematycznych. Formułowanie modeli matematycznych przeznaczonych do rozwiązywania na maszynach cyfrowych stwarza wiele nowych jakościowo trudności. Wstępnie przyjmowany model matematyczny (najczęściej układ równań różniczkowych bądź układ równań algebraicznych) bywa z reguły zbyt ogólny. Założenia upraszczające sprowadzają się do pomijania określonych współczynników bądź współrzędnych i mają na celu doprowadzenie do maksymalnego uproszczenia struktury modelu z punktu widzenia ETO. Tymczasem zawarta we współrzędnych i współczynnikach

informacja dotycząca ich oddziaływania na przebieg zjawiska jest trudna do odczytania bez uprzedniego wielokrotnego powtarzania obliczeń. Ujawnianie mechanizmów wpływu poszczególnych współrzędnych i współczynników na rozważane zjawisko jest zagadnieniem złożonym i może w ogóle nie przynieść zadowalających wyników. Konsekwencją niewłaściwego zaś wyboru współrzędnych i współczynników w układzie równań różniczkowych może być utratą adekwatności modelu. Stąd też jakościowe metody badania własności maszyn wprost na podstawie modeli matematycznych (układów równań różniczkowych) bez ich rozwiązywania zasługują na szczególną uwagę. Metody te powinny być nadal rozwijane i doskonalone w kierunku:

- badania zjawisk fizycznych, zachodzących w maszynie, bez korzystania z maszyny cyfrowej (poprzez bezpośrednie wiązanie parametrów konstrukcyjnych i warunków zasilania z działaniem maszyny),
- optymalizacji struktury modeli matematycznych maszyn z punktu widzenia ETO,
- zapewnienia możliwości weryfikacji modeli matematycznych, rozwiązanych numerycznie, poprzez m.in. orientacyjną ocenę wyników obliczeń.

1.2. Teza i zakres pracy

Celem pracy jest sformułowanie modelu matematycznego wielofazowej maszyny asynchronicznej o omówionych powyżej własnościach (łączącego w sobie cechy klasycznych modeli maszyn elektrycznych z cechami pożądanymi z punktu widzenia elektronicznej techniki obliczeniowej) w odniesieniu do klasy zjawisk związanych z wyższymi harmonicznymi przestrzennymi, a zwłaszcza - z momentami pasożytniczymi. W centrum uwagi znalazły się metody jakościowego badania momentów pasożytniczych. Przyjęto, że metody te powinny tłumaczyć znane zjawiska związane z momentami pasożytniczymi, a w szczególności uzasadniać warunki doboru liczby żłobków stojana i wirnika. Model powinien umożliwiać posługiwanie się uproszczonymi metodami analitycznymi, stosowanymi w analizie zjawisk pasożytniczych w maszynach 3-fazowych (np. metodą kolejnych odbić) i pozwalać na ich rozszerzanie i uogólnianie. Przede wszystkim jednak model powinien być przydatny w badaniach symulacyjnych na maszynach matematycznych. Sprawdzenie przydatności modelu w badaniach symulacyjnych należy połączyć z analizą oddziaływania wyższych harmonicznych przestrzennych na rozruch silnika indukcyjnego oraz z badaniem zjawiska samosynchronizacji pod wpływem momentów pasożytniczych.

2. MODEL MATEMATYCZNY m-FAZOWEGO UZWOJENIA MASZYNY ASYNCHRONICZNEJ WE WSPÓŁRZĘDNYCH OSIOWYCH

2.1. Rozkład prądów m-fazowego uzwojenia na składowe aktywne i zerowe w stanie nieustalonym we współrzędnych fazowych i osiowych

Rozważmy uzwojenie (stojana bądź wirnika) maszyny asynchronicznej, składające się z m jednakowych fragmentów o takiej samej liczbie zwojów z, takich samych współczynnikach uzwojenia dla poszczególnych harmonicznych przestrzennych ξ_ϑ oraz o osiach przesuniętych wzajemnie na obwodzie maszyny o kąt $\frac{2\pi}{m}$. Tak wyodrębnione fragmenty będziemy nazywać umownie uzwojeniami fazowymi, zaś uzwojenie spełniające wymienione warunki - symetrycznym m-fazowym. Uzwojenia fazowe mogą w szczególnym przypadku odpowiadać grupom zezwojów, pojedynczym zezwojom lub oczkom uzwojenia klatkowego. Przyjmijmy, że obwód magnetyczny jest liniowy i symetryczny. Drugie z założeń oznacza między innymi równomierną i gładką (nieużłobkowaną) szczelinę powietrzną. Każde z uzwojeń fazowych, pod wpływem płynącego przezeń prądu, wytwarza przepływ (pole magnetyczne). Przepływ wypadkowy, czyli przepływ uzwojenia (wypadkowe pole magnetyczne w szczelinie), jest sumą przepływów uzwojeń wszystkich m faz. W dowolnej chwili czasowej t krzywe: przepływów uzwojeń fazowych oraz przepływu uzwojenia (przepływu wypadkowego) można rozwinąć w szereg harmonicznych przestrzennych Fouriera, przyjmując obwód szczeliny maszyny za okres funkcji. Ze względu na symetrię uzwojenia widma wszystkich krzywych przestrzennych przepływów uzwojeń fazowych zawierają takie same rzędy harmonicznych (niezależnie od wartości prądów fazowych), podczas gdy widmo krzywej przepływu wypadkowego - tylko niektóre z nich. Jest to wynikiem wzajemnego równoważenia się harmonicznych przestrzennych przepływu uzwojeń fazowych. To, które z nich wygaszą się, zależy od wartości prądów fazowych i w szczególnym tylko przypadku przepływ wypadkowy uzwojenia m-fazowego zawiera tyle samo harmonicznych, co i przepływ uzwojeń fazowych.

Zagadnienie to szczegółowo rozważono w literaturze dla uzwojeń 3-fazowych oraz klatkowych. 3-fazowe uzwojenie 2p-biegunowe 6-strefowe, złożone z 2 pm jednakowych grup, z których każda wytwarza ciąg wszystkich kolejnych harmonicznych przestrzennych ($\vartheta = 1,2,3,4,5,\ldots$), po zasileniu symetrycznym 3-fazowym układem napięć generuje w szczelinie przepływ wypadkowy, zawierający wyłącznie harmoniczne przestrzenne o rzędach: p, 5p, 7p, 11p,... (ogólnie o rzędach $p(6c\pm1)$, gdzie: $c = 0,1,2,3,4,\ldots$). Podobnie n-żłobkowe uzwojenie klatkowe, pobudzane p-tą harmoniczną przestrzenną pola magne-

tycznego generuje przepływ wypadkowy, zawierający harmoniczne o rzędach: n-p, n+p, 2n-p, 2n+p,... (ogólnie - o rzędach $cn\pm p$, gdzie $c = 0,1,2,3,\ldots$) pomimo tego, że każde oczko klatki wytwarza ciąg wszystkich kolejnych harmonicznych przestrzennych ($\vartheta = 1,2,3,4,\ldots$).

W niniejszym rozdziale związki pomiędzy rzędami harmonicznych przestrzennych przepływu fazowego i przepływu wypadkowego zostaną rozważone dla stanów nieustalonych na przykładzie uzwojenia o dowolnej liczbie faz m. Uogólnienie to zostanie dokonane na gruncie teorii przekształceń liniowych.

W ogólnym przypadku przepływy uzwojeń fazowych mogą zawierać wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne i taki też przypadek przyjęto za podstawę dalszych rozważań.

Nieustalony stan elektromagnetyczny pojedynczego uzwojenia opisuje układ równań różniczkowych:

$$[u] = [R]\,[i] + [L_\sigma]\frac{d}{dt}[i] + \frac{d}{dt}[M]\,[i] \tag{2.1}$$

gdzie:

$[u]$, $[i]$ - wektor napięć i prądów fazowych,
$[R]$, $[L_\sigma]$ - macierze rezystancji i indukcyjności rozproszeń faz,
$[M]$ - macierz indukcyjności głównych uzwojenia.

Przedstawiając współczynniki indukcyjności własnych i wzajemnych jako sumę współczynników odpowiadających poszczególnym harmonicznym przestrzennym rozkładu przepływu uzwojeń fazowych w szereg Fouriera, możemy macierzom indukcyjności głównych nadać postać następujących szeregów:

$$[M] = \sum_{\vartheta=1}^{\infty}[M_\vartheta] = z^2\Lambda\sum_{\vartheta=1}^{\infty}\xi_\vartheta^2\frac{1}{\vartheta^2}\begin{bmatrix} \cos 0 & \cos\vartheta\alpha & \cos 2\vartheta\alpha \ldots \cos(m-1)\vartheta\alpha \\ \cos(m-1)\vartheta\alpha & \cos 0 & \cos\vartheta\alpha \ldots \cos(m-2)\vartheta\alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\vartheta\alpha & \cos 2\vartheta\alpha & \cos 3\vartheta\alpha \ldots \cos 0 \end{bmatrix} =$$

$$= z^2\Lambda\sum_{\vartheta=1}^{\infty}\xi_\vartheta^2\frac{1}{\vartheta^2}\,[C_\vartheta] \tag{2.2}$$

gdzie:

Λ - permeancja dla strumienia głównego pierwszej harmonicznej przestrzennej (harmonicznej podstawowej)

$$\Lambda = \frac{4\mu_0 \tau l}{\pi^2 \delta},$$

$$\tau = \frac{\pi D}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{m},$$

l - długość maszyny,

δ - grubość szczeliny,

D - średnica wewnętrzna stojana (zewnętrzna wirnika).

Spośród macierzy indukcyjności głównych szeregu (2.2) można wyodrębnić ciągi macierzy, których elementy są wzajemnie proporcjonalne. Na każdy taki ciąg $\{[M_\vartheta]\}$ składają się macierze indukcyjności o jednakowych macierzach $[C_\vartheta]$. Ciągów tych jest więc tyle, ile jest różnych macierzy $[C_\vartheta]$: $\frac{m}{2} + 1$, gdy m = l.p lub $\frac{m+1}{2}$, gdy m = l.n. (gdzie: l.p. - liczba parzysta, l.n. - liczba nieparzysta). Pomiędzy macierzami $[M_\vartheta]$ i $[M_\varrho]$, należącymi do tego samego ciągu, zachodzi relacja:

$$[M_\varrho] = \left(\frac{\varrho}{\vartheta}\cdot\frac{\xi_\varrho}{\xi_\vartheta}\right)^2 [M_\vartheta] \qquad (2.3)$$

Każdemu z tych ciągów macierzy $\{[M_\vartheta]\}$ o jednakowej macierzy $[C_\vartheta]$ odpowiada ciąg indeksów $\{\vartheta\}$, a więc ciąg rzędów harmonicznych przestrzennych (ciąg harmonicznych o rzędach $\{\vartheta\}$). Pierwszy ciąg tworzą macierze $[M_\vartheta]$, związane z ciągiem harmonicznych przestrzennych: $\{\vartheta\}$ = 1, m-1, 2m-1,... . Rzędy harmonicznych przynależnych do tego ciągu spełniają relację

$$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = 1 \quad \text{lub} \quad \vartheta(\mathrm{mod}\ m) = m-1.$$

Na drugi z ciągów składają się macierze $[M_\vartheta]$, odpowiadające harmonicznym przestrzennym: $\{\vartheta\}$ = 2, m-2, m+2, 2m - 2, 2m + 2... Ich rzędy określa relacja

$$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = 2 \quad \text{lub} \quad \vartheta(\mathrm{mod}\ m) = m-2.$$

Relacje wyznaczające rzędy harmonicznych przestrzennych pozostałych ciągów dla m-fazowego uzwojenia o parzystej i nieparzystej liczbie faz podano w tab. 1.

W pracach [18]; [16] wykazano, że liniowe obwody elektromagnetyczne można podzielić na dwie rozłączne klasy o odmiennych własnościach elektromagnetycznych. Do pierwszej klasy zaliczamy obwody elektromagnetyczne o rzędzie macierzy indukcyjności głównych, równym liczbie uzwojeń rz[M] = m, do drugiej zaś te, w których rz[M] = k, k < m. W obwodach drugiej klasy

Tablica 1

Ciągi harmonicznych przestrzennych generowanych przez składowe rozkładu ortogonalnego

nr ciągu	relacje, określające ciągi	pierwsze wyrazy ciągów
1	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = 1$ $\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = m-1$	$1,\ m-1,\ m+1,\ 2m-1,\ 2m+1,\ 3m-1,\ 3m+1\ldots$
2	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = 2$ $\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = m-2$	$2,\ m-2,\ m+2,\ 2m-2,\ 2m+2,\ 3m-2,\ 3m+2\ldots$
⋮	⋮	⋮
$\frac{m-1}{2}$	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = \frac{m-1}{2}$ $\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = \frac{m+1}{2}$	$\frac{m-1}{2},\ \frac{m+1}{2},\ m+\frac{m-1}{2},\ 2m-\frac{m-1}{2},\ 2m+\frac{m-1}{2},\ 3m-\frac{m-1}{2}\ldots$
$\frac{m+1}{2}$	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = 0$	$m,\ 2m,\ 3m,\ 4m,\ 5m\ldots$

gdy m = l.n

1	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = 1$ $\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = m-1$	$1,\ m-1,\ m+1,\ 2m-1,\ 2m+1,\ 3m-1,\ 3m+1\ldots$
⋮	⋮	⋮
$\frac{m}{2}-1$	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = \frac{m-1}{2}$ $\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = \frac{m+1}{2}$	$\frac{m-1}{2},\ \frac{m+1}{2},\ m+\frac{m-1}{2},\ 2m-\frac{m-1}{2},\ 2m+\frac{3m-1}{2},\ 3m-\frac{m-1}{2}\ldots$
$\frac{m}{2}$	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = \frac{m}{2}$	$\frac{m}{2},\ \frac{3}{2}m,\ \frac{5}{2}m,\ \frac{7}{2}m\ldots$
$\frac{m}{2}+1$	$\vartheta(\mathrm{mod}\ m) = 0$	$m,\ 2m,\ 3m,\ 4m,\ 5m\ldots$

gdy m = l.p

przestrzeń prądów I^m można przedstawić w postaci sumy prostej dwóch ortogonalnych podprzestrzeni: k-wymiarowej przestrzeni aktywnej (przestrzeni prądów elektromagnetycznie aktywnych) $I_\perp^k$ oraz (m-k) - wymiarowej przestrzeni zerowej (przestrzeni prądów elektromagnetycznie pasywnych) I_o^{m-k}:

$$I^m = I_\perp^k \oplus I_o^{m-k}, \qquad I_\perp^k \perp I_o^{m-k}. \qquad (2.4)$$

Powyższa relacja oznacza, że każdy wektor $\underline{i} \in I^m$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy dwóch wzajemnie ortogonalnych składowych - aktywnej $i_\perp$ oraz zerowej i_o:

$$i = i_{\perp} + i_o, \quad i_{\perp} \in I_{\perp}^{k}, \quad i_o \in I_o^{m-k} \tag{2.5}$$

Składowa aktywna $i_{\perp}$ wektora i jest to wektor prądu o najmniejszej normie, wywołujący w obwodzie elektromagnetycznym identyczny rozkład strumieni skojarzonych, jak rzeczywisty wektor prądu i.

$$\varphi = M(i) = M(i_{\perp} + i_o) = M(i_{\perp})$$
$$\|i_{\perp}(t)\| < \|i(t)\| \tag{2.6}$$

gdzie:

M - przekształcenie liniowe, odpowiadające macierzy $[M]$

$\|i(t)\| = \sqrt{[i]^T [i]}$ - norma euklidesowa wektora prądu i w chwili t.

Składowa zerowa i_o wektora prądu i jest to wektor prądu, którego przepływ w m uzwojeniach obwodu elektromagnetycznego nie wytwarza strumienia skojarzonego.

$$M(i_o) = 0 \tag{2.7}$$

W pracy [17] przedstawiono metodę wyznaczania rzędów macierzy indukcyjności głównych w maszynach elektrycznych o równomiernej i gładkiej szczelinie powietrznej. Wynika z niej, że rzędy wszystkich macierzy $[M_\nu]$, należących zgodnie z tab. 1 do $1,2,\ldots(\frac{m}{2}-1)$ - ciągu, gdy m = l.p. oraz do $1,2,\ldots \frac{m-1}{2}$ ciągu, gdy n = l.n. wynoszą 2, zaś rzędy macierzy $[M_\nu]$, należących do $\frac{m}{2}$ i $(\frac{m}{2}+1)$ - ciągu, gdy m = l.p. i $\frac{m+1}{2}$ - ciągu, gdy m = l.n. wynoszą 1. Dla każdej macierzy $[M_\nu]$ można wyznaczyć przestrzeń aktywną oraz zerową, a więc przestrzeń prądów wytwarzających ν-tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego w szczelinie powietrznej pomiędzy stojanem a wirnikiem i przestrzeń prądów, które jej nie wytwarzają. Macierze indukcyjności głównych $[M_\nu]$, należące do tego samego ciągu, mają równe rzędy oraz wspólną przestrzeń aktywną i zerową prądów. Jest to przestrzeń aktywna i zerowa macierzy $[C_\nu]$. Przestrzenie aktywne poszczególnych ciągów macierzy indukcyjności są 2-wymiarowe lub 1-wymiarowe i odpowiednio przestrzenie zerowe (m-2) - wymiarowe lub (m-1) -wymiarowe. W pracach [16]; [18]; [22] omówiono różne metody wyznaczania baz przestrzeni aktywnych i zerowych. Wykazano, że bazę przestrzeni aktywnej stanowi układ k niezależnych liniowo wierszy macierzy indukcyjności głównych. Za bazy przestrzeni aktywnych w zależności od ich wymiaru będziemy przyjmować dwa pierwsze wiersze lub pierwszy wiersz macierzy $[C_\nu]$. Bazy te dla poszczególnych ciągów macierzy $\{[M_\nu]\}$ zestawiono w tab. 2. Wszystkie wektora bazowe są wzajemnie ortogonalne i dlatego suma prosta przestrzeni aktywnych poszczególnych ciągów $\{[M_\nu]\}$ jest równa przestrzeni prądów fazowych I^m:

Tablica 2

Bazy przestrzeni aktywnych macierzy indukcyjności należących do różnych ciągów

ν ciągu	bazy przestrzeni aktywnych				ortogonalne bazy przestrzeni aktywnych			
1	$[\cos 0 \quad \cos\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$[\cos(m-1)\alpha \quad \cos(m-2)\alpha \quad \ldots \quad \cos\alpha \quad \cos 0]$	$[\cos 0 \quad \cos 2\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$[\cos(m-1)\alpha \quad \cos(m-2)\alpha \quad \ldots \quad \cos 2\alpha \quad \cos\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\alpha \quad \cos(m-2)\alpha \quad \ldots \quad \cos\alpha \quad \cos 0]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos 2\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\alpha \quad \cos(m-2)\alpha \quad \ldots \quad \cos 2\alpha \quad \cos\alpha]$
2	$[\cos 0 \quad \cos 2\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)2\alpha]$	$[\cos(m-1)2\alpha \quad \cos 0 \quad \ldots \quad \cos 2\alpha]$	$[\cos 0 \quad \cos 4\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)2\alpha]$	$[\cos(m-1)2\alpha \quad \ldots \quad \cos 4\alpha \quad \cos 2\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos 2\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)2\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)2\alpha \quad \ldots \quad \cos 4\alpha \quad \cos 2\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos 4\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)2\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)2\alpha \quad \ldots \quad \cos 4\alpha \quad \cos 2\alpha]$
...			...					
$\frac{m-1}{2}$	$[\cos 0 \quad \cos\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha]$	$[\cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos\frac{m-1}{2}\alpha \quad \cos 0]$	$[\cos 0 \quad \cos 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha]$	$[\cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad \cos 0]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad -\sin\frac{m-1}{2}\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad -\sin\frac{m-1}{2}\alpha]$
$\frac{m+1}{2}$	$[1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1]$		$[\cos 0 \quad \cos 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha]$	$[\cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad \cos 0]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad -\sin\frac{m-1}{2}\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2\frac{m-1}{2}\alpha \quad -\sin\frac{m-1}{2}\alpha]$
					$\sqrt{\frac{2}{m}}[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]$		$\sqrt{\frac{2}{m}}[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]$	
					gdy m = l. n.			gdy m = l. p.
1	$[\cos 0 \quad \cos\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$[\cos(m-1)\alpha \quad \cos(m-2)\alpha \quad \ldots \quad \cos\alpha \quad \cos 0]$	$[\cos 0 \quad \cos 2\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$[\cos(m-1)\alpha \quad \ldots \quad \cos 2\alpha \quad \cos 0]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2\alpha \quad -\sin\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2\alpha \quad -\sin\alpha]$
...			...					
$\frac{m}{2}-1$	$[\cos 0 \quad \cos(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha]$	$[\cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad \cos(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \cos 0]$	$[\cos 0 \quad \cos 2(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha]$	$[\cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad \cos 2(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \cos 0]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad -\sin(\frac{m}{2}-1)\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos 0 \quad \cos(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad \cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad \ldots \quad -\sin 2(\frac{m}{2}-1)\alpha \quad -\sin(\frac{m}{2}-1)\alpha]$
$\frac{m}{2}$	$[1 \quad -1 \quad \ldots \quad -1]$	$[1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1]$			$\sqrt{\frac{2}{m}}[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]$		
$\frac{m}{2}+1$	$[1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1]$	$[1 \quad -1 \quad \ldots \quad -1]$			$\sqrt{\frac{2}{m}}[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]$	$\sqrt{\frac{2}{m}}[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]$		

$$I^m = I_1^2 \oplus I_2^2 \oplus I_3^2 \oplus \ldots \oplus I^2_{\frac{m-1}{2}} \oplus I^1_{\frac{m+1}{2}} \tag{2.8}$$

gdy m = l.n.

lub

$$I^m = I_1^2 \oplus I_2^2 \oplus I_3^2 \oplus \ldots \oplus I^2_{\frac{m}{2}-1} \oplus I^1_{\frac{m}{2}} \oplus I^1_{\frac{m}{2}+1} \tag{2.9}$$

gdy m = l.p.

Przestrzenie zerowe poszczególnych ciągów macierzy indukcyjności można wyznaczyć na podstawie relacji (2.4), (2.8) i (2.9). Jeśli I_1^2 jest przestrzenią aktywną macierzy $[M_\nu]$ należących do pierwszego ciągu, to dopełnienie ortogonalne do I^m: $I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 \ldots$ jest przestrzenią zerową tych macierzy. Jeżeli I_2^2 jest przestrzenią aktywną macierzy $[M_\nu]$ należących do drugiego ciągu, to przestrzeń zerową tych macierzy określa suma: $I_1^2 + I_3^2 + I_4^2 \ldots$ Ogólnie - przestrzeń zerową dowolnego ciągu macierzy stanowi suma prosta przestrzeni aktywnych wszystkich pozostałych ciągów. Relacje (2.8) i (2.9) oznaczają, że każdy wektor prądu $i \in I^m$ można jednoznacznie rozłożyć na sumę wzajemnie ortogonalnych składowych:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_{\frac{m-1}{2}} + i_{\frac{m+1}{2}} \tag{2.10}$$

gdy m = l.n.

lub

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_{\frac{m}{2}-1} + i_{\frac{m}{2}+1} \tag{2.11}$$

gdy m = l.p.

gdzie:

$$i_1 \in I_1^2,\quad i_2 \in I_2^2,\quad i_3 \in I_3^2 \ldots i_{\frac{m+1}{2}} \in I^1_{\frac{m+1}{2}},\quad i_{\frac{m}{2}+1} \in I^1_{\frac{m}{2}+1}$$

Wyznaczmy strumień magnetyczny w szczelinie skojarzony z uzwojeniem maszyny (w naturalnym układzie współrzędnych):

$$[\Psi] = [M][i] = \left(\sum_{\nu=}^{\infty} [M_\nu]\right)([i_1] + [i_2] + [i_3] \ldots) =$$

$$= ([M_1] + [M_{m-1}] + [M_{m+1}] + [M_{2m-1}] + [M_{2m+1}] + \ldots)\,[i_1] +$$

$$+ ([M_2] + [M_{m-2}] + [M_{m+2}] + [M_{2m-2}] + [M_{2m+2}] + \ldots)\,[i_2] +$$

$$+ ([M_3] + [M_{m-3}] + [M_{m+3}] + [M_{2m-3}] + [M_{2m+3}] + \ldots)\,[i_3] +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.12}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ ([M_m] + [M_{2m}] + [M_{3m}] + \ldots)\,[i_{\frac{m+1}{2}}]$$

gdy m = l.n.

lub:

$$[\Psi] = ([M_1] + [M_{m-1}] + [M_{m+1}] + [M_{2m-1}] + [M_{2m+1}] + \ldots)\,[i_1] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left([M_{\frac{m}{2}}] + [M_m] + [M_{\frac{3m}{2}}] + [M_{2m}] + [M_{\frac{5m}{2}}] + \ldots\right)[i_{m-1}] +$$

$$+ ([M_m] + [M_{2m}] + [M_{3m}] + [M_{4m}] + [M_{5m}] + \ldots)\,[i_m] \tag{2.13}$$

gdy m = l.p.

Z wzorów (2.12) i (2.13) wynika, że <u>poszczególne składowe prądu w rozkładzie ortogonalnym (2.10) lub (2.11) generują tylko określone ciągi harmonicznych przestrzennych przepływu uzwojenia (wypadkowego pola magnetycznego w szczelinie)</u>. Ciągi te są uwidocznione w tab. 1. Składowa prądu i_1 wytwarza wyłącznie pierwszy ciąg harmonicznych przestrzennych przepływu, a więc harmoniczne o rzędach: 1, m-1, m+1, 2m-1, 2m+1 ..., składowa prądu i_2 - drugi ciąg harmonicznych przepływu, a więc harmoniczne o rzędach: 2, m-2, m+2, 2m-2, 2m+2...itd. Brak którejkolwiek składowej wektora prądu powoduje, że odpowiadający jej ciąg harmonicznych przestrzennych nie jest generowany.

Poprzez formowanie przebiegów czasowych prądów fazowych można więc eliminować wybrane ciągi harmonicznych przestrzennych z przepływu uzwojenia wielofazowego maszyny (z wypadkowego pola magnetycznego w szczelinie) i to zarówno w stanie ustalonym, jak i nieustalonym.

Układem współrzędnych, w którym poszczególne składowe prądu w rozkładzie ortogonalnym (2.10) lub (2.11) ulegają wyodrębnieniu jako pary lub pojedyncze współrzędne, jest osiowy układ współrzędnych, do którego prowadzi ortogonalna macierz transformacji ($\alpha = \frac{2\pi}{m}$):

$$[K] = \sqrt{\frac{2}{m}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos\alpha & \cos 2\alpha & \dots & \cos(m-1)\alpha \\ -\cos 0 & -\sin\alpha & -\sin 2\alpha & \dots & -\sin(m-1)\alpha \\ \vdots & \vdots & & \dots & \vdots \\ \cos 0 & \cos\frac{m-1}{2}\alpha & \cos 2\frac{m-1}{2}\alpha & \dots & \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \\ -\sin 0 & -\sin\frac{m-1}{2}\alpha & -\sin 2\frac{m-1}{2}\alpha & \dots & -\sin(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

gdy $m = 1.n.$

lub

$$[K] = \sqrt{\frac{2}{m}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos\alpha & \cos 2\alpha & \dots & \cos(m-1)\alpha \\ -\sin 0 & -\sin\alpha & -\sin 2\alpha & \dots & -\sin(m-1)\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos 0 & \cos(\frac{m}{2}-1)\alpha & \cos 2(\frac{m}{2}-1)\alpha & \dots & \cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \\ -\sin 0 & -\sin(\frac{m}{2}-1)\alpha & -\sin 2(\frac{m}{2}-1)\alpha & \dots & -\sin(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

gdy $m = 1.p.$

Dzieje się tak dlatego, ponieważ kolejne wiersze macierzy transformacji $[K]$ są zortogonalizowanymi bazami przestrzeni aktywnych poszczególnych ciągów macierzy z tab. 1 (tab. 2). Współrzędne wektorów w nowym układzie współrzędnych wyróżniamy górnym symbolem (k). Podstawy teoretyczne transformacji i jej zastosowania w teorii obwodów elektromagnetycznych autor omówił w pracach [15; 16 ; 17 i 18]. Ze względu na to, że w wirujących maszynach elektrycznych k może wynosić tylko 2 lub 1, terminologię uprościmy, określając dalej k-osiowy układ współrzędnych jako osiowy układ współrzędnych i analogicznie - k-osiowe współrzędne jako współrzędne osiowe. Rozkład ortogonalny wektora prądu (2.10) lub (2.11) przyjmuje w osiowym układzie współrzędnych postać:

$$[i^{(k)}] = [i_1^{(k)}] + [i_2^{(k)}] + \dots + [i_{\frac{m-1}{2}}^{(k)}] + [i_{\frac{m+1}{2}}^{(k)}] = \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_3^{(k)} \\ i_4^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ i_{m-2}^{(k)} \\ i_{m-1}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ i_m^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \\ i_3^{(k)} \\ i_4^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{m-2}^{(k)} \\ i_{m-1}^{(k)} \\ i_m^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{składowa } i_1 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{składowa } i_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{składowa } i_{\frac{m-1}{2}} \\ \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{składowa } i_{\frac{m+1}{2}} \end{matrix} \qquad (2.16)$$

gdy $m = 1.n.$

$$\left[i^{(k)}\right] = \left[i_1^{(k)}\right] + \left[i_2^{(k)}\right] + \dots + \left[i_{\frac{m}{2}-1}^{(k)}\right] + \left[i_{\frac{m}{2}}^{(k)}\right] + \left[i_{\frac{m}{2}+1}^{(k)}\right] = \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_3^{(k)} \\ i_4^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \\ i_{m-3}^{(k)} \\ i_{m-2}^{(k)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ 0 \\ 0 \\ i_{m-1}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ i_m^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \\ i_3^{(k)} \\ i_4^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{m-3}^{(k)} \\ i_{m-2}^{(k)} \\ i_{m-1}^{(k)} \\ i_m^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} \text{składowa } i_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{składowa } i_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} \text{składowa } i_{\frac{m}{2}-1} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} \text{składowa } i_{\frac{m}{2}} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} \text{składowa } i_{\frac{m}{2}+1} \end{matrix} \tag{2.17}$$

Poszczególne składowe rozkładu ortogonalnego w naturalnym (fazowym) układzie współrzędnych wyznacza się na drodze transformacji odwrotnej:

$$\left[i_1\right] = \left[K\right]^T \left[i_1^{(k)}\right] = \left[K\right]^T \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\left[i_2\right] = \left[K\right]^T \left[i_2^{(k)}\right] = \left[K\right]^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_3^{(k)} \\ i_4^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{itd.} \tag{2.19}$$

2.2. Równania różniczkowe stanu elektromagnetycznego uzwojenia w rzeczywistych i zespolonych współrzędnych osiowych

Poddajmy transformacji osiowej układ równań różniczkowych (2.1), opisujący symetryczne uzwojenie m-fazowe. Otrzymamy:

$$\left[u^{(k)}\right] = \left[R^{(k)}\right] \left[i^{(k)}\right] + \left[L_\sigma^{(k)}\right] \frac{d}{dt} \left[i^{(k)}\right] + \frac{d}{dt} \left[M^{(k)}\right] \left[i^{(k)}\right] \tag{2.20}$$

gdzie:

$$\left[u^{(k)}\right] = \left[K\right]\left[u\right]$$

$$\left[i^{(k)}\right] = \left[K\right]\left[i\right]$$

$$\left[R^{(k)}\right] = \left[K\right]\left[R\right]\left[K\right]^T$$

$$\left[L_\sigma^{(k)}\right] = \left[K\right]\left[L_\sigma\right]\left[K\right]^T$$

$$[M^{(k)}]=[K][M][K]^T=\begin{bmatrix} \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=1,m-1,m+1\ldots} & & & & & \\ & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=1,m-1,m+1\ldots} & & & & \\ & & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=2,m-2,m+2\ldots} & & & \\ & & & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=2,m-2,m+2\ldots} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=\frac{m-1}{2},\frac{m+1}{2},2\frac{m-1}{2}\ldots} \\ & & & & & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=\frac{m-1}{2},\frac{m+1}{2},2\frac{m-1}{2}\ldots} \\ & & & & & & 2\sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=m,2m\ldots} \end{bmatrix}$$

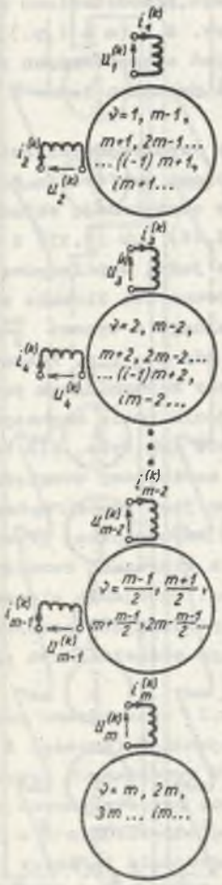
gdy m = l.n.

$$[M^{(k)}]=\begin{bmatrix} \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=1,m-1,m+1\ldots} & & & & & \\ & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=1,m-1,m+1\ldots} & & & & \\ & & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=2,m-2,m+2\ldots} & & & \\ & & & \sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=2,m-2,m+2\ldots} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2\sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=\frac{m}{2},\frac{3}{2}m\ldots} \\ & & & & & 2\sum L_{\mu\nu}\ {\scriptstyle \nu=m,2m\ldots} \end{bmatrix}$$

gdy m = l.p.

Przez $L_{\mu\vartheta}$ oznaczono indukcyjność główną (szczelinową) uzwojenia dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego

$$L_{\mu\vartheta} = \frac{m}{2} z^2 \Lambda \xi_{\vartheta}^2 \frac{1}{\vartheta^2} = \left(\frac{\xi_{\vartheta}}{\xi_1}\right)^2 \frac{1}{\vartheta^2} L_{\mu 1} \tag{2.21}$$



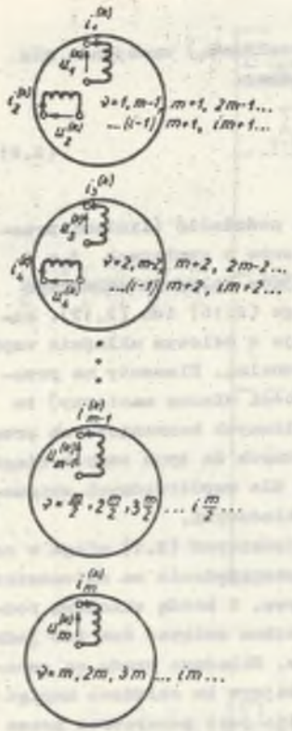
Rys. 2.1. Ciąg 2- i 1-fazowych uzwojeń zastępczych dla m-fazowego uzwojenia, gdy m = l.n.

Fig. 2.1. 2-and 1-phase equivalent windings for m-phase symmetrical winding (m - odd number)

Macierz $[M^{(k)}]$ można podzielić (liniami przerywanymi) na podmacierze o wymiarach 2 x 2 lub 1 x 1, odpowiadające kolejnym składowym rozkładu ortogonalnego (2.16) lub (2.17). Macierz $[M^{(k)}]$ przyjmuje w osiowym układzie współrzędnych postać diagonalną. Elementy na przekątnej głównej (wartości własne macierzy) to sumy indukcyjności głównych harmonicznych przestrzennych, przynależnych do tych samych ciągów. Sumy te są jednakowe dla współrzędnych związanych z tymi samymi składowymi.

Układ równań różniczkowych (2.1) ulega w nowych współrzędnych rozsprzężeniu na autonomiczne równanie różniczkowe. Z każdą składową rozkładu ortogonalnego można związać dwa lub jedno równanie autonomiczne. Składowe prądu są generowane przez odpowiadające im składowe napięcia. Składowa prądu i_1 jest generowana przez składową napięcia u_1, i_2 - przez u_2 itd. Rozkład ortogonalny (2.10) i (2.11) zachowuje więc sens fizyczny nie tylko w odniesieniu do wektorów prądu, ale również i wektorów napięć.

Równaniom (2.20) odpowiada model przedstawiony na rys. 2.1 i 2.2. Rys. 2.1 sporządzono przy założeniu, że uzwojenie m-fazowe znajduje się w stojanie, zaś rys. 2.2 - przy założeniu, że uzwojenie m-fazowe znajduje się w wirniku. W miejsce m-fazowego uzwojenia otrzymujemy ciąg złożony z $\frac{m-1}{2}$ uzwojeń 2-fazowych i jednego 1-fazowego, gdy m = l.n. (rys. 2.1), lub ciąg złożony z $(\frac{m}{2} - 1)$ uzwojeń 2-fazowych i dwóch 1-fazowych, gdy m = l.p. (rys. 2.2). Zastępcze uzwojenia 2-fazowe są symetryczne, a osie ich faz - prostopadłe. Przepływy 2- i 1-fazowych uzwojeń zastępczych zawierają harmoniczne przestrzenne o rzędach odpowiadających kolejnym ciągom z tab. 1. Dowolne uzwojenie zastępcze można przedstawić jako szereg galwa-



Rys. 2.2. Ciąg 2- i 1-fazowych uzwojeń zastępczych dla m-fazowego uzwojenia, gdy m = l.p.

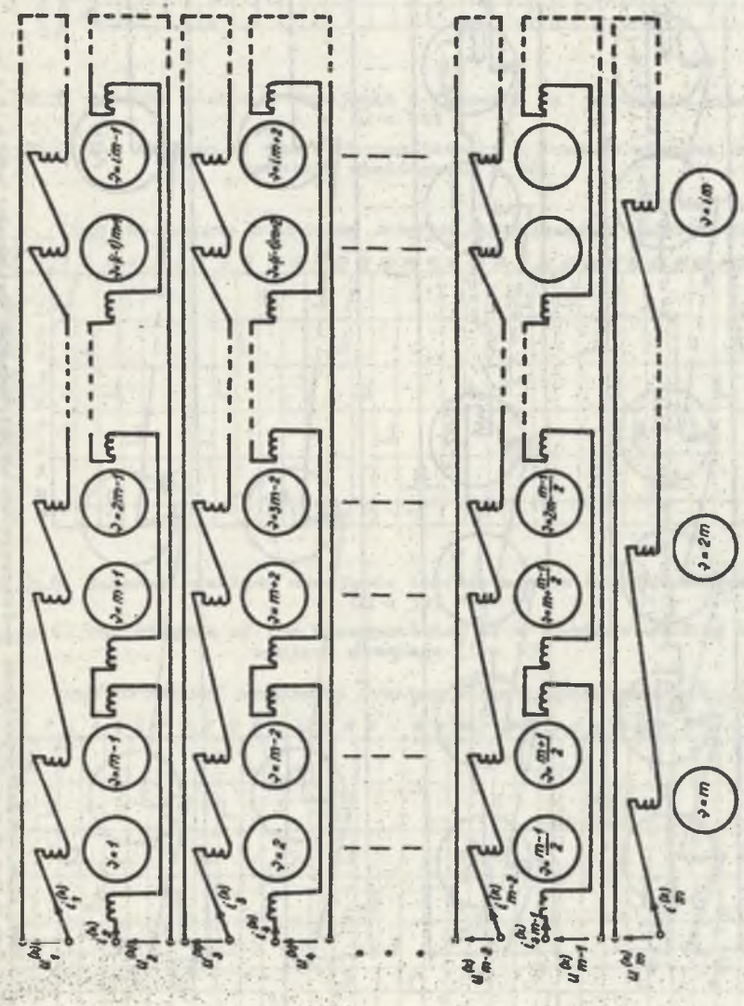
Fig. 2.2. 2- and 1-phase equivalent windings for m-phase symmetrical winding (m - even number)

nicznie połączonych uzwojeń składowych, z których każde wytwarza tylko jedną harmoniczną ciągu. Takie 2- lub 1-fazowe uzwojenia składowe o sinusoidalnym rozkładzie przestrzennym okładu prądowego będziemy nazywać uzwojeniami elementarnymi.

Uzwojenia elementarne, składające się na model uzwojenia m-fazowego, przedstawiono na rys. 2.3 (m = l.n.) i rys. 2.4 (m = l.p.). Orientacja osi faz uzwojeń elementarnych połączonych w szereg jest na przemian lewo- i prawoskrętna.

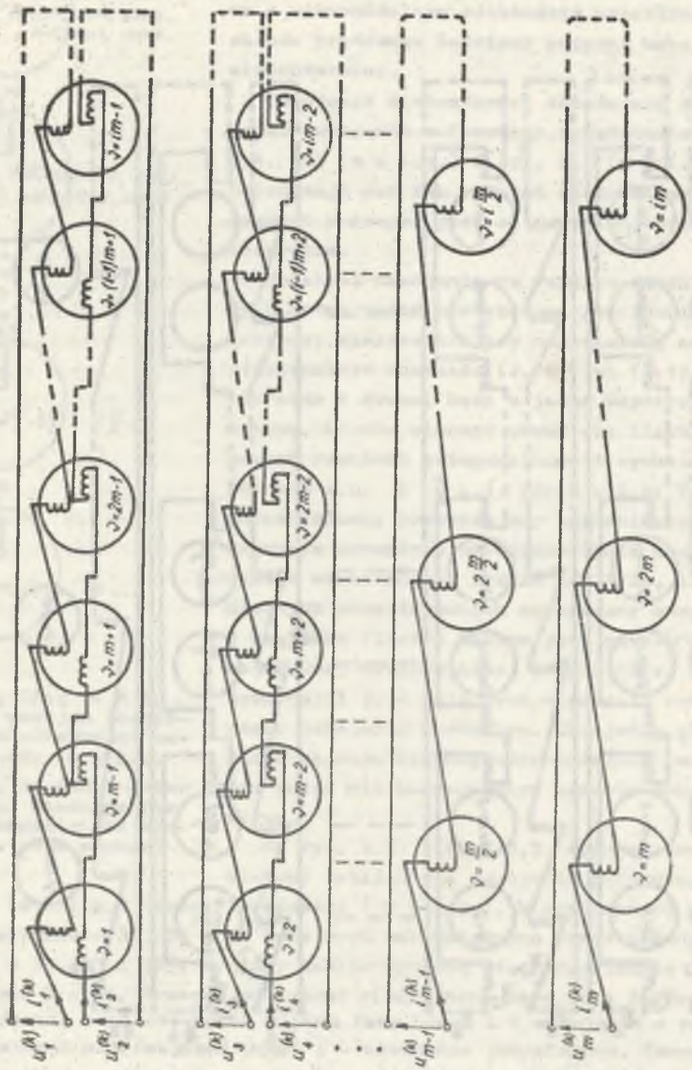
Modelowi uzwojenia we współrzędnych osiowych można nadać uproszczoną graficznie formę tablicy. Wiersze tablicy odpowiadają składowym ortogonalnym rozkładu (2.16) lub (2.17) i wiążą się bądź z dwoma, bądź z jedną współrzędną osiową. Liczba wierszy równa się liczbie składowych rozkładu ortogonalnego i wynosi $\frac{m+1}{2}$, gdy m = l.n. i $\frac{m}{2}+1$, gdy m = l.p. Poszczególne kolumny przypisujemy harmonicznym przestrzennym przepływu uzwojenia (pola magnetycznego w szczelinie). Będzie ich tyle, ile harmonicznych przestrzennych zamierzamy uwzględnić w analizie (liczba kolumn jest równa rzędowi najwyższej uwzględnionej harmonicznej przestrzennej Ω). W kolejnych wierszach rozmieszczamy uzwojenia zastępcze. Uzwojenie elementarne zajmują kolumny odpowiadające generowanym przez nie harmonicznym przestrzennym przepływu.

Na rys. 2.5, 2.6, i 2.7 sporządzono przykładowo tablice dla uzwojenia 5-fazowego i 11-fazowego (m = l.n.) oraz 12-fazowego (m = l.p.). W rozważanych przykładach uwzględniono 30, 33 i 36 kolejnych harmonicznych przestrzennych przepływu (Ω = 30, 33 i 36). Wymiary tablic wynoszą więc odpowiednio 3 x 30, 6 x 33 oraz 7 x 36. Przez ⅃ oznaczono elementarne uzwojenie 2-fazowe o lewostronnie zorientowanych osiach faz, przez L - uzwojenie o prawostronnej orientacji osi faz, zaś przez | - uzwojenie jednofazowe. Ponadto zaniechano zaznaczenia na rysunku połączeń galwanicznych pomiędzy uzwojeniami elementarnymi uzwojeń zastępczych, przyjmując umowę, że uzwojenia elementarne zajmujące ten sam wiersz są szeregowo połączone. Uzwojenia elementarne układają się w obrębie tablicy w cyklicznie powtarzający się charakterystyczny kształt litery V. W przypadku nieparzystej liczby faz wierzchołek litery V jest spłaszczony.. Regularność w budowie tabel



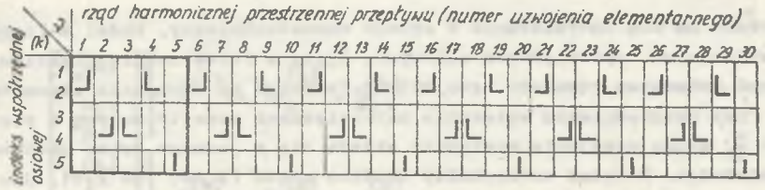
Rys. 2.3. Model uzwojenia m-fazowego we współrzędnych osiowych, gdy m = l.n.

Fig. 2.3. The model of a m-phase winding in axis coordinates (m - odd number)



Rys. 2.4. Model uzwojenia m-fazowego we współrzędnych osiowych, gdy m = 1.p.

Fig. 2.4. The model of a m-phase winding in axis coordinates (m - even number)

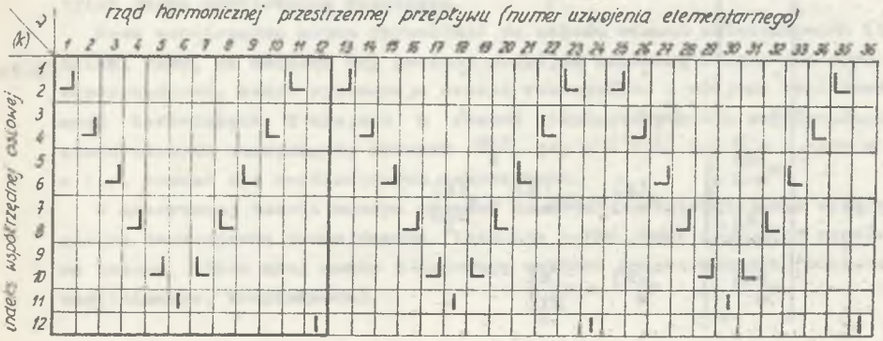


Rys. 2.5. Schemat rozkładu uzwojenia 5-fazowego na uzwojenia elementarne (Ω = 30)

Fig. 2.5. The diagram of the decomposition of a 5-phase winding into elementary windings (Ω = 30)

Rys. 2.6. Schemat rozkładu uzwojenia 11-fazowego na uzwojenia elementarne (Ω = 33)

Fig. 2.6. The diagram of the decomposition of a 11-phase winding into elementary windings (Ω = 33)



Rys. 2.7. Schemat rozkładu uzwojenia 12-fazowego na uzwojenia elementarne (Ω = 36)

Fig. 2.7. The diagram of the decomposition of a 12-phase winding into elementary windings (Ω = 36)

pozwala na ich sporządzanie w sposób mnemotechniczny. Model m-fazowego uzwojenia we współrzędnych osiowych, ujęty w formę tablicy, będziemy nazywać schematem rozkładu uzwojenia m-fazowego na uzwojenia elementarne.

Przy uwzględnieniu wyłącznie harmonicznych przestrzennych o rzędach $\nu < \frac{m}{2}$, każde uzwojenie zastępcze składa się z jednego tylko uzwojenia elementarnego. Rozkład ortogonalny wektora prądu (2.10) lub (2.11) jest wówczas rozkładem na składowe wytwarzające pojedyncze harmoniczne przepływu (a nie ciągi harmonicznych), zaś układ równań różniczkowych opisujących uzwojenie rozpada się na równania dla kolejnych harmonicznych przestrzennych przepływu (pola magnetycznego).

Schemat rozkładu uzwojenia wielofazowego na uzwojenia elementarne stanowi przejrzystą ilustrację wniosku sformułowanego w rozdziale 2.1:

Wielofazowe uzwojenie symetryczne zasilane kolejnymi składowymi rozkładu ortogonalnego wytwarza w szczelinie maszyny pole magnetyczne o rozrzedzonym widmie i różnych rzędach najniższej harmonicznej przestrzennej. Widmo to jest tym rzadsze, im wyższa jest liczba faz uzwojenia m.

Układ równań różniczkowych (2.20) można uprościć, wprowadzając w miejsce rzeczywistych współrzędnych osiowych - zespolone współrzędne osiowe:

$$\left[\begin{array}{c} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ w_3^{(k)} \\ w_4^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-2}^{(k)} \\ w_{m-1}^{(k)} \\ w_m^{(k)} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} w_1^{(k)} + jw_2^{(k)} = \underline{w}_1^{(k)} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} w_3^{(k)} + jw_4^{(k)} = \underline{w}_2^{(k)} \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} w_{m-2}^{(k)} + jw_{m-1}^{(k)} = \underline{w}_{\frac{m-1}{2}}^{(k)} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} w_m^{(k)} = w_{\frac{m+1}{2}}^{(k)} \end{array} \tag{2.22}$$

gdy: m = l.n.

lub

$$\left[\begin{array}{c} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ w_3^{(k)} \\ w_4^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-3}^{(k)} \\ w_{m-2}^{(k)} \\ w_{m-1}^{(k)} \\ w_m^{(k)} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} w_1^{(k)} + jw_2^{(k)} = \underline{w}_1^{(k)} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} w_3^{(k)} + jw_4^{(k)} = \underline{w}_2^{(k)} \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} w_{m-3}^{(k)} + jw_{m-2}^{(k)} = \underline{w}_{\frac{m}{2}-1}^{(k)} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} w_{m-1}^{(k)} = w_{\frac{m}{2}}^{(k)} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} w_m^{(k)} = w_{\frac{m}{2}+1}^{(k)} \end{array} \tag{2.23}$$

gdy m = l.p.

Zespolone współrzędne osiowe: $\frac{m+1}{2}$, gdy m = l.n. oraz $\frac{m}{2}$ i $(\frac{m}{2}+1)$, gdy m = l.p. są zawsze liczbami rzeczywistymi i dlatego w ich oznaczeniu pominięto podkreślenie (dla ich wyróżnienia wystarcza formalna zamiana indeksów).

Zespolone współrzędne osiowe są dogodne głównie z tego powodu, że z każdą składową rozkładu ortogonalnego (2.16) lub (2.17) związana jest tylko jedna współrzędna zespolona.

Nowe współrzędne można wprowadzić do układu równań różniczkowych (2.20) dzięki temu, że macierz [M] posiada podwójne wartości własne dla tych współrzędnych, które wyznaczają części rzeczywiste i urojone współrzędnych zespolonych. W miejsce m równań różniczkowych dla współrzędnych rzeczywistych otrzymujemy wówczas $\frac{m+1}{2}$, gdy m = l.n. lub $\frac{m}{2}+1$, gdy m = = l.p. równań dla współrzędnych zespolonych.

W klasycznej teorii maszyn opartej na modelu uwzględniającym wyłącznie główną harmoniczną przestrzenną, istnieje tylko jedna zespolona współrzędna osiowa, która nosi nazwę 2-osiowego wektora przestrzennego (wektora uogólnionego, kompleksora).

2.3. Rozkład prądów m-fazowego uzwojenia na składowe aktywne i zerowe w stanie ustalonym przy zasilaniu sinusoidalnym

Niechaj w stanie ustalonym przy niesymetrycznym sinusoidalnym zasilaniu uzwojenia wartościom symbolicznym prądów i napięć fazowych $\underline{W}_1, \underline{W}_2 \ldots \underline{W}_m$ odpowiadają składowe symetryczne $\underline{W}_1^{(s)}, \underline{W}_2^{(s)} \ldots \underline{W}_m^{(s)}$:

$$\begin{bmatrix} \underline{W}_1^{(s)} \\ \underline{W}_2^{(s)} \\ \underline{W}_3^{(s)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{W}_m^{(s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a}^{m-1} & \underline{a}^{m-2} & \underline{a}^{m-3} & \ldots & \underline{a} \\ 1 & \underline{a}^{m-2} & \underline{a}^{m-3} & \underline{a}^{m-6} & \ldots & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^{m-3} & \underline{a}^{m-6} & \underline{a}^{m-9} & \ldots & \underline{a}^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \\ \underline{W}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{W}_m \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

gdzie:

$$\underline{a} = e^{j\alpha}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{m}$$

$$\underline{W} = \underline{U}, \underline{I}$$

Można wykazać, że pomiędzy zespolonymi współrzędnymi osiowymi prądów i napięć a ich składowymi symetrycznymi zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned}
\underline{w}_1^{(k)} &= \underline{w}_1^{(s)} e^{j\omega_o t} + \underline{w}_{m-1}^{(s)*} e^{-j\omega_o t} \\
\underline{w}_2^{(k)} &= \underline{w}_2^{(s)} e^{j\omega_o t} + \underline{w}_{m-2}^{(s)*} e^{-j\omega_o t} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\underline{w}_{\frac{m-1}{2}}^{(k)} &= \underline{w}_{\frac{m-1}{2}}^{(s)} e^{j\omega_o t} + \underline{w}_{\frac{m+1}{2}}^{(s)*} e^{-j\omega_o t} \\
\underline{w}_{\frac{m+1}{2}}^{(k)} &= \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \left\{ \underline{w}_m^{(s)} e^{j\omega_o t} \right\}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

gdy m = 1.n.

lub

$$\begin{aligned}
\underline{w}_1^{(k)} &= \underline{w}_1^{(s)} e^{j\omega_o t} + \underline{w}_{m-1}^{(s)*} e^{-j\omega_o t} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\underline{w}_{\frac{m}{2}-1}^{(k)} &= \underline{w}_{\frac{m}{2}-1}^{(s)} e^{j\omega_o t} + \underline{w}_{\frac{m}{2}-1}^{(s)*} e^{-j\omega_o t} \\
\underline{w}_{\frac{m}{2}}^{(k)} &= \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \left\{ \underline{w}_{\frac{m}{2}}^{(s)} e^{j\omega_o t} \right\} \\
\underline{w}_{\frac{m}{2}+1}^{(k)} &= \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \left\{ \underline{w}_m^{(s)} e^{j\omega_o t} \right\}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

gdy m = 1.p.

Łącząc wzory (2.25) i (2.26) z (2.16) i (2.17) otrzymujemy rozkład ortogonalny prądów (napięć) w stanie ustalonym przy niesymetrycznym zasilaniu uzwojenia m-fazowego.

Każda 2-wymiarowa składowa rozkładu ortogonalnego wiąże się z dwoma składowymi symetrycznymi, zaś 1-wymiarowa z jedną składową symetryczną. Pierwszą składową rozkładu ortogonalnego określa 1 i (m-1) składowa symetryczna, drugą składową - 2 i (m-2) składowa symetryczna itd. W stanie ustalonym pierwszy ciąg harmonicznych przestrzennych z tab. 1 wytwarza więc 1- i (m-1)- składowa symetryczna, drugi ciąg - 2 i (m-2) - składowa symetryczna itd. Podsumowaniem powyższych rozważań jest tab. 3, w której zestawiono ciągi harmonicznych przestrzennych wypadkowego przepływu uzwojenia (pola magnetycznego w szczelinie), wytwarzane przez rzeczywiste i zespolone współrzędne osiowe w stanie nieustalonym oraz przez składowe symetryczne w stanie ustalonym. Numery ciągów odpowiadają liczbom charakterystycznym harmonicznych pola, wprowadzonym w pracy [63].

To samo uzwojenie m-fazowe, zasilane różnymi składowymi symetrycznymi, wytwarza w szczelinie maszyny pola magnetyczne o różnej liczbie par biegunów i w różny sposób odkształcone wyższymi harmonicznymi przestrzennymi.

Wniosek ten w syntetyczny sposób opisuje mechanizm wytwarzania wielobiegunowych pól magnetycznych przez uzwojenia wielofazowe. Jako przykład rozważmy uzwojenie złożone z 6 jednakowych grup, które traktować będziemy umownie jako uzwojenie 6-fazowe. Załóżmy najogólniejszy przypadek, a mianowicie, że pojedyncza grupa wytwarza wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne przepływu (w rzeczywistości niektóre harmoniczne przestrzenne nie występują na skutek zerowania się współczynnika skrótu lub grupy). Schemat rozkładu uzwojenia 6-fazowego na uzwojenia elementarne przedstawiono na rys. 2.8 (rząd najwyższej uwzględnionej harmonicznej przestrzennej wynosi Ω = 18), zaś składowe symetryczne 6-fazowe - na rys. 2.9. Uzwojenie

Tablica 3

Ciągi harmonicznych generowanych przez współrzędne osiowe, zespolone współrzędne osiowe i składowe symetryczne

nr ciągu	współrzędne osiowe	zespolone współ - osiowe	składowe symetryczne	rzędy harmonicznych przestrzennych przepływu
1	$w_1^{(k)}$ $w_2^{(k)}$	$\underline{w}_1^{(k)}$	$\underline{W}_1^{(s)}, \underline{W}_{m-1}^{(s)}$	$1, m-1, m+1, 2m-1, 2m+1, 3m-1, 3m+1 \ldots$
2	$w_3^{(k)}$ $w_4^{(k)}$	$\underline{w}_2^{(k)}$	$\underline{W}_2^{(s)}, \underline{W}_{m-2}^{(s)}$	$2, m-2, m+2, 2m-2, 2m+2, 3m-2, 3m+2 \ldots$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\frac{m-1}{2}$	$w_{m-2}^{(k)}$ $w_{m-1}^{(k)}$	$\underline{w}_{\frac{m-1}{2}}^{(k)}$	$\underline{W}_{\frac{m-1}{2}}^{(s)}, \underline{W}_{\frac{m+1}{2}}^{(s)}$	$\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, m+\frac{m-1}{2}, 2m-\frac{m-1}{2}, 2m+\frac{m-1}{2}, 3m-\frac{m-1}{2} \ldots$
$\frac{m+1}{2}$	$w_m^{(k)}$		$\underline{W}_m^{(s)}$	$m, 2m, 3m, 4m \ldots$

gdy m = l. nieparzysta

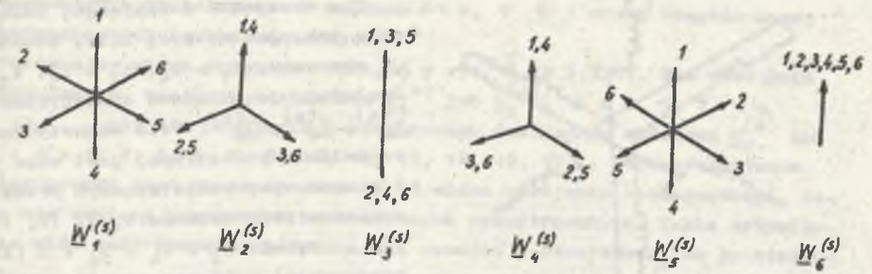
1	$w_1^{(k)}$ $w_2^{(k)}$	$\underline{w}_1^{(k)}$	$\underline{W}_1^{(s)}, \underline{W}_{m-1}^{(s)}$	$1\ m-1, m+1, 2m-1, 2m+1, 3m-1, 3m+1 \ldots$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\frac{m}{2}-1$	$w_{m-3}^{(k)}$ $w_{m-2}^{(k)}$	$\underline{w}_{\frac{m}{2}-1}$	$\underline{W}_{\frac{m}{2}-1}^{(s)}, \underline{W}_{\frac{m}{2}+1}^{(s)}$	$\frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}+1, m+\frac{m}{2}-1, 2m-\frac{m}{2}+1, 3m+\frac{m}{2}-1, 3m-\frac{m}{2}+1 \ldots$
$\frac{m}{2}$	$w_{m-1}^{(k)}$		$\underline{W}_{\frac{m}{2}}^{(s)}$	$\frac{m}{2}, \frac{3}{2}m, \frac{5}{2}m, \frac{7}{2}m \ldots$
$\frac{m}{2}+1$	$w_m^{(k)}$		$\underline{W}_m^{(s)}$	$m, 2m, 3m, 4m \ldots$

gdy m = l. parzysta

współrzędne osiowe	zespolone współrzędne osiowe	składowe symetryczne	rzędy harmonicznych przestrzennych przepływu (numery uzwojeń elementarnych)																	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$w_1^{(k)}$ $w_5^{(k)}$	$\underline{w}_1^{(k)}$	$\underline{W}_1^{(s)}\ \underline{W}_5^{(s)}$	┘				└		┘				└		┘				└	
$w_2^{(k)}$ $w_4^{(k)}$	$\underline{w}_2^{(k)}$	$\underline{W}_2^{(s)}\ \underline{W}_4^{(s)}$		┘		└				┘		└				┘		└		
$w_3^{(k)}$	$w_3^{(k)}$	$\underline{W}_3^{(s)}$			|						|						|			
$w_6^{(k)}$	$w_6^{(k)}$	$\underline{W}_6^{(s)}$						|					|							|

Rys. 2.8. Schemat rozkładu uzwojenia 6-fazowego na uzwojenia elementarne (Ω = 18)

Fig. 2.8. The diagram of the decomposition of a 6-phase winding into elementary windings (Ω = 18)



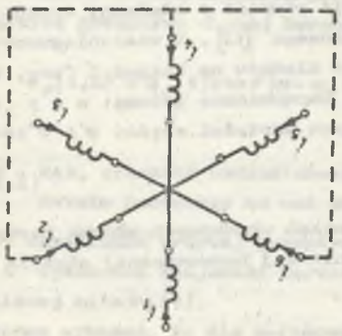
Rys. 2.9. Składowe symetryczne 6-fazowe

Fig. 2.9. 6-phase symmetrical components

takie, zasilane pierwszą lub piątą składową symetryczną napięcia, wytwarza przepływ zawierający harmoniczne przestrzenne 1,5 , 7, 11, 13, 17... Pole magnetyczne w szczelinie powietrznej jest więc polem 2-biegunowym, odkształconym wyższymi harmonicznymi przestrzennymi: 5, 7, 13, 17... . W stanie ustalonym pole kołowe pierwszej harmonicznej (podstawowej) wiruje przeciwnie lub zgodnie z ruchem wskazówek zegara w zależności od tego, czy uzwojenie jest zasilane pierwszą czy też piątą składową symetryczną napięcia. Jeśli to samo uzwojenie zasilimy drugą lub czwartą składową symetryczną, w szczelinie powietrznej powstanie pole czterobiegunowe, odkształcone wyższymi harmonicznymi 4, 8, 10, 14, 16... Uzwojenie, zasilane składową symetryczną trzecią lub szóstą wytwarza pole magnetyczne pulsujące odpowiednio 6-biegunowe (odkształcone przez 3, 9, 15... harmoniczną) lub 12-biegunowe (odkształcone przez 6, 12, 18... harmoniczną).

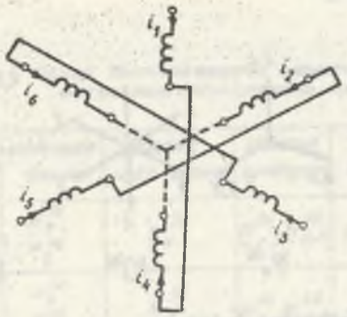
Niezależne uzwojenia fazowe można łączyć w węzły i oczka, wykluczając w ten sposób możliwość występowania określonych składowych symetrycznych prądu i napięcia i w konsekwencji - określonych ciągów harmonicznych przestrzennych.

Połączmy fazy uzwojenia 6-fazowego tak, jak to przedstawiono na rys. 2.10. Równania węzłów przyjmują postać: $i_1 = -i_4$, $i_2 = -i_5$, $i_3 = -i_6$. Spełniają je prądy składowych symetrycznych: $\underline{I}_1^{(s)}$, $\underline{I}_3^{(s)}$, $\underline{I}_5^{(s)}$. Uzwojenie jest więc uzwojeniem 2-biegunowym, którego rozkład przepływu może być odkształcony wyższymi harmonicznymi: 3, 5, 7,9 , 11, 13, 15, 17... Węzeł (skojarzenie faz w gwiazdę): $i_2 + i_4 + i_6 = 0$, wyklucza składową symetryczną $\underline{I}_3^{(s)}$, a w konsekwencji - możliwość wystąpienia harmonicznych przestrzennych: 3, 9, 15...



Rys. 2.10. Uzwojenie 3-fazowe 2-biegunowe o dwóch strefach na parę biegunów

Fig. 2.10. 3-phase 2-pole winding (2 phase-belts per pole-pair)



Rys. 2.11. Uzwojenie 3-fazowe 4-biegunowe o jednej strefie na parę biegunów

Fig. 2.11. 3-phase 2-pole winding (1 phase-belt per pole-pair)

Dla uzwojenia 6-fazowego, połączonego tak, jak na rys. 2.11, obowiązują równania: $i_1 = i_4$, $i_2 = i_5$, $i_3 = i_6$. Spełniają je składowe symetryczne: $\underline{I}_2^{(s)}$, $\underline{I}_4^{(s)}$, $\underline{I}_6^{(s)}$. Pole magnetyczne w szczelinie powietrznej jest więc polem 4-biegunowym, odkształconym przez harmoniczne przestrzenne: 4, 8, 10, 14, 16... Węzeł: $i_2 + i_4 + i_6 = 0$ (linia przerywana) wyklucza ponadto składową symetryczną $\underline{I}_6^{(s)}$, czyli harmoniczne przestrzenne: 6, 12, 18...

Aby umożliwić porównywanie widm przepływu uzwojeń o niejednakowej liczbie par biegunów p, rzędy poszczególnych harmonicznych przestrzennych podaje się w odniesieniu do rzędu harmonicznej dominującej w widmie, czyli do rzędu harmonicznej głównej (pracującej), bądź też - w stosunku do rzędu najniższej harmonicznej przestrzennej (wtedy można mówić o podharmonicznych). Względne wartości rzędów oznaczamy wówczas odpowiednio przez ϑ' lub ϑ''. Jeśli harmoniczną pracującą jest p-ta harmoniczna, zaś harmoniczną o najniższym rzędzie - a -ta harmoniczna, to względne wartości rzędów określają relacje:

$$\vartheta' = \frac{\vartheta}{p}$$
$$\vartheta'' = \frac{\vartheta}{a} \qquad (2.27)$$

Względne wartości rzędów można wprowadzić również w odmienny sposób, opierając się na pojęciu tzw. uzwojenia bazowego [12]. W wielobiegunowych 3-fazowych uzwojeniach o całkowitej liczbie żłobków na biegun i fazę, harmoniczna o najniższym rzędzie jest zarazem harmoniczną główną: a = p i nie zachodzi potrzeba rozróżniania względnych wartości rzędów ϑ' i ϑ'':

$$\vartheta' = \vartheta''. \qquad (2.28)$$

W rzadko stosowanych 2p-biegunowych uzwojeniach ułamkowych główną harmoniczną jest p-ta harmoniczna, zaś rząd najniższej harmonicznej określa wzór:

$$a = \frac{p}{NWD(Z,p)}, \quad 1 \leqslant a \leqslant p \qquad (2.29)$$

gdzie:

Z - liczba żłobków.

Harmoniczne przestrzenne o rzędach $\vartheta < p$, $\vartheta' < 1$ noszą wówczas nazwę podharmonicznych (subharmonicznych).

Porównajmy widma przepływu uzwojeń z rys. 2.10 i 2.11. Dla uzwojenia 2-biegunowego, zasilanego składową $\underline{U}_1^{(s)}$ lub $\underline{U}_5^{(s)}$: $\vartheta' = 1, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$, zaś dla uzwojenia 4-biegunowego zasilanego składową $\underline{U}_2^{(s)}$ lub $\underline{U}_4^{(s)}$: $\vartheta' = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17\ldots$ Widmo uzwojenia 2-biegunowego jest znacznie rzadsze od widma uzwojenia 4-biegunowego, bowiem nie zawiera parzystych harmonicznych przestrzennych. Takie zróżnicowanie widm jest charakterystyczne dla uzwojeń m-strefowych lub 2m-strefowych.

Uzwojenia jednowarstwowe m-strefowe to uzwojenia z grupami pełnymi (w celu wyeliminowania harmonicznych parzystych stosuje się poskok średnicowy), zaś 2m-strefowe - z grupami dzielonymi. Uzwojenia dwuwarstwowe to zazwyczaj uzwojenia 2m-strefowe. Jeden z wyjątków stanowi uzwojenie silnika 2-biegunowego (uzwojenie Dahlandera) przy większej z dwóch możliwych liczb par biegunów.

2.4. Widmo amplitudowe chwilowego rozkładu przestrzennego przepływu uzwojenia

W rozdziałach 2.1 - 2.3 określono rzędy harmonicznych przestrzennych, zawartych w widmie chwilowego rozkładu przepływu wypadkowego uzwojenia m-fazowego w zależności od wartości prądów (napięć) fazowych i połączeń wzajemnych pomiędzy fazami.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawiony sposób wyznaczania wartości chwilowych amplitud i kątów wzajemnego przesunięcia harmonicznych przestrzennych, a więc - określania widma amplitudowego i kątów położenia poszczególnych harmonicznych przestrzennych w dowolnej chwili czasowej t.

Krzywą przepływu ϑ-tej harmonicznej przestrzennej opisuje funkcja:

$$\Theta_\vartheta(t,\alpha) = \Theta_\vartheta(t)\cos\vartheta\left[\alpha - \alpha_\vartheta(t)\right] \qquad (2.30)$$

gdzie:

α - kąt, mierzony wzdłuż obwodu szczeliny w kierunku matematycznie dodatnim począwszy od osi uzwojenia fazy pierwszej (fazy odniesienia).

Do określenia krzywej przepływu ϑ-tej harmonicznej przestrzennej w chwili t wystarcza znajomość wartości chwilowej amplitudy $\Theta_\vartheta(t)$ i wartości chwilowej kąta $\alpha_\vartheta(t)$.

Można wykazać, że dla m-fazowego uzwojenia, złożonego z mq jednakowych zezwojów o zwojności z zachodzi:

$$\Theta_\nu(t) = A_\nu \, \|i_1(t)\| \qquad \text{dla } \nu = 1,\ m-1,\ m+1,\ 2m-1,\ 2m+1 \ldots$$

$$\Theta_\nu(t) = A_\nu \, \|i_2(t)\| \qquad \text{dla } \nu = 2,\ m-2,\ m+2,\ 2m-2,\ 2m+2 \ldots$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad (2.31)$$

$$\Theta_\nu(t) = \sqrt{2}\, A_\nu \, \left\|i_{\frac{m+1}{2}}(t)\right\| \qquad \text{dla } \nu = m,\ 2m,\ 2m,\ 4m \ldots$$

gdy m = l.n.

oraz

$$\Theta_\nu(t) = A_\nu \, \|i_1(t)\| \qquad \text{dla } \nu = 1,\ m-1,\ m+1,\ 2m-1,\ 2m+1 \ldots$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad (2.32)$$

$$\Theta_\nu(t) = \sqrt{2}\, A_\nu \, \left\|i_{\frac{m}{2}}(t)\right\| \qquad \text{dla } \nu = \tfrac{m}{2},\ \tfrac{3}{2}m,\ \tfrac{5}{2}m,\ \tfrac{7}{2}m \ldots$$

$$\Theta_\nu(t) = \sqrt{2}\, A_\nu \, \left\|i_{\frac{m}{2}+1}(t)\right\| \qquad \text{dla } \nu = m,\ 2m,\ 3m,\ 4m \ldots$$

gdy m = l.p.

gdzie:

$$A_\nu = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2}}\ \text{zq}\ \frac{1}{\nu}\,\xi_\nu$$

ξ_ν - współczynnik uzwojenia dla ν-tej harmonicznej przestrzennej.

Amplituda ν-tej harmonicznej przepływu jest proporcjonalna do normy składowej rozkładu ortogonalnego generującej ciąg harmonicznych, zawierający rozważaną ν-tą harmoniczną.

Stosunek amplitud harmonicznych przestrzennych przepływu: i-tej i j-tej, należących do tego samego ciągu, określa wzór

$$\frac{\Theta_i}{\Theta_j} = \frac{A_i}{A_j} = \frac{i}{j}\,\frac{\xi_i}{\xi_j} \qquad (2.33)$$

zaś stosunek harmonicznych przepływu: i-tej z a-tego ciągu i j-tej z b-tego ciągu - wzór

$$\frac{\Theta_i}{\Theta_j} = \frac{A_i}{A_j}\,\frac{\|i_a(t)\|}{\|i_b(t)\|} = \frac{i}{j}\,\frac{\xi_i}{\xi_j}\,\frac{\|i_a(t)\|}{\|i_b(t)\|} \qquad (2.34)$$

Z wzorów (2.31) i (2.32) wynika, że w symetrycznym m-fazowym uzwojeniu 2p-biegunowym poprzez zmniejszanie norm odpowiednich składowych ortogonalnych można ograniczać wszystkie wyższe harmoniczne przestrzenne za wyjątkiem harmonicznych o rzędach m-p, m+p, 2m-p, 2m+p, 3m-p... Harmoniczne te należą bowiem do tego samego ciągu, co i p-ta harmoniczna główna (pracująca) i ich i-krotne pomniejszenie pociąga za sobą i-krotne pomniejszenie harmonicznej głównej.

Normy wektorów są niezmiennikami transformacji osiowej (macierz transformacji osiowej jest macierzą ortogonalną). Dla pierwszej składowej prądu zachodzi:

$$\|i_1(t)\| = \sqrt{[i_1]^T\,[i_1]} = \sqrt{\left[i_1^{(k)}\right]^T\left[i_1^{(k)}\right]} = \sqrt{i_1^{(k)\,2} + i_2^{(k)2}} = \left|\underline{i}_1^{(k)}\right| \qquad (2.35)$$

Jak wynika z powyższego przykładu, normy poszczególnych składowych rozkładu ortogonalnego najdogodniej jest obliczać w rzeczywistych bądź zespolonych współrzędnych osiowych:

$$\|i_1(t)\| = \sqrt{i_1^{(k)2} + i_2^{(k)2}} = \left|\underline{i}_1^{(k)}\right|$$

$$\|i_2(t)\| = \sqrt{i_3^{(k)2} + i_4^{(k)2}} = \left|\underline{i}_2^{(k)}\right|$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad (2.36)$$

$$\left\|i_{\frac{m-1}{2}}(t)\right\| = \sqrt{i_{m-2}^{(k)2} + i_{m-1}^{(k)2}} = \left|\underline{i}_{\frac{m-1}{2}}^{(k)}\right|$$

$$\|i_m(t)\| = i_m^{(k)} = i_{\frac{m+1}{2}}^{(k)}$$

gdy m = l.n.

oraz

$$\|i_1(t)\| = \sqrt{i_1^{(k)2} + i_2^{(k)2}} = \left|\underline{i}_1^{(k)}\right|$$

$$\vdots$$

$$\left\|i_{\frac{m}{2}-1}(t)\right\| = \sqrt{i_{m-3}^{(k)2} + i_{m-2}^{(k)2}} = \left|\underline{i}_{\frac{m}{2}-1}^{(k)}\right| \qquad (2.37)$$

$$\left\|i_{\frac{m}{2}}(t)\right\| = i_{m-1}^{(k)} = i_{\frac{m}{2}}^{(k)}$$

$$\|i_m(t)\| = i_m^{(k)} = i_{\frac{m}{2}+1}^{(k)}$$

gdy m = l.p.

Normy składowych rozkładu ortogonalnego są równe wartościom bezwzględnym (długościom, modułom) zespolonych współrzędnych osiowych. Opierając się na wzorach (2.31), (2.32), (2.36) i (2.37) można więc wyznaczyć widmo amplitudowe chwilowego rozkładu przestrzennego przepływu wypadkowego.

Znajomość zespolonych współrzędnych osiowych pozwala również na określenie kątów α_ν. Jeśli

$$\underline{i}_1^{(k)} = \left|\underline{i}_1^{(k)}\right| e^{j\alpha_1}$$

$$\underline{i}_2^{(k)} = \left|\underline{i}_2^{(k)}\right| e^{j\alpha_2}$$

$$\vdots \qquad (2.38)$$

$$i_{\frac{m+1}{2}}^{(k)} = i_{\frac{m+1}{2}}^{(k)} e^{j0}$$

oraz gdy m = l.n.

$$\underline{i}_1^{(k)} = \left|\underline{i}_1^{(k)}\right| e^{j\alpha_1}$$

$$\vdots \qquad (2.39)$$

$$i_{\frac{m}{2}}^{(k)} = i_{\frac{m}{2}}^{(k)} e^{j0}$$

$$i_{\frac{m}{2}+1}^{(k)} = i_{\frac{m}{2}+1}^{(k)} e^{j0}$$

gdy m = l.p.

to kąty α_ν dla pierwszego ciągu harmonicznych: $\{\nu\}$ = 1, m-1, m+1, 2m-1, 2m+1... wynoszą $\pm\frac{\alpha_1}{\nu}$, dla drugiego ciągu harmonicznych: $\{\nu\}$ = 2, m-2, m+2, 2m-2, 2m+2... wynoszą $\pm\frac{\alpha_2}{\nu}$ itd. Dla harmonicznych m, 2m, 3m ..., gdy m = l.n. oraz dodatkowo dla harmonicznych $\frac{m}{2}$, $\frac{3}{2}m$, $\frac{5}{2}m$ ..., gdy m = l.p. kąty α_ν są zawsze równe zero.

Wzory (2.38) i (2.39) umożliwiają wyznaczenie kątów położenia harmonicznych przestrzennych przepływu uzwojenia na obwodzie maszyny. W klasycznej teorii maszyn przy analizie ograniczonej do głównej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego występuje tylko jedna zespolona współrzędna osiowa, która nosi nazwę 2-osiowego wektora przestrzennego (wektora uogólnionego, kompleksora). Nazwę wektor przestrzenny uzasadnia się tym, że długość wektora przestrzennego prądu stojana (wirnika) jest proporcjonalna do wartości chwilowej amplitudy przepływu stojana (wirnika), zaś argument odpowiada kątowi elektrycznemu zawartemu pomiędzy osią fazy odniesienia (pierwsza faza) a osią przepływu uzwojenia. Przy nasunięciu płaszczyzny zespolonej na przekrój poprzeczny umyślonej zastępczej maszyny 2-biegunowej (przekrój odpowiada wówczas pełnemu kątowi elektrycznemu) w taki sposób, aby oś rzeczywista płaszczyzny zespolonej pokryła się z osią fazy odniesienia, wektor przestrzenny prądu stojana (wirnika) pokrywa się z osią przepływu stojana (wirnika).

W modelu uzwojenia, uwzględniającym wszystkie harmoniczne przestrzenne, poszczególne zespolone współrzędne osiowe odgrywają w odniesieniu do kolejnych ciągów harmonicznych przestrzennych taką samą rolę, jak w modelu z harmoniczną główną 2-osiowy wektor przestrzenny w stosunku do harmonicznej głównej. Zespolone współrzędne osiowe prądów wyznaczają amplitudy oraz położenie osi wszystkich harmonicznych przestrzennych przepływu uzwojenia, a przedstawione na płaszczyźnie zespolonej, nasuniętej na przekrój poprzeczny maszyny wskazują w skali kątów elektrycznych osie poszczególnych harmonicznych przestrzennych przepływu. Na podstawie takiej właśnie interpretacji fizycznej wprowadził pojęcie wektorów przestrzennych dla wyższych harmonicznych przestrzennych V. Stepina [54 , 55].

Reasumując, z m-fazowym uzwojeniem można związać $\frac{m+1}{2}$, gdy m = l.n. lub $\frac{m}{2}$ + 1, gdy m = l.p. wektorów przestrzennych. Każdy wektor przestrzenny prądu odpowiada swojemu ciągowi harmonicznych przestrzennych przepływu i pozwala określić amplitudy i położenie osi wszystkich harmonicznych należących do tego ciągu. 2-osiowe wektory przestrzenne (2-wymiarowe składowe rozkładu ortogonalnego) są związane z harmonicznymi przestrzennymi, których osie mogą zajmować dowolne położenie na obwodzie maszyny, zaś 1-osiowe wektory (1-wymiarowe składowe rozkładu ortogonalnego) - z harmonicznymi, których osie stale pokrywają się z osią fazy odniesienia.

Amplitudy harmonicznych przestrzennych przepływu zależą od wartości współczynnika A_ν. Współczynnik ten jest proporcjonalny do współczynnika uzwojenia, będącego iloczynem współczynnika skrótu i grupy. Dla uzwojenia

złożonego z q szeregowo połączonych zezwojów o poskoku żłobkowym y wartość współczynnika skrótu cięciwy wynosi:

$$\xi_{c\nu} = \sin\nu\frac{\alpha_y}{2} = \sin\nu\frac{\pi}{Z}y \qquad (2.40)$$

gdzie:

Z - liczba żłobków na obwodzie maszyny,

α_y - rozpiętość kątowa zezwoju ($\alpha_y = \frac{2\pi}{Z}y$).

Wzór na współczynnik grupy jest uzależniony od założenia dotyczącego rozkładu przestrzennego przepływu (okładu prądowego uzwojenia) wzdłuż obwodu szczeliny. Można założyć, że okład prądowy jest stały wzdłuż całej podziałki żłobkowej bądź tylko wzdłuż szczerbinki żłobkowej (i równy zero dla pozostałych odcinków podziałki) albo też przyjąć, że okład jest skupiony w postaci impulsu Diraca w środku szczerbinki żłobkowej (modelem fizycznym jest tzw. nitka prądowa). W ostatnim przypadku wzór na współczynnik grupy przyjmuje postać:

$$\xi_{G\nu} = \frac{\sin\nu q\frac{\alpha_z}{2}}{q\sin\nu\frac{\alpha_z}{2}} = \frac{\sin\nu\frac{q\pi}{Z}}{q\sin\nu\frac{\pi}{Z}} \qquad (2.41)$$

gdzie:

$\alpha_z = \frac{2\pi}{Z}$ - rozpiętość kątowa podziałki żłobkowej.

Współczynniki (2.40) i (2.41) są ze względu na rząd ν dyskretnymi funkcjami okresowymi. Jeśli: $\nu = |\lambda \pm c\frac{Z}{y}|$, to dla ν-tej i λ-tej harmonicznej jednakowe są wartości bezwzględne współczynników skrótu, jeśli zaś: $\nu = |\lambda \pm cZ|$ - wartości bezwzględne współczynników grupy. Ostatecznie więc współczynniki uzwojenia ξ_ν, będące ich iloczynami, przyjmują wartości równe co do modułu dla tych harmonicznych, których rzędy spełniają warunek:

$$\nu = |\lambda \pm cZ|, \qquad c = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.42)$$

Opierając się na wzorze (2.42) harmoniczne przestrzenne można podzielić na klasy harmonicznych o jednakowych współczynnikach uzwojeń. Najważniejszą klasę stanowią harmoniczne o współczynniku uzwojenia równym współczynnikowi harmonicznej głównej (pracującej). Harmoniczne tej klasy, określone wzorem: $\nu = cZ \pm p$, noszą nazwę harmonicznych żłobkowych. Harmoniczne przestrzenne należące do pozostałych klas - to harmoniczne strefowe. Szczególną klasę stanowią harmoniczne o współczynniku uzwojenia równym zero. Należą do niej harmoniczne o rzędach $\nu = c\frac{Z}{y}$ (wartość zero przyjmuje współczynnik skrótu) oraz $\nu = 2cpm$ (wartość zero przyjmuje współczynnik grupy, o ile $q > 1$). W przypadku symetrycznego uzwojenia 3-fazowego można

wyróżnić tyle klas harmonicznych, ile żłobków przypada na biegun i fazę, tj. q [56].

Sposób zamknięcia żłobka (żłobek otwarty, półzamknięty, zamknięty) w istotny sposób wpływa na rozkład przestrzenny przepływu magnetycznego. Z różnymi założeniami, dotyczącymi wyidealizowanego rozkładu okładu prądowego wzdłuż obwodu maszyny, związane są różne krzywe przestrzenne przepływu: schodkowa (wówczas, gdy okład prądowy jest ciągiem impulsów Diraca), trapezowa (wtedy, gdy okład prądowy jest równomiernie rozłożony wzdłuż podziałki żłobkowej) bądź - o schodkach trapezowych (odpowiadająca okładowi prądowemu równomiernie rozłożonemu wzdłuż szczerbinki żłobkowej). W przypadku krzywej trapezowej i krzywej o schodkach trapezowych współczynnik uzwojenia koryguje się za pomocą współczynnika szczerbinki [3], [56]:

$$\xi_{o\nu} = \frac{\sin\nu\frac{\pi}{Z}\gamma}{\nu\frac{\pi}{Z}\gamma} \qquad (2.43)$$

gdzie:

$\gamma = \frac{b}{t}$,

t - podziałka żłobkowa,

b - szerokość szczerbiny żłobka.

Poprzez zmianę szerokości szczerbinki żłobkowej można ograniczać różne wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu, w tym również harmoniczne żłobkowe. Poszerzanie szczerbinki wygładza krzywą przestrzenną okładu prądowego (zmniejsza amplitudy harmonicznych żłobkowych przepływu), z drugiej jednak strony - prowadzi do pogłębienia nierównomierności szczeliny i do uwydatnienia w polu magnetycznym harmonicznych reluktancyjnych.

W wirnikach klatkowych powszechnie stosuje się żłobki skośne. Przy obliczaniu indukcyjności wzajemnej stojan - wirnik i indukcyjności magnesowania wprowadza się wówczas współczynnik skosu:

$$\xi_{\varkappa\nu} = \frac{\sin\nu\frac{\pi}{Z}\frac{\tau_\varkappa}{t}}{\nu\frac{\pi}{Z}\frac{b_{sk}}{t}} \qquad (2.44)$$

gdzie:

$\tau_\varkappa$ - skos żłobka na obwodzie maszyny.

Skos żłobków wirnika najczęściej jest równy podziałce żłobkowej wirnika.

Przedstawiony w rozdz. 2.2 schemat rozkładu uzwojenia m-fazowego na uzwojenia elementarne można zredukować, usuwając z niego kolumny odpowiadające tym harmonicznym, które nie wystąpią w rozkładzie przestrzennym przepływów uzwojeń fazowych (a tym samym w przepływie wypadkowym) na skutek zerowania się współczynnika uzwojenia.

2.5. Uzwojenie klatkowe jako symetryczne uzwojenie wielofazowe

Uzwojenie klatkowe wirnika maszyny indukcyjnej można traktować jako symetryczne uzwojenie wielofazowe i formalnie analizować tak samo, jak uzwojenie o fazach galwanicznie wyodrębnionych. W klatce o n prętach ($n = Z_2$, gdzie: Z_2 - liczba żłobków wirnika) liczba gałęzi g wynosi $3n$, zaś liczba węzłów $2n$. Liczbę niezależnych oczek l (niezależnych prądów oczkowych) określa relacja:

$$l = g - w + 1 = 3n - 2n + 1 = n + 1 \tag{2.45}$$

n pierwszych niewiadomych prądów oczkowych wiąże się z oczkami utworzonymi z kolejnych prętów i łączących je wycinków (segmentów) pierścieni zwierających. $(n+1)$ prąd oczkowy odpowiada pierścieniowi zwierającemu. Przy pominięciu oddziaływania pomiędzy promieniowym i poosiowym głównym polem magnetycznym (efektu skrajnego) współczynniki indukcyjności głównych pomiędzy oczkiem pierścienia a pozostałymi oczkami klatki są równe zero. Równanie dla prądów klatki przyjmuje postać:

$$[0] = [R_r][i_r] + \frac{d}{dt}[L_{\sigma r}][i_r] + \frac{d}{dt}[M_{rr}][i_r] + [R_p]i_{n+1} + \frac{d}{dt}[L_{\sigma p}]i_{n+1} \tag{2.46}$$

$$0 = nR_p\, i_{n+1} + nL_{\sigma p}\frac{d}{dt}\, i_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} R_p\, i_{ri} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} L_{\sigma p}\, i_{ri} \tag{2.47}$$

gdzie:

$$[i_r] = \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{rn} \end{bmatrix}, \quad [R_p] = \begin{bmatrix} R_p \\ R_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_p \end{bmatrix}, \quad [L_{\sigma p}] = \begin{bmatrix} L_{\sigma p} \\ L_{\sigma p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_{\sigma p} \end{bmatrix}$$

$$[R_r] = \begin{bmatrix} R_o & -R_{pr} & 0 & \dots & 0 & -R_{pr} \\ -R_{pr} & R_o & -R_{pr} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -R_{pr} & R_o & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -R_{pr} & R_o \end{bmatrix}$$

$$[L_{\sigma r}] = \begin{bmatrix} L_{\sigma o} & -L_{\sigma pr} & 0 & \dots & 0 & -L_{\sigma pr} \\ -L_{\sigma pr} & L_{\sigma o} & -L_{\sigma pr} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -L_{\sigma pr} & L_{\sigma o} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -L_{\sigma pr} & L_{\sigma o} \end{bmatrix}$$

$$R_o = 2R_{pr} + 2R_p$$

$$L_{\sigma o} = 2L_{\sigma pr} + 2L_{\sigma p}$$

R_{pr}, $L_{\sigma pr}$ - rezystancja i indukcyjność rozproszenia pręta,

R_p, $L_{\sigma p}$ - rezystancja i indukcyjność rozproszenia wycinka pierścienia.

Układ równań różniczkowych (2.46) różni się od układu równań różniczkowych (2.1) budową macierzy rezystancji i indukcyjności rozproszeń (co jest wynikiem sprzężeń galwanicznych pomiędzy sąsiadującymi oczkami), a ponadto - dwoma dodatkowymi składnikami, reprezentującymi sprzężenia galwaniczne prądów oczkowych i_{r1}, i_{r2} ... i_{rn} z prądem pierścienia i_{rn+1}. Macierze $[R_r]$ i $[L_{\sigma r}]$ w układzie (2.47) nadal zachowują jednak własność cykliczności. Macierz $[M_{rr}]$ ma budowę taką samą jak macierz (2.2), co dowodzi, że w zakresie zjawisk elektromagnetycznych, związanych z głównym strumieniem magnetycznym, n-żłobkowe uzwojenie klatkowe jest równoważne n-fazowemu uzwojeniu o fazach galwanicznie wyodrębnionych, dla którego: $n = Z_2$, $z = 1$, $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, $\xi_{rg} = 1$, $\xi_{rc} = \sin\nu\frac{\pi}{n}$ oraz napięcie zasilania $u_r = 0$. W krzywej przestrzennej przepływu nie wystąpią harmoniczne o rzędach $\nu = cn$ (ze względu na zerowe wartości współczynnika skrótu), więc $[M_{rr}] = [0]$ dla $\nu = cn$. Po zsumowaniu stronami równań układu (2.46) otrzymujemy:

$$2\sum_{i=1}^{n} R_p\, i_{ri} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} I_{\sigma p}\, i_{ri} + n\, R_p i_{n+1} + nL_{\sigma p}\frac{d}{dt}\, i_{n+1} = 0 \tag{2.48}$$

Z wzoru (2.48) wynika, że równanie różniczkowe (2.47) ma rozwiązanie zerowe. W symetrycznym zwartym wirniku klatkowym przy pominięciu strumienia unipolarnego prąd oczkowy pierścienia jest więc równy zero.

Jeśli układ równań różniczkowych (2.46) poddamy transformacji osiowej, wówczas macierz $[M_{rr}]$ przyjmuje taką samą postać jak macierz $[M^{(k)}]$ w równaniu (2.20). Postać ta różni się dla parzystej oraz nieparzystej liczby żłobków.

Wektory - wiersze macierzy transformacji $[K_r]$ są wektorami własnymi dla wszystkich macierzy o budowie cyklicznej, a więc również dla macierzy $[R_r]$ i $[L_{\sigma r}]$. W osiowym układzie współrzędnych przyjmują one postać diagonalną:

$$\left[R_r^{(k)}\right] = [K_r][R_r][K_r]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} R_o-2R_{pr}\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_o-2R_{pr}\cos\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_o-2R_{pr}\cos 2\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_o-2R_{pr}\cos 2\alpha & \dots & 0 \\ . & . & . & & \dots & 0 \\ . & . & . & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & R_o-2R_{pr} \end{bmatrix} \qquad (2.49)$$

$$\left[L_{\sigma r}^{(k)}\right] = [K_r][L_{\sigma r}][K_r]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} L_{\sigma 0}-2L_{\sigma pr}\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{\sigma 0}-2L_{\sigma pr}\cos\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma 0}-2L_{\sigma pr}\cos 2\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{\sigma 0}-2L_{\sigma pr}\cos 2\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & L_{\sigma 0}-2L_{\sigma pr} \end{bmatrix} \qquad (2.50)$$

Elementy macierzy na przekątnej głównej są różne dla różnych składowych rozkładu ortogonalnego (2.16) lub (2.17).

Dla symetrycznego n-żłobkowego uzwojenia klatkowego ($i_{rn+1} = 0$) można w analogiczny sposób jak dla uzwojenia o fazach galwanicznie niezależnych, sporządzić schemat rozkładu uzwojenia na uzwojenia elementarne. Poszczególne wirniki zastępcze, odpowiadające kolejnym wierszom schematu, mają zgodnie z wzorami (2.49) i (2.50) różne rezystancje i indukcyjności rozproszeń. Schemat rozkładu uzwojenia klatkowego wyróżnia się ponadto jeszcze jedną własnością, wynikającą z równości liczby faz n i żłobków uzwojenia $Ż_2$: wirniki elementarne znajdujące się w tym samym wierszu, mają

jednakowe współczynniki uzwojeń (wyznaczają klasy harmonicznych o takiej samej wartości współczynnika uzwojenia). W wirniku klatkowym najważniejszą rolę odgrywają wyższe harmoniczne przestrzenne, generowane przez harmoniczną główną stojana, czyli harmoniczną p-tą. Są to harmoniczne, związane z p-tym wierszem, a więc harmoniczne o rzędach $cn \pm p$. Noszą one nazwę harmonicznych żłobkowych uzwojenia klatkowego wirnika.

3. MODEL MATEMATYCZNY MASZYNY ASYNCHRONICZNEJ WE WSPÓŁRZĘDNYCH OSIOWYCH

3.1. Transformacja osiowa równań różniczkowych maszyny asynchronicznej

Stan nieustalony maszyny asynchronicznej o m-fazowym stojanie i n-fazowym wirniku opisuje we współrzędnych fazowych następujący układ równań:

$$
\begin{aligned}
[u_s] &= [R_s][i_s] + [L_{\sigma s}]\frac{d}{dt}[i_s] + [M_{ss}]\frac{d}{dt}[i_s] + \frac{d}{dt}\left[M_{sr}(\varphi)\right][i_r] \\
[u_r] &= [R_r][i_r] + [L_{\sigma r}]\frac{d}{dt}[i_r] + \frac{d}{dt}\left[M_{rs}(\varphi)\right][i_s] + [M_{rr}]\frac{d}{dt}[i_r]
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$$
J\frac{d\omega}{dt} = M_e - M_o \tag{3.2}
$$

gdzie:

- s, r – indeksy wyróżniające wektory, związane odpowiednio ze stojanem i wirnikiem,
- $[M_{ss}]$, $[M_{sr}]$, $[M_{rs}]$, $[M_{rr}]$ – macierze indukcyjności głównych stojan-stojan, stojan-wirnik, wirnik-stojan, wirnik-wirnik,
- M_e, M_o – moment elektromagnetyczny i moment obciążenia maszyny,
- φ – kąt obrotu wirnika,
- ω – prędkość wirnika.

Moment elektromagnetyczny M_e jest pochodną energii magnetycznej uzwojeń W po kącie obrotu wirnika φ

$$
M_e = \frac{dW}{d\varphi} = [i_s]^T \frac{d}{d\varphi}[M_{sr}][i_r] \tag{3.3}
$$

Z zasady wzajemności wynika, że:

$$
[M_{sr}] = [M_{rs}]^T \tag{3.4}
$$

Macierze indukcyjności głównych $[M_{ss}]$, $[M_{sr}]$, $[M_{rs}]$ i $[M_{rr}]$ można przedstawić w postaci sum macierzy związanych z poszczególnymi harmonicznymi przestrzennymi przepływów (rozdz. 2.1). Macierze $\underset{m\times m}{[M_{ss}]}$ i $\underset{n\times n}{[M_{rr}]}$ mają taką samą budowę, jak macierz (2.2), natomiast macierz $[M_{sr}]$ przyjmuje postać:

$$
[M_{sr}] = \sum_{\nu=1}^{\infty} \underset{m\times n}{[M_{sr\nu}]} =
$$

$$
= \mu_0 r l \Lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_{w\nu}^2 \xi_{r\nu} \xi_{s\nu} \frac{1}{\nu^2} \cdot
\begin{bmatrix}
\cos\nu(0-0\alpha_s-\varphi) & \cos\nu(\alpha_r-0\alpha_s-\varphi) & \cos\nu(2\alpha_r-0\alpha_s-\varphi) & \dots & \cos\nu[(n-1)\alpha_r-0\alpha_s-\varphi] \\
\cos\nu(0-\alpha_s-\varphi) & \cos\nu(\alpha_r-\alpha_s-\varphi) & \cos\nu(2\alpha_r-\alpha_s-\varphi) & \dots & \cos\nu[(n-1)\alpha_r-\alpha_s-\varphi] \\
\cos\nu(0-2\alpha_s-\varphi) & \cos\nu(\alpha_r-2\alpha_s-\varphi) & \cos\nu(2\alpha_r-2\alpha_s-\varphi) & \dots & \cos\nu[(n-1)\alpha_r-2\alpha_s-\varphi] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\cos\nu[0-(m-1)\alpha_s-\varphi] & \cos\nu[\alpha_r-(m-1)\alpha_s-\varphi] & \cos\nu[2\alpha_r-(m-1)\alpha_s-\varphi] & \dots & \cos\nu[(n-1)\alpha_r-(m-1)\alpha_s-\varphi]
\end{bmatrix}
\tag{3.5}
$$

gdzie:

$$
\alpha_s = \frac{2\pi}{m},
$$

$$
\alpha_r = \frac{2\pi}{n},
$$

$$
\varphi = \int_0^t \omega dt + \varphi_0,
$$

- φ_0 – kąt zawarty w chwili $t = 0$ pomiędzy osią pierwszego uzwojenia fazowego stojana i osią pierwszego uzwojenia fazowego wirnika,
- Λ – permeancja magnetyczna dla strumienia w szczelinie związanego z pierwszą (podstawową) harmoniczną przestrzenną.

Równania różniczkowe (3.1) są równaniami stanu elektromagnetycznego, zaś równanie różniczkowe (3.2) – równaniem stanu elektromechanicznego. Jeśli uzwojenia fazowe są galwanicznie połączone (skojarzone), układ równań (3.1) należy uzupełnić równaniami więzów, wynikającymi z I i II prawa Kirchhoffa.

Układ równań różniczkowych (3.1) i (3.2) jest w ogólnym przypadku układem nieliniowym. Nieliniowość równań (3.1) jest wynikiem zależności elementów macierzy indukcyjności $[M_{sr}]$ i $[M_{rs}]$ od kąta obrotu wirnika φ, który z kolei jest nieliniową funkcją czasu. Nieliniowość równania (3.2) wiąże się przede wszystkim z wyrażeniem na moment elektromagnetyczny, ale może też być dodatkowo wniesiona przez zmienny (zależny od prędkości obrotowej lub kąta obrotu wirnika) moment obciążenia i moment bezwładności układu mechanicznego.

Wszystkie równania różniczkowe układu (3.1) są ze sobą wzajemnie sprzężone. Wyrazem tego sprzężenia są pełne macierze indukcyjności głównych, zaś miarą – liczba elementów różnych od zera. Zasadniczym powodem, dla którego w teorii maszyn elektrycznych wprowadza się nowe układy współrzędnych, jest możność uproszczenia modelu matematycznego poprzez rozsprzężenie układu równań różniczkowych, doprowadzenie do stałości współczynników równań itp. Szczególnie uprzywilejowane są takie układy współrzędnych, w których nowym modelom matematycznym (transformowanym równaniom różniczkowym)

odpowiadają uproszczone modele fizyczne. Wiąże się to najczęściej z możliwością interpretacji fizycznej nowych współrzędnych i nowych współczynników równań różniczkowych, a często też umożliwia sformułowanie schematu zastępczego maszyny. Takim wymogom odpowiada osiowy układ współrzędnych. Macierz transformacji $\underset{m\times m}{[K_s]}$ dla wektorów prądów i napięć stojana oraz macierz transformacji $\underset{n\times n}{[K_r]}$ dla wektorów prądów i napięć wirnika dla parzystej i nieparzystej liczby fazy jest określona wzorem (2.14) oraz (2.5). Ze względu na ortogonalność macierzy transformacji osiowej zachodzi:

$$
\begin{aligned}
[K_r]^{-1} &= [K_r]^T \\
[K_s]^{-1} &= [K_s]^T \\
(p)t &= [u]^T[i] = [u^{(k)}]^T[i^{(k)}]
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Układ równań różniczkowych maszyny (3.1) przybiera we współrzędnych osiowych postać:

$$
\begin{aligned}
[u_s^{(k)}] &= [R_s][i_s^{(k)}] + [L_{\sigma s}]\frac{d}{dt}[i_s^{(k)}] + [M_{ss}^{(k)}]\frac{d}{dt}[i_s^{(k)}] + \frac{d}{dt}[M_{sr}^{(k)}(\varphi)][i_r^{(k)}] \\
[u_r^{(k)}] &= [R_r][i_r^{(k)}] + [L_{\sigma r}]\frac{d}{dt}[i_r^{(k)}] + \frac{d}{dt}[M_{rs}^{(k)}(\varphi)][i_s^{(k)}] + [M_{rr}^{(k)}]\frac{d}{dt}[i_r^{(k)}]
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

a wyrażenie (3.3), określające moment elektromagnetyczny - postać:

$$
M_e = [i_s^{(k)}]^T \frac{d}{d\varphi}[M_{sr}^{(k)}][i_r^{(k)}] \tag{3.8}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
[u_s^{(k)}] &= [K_s][u_s] \\
[i_s^{(k)}] &= [K_s][i_s] \\
[u_r^{(k)}] &= [K_r][u_r] \\
[i_r^{(k)}] &= [K_r][i_r] \\
[M_{ss}^{(k)}] &= [K_s][M_{ss}][K_s]^T \\
[M_{rr}^{(k)}] &= [K_r][M_{rr}][K_r]^T \\
[M_{sr}^{(k)}] &= [M_{rs}^{(k)}]^T = [K_s][M_{sr}][K_r]^T
\end{aligned}
$$

Macierze rezystancji i indukcyjności rozproszeń przyjmują w wyniku transformacji postać diagonalną:

$$
\begin{aligned}
[R_s^{(k)}] &= [K_s][R_s][K_s]^T \\
[L_{\sigma s}^{(k)}] &= [K_s][L_{\sigma s}][K_s]^T \\
[R_r^{(k)}] &= [K_r][R_r][K_r]^T \\
[L_{\sigma r}^{(k)}] &= [K_r][L_{\sigma r}][K_r]^T
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Macierze $[M_{ss}^{(k)}]$ i $[M_{rr}^{(k)}]$ mają postać diagonalną, taką samą jak macierz $[M^{(k)}]$ w równaniu (2.20). Bardziej złożoną budowę ma macierz $[M_{sr}^{(k)}(\varphi)]$. Określenie jej ogólnej postaci, dla dowolnej liczby faz m i n, napotyka trudności wynikające z różnego rozmieszczenia elementów niezerowych (macierz $[M_{sr}^{(k)}]$ może w ogóle nie posiadać elementów różnych od zera) i z różnej budowy szeregów wyznaczających te elementy dla różnych rozważanych par faz m i n. Transformacja macierzy $[M_{sr}]$ jest żmudna i pracochłonna, wymaga bowiem przeprowadzenia transformacji poszczególnych składników sumy (3.5), a dodatkowe utrudnienie stanowi zależność jej elementów od kąta obrotu wirnika:

$$
[M_{sr}^{(k)}] = [K_s][M_{sr}(\varphi)][K_r]^T = \sum_{\vartheta=1}^{\infty}[K_s][M_{sr\vartheta}(\varphi)][K_r]^T = \sum_{\vartheta=1}^{\infty}[M_{sr\vartheta}^{(k)}(\varphi)] \tag{3.10}
$$

W rozdziale 3.3 zostanie przedstawiona metoda oparta na interpretacji fizycznej równań maszyny, umożliwiająca określenie macierzy $[M_{sr}^{(k)}(\varphi)]$ w sposób mnemotechniczny bez potrzeby wykonywania obliczeń (3.10).

3.2. Schemat rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne

Do istotnych własności transformacji osiowej należy możliwość jej fizycznej interpretacji. Z modelem matematycznym maszyny we współrzędnych osiowych (3.7) i (3.8) wiąże się prosty model fizyczny, który dla maszyny o dowolnej liczbie faz stojana m i wirnika n - przy wstępnym założeniu, że w rozkładzie przestrzennym przepływu występują kolejne harmoniczne przestrzenne (aż do harmonicznej Ω-tego rzędu) - można sformułować w sposób mnemotechniczny (bez znajomości stransformowanych równań różniczkowych (3.7) i (3.8)).

W rozdz. 2.2 omówiono modele fizyczne uzwojeń maszyn wielofazowych we współrzędnych osiowych oraz szczegółowo opisano sposób ich uproszczonej graficznej reprezentacji w postaci tak zwanych schematów rozkładu uzwojeń m-fazowych na uzwojenia elementarne.

Model maszyny o m-fazowym stojanie i n-fazowym wirniku odpowiadający równaniom maszyny we współrzędnych osiowych powstaje poprzez formalne zestawienie schematu rozkładu m-fazowego uzwojenia stojana ze schematem rozkładu n-fazowego uzwojenia wirnika.

Na rys. 3.1 przykładowo przedstawiono model maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku przy założeniu, że rząd najwyższej harmonicznej przestrzennej wynosi $\Omega = 52$. (Schematy rozkładu osobno dla uzwojenia stojana i wirnika są przedstawione na rys. 2.5 i 2.7). Stojany i wirniki elementarne, znajdujące się w tej samej kolumnie (a więc odpowiadające tym samym harmonicznym przestrzennym) są elektromagnetycznie sprzęgnięte. Składają się one na ciąg elementarnych maszyn o 2- i 1-fazowych stojanach oraz 2- i 1-fazowych wirnikach o różnych orientacjach osi faz.

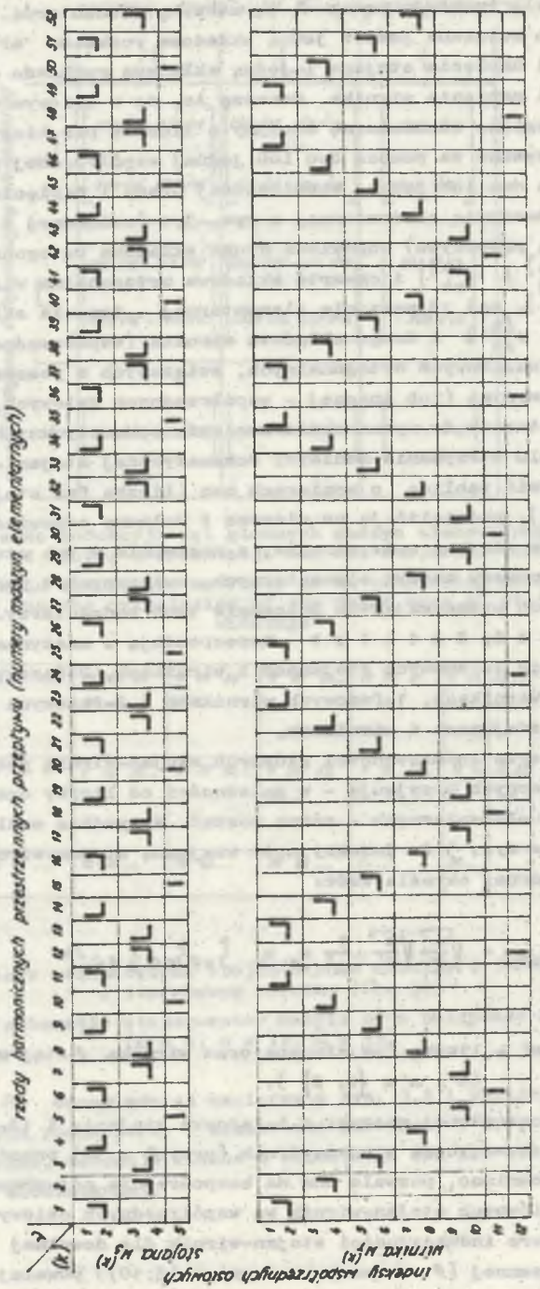
Model maszyny, powstały jako wynik formalnego zestawienia schematów rozkładu m-fazowego uzwojenia stojana i n-fazowego uzwojenia wirnika, będziemy nazywali schematem rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne.

Łatwość w posługiwaniu się nim wynika przede wszystkim z prostej zasady, opisującej wzajemne oddziaływania pomiędzy uzwojeniami elementarnymi: fazy uzwojeń elementarnych, zajmujących ten sam wiersz są galwanicznie połączone, zaś uzwojenia elementarne, zajmujące tę samą kolumnę - elektromagnetycznie sprzężone. Schemat w zwarty i graficznie przejrzysty sposób obrazuje wzajemne powiązania pomiędzy harmonicznymi przestrzennymi pola magnetycznego oraz pomiędzy harmonicznymi a współrzędnymi osiowymi. Na podstawie mnemotechnicznie sporządzonego schematu rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne można z łatwością sformułować równania maszyny we współrzędnych osiowych i w ten sposób uniknąć żmudnych obliczeń związanych z transformacją równań.

3.3. Schematyczna notacja równań maszyny we współrzędnych osiowych

Ze schematem rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne wiąże się uproszczona, zwięzła notacja równań różniczkowych maszyny, oparta na tak zwanych schematycznych macierzach indukcyjności. Charakteryzują one wzajemne związki pomiędzy harmonicznymi przestrzennymi oraz pomiędzy harmonicznymi a współrzędnymi i są bardzo pomocne przy rozważaniu takich zagadnień, jak rozsprzęganie układu równań różniczkowych, redukcja współrzędnych, określanie indukcyjności rozproszenia różnicowego, wyznaczanie pasożytniczych momentów synchronicznych itd. Ponadto opierając się na macierzach schematycznych można w sposób mnemotechniczny odtwarzać równania maszyny we współrzędnych osiowych bezpośrednio ze schematu rozkładu maszyny.

Przemiana elektromechaniczna dokonująca się za pośrednictwem ρ-tej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego jest reprezentowana na



Rys. 3.1. Schemat rozkładu maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku na maszyny elementarne ($\Omega = 52$)

Fig. 3.1. The diagram of the decomposition of a polyphase machine ($m = 5$, $n = 12$) into elementary machines ($\Omega = 52$)

schemacie rozkładu przez ϑ-tą maszynę elementarną. Każda z maszyn elementarnych związana jest z jedną składową rozkładu ortogonalnego wektora prądu i napięcia stojana i jedną składową rozkładu ortogonalnego wektora prądu i napięcia wirnika. Oznacza to, że w osiowym układzie współrzędnych poszczególne elementarne maszyny o liczbie par biegunów od $\vartheta = 1$ do $\vartheta = \Omega$ są opisywane za pomocą dwu lub jednej współrzędnej prądu i napięcia stojana oraz dwu lub jednej współrzędnej prądu i napięcia wirnika. Przykładowo ósmej maszynie elementarnej z rys. 3.1 (związanej z ósmą harmoniczną przestrzenną przepływu) odpowiada druga składowa ortogonalna stojana (współrzędne $w_{s2}^{(k)}$ i $w_{s4}^{(k)}$) i czwarta składowa ortogonalna wirnika (współrzędne $w_{r7}^{(k)}$ i $w_{r8}^{(k)}$), zaś 10 maszynie elementarnej - trzecia składowa stojana (współrzędna $w_{s5}^{(k)}$) i druga składowa wirnika (współrzędne $w_{r3}^{(k)}$ i $w_{r4}^{(k)}$). Znajomość składowych ortogonalnych, związanych z poszczególnymi maszynami elementarnymi (lub inaczej - współrzędnych osiowych, opisujących te maszyny) wystarcza do wyznaczenia macierzy schematycznych maszyny indukcyjnej.

W celu otrzymania macierzy schematycznej stojan - wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ należy sporządzić tablicę o wymiarach mxn (liczba faz stojana x liczba faz wirnika), podzielić ją na wiersze i kolumny odpowiadające składowym ortogonalnym stojana oraz wirnika, a następnie w tak utworzone podmacierze wpisać numery maszyn elementarnych, związanych z parami składowych ortogonalnych wyznaczających położenie tych podmacierzy. Podmacierze o wymiarach 2 x 2, 2 x 1 i 1 x 1 korespondują z maszynami elementarnymi o odpowiednio 2-fazowych stojanach i wirnikach, 2-fazowych stojanach i 1-fazowych wirnikach, 1-fazowych wirnikach i 2-fazowych stojanach oraz 1-fazowych stojanach i wirnikach.

Macierze indukcyjności głównych stojan-wirnik poszczególnych maszyn elementarnych przyjmują - w zależności od liczby oraz orientacji osi faz uzwojeń elementarnych - różną postać. Wszystkie możliwe przypadki zestawiono na rys. 3.2. Indukcyjność wzajemną stojan-wirnik dla ϑ-tej maszyny elementarnej określa wzór:

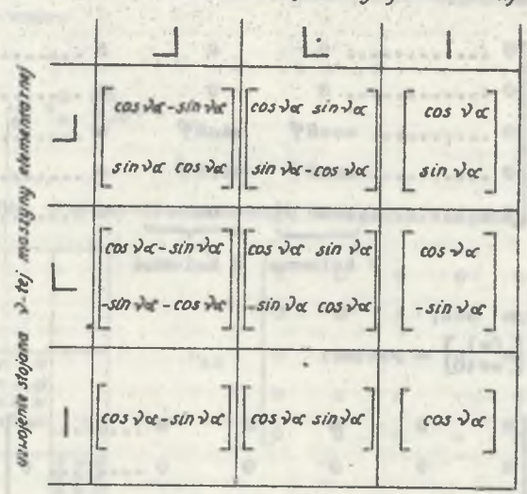
$$L_{sr\vartheta} = \sqrt{\frac{m}{m'}}\sqrt{\frac{n}{n'}}\ \frac{1}{\vartheta^2}\, z_s\, z_r\, \xi_{s\vartheta}\xi_{r\vartheta}\xi_{\varkappa\vartheta}\Lambda \tag{3.11}$$

gdzie:

m', n' - liczba faz stojana oraz wirnika ϑ-tej maszyny elementarnej ($m', n' \in \{1, 2\}$).

Dla rozważanej maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku macierz schematyczną stojan-wirnik (przy $\Omega = 52$) przedstawiono na rys. 3.3. Jak wspomniano, pozwala ona na bezpośrednie odtworzenie macierzy indukcyjności głównych stojan-wirnik we współrzędnych osiowych.

Macierz indukcyjności stojan-wirnik dla dowolnej ϑ-tej harmonicznej przestrzennej (ϑ-ta macierz szeregu (3.10)) powstaje z macierzy schematycznej poprzez formalne podstawienie w miejsce podmacierzy zawierającej



Rys. 3.2. Macierze indukcyjności głównych maszyn elementarnych w zależności od liczby i orientacji osi faz stojana i wirnika

Fig. 3.2. The main inductance matrices of an elementary machine according to the numbers and the orientation of the phase axes of stator and rotor windings

1 11 49...	14 26 34 46...	9 21 39 51...	4 16 44...	19 29 31 41...	6 56 ...	24 36 ...
13 23 37 47...	2 22 38...	3 27 33...	8 28 32 52...	7 18 43...	18 42 ...	12 40 ...
25 35 ...	10 50...	15 45...	20 40...	5...	30...	

Rys. 3.3. Macierz schematyczna stojan-wirnik maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku ($\Omega = 52$)

Fig. 3.3. The schematic stator-rotor matrix of a polyphase machine ($n = 5$, $m = 12$, $\Omega = 52$)

liczbę (rząd) ϑ, odpowiedniej macierzy z rys. 3.2 i wypełnienie wszystkich pozostałych podmacierzy - elementami zerowymi. O tym, którą z macierzy należy wybrać, decyduje liczba i orientacja osi faz stojana i wirnika ϑ-tej maszyny elementarnej.

Przykładowo macierz $\left[M^{(k)}_{sr8}\right]$ ma postać:

$$L_{sr8} \begin{bmatrix} 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\; \cos 8\varphi & \sin 8\varphi & 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\; -\sin 8\varphi & \cos 8\varphi & 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

7 kolumna 8 kolumna

gdzie: $m' = n' = 2$,

zaś macierz $\left[M^{(k)}_{sr10}\right]$ - postać:

$$L_{sr10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\; 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\; 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\; 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\; 0 \\ 0 & 0 & \cos 10\varphi & \sin 10\varphi & 0 \;\ldots\ldots\; 0 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

gdzie:

$m' = 1$, $n' = 2$.

Macierz indukcyjności głównych stojan-wirnik wyznaczamy jako sumę:

$$\left[M^{(k)}_{sr}\right] = \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \left[M^{(k)}_{sr\vartheta}\right] \cong \sum_{\vartheta=1}^{\Omega} \left[M^{(k)}_{sr\vartheta}\right] \qquad (3.14)$$

W ten sam sposób na podstawie schematu rozkładu uzwojenia stojana na uzwojenia elementarne można wyznaczyć macierz schematyczną stojan-stojan. Ma ona postać tablicy o wymiarach mxm (liczba faz stojana m x liczba faz stojana m). Podmacierze na przekątnej głównej zawierają numery uzwojeń elementarnych z poszczególnych wierszy schematu rozkładu stojana (rzędy harmonicznych, generowanych przez kolejne składowe ortogonalne stojana).

Macierz indukcyjności głównych stojan-stojan dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego powstaje z macierzy schematycznej poprzez formalne podstawienie w miejsce podmacierzy zawierającej liczbę (rząd) ϑ, macierzy

$$L_{s\vartheta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ lub macierzy jednoelementowej $L_{s\vartheta}$ [1]

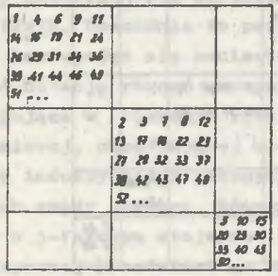
i wypełnienie wszystkich pozostałych podmacierzy elementami zerowymi.

Indukcyjność główną (szczelinową) stojana dla ϑ-tej harmonicznej przestrzennej określa wzór:

$$L_{s\vartheta} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{1}{\vartheta^2} z_s^2 \, \xi^2_{s\vartheta} \Lambda \qquad (3.15)$$

gdzie:

m' - liczba faz ϑ-tego elementarnego uzwojenia stojana.



Rys. 3.4. Macierz schematyczna stojan-stojan maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku ($\Omega = 52$)

Fig. 3.4. The schematic stator-stator matrix of a polyphase machine ($n = 5$, $m = 12$, $\Omega = 52$)

$$L_{s2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.16)$$

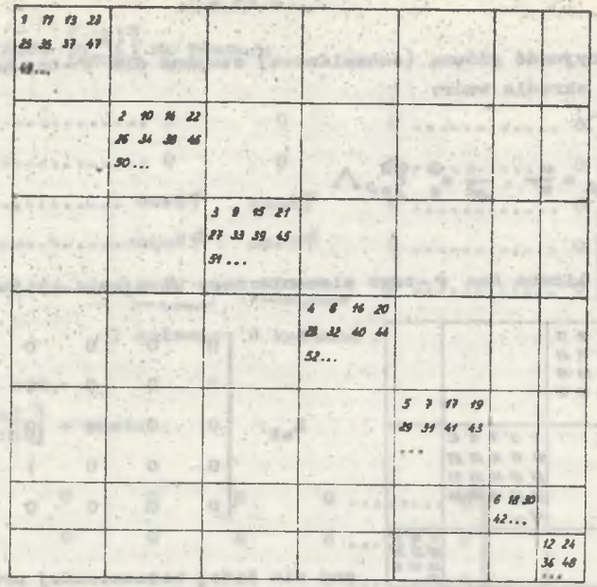
zaś dla 5-tej harmonicznej przestrzennej - postać:

$$L_{s5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

Macierz indukcyjności głównych stojan-stojan jest sumą:

$$\left[M^{(k)}_{ss}\right] = \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \left[M^{(k)}_{ss\vartheta}\right] \cong \sum_{\vartheta=1}^{\Omega} \left[M^{(k)}_{ss\vartheta}\right] \qquad (3.18)$$

W analogiczny sposób można wyznaczyć dla 12-fazowego wirnika macierz schematyczną wirnik-wirnik (rys. 3.5). Odtworzona za jej pomocą przykładowo macierz indukcyjności głównych wirnik-wirnik dla 10 harmonicznej ma postać:



Rys. 3.5. Macierz schematyczna wirnik-wirnik maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku (Ω = 52)

Fig. 3.5. The schematic rotor-rotor matrix of a polyphase machine (n = 5, m = 12, Ω = 52)

$$L_{r10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots\cdots\; 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

gdzie:

$L_{r\vartheta} = \frac{n}{n'} \frac{1}{\vartheta^2} z_r^2 \xi_{r\vartheta}^2 \Lambda$ (dla ϑ = 10),

n' = liczba faz ϑ-tego elementarnego wirnika.

Macierz indukcyjności głównych wirnik-wirnik wyznaczamy jako sumę:

$$\left[M_{rr}^{(k)}\right] = \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \left[M_{rr\vartheta}^{(k)}\right] \cong \sum_{\vartheta=1}^{\Omega} \left[M_{rr\vartheta}^{(k)}\right] \tag{3.20}$$

Macierze schematyczne stojan-wirnik (rys. 3.3), stojan-stojan(rys. 3.4) i wirnik-wirnik (rys. 3.5), wynikające bezpośrednio ze schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne, pozwalają na odtworzenie wszystkich macierzy indukcyjności głównych, a więc stanowią formę ich uproszczonej, zwięzłej notacji. Uzasadnia to przyjętą dla nich nazwę - macierze schematyczne.

Posługując się macierzami schematycznymi można również znacznie uprościć notację równań maszyny przyjmując umowę, że macierz schematyczna występująca w równaniu różniczkowym lub w innym wyrażeniu (np. w formie dwuliniowej, określającej moment elektromagnetyczny) reprezentuje sumę macierzy indukcyjności głównych wszystkich harmonicznych przestrzennych, których rzędy zawiera. Równania różniczkowe stanu elektromagnetycznego maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku (przy Ω = 52) w notacji schematycznej przedstawiono na rys. 3.6. W przypadku gdy uzwojenia fazowe nie sprzęgają się poprzez strumień rozproszenia, macierz indukcyjności rozproszenia $\left[L_6^{(k)}\right]$ posiada jednakowe elementy na przekątnej głównej (takie założenia przyjęto na rys. 3.6). W ogólnym przypadku macierz $[L_6]$ nie jest macierzą diagonalną (chociaż cykliczną), wskutek czego elementy na przekątnej głównej macierzy $\left[L_6^{(k)}\right]$ są różne dla różnych składowych ortogonalnych (podobnie jak w macierzy $[M]$ w równaniu (2.20)).

Notacja schematyczna jest dogodna z wielu różnych względów. Pozwala nie tylko w zwarty sposób zapisywać równania maszyny we współrzędnych osiowych, ale sama w sobie niesie wiele informacji, dotyczących własności, możliwości uproszczenia i rozwiązania modelu matematycznego maszyny.

3.4. Moment elektromagnetyczny maszyny we współrzędnych osiowych

Moment elektromagnetyczny wyrażony wzorem (3.3), przybiera we współrzędnych osiowych w notacji schematycznej dla rozważanej maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku - postać:

$$
M_{sr} = \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \\ \hline i_{s3}^{(k)} \\ i_{s4}^{(k)} \\ \hline i_{s5}^{(k)} \end{bmatrix}^{T} \frac{\partial}{\partial \gamma}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1,11,49\ldots & 14,26,34,46,\ldots & 9,21,39,51\ldots & 4,16,44\ldots & 19,29,31,41\ldots & 6,54\ldots & 24,36\ldots \\
\hline
13,23,37,47\ldots & 2,22,38\ldots & 3,27,33\ldots & 8,28,32,52\ldots & 7,17,43,53\ldots & 18,42\ldots & 12,48\ldots \\
\hline
25,35\ldots & 10,50\ldots & 15,45\ldots & 20,40\ldots & 5\ldots & 30\ldots & \\
\hline
\end{array}
\begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \\ \hline i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \\ \hline i_{r5}^{(k)} \\ i_{r6}^{(k)} \\ \hline i_{r7}^{(k)} \\ i_{r8}^{(k)} \\ \hline i_{r9}^{(k)} \\ i_{r10}^{(k)} \\ \hline i_{r11}^{(k)} \\ \hline i_{r12}^{(k)} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^{T} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{1,11,49\ldots} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^{T} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{14,26,34,46\ldots} \begin{bmatrix} i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^{T} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{24,36\ldots} \begin{bmatrix} i_{r12}^{(k)} \end{bmatrix} +
$$

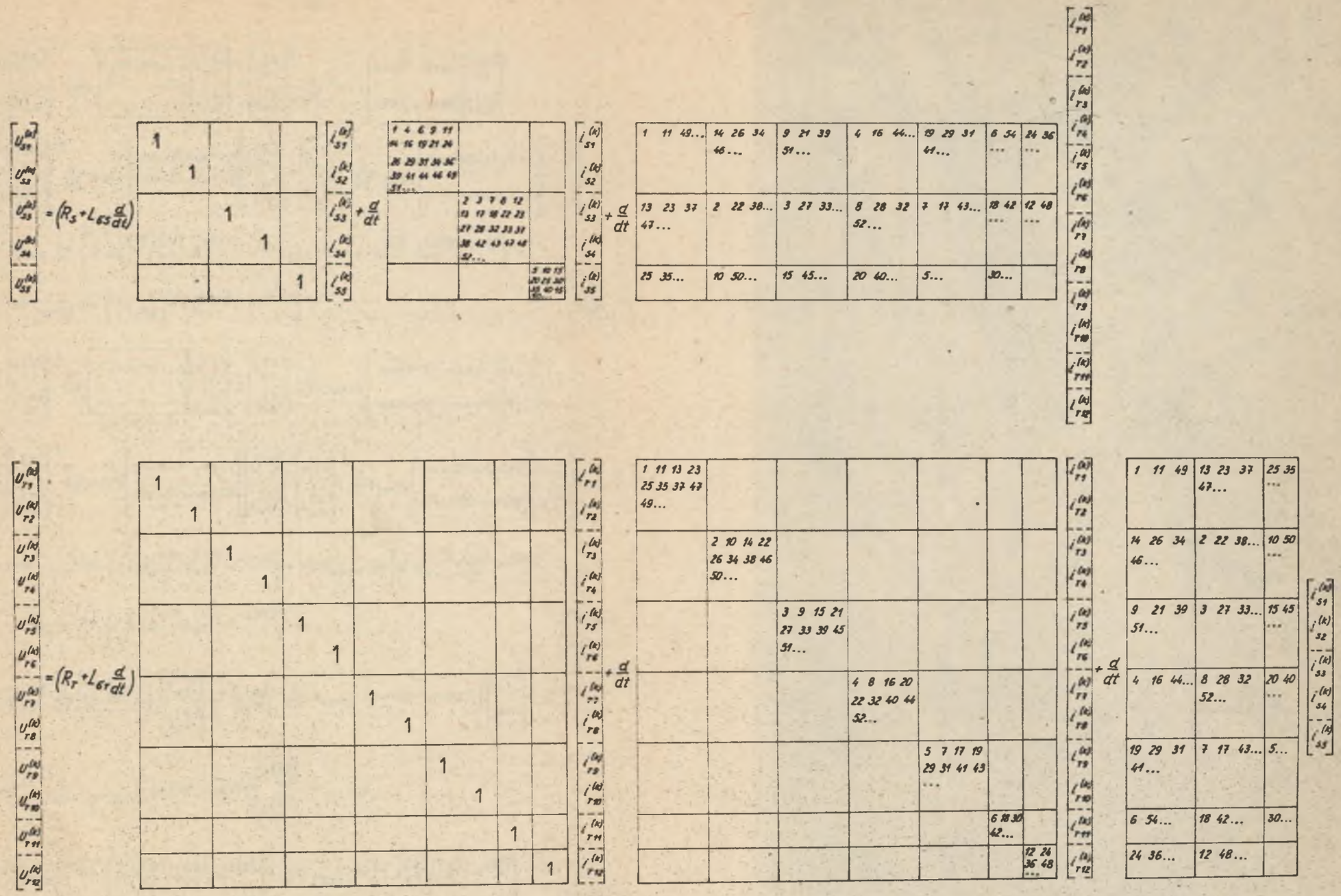
$$
+ \begin{bmatrix} i_{s3}^{(k)} \\ i_{s4}^{(k)} \end{bmatrix}^{T} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{13,23,37,47\ldots} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s3}^{(k)} \\ i_{s4}^{(k)} \end{bmatrix}^{T} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{2,22,38\ldots} \begin{bmatrix} i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} i_{s3}^{(k)} \\ i_{s4}^{(k)} \end{bmatrix}^{T} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{12,48\ldots} \begin{bmatrix} i_{r12}^{(k)} \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} i_{s5}^{(k)} \end{bmatrix} \boxed{25,35\ldots} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s5}^{(k)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{10,50\ldots} \begin{bmatrix} i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} i_{s5}^{(k)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \gamma} \boxed{} \begin{bmatrix} i_{r12}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3.21}
$$

Podobnie jak w równaniach na rys. 3.6, podmacierze schematyczne reprezentują sumy macierzy indukcyjności głównych dla tych harmonicznych przestrzennych, których rzędy zawierają.

Moment elektromagnetyczny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku jest sumą 21 składników (w ogólnym przypadku liczba składników jest iloczynem liczby składowych ortogonalnych stojana i wirnika). Pary złożone ze składowych ortogonalnych wektorów prądów stojana i wirnika wytwarzają moment elektromagnetyczny za pośrednictwem 21 ciągów harmonicznych przestrzennych wyodrębnionych w podmacierzach macierzy schematycznej stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$.

Moment elektromagnetyczny maszyny można wyrazić prościej w zespolonych współrzędnych osiowych, wprowadzonych w rozdz. 2.2 na podstawie wzorów (2.22) i (2.23). W celu zilustrowania toku postępowania przy przekształcaniu formy dwuliniowej z rzeczywistych do zespolonych współrzędnych osiowych przytoczono wyniki obliczeń dla trzech wybranych składników sumy (3.21), a mianowicie pierwszego, drugiego oraz piętnastego:



Rys. 3.6. Notacja schematyczna równań maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku ($\Omega = 52$)

Fig. 3.6. The schematic notation of the equations of a polyphase machine ($n = 5$, $m = 12$, $\Omega = 52$)

$$\begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} \boxed{1,11,49\ldots} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr1} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr11} \begin{bmatrix} \cos 11\varphi & \sin 11\varphi \\ \sin 11\varphi & -\cos 11\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr49} \begin{bmatrix} \cos 49\varphi & -\sin 49\varphi \\ -\sin 49\varphi & -\cos 49\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= L_{sr1} \operatorname{Re}\left\{ j\, \underline{i}_{s1}^{(k)*} \underline{i}_{r1}^{(k)} e^{j\varphi} \right\} + 11 L_{sr11} \operatorname{Re}\left\{ j\, \underline{i}_{s1}^{(k)} \underline{i}_{r1}^{(k)*} e^{j11\varphi} \right\} +$$

$$+ 49 L_{sr49} \operatorname{Re}\left\{ -j\, \underline{i}_{s1}^{(k)*} \underline{i}_{r1}^{(k)*} e^{-j49\varphi} \right\} + \ldots \qquad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} \boxed{14,26,34\ldots} \begin{bmatrix} i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr14} \begin{bmatrix} \cos 14\varphi & -\sin 14\varphi \\ -\sin 14\varphi & -\cos 14\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr26} \begin{bmatrix} \cos 26\varphi & -\sin\varphi \\ \sin 26\varphi & \cos 26\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s1}^{(k)} \\ i_{s2}^{(k)} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr34} \begin{bmatrix} \cos 34\varphi & \sin 34\varphi \\ -\sin 34\varphi & \cos 34\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r3}^{(k)} \\ i_{r4}^{(k)} \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= 14 L_{sr14} \operatorname{Re}\left\{ -j\, \underline{i}_{s1}^{(k)*} \underline{i}_{r2}^{(k)*} e^{-j14\varphi} \right\} + 26 L_{sr26} \operatorname{Re}\left\{ j\, \underline{i}_{s1}^{(k)*} \underline{i}_{r2}^{(k)} e^{j26\varphi} \right\} +$$

$$+ 34 L_{sr34} \operatorname{Re}\left\{ -j\, \underline{i}_{s1}^{(k)*} \underline{i}_{r2}^{(k)} e^{-j34\varphi} \right\} \ldots \qquad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} i_{s5}^{(k)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi} \boxed{25,35\ldots} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s5}^{(k)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr25} \begin{bmatrix} \cos 25 & -\sin 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} i_{s5}^{(k)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi} L_{sr35} \begin{bmatrix} \cos 35\varphi & \sin 35\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1}^{(k)} \\ i_{r2}^{(k)} \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= 25 L_{sr25} \operatorname{Re}\left\{ j\, i_{s3}^{(k)} \underline{i}_{r1}^{(k)} e^{j25\varphi} \right\} + 35 L_{sr35} \operatorname{Re}\left\{ j\, i_{s3}^{(k)} \underline{i}_{r1}^{(k)} e^{j35\varphi} \right\} + \ldots \qquad (3.24)$$

Łatwo zauważyć, że składniki sum (3.22), (3.23) i (3.24) to momenty elektromagnetyczne, wytwarzane odpowiednio przez maszyny elementarne: 1, 11, 49, 14, 26 i 34 oraz 25 i 35. Oznacza to, że suma (3.21) jest sumą momentów elektromagnetycznych poszczególnych maszyn elementarnych ze schematu rozkładu z rys. 3.1, co w interpretacji fizycznej prowadzi do wniosku, że wszystkie maszyny elementarne są umieszczone na wspólnym wale. Inaczej: moment elektromagnetyczny maszyny wielofazowej jest równy sumie momentów elektromagnetycznych poszczególnych maszyn elementarnych. Wzory określające moment elektromagnetyczny ν-tej maszyny elementarnej związanej z λ-tą składową ortogonalną stojana (λ-tą zespoloną współrzędną osiową stojana) oraz z μ-tą składową ortogonalną wirnika (μ-tą zespoloną współrzędną osiową wirnika) w zależności od liczby i orientacji osi faz uzwojenia stojana i wirnika zestawiono na rys. 3.7. Reasumując, schemat rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne pozwala na mnemotechniczne odtworzenie nie tylko równań stanu elektromagnetycznego, ale również równania stanu elektromechanicznego: dla maszyny o m-fazowym stojanie i n-fazowym wirniku wzór na moment elektromagnetyczny we współrzędnych osiowych można wprost sformułować na podstawie schematu rozkładu maszyny i rys. 3.7 bez konieczności wykonywania żmudnych obliczeń związanych z transformacją formy dwuliniowej momentu.

stojan elementarny \ wirnik elementarny	⌋	⌊	|
⌋	$\nu L_{sr\nu} Re\{j \underline{i}_{s\lambda}^{(k)*} \underline{i}_{r\mu}^{(k)} e^{j\nu\gamma}\}$	$\nu L_{sr\nu} Re\{j \underline{i}_{s\lambda}^{(k)*} \underline{i}_{r\mu}^{(k)*} e^{j\nu\gamma}\}$	$\nu L_{sr\nu} Re\{j i_{s\lambda}^{(k)*} i_{r\mu}^{(k)} e^{j\nu\gamma}\}$
⌊	$\nu L_{sr\nu} Re\{-j \underline{i}_{s\lambda}^{(k)*} \underline{i}_{r\mu}^{(k)*} e^{-j\nu\gamma}\}$	$\nu L_{sr\nu} Re\{-j \underline{i}_{s\lambda}^{(k)*} \underline{i}_{r\mu}^{(k)} e^{-j\nu\gamma}\}$	$\nu L_{sr\nu} Re\{i_{s\lambda}^{(k)} i_{r\mu}^{(k)} e^{j\nu\gamma}\}$
|	$\nu L_{sr\nu} Re\{j i_{s\lambda}^{(k)} \underline{i}_{r\mu}^{(k)} e^{j\nu\gamma}\}$	$\nu L_{sr\nu} Re\{j i_{s\lambda}^{(k)} \underline{i}_{r\mu}^{(k)*} e^{j\nu\gamma}\}$	$-\nu L_{sr\nu} i_{s\lambda}^{(k)} \sin \nu\gamma \, i_{r\mu}^{(k)}$

Rys. 3.7. Momenty elektromagnetyczne maszyn elementarnych w zależności od liczby i orientacji osi faz stojana i wirnika

Fig. 3.7. The electromagnetic torques of elementary machines according to the numbers and the orientation of the phase axes of stator and rotor windings

Szerokie zastosowanie w teorii maszyn elektrycznych znajdują transformacje obrotu układu współrzędnych w przestrzeniach aktywnych o kąty $\pm \nu\varphi$. Przy określonych założeniach upraszczających umożliwiają one uzyskiwanie równań różniczkowych maszyny o stałych, niezależnych od kąta obrotu maszyny φ, współczynnikach.

Powszechnie stosuje się transformację będącą złożeniem transformacji 2-osiowej z odpowiednią transformacją obrotu (po raz pierwszy zastosował ją do maszyn synchronicznych R.H. Park [37]. Wprowadzenie (przy pomocy transformacji obrotu) nowego 2-osiowego układu współrzędnych z osiami wirującymi w 2-wymiarowej przestrzeni aktywnej określa się wówczas jako transformację równań na nową płaszczyznę. Określenie to nawiązuje do interpretacji fizycznej transformacji obrotu na modelu maszyny z harmoniczną główną. Transformację obrotu interpretuje się na takim modelu jako zmianę prędkości wirowania faz zastępczego 2-fazowego stojana lub wirnika. Najczęściej wykorzystuje się transformacje obrotu na płaszczyznę stojana (fazy zastępczego 2-fazowego uzwojenia wirnika są nieruchome względem stojana), na płaszczyznę wirnika (fazy zastępczego 2-fazowego uzwojenia stojana są nieruchome względem wirnika) oraz na płaszczyznę synchroniczną (fazy zastępczych 2-fazowych uzwojeń stojana i wirnika są nieruchome względem siebie i wirują z prędkością synchroniczną).

Również i przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu można uprościć wyrażenie na moment elektromagnetyczny (3.21) poprzez transformację równań wirnika z płaszczyzny wirnika na płaszczyzny stojanów poszczególnych maszyn elementarnych. Pociąga to za sobą konieczność rozszerzenia systemu notacji współrzędnych. i-tą zespoloną współrzędną osiową prądu wirnika (wyrażoną na płaszczyźnie wirnika) $\underline{i}_{ri}^{(k)}$ po transformacji na płaszczyznę stojana ν-tej maszyny elementarnej (po transformacji obrotu o kąt $\pm \nu\varphi$) będziemy oznaczać przez $\underline{i}_{ri}^{(k,s\nu)}$. W transformację obrotu można włączyć ponadto współczynnik $\sqrt{\frac{n}{m}} \frac{\xi_{r\nu} \xi_{s\nu} z_{ri}}{\xi_{s\nu} z_{si}}$, wskutek czego w równaniach maszyny w miejsce współczynnika indukcyjności wzajemnej $L_{sr\nu}$ pojawi się współczynnik indukcyjności magnesowania dla ν-tej harmonicznej $L_{\mu\nu}$. Transformacje zespolonych współrzędnych osiowych prądów wirnika na płaszczyzny stojanów ν-tych 2-fazowych maszyn elementarnych w zależności od orientacji osi faz stojanów i wirników elementarnych zestawiono na rys. 3.8, gdzie ponadto podano wyrażenia na momenty elektromagnetyczne w zespolonych współrzędnych osiowych przed i po transformacji współrzędnych wirnika na płaszczyzny stojanów poszczególnych maszyn elementarnych (przyjęto umownie, że moment elektromagnetyczny ν-tej maszyny elementarnej jest wynikiem współdziałania i-tej zespolonej współrzędnej stojana i j-tej zespolonej współrzędnej wirnika, podczas gdy na rys. 3.7 były to zespolone współrzędne λ-ta i μ-ta).

3.5. Rozsprzęganie się układu równań różniczkowych maszyny

Zasadnicze znaczenie dla uproszczenia modelu matematycznego maszyny we współrzędnych osiowych ma zbadanie możliwości rozsprzęgania się układu równań różniczkowych wirnika oraz stojana. Jak wykażemy, rozsprzęganie się układu równań różniczkowych na równania dla poszczególnych współrzęd-

Maszyna elementarna	Transformacja obrotu zespolonych współrz. osiowych wirnika na płaszczyźnie stojana ν-tej maszyny elementarnej	Moment elektromagnetyczny w zespolonych współr. osiowych	Moment elektromagnetyczny we współr. osiowych na płaszczyźnie ν-tego stojana elementarnego
stojan / wirnik	$\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)} = \sqrt{\frac{n}{m}}\,\frac{z_r\,\xi_{r\nu}\,\xi_{k\nu}}{z_s\,\xi_{s\nu}}\,e^{j\nu\gamma}\,\underline{i}_{rj}^{(k)}$	$\nu L_{s\nu}\,Re\left\{j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k)}\,e^{j\nu\gamma}\right\}$	$\nu L_{\mu\nu}\,Re\left\{j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)}\right\}$
stojan / wirnik	$\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)} = \sqrt{\frac{n}{m}}\,\frac{z_r\,\xi_{r\nu}\,\xi_{k\nu}}{z_s\,\xi_{s\nu}}\,e^{j\nu\gamma}\,\underline{i}_{rj}^{(k)*}$	$\nu L_{s\nu}\,Re\left\{j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k)*}\,e^{j\nu\gamma}\right\}$	$\nu L_{\mu\nu}\,Re\left\{j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)}\right\}$
stojan / wirnik	$\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)} = \sqrt{\frac{n}{m}}\,\frac{z_r\,\xi_{r\nu}\,\xi_{k\nu}}{z_s\,\xi_{s\nu}}\,e^{-j\nu\gamma}\,\underline{i}_{rj}^{(k)*}$	$\nu L_{s\nu}\,Re\left\{-j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k)*}\,e^{-j\nu\gamma}\right\}$	$\nu L_{\mu\nu}\,Re\left\{-j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)}\right\}$
stojan / wirnik	$\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)} = \sqrt{\frac{n}{m}}\,\frac{z_r\,\xi_{r\nu}\,\xi_{k\nu}}{z_s\,\xi_{s\nu}}\,e^{-j\nu\gamma}\,\underline{i}_{rj}^{(k)}$	$\nu L_{s\nu}\,Re\left\{-j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k)}\,e^{-j\nu\gamma}\right\}$	$\nu L_{\mu\nu}\,Re\left\{-j\underline{i}_{si}^{(k)*}\,\underline{i}_{rj}^{(k,s\nu)}\right\}$

Rys. 3.8. Transformacje obrotu dla zespolonych współrzędnych osiowych wirnika oraz momenty elektromagnetyczne na płaszczyznach ν-tych stojanów elementarnych

Fig. 3.8. Rotation transformations for complex axis coordinates and elektromagnetic torque expressions connected with various elementary stators

nych sprowadza się w zasadzie do pomijania odpowiednich ciągów harmonicznych przestrzennych w modelu matematycznym maszyny. Rozważmy to zagadnienie na przykładzie 2-biegunowej maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku, której schemat rozkładu na maszyny elementarne przedstawiono na rys. 3.1, zaś równania różniczkowe w notacji syntetycznej - na rys. 3.6.

Macierze schematyczne reprezentują sumy macierzy indukcyjności głównych dla harmonicznych o rzędach $\nu = 1,2,\ldots,50$, a zarazem poprzez skupioną i zwartą formę zapisu dostarczają istotnych informacji o budowie poszczególnych składników sumy i wzajemnych relacjach pomiędzy nimi. Pierwszą podmacierz na przekątnej głównej macierzy schematycznej stojan-stojan $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ wypełnia ciąg harmonicznych przestrzennych, generowanych przez pierwszą składową ortogonalną prądu stojana (pierwszą i drugą współrzędną stojana). Ciąg ten rozpada się na siedem ciągów wyodrębnionych w kolejnych siedmiu podmacierzach pierwszego wiersza macierzy schematycznej stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$. Poprzez nie sprzęga się pierwsza składowa ortogonalna stojana (pierwsza i druga współrzędna) z kolejnymi siedmioma składowymi wirnika (współrzędnymi: pierwszą i drugą, trzecią i czwartą, piątą i szóstą, siódmą i ósmą, dziewiątą i dziesiątą, jedenastą oraz dwunastą). Druga podmacierz z przekątnej głównej macierzy syntetycznej $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ zawiera ciąg harmonicznych przestrzennych generowanych przez drugą składową ortogonalną stojana (trzecią i czwartą współrzędną stojana). Ciąg ten znów dzieli się na siedem ciągów, wyszczególnionych w siedmiu podmacierzach drugiego wiersza macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$. Poprzez nie druga składowa ortogonalna

stojana sprzęga się ze składowymi ortogonalnymi wirnika. Ciąg harmonicznych przestrzennych, generowanych przez trzecią składową ortogonalną stojana (piątą współrzędną stojana) jest zawarty w ostatniej podmacierzy z przekątnej głównej macierzy schematycznej $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$. Siedem kolejnych podmacierzy trzeciego wiersza macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ wypełniają ciągi harmonicznych, poprzez które trzecia składowa ortogonalna stojana sprzęga się z kolejnymi składowymi ortogonalnymi wirnika.

Takie samo rozumowanie można przeprowadzić dla układu równań różniczkowych wirnika. Podmacierze z przekątnej głównej macierzy schematycznej wirnik-wirnik $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$ zawierają harmoniczne przestrzenne generowane przez kolejne składowe ortogonalne wirnika. Trzy kolumny macierzy schematycznej wirnik-stojan $\left[M_{rs}^{(k)}\right]$ dzielą każdy z tych ciągów na trzy ciągi harmonicznych, poprzez które składowe wirnika sprzęgają się z pierwszą, drugą i trzecią składową ortogonalną stojana.

Reasumując, wszystkie harmoniczne przestrzenne można podzielić na tyle ciągów, ile wynosi iloczyn liczby składowych ortogonalnych stojana i wirnika, w rozważanym przypadku na 21 ciągów. Ciągi te są zawarte w poszczególnych podmacierzach macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ i wskazują poprzez jakie harmoniczne przestrzenne pola magnetycznego składowe ortogonalne stojana (pary lub pojedyncze współrzędne osiowe stojana) sprzęgają się ze składowymi ortogonalnymi wirnika (parami lub pojedynczymi współrzędnymi osiowymi wirnika).

Powyższe rozważania wiążą się ściśle z rozsprzęganiem się układu równań różniczkowych maszyny. Macierze indukcyjności stojan-stojan $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ oraz wirnik-wirnik $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$ - podobnie jak i macierze rezystancji $\left[R_s^{(k)}\right]$, $\left[R_r^{(k)}\right]$ i indukcyjności rozproszenia $\left[L_{\sigma s}^{(k)}\right]$, $\left[L_{\sigma r}^{(k)}\right]$ - są macierzami diagonalnymi. O możliwości rozsprzęgnięcia układu równań różniczkowych maszyny decyduje więc postać macierzy stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$.

Załóżmy, że w modelu matematycznym maszyny pominięto harmoniczne przestrzenne pola magnetycznego zawarte w i-tym wierszu macierzy schematycznej stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$. Wynikiem takiego uproszczenia (założenia) staje się odsprzęgnięcie równań różniczkowych stojana dla współrzędnych odpowiadających i-tej składowej ortogonalnej stojana (np. a-tej i b-tej współrzędnej osiowej stojana). Pominięcie harmonicznych przestrzennych z j-tej kolumny macierzy syntetycznej stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ (j-tego wiersza macierzy schematycznej wirnik-stojan $\left[M_{rs}^{(k)}\right]$) prowadzi natomiast do odsprzęgnięcia równań różniczkowych wirnika, odpowiadających j-tej składowej ortogonalnej wirnika (np. c-tej i d-tej współrzędnej osiowej wirnika). Równania dla a-tej i b-tej współrzędnej stojana oraz dla c-tej i d-tej współrzędnej wirnika stają się wówczas autonomiczne

$$u_{sa}^{(k)} = R_s\, i_{sa}^{(k)} + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_{sa}^{(k)}$$

$$u_{sb}^{(k)} = R_s\, i_{sb}^{(k)} + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_{sb}^{(k)} \qquad (3.25)$$

$$u_{rc}^{(k)} = R_r\, i_{rc}^{(k)} + L_{\sigma r} \frac{d}{dt} i_{rc}^{(k)}$$

$$u_{rd}^{(k)} = R_r\, i_{rd}^{(k)} + L_{\sigma r} \frac{d}{dt} i_{rd}^{(k)} \qquad (3.26)$$

a składowe związane z nimi przestają uczestniczyć w przemianie elektromechanicznej (nie wywierają wpływu na wartość momentu elektromagnetycznego, a tylko na wartości prądów i napięć fazowych w maszynie). Dla ustalenia uwagi założono, że uzwojenia fazowe maszyny nie sprzęgają się poprzez strumienie rozproszenia, wskutek czego współczynniki indukcyjności rozproszenia w równaniach (3.25) i (3.26) są jednakowe dla poszczególnych składowych ortogonalnych stojana oraz dla poszczególnych składowych ortogonalnych wirnika.

3.6. Uogólnienie indukcyjności rozproszenia różnicowego

Jeśli przy upraszczaniu układu równań różniczkowych maszyny przystaniemy na pewną niekonsekwencję, a mianowicie pominiemy wybrane ciągi harmonicznych przy obliczaniu elementów macierzy $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$, a uwzględnimy - przy obliczaniu elementów macierzy $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ i $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$, wówczas rozsprzęganie się układu równań różniczkowych przebiega w taki sam, przedstawiony powyżej sposób, natomiast obliczenia elektromagnetyczne dla harmonicznych, uwzględnionych w modelu matematycznym stają się znacznie dokładniejsze. W wyniku wspomnianej niekonsekwencji w układzie równań różniczkowych pojawiają się dodatkowe współczynniki w postaci sum indukcyjności głównych dla harmonicznych przestrzennych, pominiętych w trakcie wyznaczania elementów macierzy $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$. Te nowe współczynniki, złożone z sum indukcyjności głównych, można poprzez dodawanie łączyć w poszczególnych równaniach ze współczynnikami indukcyjności rozproszeń, przez co nabierają one charakteru dodatkowych składników tych indukcyjności. Nazwiemy je współczynnikami indukcyjności rozproszenia różnicowego, albowiem poprzez ich wprowadzenie następuje pomniejszenie błędów wynikających z "różnicy" pomiędzy pełnym (rzeczywistym) widmem harmonicznym pola magnetycznego w szczelinie a widmem uwzględnionym w modelu matematycznym.

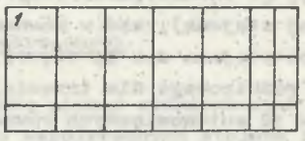
Uwzględnienie określonych harmonicznych przy obliczaniu elementów macierzy $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ i $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$, a pominięcie przy obliczaniu elementów macierzy $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ oznacza w interpretacji fizycznej, że strumienie magnetyczne

odpowiadające tym harmonicznym są wytwarzane przez uzwojenia maszyny i przenikają przez szczelinę powietrzną, ale nie sprzęgają się z uzwojeniami strony przeciwnej i nie uczestniczą w przemianie elektromechanicznej. W tym więc sensie strumienie te są strumieniami rozproszenia, a związane z nimi indukcyjności - indukcyjnościami rozproszenia.

Pojęcie indukcyjności rozproszenia różnicowego (indukcyjności rozproszenia szczelinowego) jest dobrze znane w teorii maszyn, zwłaszcza w odniesieniu do modelu maszyny z harmoniczną główną, gdzie wpływ wyższych harmonicznych przestrzennych uwzględnia się za pomocą współczynników rozproszenia różnicowego, wyznaczonych na podstawie krzywej rozkładu przepływu, wykresu Görgesa bądź bezpośrednio w postaci szeregów [5 ; 27 ; 28 ; 56]. Metody te są wciąż rozwijane w celu dokładniejszego uwzględnienia różnych zjawisk towarzyszących (tłumienia harmonicznych stojana przez klatkę wirnika, tłumienia harmonicznych wirnika przez uzwojenie stojana połączone w trójkąt lub gałęzie równoległe w stojanie, wpływu otwarcia żłobka, wpływu skosu wirnika itp.), jak też uproszczenia obliczeń. Sposób uwzględnienia rozłożenia przepływu na szerokości szczerbiny dla metody opartej na wykresie Görgesa podano w pracy [5]. Zagadnienie właściwego wyboru składników przy bezpośrednim sposobie wyznaczania indukcyjności rozproszenia różnicowego jako szeregów przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej zostało rozważone szczegółowo w monografii [56].

Indukcyjność rozproszenia różnicowego w klasycznym ujęciu jest związana z polem magnetycznym, będącym "różnicą" pomiędzy rzeczywistym rozkładem pola magnetycznego a rozkładem sinusoidalnym harmonicznej głównej. W niniejszym rozdziale pojęcie indukcyjności rozproszenia zostało wprowadzone w odmienny sposób, odnoszący się do maszyn wielofazowych przy dowolnej liczbie uwzględnionych harmonicznych przestrzennych. Sposób ten jest szczególnie przydatny w analizie stanów nieustalonych na maszynie cyfrowej.

Wykażemy, że tak określona indukcyjność rozproszenia różnicowego w szczególnym przypadku modelu matematycznego maszyny z jedną główną harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego sprowadza się do klasycznej postaci znanej z teorii maszyn. Rozumowanie to przeprowadzimy na przykładzie 2-biegunowej maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku. Macierz syntetyczna $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ z rys. 3.5 po ograniczeniu się do głównej (w tym przypadku do pierwszej) harmonicznej przestrzennej przyjmuje postać przedstawioną na rys. 3.9.



Rys. 3.9. Macierz schematyczna stojan-wirnik maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku ($\Omega = 1$)

Fig. 3.9. The schematic stator-rotor matrix of a polyphase machine ($m = 5$, $n = 12$, $\Omega = 1$)

Równania różniczkowe dla 3, 4 i 5 współrzędnej stojana oraz dla 3,4,5...12 współrzędnej wirnika stają się autonomiczne i przybierają postać analogiczną do równania (3.25) oraz (3.26). Przemiana elektromechaniczna w maszynie dokonuje się za pośrednictwem pierwszej i drugiej współrzędnej stojana (pierwszej składowej ortogonalnej stojana) oraz pierwszej i drugiej współrzędnej wirnika (pierwszej składowej ortogonalnej wirnika). Błędy w obliczeniach elektromagnetycznych związanych z główną harmoniczną przestrzenną można zmniejszyć poprzez uwzględnienie wyższych harmonicznych przy obliczaniu elementów macierzy $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ i $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$. W równaniach różniczkowych stojana, odpowiadających pierwszej i drugiej współrzędnej, do indukcyjności rozproszenia $L_{\sigma s}$ należy dodać sumę indukcyjności głównych stojana dla 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19... harmonicznej (indukcyjność rozproszenia różnicowego dla pierwszej składowej ortogonalnej stojana $\sum_{\vartheta = 4,6,9,11,...} L_{s\vartheta}$). Podobnie w równaniach różniczkowych wirnika dla pierwszej i drugiej współrzędnej należy do indukcyjności rozproszenia $L_{\sigma r}$ dołączyć sumę indukcyjności głównych wirnika dla 11, 13, 23, 25, 35, 37... harmonicznej (indukcyjność rozproszenia różnicowego wirnika dla pierwszej składowej ortogonalnej wirnika $\sum_{\vartheta = 11,13,23...} L_{r\vartheta}$). Tak wyznaczone wartości współczynników indukcyjności rozproszenia różnicowego stojana i wirnika przy obliczeniach w stanach ustalonych zwykle pomniejsza się ze względu na tłumiące oddziaływania reakcji uzwojeń strony przeciwnej. Dla współczynnika indukcyjności rozproszenia różnicowego wirnika szczególnie istotną rolę odgrywa reakcja stojana, związana z prądami nie zamykającymi się przez źródło zasilania maszyny. Prądy takie pojawiają się wówczas, gdy fazy stojana są połączone w wielobok (w przypadku maszyn 3-fazowych - w trójkąt) [12]. Pomniejszenia współczynników indukcyjności rozproszenia różnicowego dokonuje się tradycyjnie przy pomocy tzw. współczynników tłumienia. Konsekwencją przeprowadzonego rozszerzenia pojęcia indukcyjności rozproszenia różnicowego na maszyny wielofazowe są współczynniki rozproszenia różnicowego dla pozostałych składowych ortogonalnych stojana (dla 3, 4, 5 współrzędnej stojana) oraz wirnika (dla 3, 4, 5...11, 12 współrzędnej wirnika). W autonomicznych równaniach dla 3 i 4 współrzędnej stojana indukcyjność rozproszenia stojana należy powiększyć o sumę indukcyjności głównych stojana dla 2, 3, 7, 8, 12, 13... harmonicznej (o indukcyjność rozproszenia różnicowego dla drugiej składowej ortogonalnej stojana), zaś w równaniu dla 5 współrzędnej - o sumę indukcyjności głównych stojana dla 5, 10, 15, 20...harmonicznej (o indukcyjność rozproszenia różnicowego dla trzeciej składowej ortogonalnej stojana). Analogicznie w 12 autonomicznych równaniach wirnika pojawią się dodatkowe składniki indukcyjności rozproszenia wirnika w postaci 7 współczynników indukcyjności rozproszenia różnicowego dla siedmiu składowych ortogonalnych wirnika.

Wyznaczanie współczynników indukcyjności rozproszenia różnicowego znacznie ułatwia notacja schematyczna równań. Macierze schematyczne bezpośrednio wskazują na indukcyjności główne, które należy sumować.

Indukcyjność rozproszenia różnicowego dla i-tej składowej ortogonalnej stojana (wirnika) jest sumą indukcyjności głównych stojana (wirnika) dla harmonicznych, zawartych w i-tej podmacierzy z przekątnej głównej macierzy syntetycznej stojan-stojan $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ (wirnik-wirnik $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$), a nie zawartych w i-tym wierszu macierzy syntetycznej stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ (wirnik-stojan $\left[M_{rs}^{(k)}\right]$).

Załóżmy przykładowo, że w modelu matematycznym 2-biegunowej maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku pomijamy harmoniczne przestrzenne z 4 kolumny i 2 wiersza macierzy syntetycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$. W pięciu równaniach stojana indukcyjność rozproszenia $L_{\sigma s}$ należy powiększyć: w równaniu dla pierwszej i drugiej współrzędnej o indukcyjność rozproszenia różnicowego dla pierwszej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{s\vartheta}$, gdzie = 4,16,44..., w równaniu dla trzeciej i czwartej współrzędnej o indukcyjność rozproszenia różnicowego dla drugiej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{s\vartheta}$, gdzie: ϑ = 2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18, 22, 23, 27, 28, 32, 33, 37, 38, 42, 43, 47, 48, 52..., oraz w równaniu dla piątej współrzędnej o indukcyjność rozproszenia różnicowego dla trzeciej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{s\vartheta}$, gdzie: ϑ = 5, 10, 15, 25, 30, 35, 45, 50... W równaniach różniczkowych wirnika pojawią się indukcyjności rozproszenia różnicowego: dla pierwszej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{r\vartheta}$($\vartheta$ = 13, 23, 37, 47...), dla drugiej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{r\vartheta}$($\vartheta$ = 2,22,38...), dla trzeciej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{r\vartheta}$($\vartheta$ = 3, 27, 33...), dla czwartej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{r\vartheta}$ (ϑ = 4, 8, 16, 20, 28, 32, 40, 44, 52...), dla piątej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{r\vartheta}$($\vartheta$ = 7, 17, 43...), dla szóstej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{r\vartheta}$ (ϑ = 18, 42...) oraz dla siódmej składowej ortogonalnej $\sum_{\vartheta} L_{r\vartheta}$($\vartheta$ = 12, 48...).

3.7. Redukcja liczby współrzędnych

Z rozsprzęganiem się układu równań różniczkowych bezpośrednio wiąże się problem redukcji liczby współrzędnych stojana i wirnika w modelu matematycznym maszyny. Jeśli osiowe współrzędne napięcia w równaniach autonomicznych typu (3.25) lub (3.26) są równe zero, to współrzędne prądu również są równe zero (równania (3.25) i (3.26) mają rozwiązania zerowe).

Współrzędne te przestają uczestniczyć w opisie stanu nieustalonego maszyny, a odpowiadające im równania mogą być z układu równań różniczkowych usunięte. W ten sposób liczba współrzędnych w modelu matematycznym maszyny ulega redukcji.

W indukcyjnych maszynach klatkowych wszystkie współrzędne napięcia wirnika są zawsze równe zero. Tak samo w maszynach pierścieniowych zasilanych jednostronnie. Pominięcie harmonicznych przestrzennych powodujące odsprzęgnięcie równań dla wybranych współrzędnych wirnika prowadzi więc w konsekwencji do wyeliminowania tych współrzędnych z modelu maszyny.

Również w przypadku stojana niektóre współrzędne osiowe napięć zasilających mogą być równe zero. Przykładowo, jeśli w rozważanej maszynie 2-biegunowej o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku zwartym na zaciskach pominiemy ciągi wyższych harmonicznych przestrzennych z 4 i z 7 kolumny macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ (rys. 3.3), to z modelu matematycznego można usunąć 7 i 8 oraz 12 współrzędną wirnika. Jeśli maszynę zasilimy symetrycznym 5-fazowym układem napięć (pierwszą lub czwartą składową symetryczną), a w polu magnetycznym w szczelinie pominiemy harmoniczne przestrzenne z 2 i 3 wiersza macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$, to z modelu matematycznego można usunąć 3, 4 i 5 współrzędną stojana. Prowadzone dotychczas rozważania dotyczące rozsprzęgania się układu równań różniczkowych i redukcji liczby współrzędnych odnosiły się do najogólniejszego teoretycznie przypadku, a mianowicie do maszyn z uzwojeniami stojana i wirnika generującymi wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne. Zazwyczaj jednak widma przepływów stojana i wirnika są znacznie rzadsze, a wówczas - o ile rzędy brakujących harmonicznych pola magnetycznego pokrywają się z ciągami zawartymi w wierszach i kolumnach macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ - rozsprzęganie układu równań różniczkowych i redukcja współrzędnych dokonuje się w sposób naturalny (naturalna redukcja współrzędnych), a nie jako wynik przyjmowanych założeń upraszczających. W maszynach z rozrzedzonym widmem brak określonych harmonicznych pola magnetycznego może być spowodowany nie tylko brakiem uzwojeń elementarnych, odpowiedzialnych za ich generowanie, ale również - stanem bezprądowym uzwojeń elementarnych (określone ciągi uzwojeń elementarnych istnieją, ale nie są galwanicznie zasilane i nie indukują się w nich siły elektromotoryczne).

Zasadnicze przyczyny rozrzedzania się widm przepływu uzwojeń stojana i wirnika to: wielobiegunowość uzwojenia, symetria uzwojenia, zerowanie się współczynników uzwojenia oraz galwaniczne kojarzenie faz.

Uzwojenia wielobiegunowe o q całkowitym (uzwojenia proste) mogą generować tylko harmoniczne o rzędach $\nu = p, 2p, 3p, 4p...$ ($\nu' = 1, 2, 3, 4...$).

Własność symetrii przypisujemy uzwojeniom, których krzywe przepływu pod kolejnymi biegunami są identyczne. Posiadają ją uzwojenia proste 2m-strefowe (uzwojenia dwuwarstwowe, uzwojenia jednowarstwowe z grupami dzielonymi) przy dowolnym poskoku oraz uzwojenia proste m-strefowe (uzwojenia jednowarstwowe z grupami pełnymi) przy poskoku średnicowym.

Uzwojenia takie wytwarzają harmoniczne przestrzenne przepływu o rzędach względnych nieparzystych ($\nu' = 1, 3, 5, 7,...$).

Współczynniki uzwojenia przyjmują wartość zero dla harmonicznych o rzędach $\nu = 2cmp$ i $\nu = c\frac{z}{y}$ ($c = 1, 2, 3...$). Przykładowo na skutek zerowania się współczynnika skrótu n-żłobkowe uzwojenie klatkowe ($n = z_2$, $q = 1$, $y = 1$) nie generuje harmonicznych przestrzennych o rzędach $\nu = cn$.

Uzwojenie maszyn 3-fazowych można łączyć w gwiazdę lub w trójkąt (ogólnie przy $m > 3$ w wielobok). Połączenie uzwojenia m-fazowego w gwiazdę bez przewodu zerowego powoduje, że $i_m^{(k)} = 0$. Z układu równań różniczkowych maszyny można wówczas usunąć m-tą współrzędną (w przypadku uzwojenia 3-fazowego - trzecią współrzędną). Również w n-żłobkowym wirniku klatkowym połączenie prętów pierścieniami zwierającymi prowadzi do warunku $i_n^{(k)} = 0$. Brak n-tej współrzędnej osiowej wirnika w widmie przepływu wirnika klatkowego ma więc dwie przyczyny: zerową wartość współczynnika skrótu dla harmonicznych $\nu = cn$ oraz połączenie galwaniczne prętów klatki pierścieniami zwierającymi. Dla m-fazowego uzwojenia połączonego w wielobok zachodzi: $u_m^{(k)} = 0$ (w przypadku uzwojenia 3-fazowego $u_3^{(k)} = 0$).

Dla przeprowadzenia naturalnej redukcji współrzędnych usuwamy wpierw ze schematu rozkładu maszyny wszystkie uzwojenia elementarne, odpowiadające harmonicznym przestrzennym przepływu, które nie są generowane przez stojan i wirnik. Puste wiersze schematu wskazują wprost na zespolone współrzędne osiowe, które można opuścić. i-ty wiersz schematu można usunąć jednak nie tylko wówczas, gdy jest pusty, ale również i wtenczas, gdy przez zawarte w nim uzwojenia elementarne prąd nie płynie. Jeżeli i-ta zespolona współrzędna osiowa napięcia wirnika $\underline{u}_{ri}^{(k)}$ równa się zero, to w połączonych szeregowo uzwojeniach elementarnych i-tego wiersza schematu rozkładu wirnika prąd może pojawić się tylko wówczas, gdy chociaż jedno uzwojenie elementarne wirnika znajduje się w tej samej kolumnie, co uzwojenie elementarne stojana. Jeśli żadne z uzwojeń elementarnych, należących do rozważanego wiersza schematu wirnika, nie sprzęga się z uzwojeniem elementarnym stojana, to wiersz ten wraz z odpowiadającą mu zespoloną współrzędną osiową wirnika można pominąć. Takie samo rozumowanie można przeprowadzić w stosunku do wierszy schematu oraz współrzędnych stojana. W następstwie opisanego postępowania otrzymujemy zredukowany schemat rozkładu maszyny, zawierający zredukowaną liczbę współrzędnych osiowych stojana i wirnika.

Reasumując, wiersze z uzwojeniami elementarnymi, w których prądy są równe zeru, pojawiają się na schemacie rozkładu jako wtórny efekt rozrzedzenia widm przepływu. Szczególnie często występują w indukcyjnych maszynach klatkowych wielobiegunowych, w których wszystkie współrzędne osiowe napięcia wirnika są równe zeru, a widma przepływów stojanów znacznie rozrzedzone na skutek wielobiegunowości uzwojenia. W literaturze dowodzi się metodami algebraicznymi dla 3-fazowej maszyny klatkowej (o 6 strefach fazowych w stojanie), że liczba współrzędnych prądów i napięć wirnika, ule-

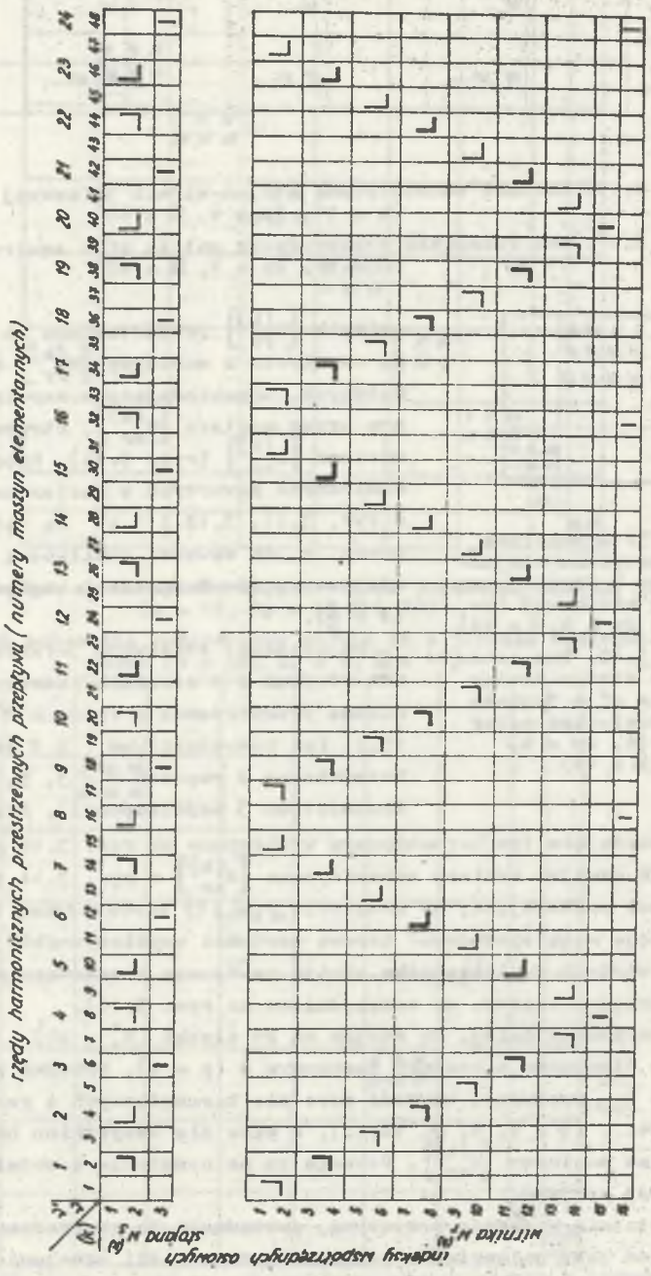
gających redukcji, zależy od stosunku liczby żłobków n i liczby par biegunów p [57 ; 50]. W pracy [63] dokonano korekty tego wniosku wykazując, że zasadniczą rolę odgrywa nie stosunek $\frac{n}{p}$, ale $\frac{n}{2p}$. Stosunek ten decyduje o tym, czy w szczelinie powietrznej maszyny klatkowej pojawią się harmoniczne o rzędach $\vartheta < p$ (podharmoniczne).

Istotną zaletą zredukowanego schematu rozkładu maszyny jest to, że pozwala on wprost określić rzędy harmonicznych przestrzennych zawartych w polu magnetycznym maszyny (są to po prostu numery kolumn zredukowanego schematu). Jeśli rzędy te posiadają wspólny dzielnik (oznaczmy NWD przez a), wówczas w miejsce rzędów ϑ można wprowadzić względne wartości rzędów ϑ'' (gdzie: $\vartheta'' = \frac{\vartheta}{a}$). W przypadku, gdy NWD wynosi p, mamy $\vartheta'' = \vartheta' = \frac{\vartheta}{p}$. „a" jest równocześnie najniższym rzędem harmonicznej przestrzennej w widmie pola magnetycznego maszyny. Jeśli a = p, to jest to po prostu harmoniczna główna (pracująca), gdy a < p - podharmoniczna.

Rozważmy zagadnienie naturalnej redukcji współrzędnych na kilku wybranych przykładach. Jako pierwszą rozważmy 3-fazową maszynę klatkową o danych n = 16 i 2p = 4 (przy Ω = 48).

Przyjmijmy na wstępie, że uzwojenie wirnika może generować wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne przepływu, zaś uzwojenie stojana - harmoniczne o rzędach ϑ = cp (gdzie: c = 1, 2, 3, 4...). Schemat rozkładu takiej maszyny na maszyny elementarne przedstawia rys. 3.10 (Ω = 48). Na jego podstawie łatwo wykazać, że prądy wszystkich uzwojeń elementarnych wirnika, związanych z 1, 3, 5 i 7-składową ortogonalną wirnika (1, 2, 5, 6, 9, 10, 13 i 14 współrzędną osiową wirnika) są równe zeru. Dzieje się tak dlatego, ponieważ uzwojenie wirnika jest zwarte na zaciskach i prądy w uzwojeniach elementarnych z 1, 3, 5 i 7 wiersza schematu rozkładu wirnika mogą powstać tylko pod wpływem napięć zasilających stojan (prądów w uzwojeniach elementarnych stojana). Tymczasem w żadnej spośród kolumn schematu, odpowiadających rozważanym uzwojeniom elementarnym wirnika, nie ma uzwojenia elementarnego stojana. Prądy w uzwojeniach elementarnych zajmujących 1, 3, 5 i 7 wiersz nie mogą więc być bezpośrednio wyindukowane, ani też nie mogą pojawić się w wyniku połączenia galwanicznego z innymi uzwojeniami elementarnymi należącymi do tego samego wiersza, bo w żadnym z nich siła elektromotoryczna nie jest indukowana. Oznacza to, że schemat rozkładu wirnika można zredukować poprzez usunięcie 1, 3, 5 i 7 wiersza (1, 2, 5, 6, 9, 10, 13 i 14 współrzędnej wirnika). Wirniki elementarne, które pozostaną w zredukowanym schemacie, wyróżniono grubą linią. Numery kolumn w zredukowanym schemacie rozkładu (rzędy harmonicznych pola magnetycznego w szczelinie powietrznej) są podzielne przez p (a = p).

Te same wnioski wynikają bezpośrednio z postaci macierzy schematycznej stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ przedstawionej na rys. 3.11, a sporządzonej na podstawie nie zredukowanego schematu z rys. 3.10. Puste kolumny wprost wskazują na współrzędne osiowe wirnika, z których można w modelu matematycznym zrezygnować. Macierze schematyczne: stojan-stojan $\left[M_{ss}^{(k)}\right]$ oraz wirnik-



Rys. 3.10. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

Fig. 3.10. The diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1			2 14 24 46...				4 20 28 44...				10 22 26 38...				8 40 ...	16 32 ...
2																
3			18 30...				12 36...				6 42...				24...	48...

Rys. 3.11. Macierz schematyczna stojan-wirnik 3-fazowej maszyny klatkowej (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

Fig. 3.11. The schematic stator-rotor matrix of a squirrel-cage motor (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

2 4 8 10 14 16 20 22 26 28 32 34 38 40 44 46...	
	6 12 18 24 30 36 42 48...

Rys. 3.12. Macierz schematyczna stojan-stojan 3-fazowej maszyny klatkowej (n= =16 , 2p = 4, Ω = 48)

Fig. 3.12. The schematic stator-stator matrix of a 3-phase squirrel-cage motor (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

-wirnik $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$ przedstawiono na rys. 3.12 i 3.13. Po usunięciu z macierzy $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$ z rys. 3.13 harmonicznych, odpowiadających współrzędnym wskazywanym przez macierz $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$, otrzymujemy zredukowaną macierz $\left[M_{rr}^{(k)}\right]$ (rys. 3.14). Rzędy wszystkich harmonicznych zawartych w macierzach schematycznych z rys. 3.11, 3.12 i 3.14 są teraz podzielne przez p, co dowodzi możliwości wprowadzenia w miejsce rzędów ϑ wartości względnych rzędów ϑ' ($\vartheta' = \frac{\vartheta}{p}$).

Najczęściej stosowane 3-fazowe proste uzwojenia stojana o 6 strefach fazowych generują harmoniczne przestrzenne o rzędach $\vartheta' = 1, 5, 7, 11, 13...$ (za pośrednictwem 1 i 2 współrzędnej) oraz harmoniczne o rzędach $\vartheta' = 3, 9, 15, 21...$ (za pośrednictwem 3 współrzędnej). Stojany elementarne odpowiadające tym harmonicznym wyróżniono na rys. 3.10 grubą linią. Dla takich uzwojeń macierz schematyczna $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ z rys. 3.11 redukuje się do postaci pozwalającej na usunięcie 7, 8 i 15 współrzędnej (rys. 3.15). Dalszą redukcję mogą spowodować zerowe wartości współczynników uzwojenia ξ_{ϑ} (zerowa wartość współczynnika skrótu uzwojenia klatkowego pozwala usunąć 16 współrzędną osiową, co uwzględniono na rys. 3.16).

Przypuśćmy dalej, że stojan ma 24 żłobki ($Ż_1 = 24$) i dwuwarstwowe uzwojenie cięciwowe o poskoku żłobkowym 4 (y = 4). Wówczas współczynniki uzwojenia $\xi_{s\vartheta}$ przyjmują wartość zero dla harmonicznych o rzędach $\vartheta = 6, 12, 18, 24...$ ($\vartheta' = 3, 6, 9, 12...$), a więc dla wszystkich harmonicznych z 2 wiersza macierzy $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$. Pozwala to na usunięcie z modelu 3 współrzędnej osiowej stojana.

Ostatnią wreszcie przyczyną, prowadzącą do rozrzedzenia widm przepływu uzwojeń jest galwaniczne połączenie faz. Jeśli uzwojenie stojana zostanie skojarzone w gwiazdę bez przewodu zerowego, wówczas $i_{s3}^{(k)} = 0$ i w modelu można opuścić 3 współrzędną stojana. Macierz schematyczną stojan-wirnik $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ maszyny o uzwojeniach fazowych skojarzonych w gwiazdę przedstawiono

1 15 17 31 33 47 ...								
	2 14 18 30 34 46 ...							
		3 13 19 29 35 45 ...						
			4 12 20 28 36 44 ...					
				5 11 21 27 37 43 ...				
					6 10 27 26 38 42 ...			
						7 9 23 25 29 44 ...		
							8 24 40...	
								16 32 48...

Rys. 3.13. Macierz schematyczna wirnik-wirnik 3-fazowej maszyny klatkowej (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

Fig. 3.13. The schematic rotor-rotor matrix of a 3-phase squirrel-cage motor (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

	2 14 19 30 34 46 ...							
			4 12 20 28 36 44 ...					
					6 10 22 26 38 42 ...			
							8 24 40...	
								16 32 48...

Rys. 3.14. Zredukowana macierz schematyczna wirnik-wirnik 3-fazowej maszyny klatkowej (n = 16, 2p = 4, Ω = 48)

Fig. 3.14. The simplified schematic rotor-rotor matrix of a 3-phase squirrel-cage motor (n = 16, 2p = 4 Ω = 48)

	2 14 34 46...				10 22 26 38...			16 32 ...
	18 30...				6 42...			48...

Rys. 3.15. Zredukowana macierz schematyczna stojan-wirnik 3-fazowej maszyny klatkowej ($n = 16$, $2p = 4$, $\Omega = 48$)

Fig. 3.15. The simplified schematic stator-rotor matrix of a 3-phase squirrel-cage motor ($n = 16$, $2p = 4$, $\Omega = 48$)

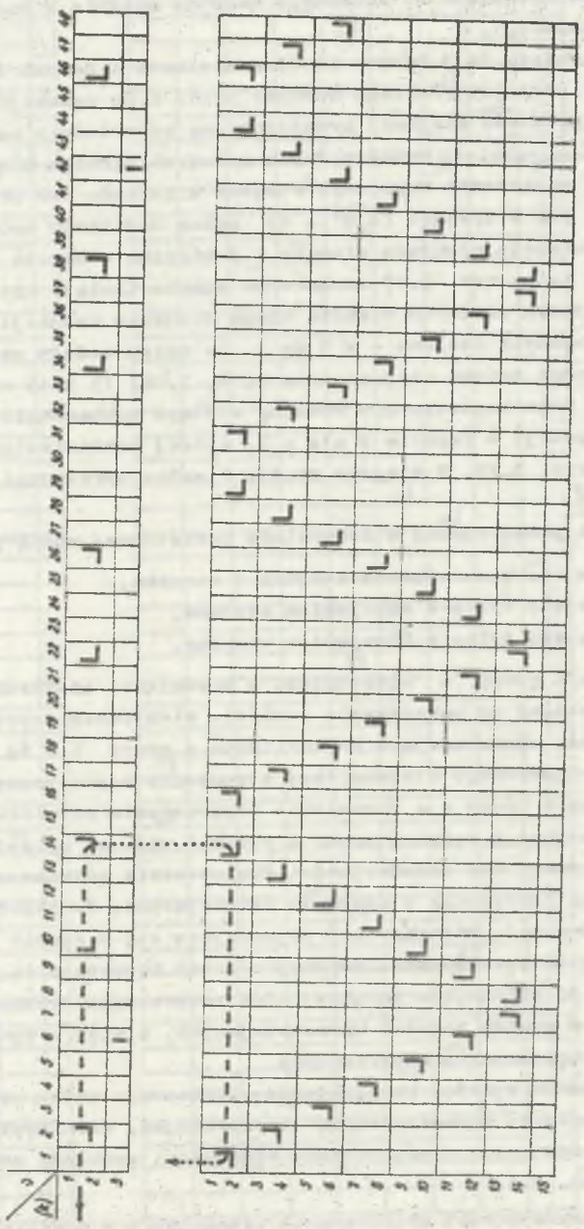
	2 14 34 46...				10 22 26 38...			

Rys. 3.16. Zredukowana macierz schematyczna stojan-wirnik 3-fazowej maszyny klatkowej, skojarzonej w gwiazdę ($n = 16$, $2p = 4$, $\Omega = 48$)

Fig. 3.16. The simplified schematic stator-rotor matrix of a 3-phase squirrel-cage motor - a star connection ($n = 16$, $2p = 4$, $\Omega = 48$)

na rys. 3.16 (taką samą macierz ma maszyna o uzwojeniach połączonych w trójkąt z uzwojeniem cięciwowym o poskoku $y = 4$). Przedstawione rozumowanie dowodzi, że zagadnienie redukcji może być rozważane zarówno na podstawie schematu rozkładu maszyny, jak i notacji schematycznej macierzy.

Jako drugą rozważmy 3-fazową maszynę klatkową o danych $2p = 4$ i $n = 15$ (przy $\Omega = 48$). Schemat rozkładu maszyny - po uwzględnieniu rozrzedzenia widma spowodowanego wielobiegunowością i symetrią uzwojenia stojana oraz po pominięciu n-tej współrzędnej wirnika - przedstawiono na rys. 3.17. Schemat ten, o ile uzwojenia fazowe stojana są galwanicznie niezależne lub połączone w gwiazdę z przewodem zerowym, nie może być dalej redukowany ani też nie daje możliwości wprowadzenia względnych wartości rzędów. Sytuacja ulega zmianie po połączeniu uzwojenia stojana w gwiazdę bez przewodu zerowego. Pominięcie 2 wiersza schematu stojana ($i_{s3}^{(k)} = 0$) prowadzi w konsekwencji do usunięcia 3 i 6 wiersza schematu rozkładu wirnika, czyli 5, 6, 11 i 12 współrzędnej osiowej (w szeregowo połączonych uzwojeniach elementarnych 3 wiersza schematu wirnika prąd płynął pod wpływem siły elektromotorycznej, indukowanej przez 18 i 42 stojan elementarny, zaś w uzwojeniach elementarnych 6 wiersza pod wpływem siły elektromotorycznej, indukowanej przez 6 stojan elementarny). Taki sam schemat rozkładu otrzymuje się po połączeniu uzwojenia stojana w trójkąt, albowiem i wtenczas, ze względu na warunek $u_{s3}^{(k)} = 0$, prądy w szeregowo połączonych uzwojeniach elementarnych drugiego wiersza rozkładu stojana nie będą płynęły. Bez względu na sposób skojarzenia uzwojeń fazowych stojana, w szczelinie po-



Rys. 3.17. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne ($n = 15$, $2p = 4$, $\Omega = 48$)

Fig. 3.17. The diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor ($n = 15$, $2p = 4$, $\Omega = 48$)

wietrznej pojawia się podharmoniczna o rzędzie $\nu = a = 1$. Mechanizm jej generowania uwidoczniono na schemacie maszyny zgodnie z zasadami przyjętymi w rozdziale 4.1.

Trzeci przykład, to 3-fazowa maszyna klatkowa o danych $2p = 8$ i $n = 18$ (przy $\Omega = 52$). Schemat rozkładu maszyny przed i po redukcji (przy dowolnym układzie połączeń stojana) przedstawiono odpowiednio na rys. 3.18 i 3.19. Liczba rzeczywistych współrzędnych osiowych wirnika ulega redukcji z 18 do 8. Przy połączeniu uzwojenia stojana w gwiazdę bez przewodu zerowego ($i_{s3}^{(k)} = 0$) lub w trójkąt ($u_{s3}^{(k)} = 0$) można dodatkowo usunąć uzwojenia z 6 wiersza schematu rozkładu wirnika i 2 wiersza schematu rozkładu stojana (uzwojenia te na rys. 3.19 zaznaczono cienką linią). Liczba rzeczywistych współrzędnych osiowych wirnika ulega wtenczas redukcji z 18 do 6, zaś liczba współrzędnych stojana - z 3 do 2. Do opisu modelu maszyny wystarcza 1 i 2 współrzędna osiowa stojana oraz 3, 4, 7, 8, 15 i 16 współrzędna osiowa wirnika. W polu magnetycznym maszyny wystąpi podharmoniczna (względem harmonicznej p-tej) o rzędzie $\nu = a = 2$, której mechanizm generowania uwidoczniono na rys. 3.19. W miejsce rzędów ν' można wprowadzić wartości względne $\nu'' = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{2}$.

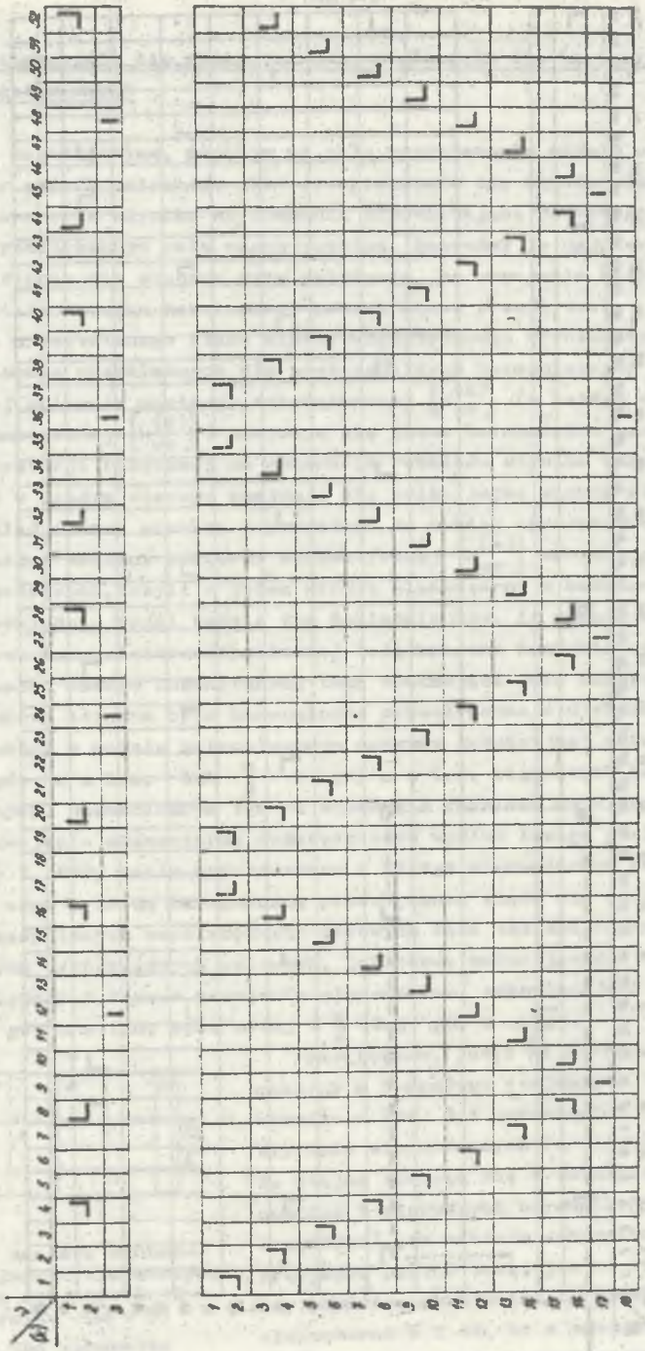
Harmoniczne przestrzenne w szczelinie powietrznej można podzielić na:

a) sprzęgające się z uzwojeniem stojana i wirnika,
b) sprzęgające się tylko z uzwojeniem stojana,
c) sprzęgające się tylko z uzwojeniem wirnika.

Harmoniczne z grupy a uczestniczą w przemianie elektromechanicznej i są odpowiedzialne za powstawanie momentów elektromagnetycznych. Strumienie magnetyczne, odpowiadające harmonicznym z grupy b - to strumienie rozproszenia różnicowego stojana, zaś strumienie magnetyczne odpowiadające harmonicznym z grupy c - strumienie rozproszenia różnicowego wirnika. Tak więc w maszynie z rozrzedzonymi i różnymi widmami przepływów stojana i wirnika pojawiają się indukcyjności rozproszenia różnicowego, związane ze strumieniami faktycznie w maszynie istniejącymi. Te składniki indukcyjności rozproszenia różnicowego, pojawiające się w sposób "naturalny", będziemy nazywali naturalnymi indukcyjnościami rozproszenia różnicowego, w odróżnieniu od składników indukcyjności rozproszenia różnicowego, pojawiających się w wyniku założeń upraszczających, a więc w wyniku sztucznego pomijania harmonicznych przestrzennych.

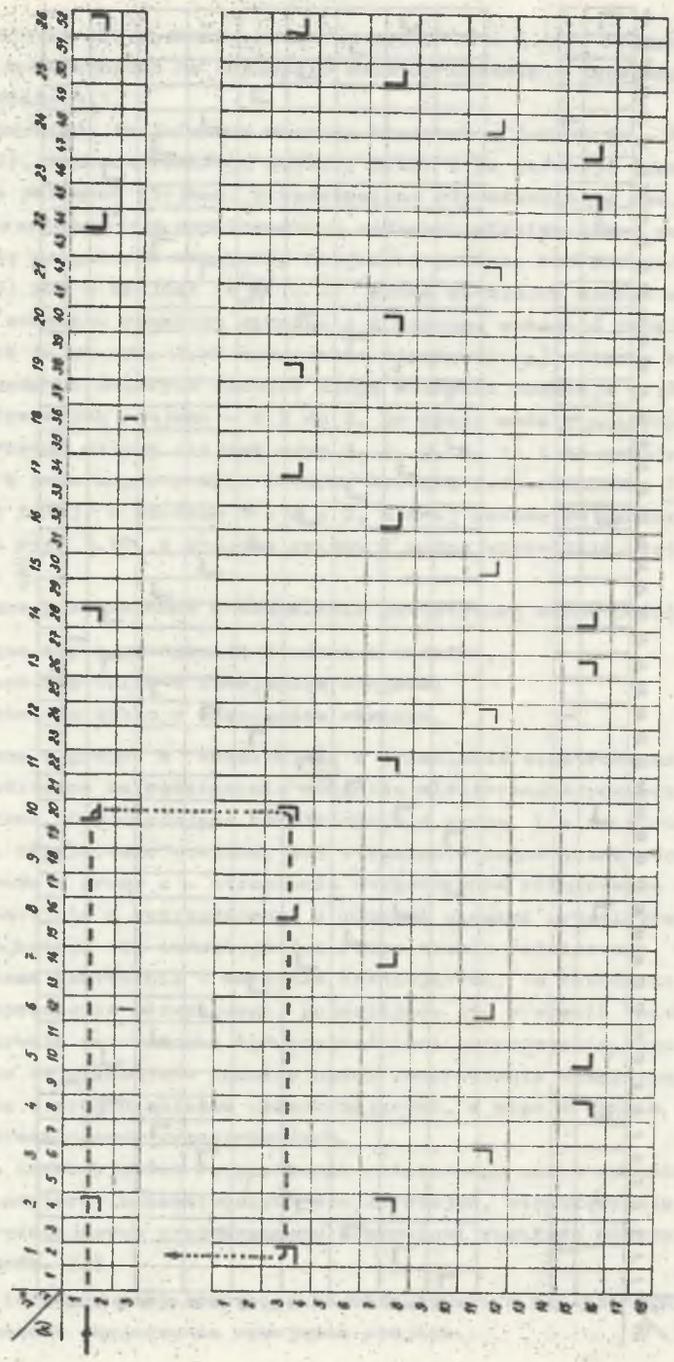
Naturalne indukcyjności rozproszenia różnicowego można wyznaczać bezpośrednio z macierzy schematycznych stojan-stojan, wirnik-wirnik i stojan-wirnik, odpowiadających zredukowanemu schematowi rozkładu maszyny w sposób opisany w rozdz. 3.5.

Wartości indukcyjności rozproszenia różnicowego w ogólnym przypadku zależą od sposobu skojarzenia uzwojenia stojana.



Rys. 3.18. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne ($n = 18$, $2p = 8$, $\Omega = 52$)

Fig. 3.18. The diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage ($n = 18$, $2p = 8$, $\Omega = 52$)



Rys. 3.19. Zredukowany schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne (n = 18, 2p = 8, Ω = 52)

Fig. 3.19. The simplified diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage (n = 18, 2p = 8, Ω = 52)

3.8. Rozsprzęganie się układu równań na równania dla harmonicznych przestrzennych

Kolejnym zagadnieniem, mającym na celu uproszczenie modelu matematycznego maszyny asynchronicznej, jest rozsprzęganie się układu równań różniczkowych stojana oraz wirnika na równania odpowiadające poszczególnym harmonicznym przestrzennym pola magnetycznego. Rozważmy je najpierw dla wirnika, a następnie dla stojana przy założeniu, że uzwojenia maszyny wytwarzają wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne przepływu..

Równania nieustalonego stanu elektromagnetycznego wirnika stanowią układ równań wzajemnie niezależnych dla poszczególnych harmonicznych wtenczas, gdy w każdej kolumnie macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ (w każdym wierszu macierzy schematycznej $\left[M_{rs}^{(k)}\right]$) znajduje się jedna harmoniczna przestrzenna.

W interpretacji fizycznej na schemacie rozkładu wirnika warunek ten oznacza, iż w każdym wierszu znajduje się tylko jeden wirnik elementarny. Aby więc układ równań wirnika doprowadzić do takiej uproszczonej postaci, należy z każdej kolumny macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ wybrać jedną harmoniczną przestrzenną, czyli - jeden wirnik elementarny z każdego wiersza schematu rozkładu. Model będzie tym dokładniejszy, iż ważniejsze z punktu widzenia przemiany elektromechanicznej będą wybrane harmoniczne przestrzenne. W przypadku maszyn indukcyjnych taką dominującą rolę odgrywają harmoniczne żłobkowe stojana oraz harmoniczne przestrzenne o niskich rzędach. W szczególności w modelu matematycznym maszyny indukcyjnej można uwzględnić $\frac{n-1}{2}$, gdy n = l.n. lub $\frac{n}{2} - 1$, gdy n = l.p. pierwszych harmonicznych przestrzennych. Harmonicznym tym na schemacie rozkładu wirnika odpowiadają 2-fazowe uzwojenia elementarne rozmieszczone wzdłuż lewego ramienia pierwszej litery V. Przy takim uproszczeniu z każdym elementarnym uzwojeniem wirnika, a więc z każdą harmoniczną przestrzenną wiąże się oddzielne równanie dla zespolonych współrzędnych osiowych bądź też dwa równania - dla rzeczywistych współrzędnych osiowych. Dodatkowo można jeszcze w modelu maszyny uwzględnić 1-fazowe uzwojenia elementarne, odpowiadające n-tej harmonicznej, gdy n = l.n. oraz n-tej i $\frac{n}{2}$-tej, gdy n = l.p.

1			4		(6)	
	2	3				(12)
				5		

Rys. 3.20. Macierz schematyczna stojan-wirnik maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku (Ω = 5)

Fig. 3.20. The schematic stator-rotor matrix of a polyphase machine (m = 5, n = 12, Ω = 5)

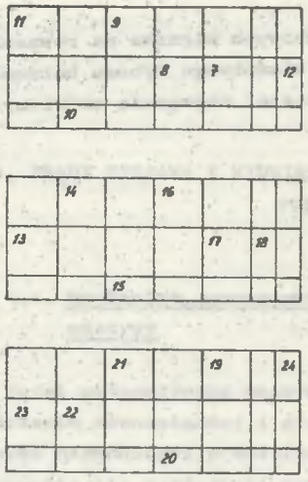
Przykładowo, jeśli na schemacie rozkładu maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku z rys. 3.1 pozostawimy 5 pierwszych wirników elementarnych (a więc przyjmiemy, że stojan sprzęga się z wirnikiem wyłącznie poprzez 5 pierwszych harmonicznych przestrzennych), to macierz schematyczna $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ przyjmuje postać taką, jak na rys. 3.20. Gdy ponadto pozostawimy 1-fazowe wirniki elementarne 6 i 12, to w macierzy pojawią się dodatkowo rzędy harmonicznych, ujęte w nawiasy.

Taki uproszczony model matematyczny nie pozwala na analizę zjawisk elektromagnetycznych, związanych z wyższymi harmonicznymi przestrzennymi przepływu, powstałymi na skutek połączeń galwanicznych pomiędzy uzwojeniami elementarnymi z tych samych wierszy schematu rozkładu. Odnosi się to do szerokiej klasy zjawisk tak istotnych, jak reakcja wielokrotna uzwojeń, pasożytnicze momenty synchroniczne, pasożytnicze momenty asynchroniczne wyższych rzędów itp. Maszyna indukcyjna o macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ analogicznej do macierzy z rys. 3.20 wytwarza wyłącznie moment elektromagnetyczny związany z harmoniczną główną oraz pasożytnicze momenty asynchroniczne, będące wynikiem "odbijania" harmonicznych przestrzennych stojana przez wirnik (pasożytnicze momenty asynchroniczne I rzędu).

Omówiony typ modelu matematycznego maszyny można rozszerzyć, obejmując nim wyższe harmoniczne przestrzenne, aż do harmonicznej Ω-tej. W tym celu należy w kolejnych krokach na przemian uwzględniać grupy harmonicznych przestrzennych, odpowiadające wirnikom elementarnym z lewych i prawych ramion liter V. Przy rozważaniu jednej grupy wpływ pozostałych uwzględnia się za pomocą indukcyjności rozproszenia różnicowego. W efekcie uzyskuje się Ω równań różniczkowych w zespolonych współrzędnych osiowych dla Ω uwzględnionych w modelu harmonicznych przestrzennych. Postępowanie umożliwiające uzyskanie takiego modelu sprowadza się w interpretacji fizycznej do "rozcięcia" połączeń galwanicznych pomiędzy fazami wirników elementarnych zajmujących ten sam wiersz i na ich zwarciu poprzez indukcyjności rozproszenia różnicowego.

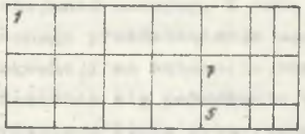
W literaturze założenie upraszczające, którego następstwem jest opisany powyżej model, formułuje się następująco: w reakcji wirnika na ν-tą harmoniczną przestrzenną stojana uwzględnia się wyłącznie harmoniczną przestrzenną ν-tego rzędu. Model ten, jeśli chodzi o zakres ujmowanych zjawisk elektromagnetycznych, jest w tym samym stopniu uproszczony, co wcześniej omówiony model z $\frac{n-1}{2}$, gdy n = l.n. lub $\frac{n}{2}$ - 1, gdy n = l.p. harmonicznymi przestrzennymi i różni się od niego jedynie możliwością uwzględnienia większej liczby pasożytniczych momentów asynchronicznych I rzędu.

Prześledźmy sposób formułowania takiego modelu maszyny na przykładzie maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku przy założeniu, że liczbę harmonicznych rozszerzamy z Ω = 6 (lewe ramię pierwszej litery V) do Ω = 24. W kolejnych krokach należy wówczas dodatkowo uwzględnić 3 grupy harmonicznych: 7, 8...12 (prawe ramię pierwszej litery V), 13, 14...18 (lewe ramię drugiej litery V), 19, 20...,24 (prawe ramię drugiej litery V), którym odpowiadają trzy macierze schematyczne przedstawione na rys. 3.21. Podstawiając je kolejno do układu równań różniczkowych wirnika uzyskuje się 24 równania różniczkowe (w zespolonych współrzędnych osiowych) dla 24 harmonicznych przestrzennych. W momencie elektromagnetycznym maszyny można wyróżnić moment asynchroniczny, związany z harmoniczną główną i 23 pasożytnicze momenty asynchroniczne I rzędu (momenty będące wynikiem współdziałania prądu stojana o częstotliwości sieci z prądami pierwotnej reakcji wirnika).



Rys. 3.21. Macierze schematyczne stojan-wirnik maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku dla trzech grup harmonicznych przestrzennych

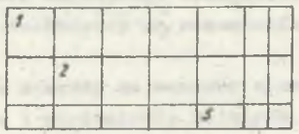
Fig. 3.21. The schematic stator-rotor matrices of a polyphase machine (n = 12, m = 5) for three groups of space harmonics



Rys. 3.22. Macierz schematyczna stojan-wirnik maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku dla ν = 1,5,7

Fig. 3.22. The schematic stator-rotor matrix of a polyphase machine (m = 5, n = 12) for ν = 1,5,7

Tak więc i w tym przypadku zagadnienie sprowadza się do wyboru odpowiednich harmonicznych. W rozważanym przykładzie maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku mogą to być harmoniczne 1, 5 i 7. Macierz schematyczna $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ przyjmuje wówczas postać taką, jak na rys. 3.22, a model matematyczny stojana składa się z 3 równań dla 1, 5 i 7 harmonicznej przestrzennej. Na zakończenie zwróćmy uwagę na szczególny przypadek równoczesnego rozsprzęgania się układu równań różniczkowych zarówno stojana, jak i wirnika. Występuje on wtenczas, gdy zarówno w każdej kolumnie, jak i w każdym wierszu macierzy schematycznej $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ znajduje się rząd jednej tylko harmonicznej. Dla rozważanej maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku warunek ten spełnia macierz schematyczna $\left[M_{sr}^{(k)}\right]$ uzyskana na przykład przy uwzględnieniu 1, 2 i 5 harmonicznej przestrzennej (rys. 3.23).



Rys. 3.23. Macierz schematyczna stojan-wirnik maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku dla ν = 1,2,5

Fig. 3.23. The schematic stator-rotor matrix of a polyphase machine (m = 5, n = 12) for ν = 1,2,5

Rozsprzęganie się układu równań różniczkowych wirnika na równania dla poszczególnych harmonicznych oraz problem właściwego wyboru harmonicznych w przypadku 3-fazowych maszyn klatkowych został obszernie omówiony w pracy [63].

4. PRĄDY STOJANA I WIRNIKA PRZY UWZGLĘDNIENIU WYŻSZYCH HARMONICZNYCH PRZESTRZENNYCH PRZEPŁYWU

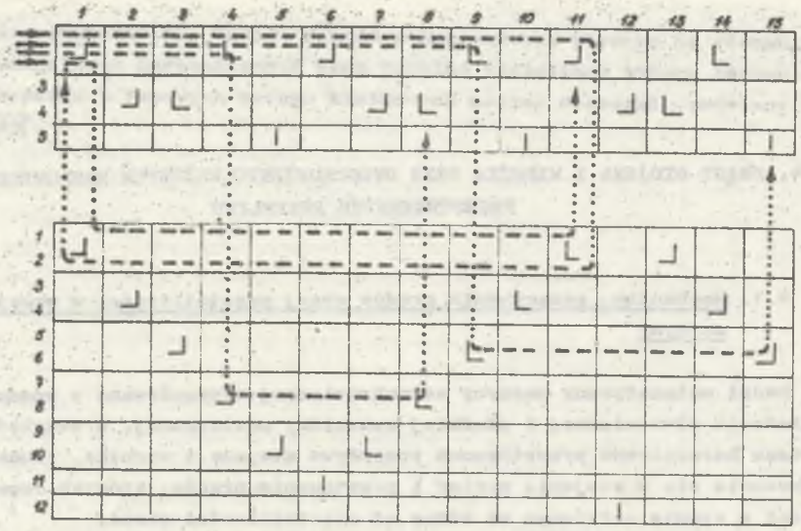
4.1. Mechanizm generowania prądów obcej częstotliwości w uzwojeniach maszyny

Model matematyczny maszyny asynchronicznej sformułowany w rozdz. 2 przy założeniu równomiernej i gładkiej szczeliny powietrznej, a uwzględniający wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu stojana i wirnika, tłumaczy indukowanie się w stojanie napięć i powstawanie prądów, których częstotliwości w stanie ustalonym są różne od częstotliwości sieci.

Prześledźmy mechanizm generowania tych prądów na przykładzie maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku, której schemat rozkładu przy założeniu, że rząd najwyższej uwzględnionej harmonicznej wynosi 15, przedstawiono na rys. 4.1 (schemat rozkładu tej maszyny dla $\Omega = 52$ jest przedstawiony na rys. 3.1). Stan elektromagnetyczny maszyny będziemy analizowali rozważając kolejne odbicia prądu reakcji pierwotnej stojana (prądu o częstotliwości sieci ω_o w stanie ustalonym) na przemian w wirniku oraz w stojanie maszyny. Z taką metodą wiąże się możliwość przejrzystego graficznego przedstawienia mechanizmów generowania rozważanych prądów o obcej frekwencji na schemacie rozkładu maszyny za pośrednictwem torów rozprzestrzeniania się pobudzenia wywołanego napięciem sieci. Fragmenty torów wyróżnione linią przerywaną odpowiadają połączeniom galwanicznym, zaś oznaczone linią kropkowaną - sprzężeniom elektromagnetycznym.

Metoda kolejnych odbić pozwala na wyodrębnienie w prądach stojana (wirnika) składników nazywanych prądami kolejnych reakcji (prądami reakcji wielokrotnych) uzwojeń. Składniki ujawnione w pierwszym odbiciu - to prądy reakcji pierwotnej, w drugim - prądy reakcji wtórnej i ogólnie w i-tym - prądy i-tej reakcji. Ujawnienie wszystkich składników wymagałoby uwzględnienia nieskończonej liczby odbić. Sens techniczny ma rozważenie co najwyżej dwóch lub trzech.

Oparcie analizy na schemacie rozkładu maszyny na maszyny elementarne pozwala na kontynuowanie rozkładu prądów i wyróżnianie dalszych składników w prądach kolejnych reakcji uzwojeń. Prądowi i-tej reakcji stojana (wirnika) można nadać postać sumy, której składnikami są prądy i-tej reakcji poszczególnych stojanów (wirników) elementarnych (w stanie ustalonym są one prądami sinusoidalnie zmiennymi o różnych częstotliwościach). Teoretycznie liczba możliwych do wyodrębnienia w ten sposób składników jest nieskończenie wielka. W modelu jest ona ograniczona poprzez przyjęcie sensownej z



Rys. 4.1. Mechanizmy generowania prądów reakcji wtórnej stojana $\underline{i}_{s1}^{(k)}(11,1)$, $\underline{i}_{s2}^{(k)}(4,8)$, $i_{s1}^{(k)}(1,11)$ i $i_{s3}^{(k)}(9,15)$

Fig. 4.1. The paths of the generation of stator currents $\underline{i}_{s1}^{(k)}(11,1)$, $i_{s2}^{(k)}(4,8)$, $i_{s1}^{(k)}(1,11)$ i $i_{s3}^{(k)}(9,15)$ connected with a secondary armature reaction

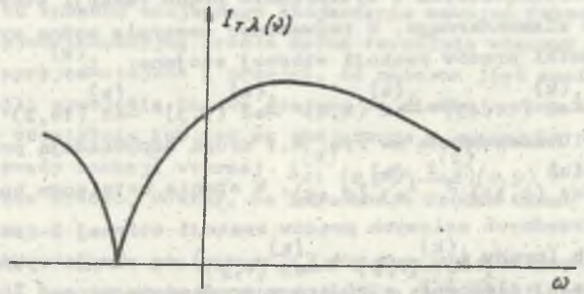
technicznego punktu widzenia liczby uwzględnionych harmonicznych przestrzennych.

Przyjmijmy, że uzwojenie wirnika rozważanej maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku jest zwarte na zaciskach ($\underline{u}_{r1}^{(k)} = \underline{u}_{r2}^{(k)} = \ldots u_{r7}^{(k)} = 0$) i rozważmy szczegółowo przypadek zasilania stojana maszyny napięciami, odpowiadającymi pierwszej zespolonej współrzędnej osiowej ($\underline{u}_{s1}^{(k)} = 0$, $\underline{u}_{s2}^{(k)} = 0$, $u_{s3}^{(k)} = 0$). W szczególności mogą to być składowe symetryczne napięcia $\underline{U}_1^{(s)}$ i $\underline{U}_4^{(s)}$.

Prąd reakcji pierwotnej stojana $\underline{i}_{s1}^{(k)}(0)$ (w stanie ustalonym prąd sinusoidalny o częstotliwości sieci ω_o) wytwarza harmoniczne przestrzenne o rzędach odpowiadających stojanom elementarnym z pierwszego wiersza schematu rozkładu, a więc harmoniczne o rzędach 1, 4, 6, 9, 11 i 14. Zamiast: prąd sieci $\underline{i}_{s1}^{(k)}(0)$ wytwarza harmoniczne o rzędach 1, 4, 6, 9, 11, 14, można w nawiązaniu do schematu rozkładu maszyny powiedzieć: prąd $\underline{i}_{s1}^{(k)}(0)$ przepływa przez stojany elementarne o numerach 1, 4, 6, 9, 11 i 14. Mówiąc skrótowo, że prąd przepływa przez ϑ-ty stojan (wirnik) elementarny rozumiemy, że prąd wytwarza ϑ-tą harmoniczną przestrzenną stojana (wirnika). Stojany elementarne o numerach 1, 4, 6, 9, 11 i 14 są elektromagnetycznie sprzężone z wirnikami elementarnymi o tych samych numerach i indukują w nich siły elektromotoryczne oraz prądy reakcji pierwotnej. Prąd reakcji

pierwotnej ϑ-tego wirnika elementarnego oznaczamy przez $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta)$, gdzie indeks λ jest numerem wiersza, zaś indeks ϑ - numerem kolumny, w której znajduje się wirnik elementarny. λ jest więc równocześnie indeksem zespolonej współrzędnej osiowej, zaś ϑ-rzędem harmonicznej przestrzennej, za pośrednictwem której dochodzi do powstania prądu reakcji pierwotnej w wirniku elementarnym. Prądy reakcji pierwotnej 1, 4, 6, 9, 11 i 14 wirnika elementarnego oznaczamy odpowiednio przez $\underline{i}_{r1}^{(k)}(1)$, $\underline{i}_{r4}^{(k)}(4)$, $\underline{i}_{r6}^{(k)}(6)$, $\underline{i}_{r3}^{(k)}(9)$, $\underline{i}_{r1}^{(k)}(11)$ oraz $\underline{i}_{r2}^{(k)}(14)$.

W stanie ustalonym przy stałej prędkości wirnika ω hodografami zespolonych współrzędnych osiowych prądów reakcji pierwotnej 2-fazowych wirników elementarnych są okręgi wyznaczone przez wektory o stałej długości, wirujące z prędkością kątową $\pm\omega_o \pm \vartheta\omega$ (rozdz. 4.3 i rys. 4.9). Dla określonej składowej symetrycznej napięcia zasilającego stojan (składowej symetrycznej $\underline{U}_1^{(s)}$ lub $\underline{U}_4^{(s)}$) prędkości wirowania (znaki + lub -) są uzależnione od orientacji osi faz maszyny elementarnej. Prąd reakcji pierwotnej 2-fazowego wirnika elementarnego $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta)$ przyjmuje wartość zero dla prędkości obrotowej maszyny, przy której pola magnetyczne ϑ-tego stojana elementarnego i ϑ-tego wirnika elementarnego są względem siebie nieruchome. Typową charakterystykę prądów reakcji pierwotnej wirników elementarnych $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta)$ w stanie ustalonym przedstawia rys. 4.2. Hodografami zespolonych współrzędnych osiowych prądów reakcji pierwotnej 1-fazowych wirników elementarnych, np. prądu $i_{r6}^{(k)}(6)$, są odcinki.



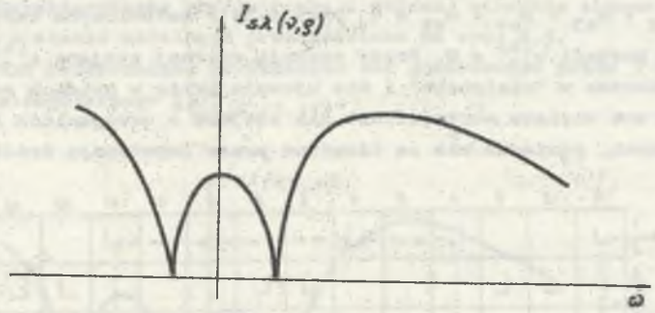
Rys. 4.2. Typowa charakterystyka prądów reakcji pierwotnej wirników elementarnych $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta)$ w stanie ustalonym

Fig. 4.2. The typical curve of the currents of primary rotor reaction $i_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta)$ in steady state

Wirniki elementarne 1, 4, 6, 9, 11 i 14 są powiązane z różnymi współrzędnymi osiowymi i znajdują się w różnych wierszach schematu rozkładu wirnika (indeks λ = 1, 3, 4, 6, 2). Wirniki elementarne należące do tego samego wiersza są galwanicznie połączone, a więc prąd wytworzony w dowolnym z nich musi przepłynąć przez wszystkie pozostałe uzwojenia, znajdujące się razem z nim w tym samym wierszu.

Prąd reakcji pierwotnej 1 wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r1}(1)$ przepływa przez 11 i 13 wirnik, prąd reakcji pierwotnej 11 wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r1}(11)$ - przez 1 i 13 wirnik, prąd reakcji pierwotnej 4 wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r4}(4)$ przez 8 wirnik elementarny, prąd reakcji pierwotnej 9 wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r3}(9)$ - przez 3 i 15 wirnik elementarny i wreszcie prąd reakcji pierwotnej 14 wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r2}(14)$ - przez 2 i 10 wirnik. ϱ wirnik elementarny, poprzez który przepływa prąd ϑ wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r\lambda}(\vartheta)$ wytwarza pole magnetyczne, które w ϱ stojanie elementarnym indukuje siłę elektromotoryczną i prądy reakcji ϱ stojana elementarnego. Cztery tory, ilustrujące powstanie prądów reakcji wtórnej w wybranych stojanach elementarnych, uwidoczniono na rys. 4.1. Tory te, złożone z linii przerywanych i kropkowanych, zorientowano za pomocą strzałek. Prądy reakcji wtórnej powstają w stojanach elementarnych o numerach 1, 2, 3, 8, 11, 13, 15. Stojany te znajdują się w różnych wierszach schematu rozkładu stojana, a więc indukowane w nich prądy reakcji wtórnej odpowiadają różnym zespolonym współrzędnym osiowym. Indeksy, za pomocą których będziemy oznaczać prądy reakcji wtórnych stojanów elementarnych, stanowią formę syntetycznego, skróconego zapisu przebiegu torów uwidacznianych na schemacie rozkładu maszyny. W oznaczeniu prądu reakcji wtórnej ϱ stojana elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{s\lambda}(\vartheta,\varrho)$ indeks λ wskazuje na numer wiersza schematu, w którym znajduje się stojan elementarny (jest to również indeks zespolonej współrzędnej osiowej stojana), zaś indeksy ϑ i ϱ - na rzędy harmonicznych przestrzennych pośredniczących w wytworzeniu prądu reakcji wtórnej rozpatrywanego stojana elementarnego. W rozważanej maszynie można wyodrębnić następujące składniki prądów reakcji wtórnej stojana: $\underline{i}^{(k)}_{s1}(1,11)$, $\underline{i}^{(k)}_{s1}(11,1)$, $\underline{i}^{(k)}_{s2}(1,13)$, $\underline{i}^{(k)}_{s2}(11,13)$, $\underline{i}^{(k)}_{s2}(4,8)$, $\underline{i}^{(k)}_{s2}(9,3)$, $\underline{i}^{(k)}_{s2}(14,2)$, $i^{(k)}_{s3}(9,15)$ oraz $i^{(k)}_{s3}(14,10)$. Uwidocznione na rys. 4.1 drogi odpowiadają prądom $\underline{i}^{(k)}_{s1}(11,1)$, $\underline{i}^{(k)}_{s2}(4,8)$, $\underline{i}^{(k)}_{s1}(1,11)$ i $i^{(k)}_{s3}(9,15)$. W stanie ustalonym hodografami zespolonych współrzędnych osiowych prądów reakcji wtórnej 2-fazowych stojanów elementarnych (prądy $\underline{i}^{(k)}_{s1}(\vartheta,\varrho)$ i $\underline{i}^{(k)}_{s2}(\vartheta,\varrho)$) są okręgi wyznaczone przez wektory o stałej długości, wirujące z prędkością kątową $\pm\omega_o \pm (\varrho \pm \vartheta)\omega$ (rozdz. 4.3. i rys. 4.10). Dla określonej składowej symetrycznej napięcia zasilania prędkości wirowania zespolonych współrzędnych osiowych (znaki + lub -) można określić na podstawie orientacji osi faz uzwojeń elementarnych leżących wzdłuż toru. Hodografami współrzędnych osiowych prądów reakcji wtórnej 1-fazowych stojanów elementarnych (prądy $i^{(k)}_{s3}(\vartheta,\varrho)$) są odcinki.

Prądy reakcji wtórnej 2-fazowych stojanów elementarnych $\underline{i}^{(k)}_{s\lambda}(\vartheta,\varrho)$ przyjmują wartość zero dla dwóch prędkości obrotowych wirnika. Pierwsza z nich to prędkość, przy której zeruje się prąd reakcji pierwotnej ϑ-tego wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r\mu}(\vartheta)$ (nieruchome są względem siebie pola magnetyczne reakcji pierwotnej stojana i wirnika w ϑ-tej maszynie elementarnej), druga - przy której nieruchome względem ϱ-tego stojana elementarnego staje się



Rys. 4.3. Typowa charakterystyka prądów reakcji wtórnej stojanów elementarnych $\underline{i}^{(k)}_{s\lambda}(\vartheta,\varrho)$ w stanie ustalonym

Fig. 4.3. The typical curve of the currents of secondary stator reaction $\underline{i}^{(k)}_{s\lambda}(\vartheta,\varrho)$ in steady state

pole magnetyczne ϱ-tego wirnika elementarnego, wywołane prądem reakcji pierwotnej ϑ-tego wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r\mu}(\vartheta)$.

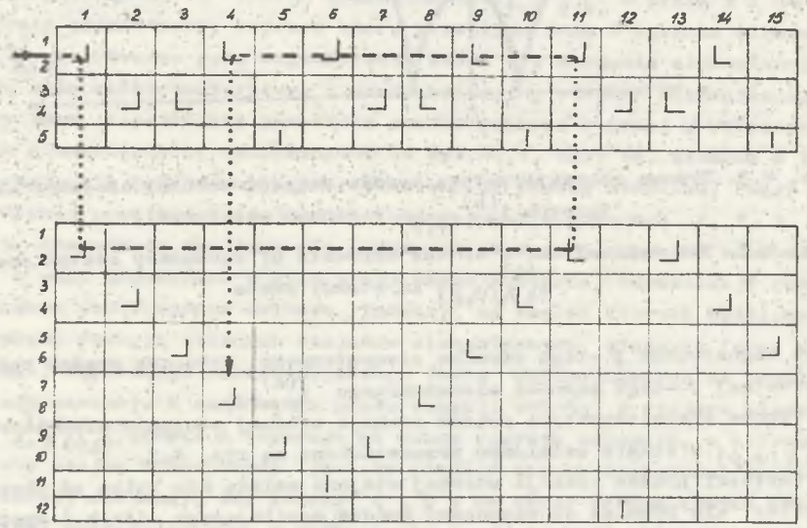
Typową charakterystykę prądów reakcji wtórnej stojanów elementarnych $\underline{i}^{(k)}_{s\lambda}(\vartheta,\varrho)$ w stanie ustalonym przedstawiono na rys. 4.3.

Wartości prądów reakcji wtórnej stojana zależą nie tylko od parametrów maszyny, ale również od własności źródła zasilającego silnik (impedancji źródła) oraz od sposobu wzajemnego skojarzenia uzwojeń fazowych. Impedancję rezystancyjno-indukcyjną źródła można formalnie włączyć w impedancję rozproszenia uzwojeń stojana i przyjąć, że maszyna jest zasilana ze źródła idealnego. Jeśli uzwojenia fazowe stojana są nieskojarzone i każde z nich jest zasilane oddzielnie lub też są skojarzone w gwiazdę z przewodem zerowym, wówczas prądy reakcji wtórnej $\underline{i}^{(k)}_{s1}(\vartheta,\varrho)$, $\underline{i}^{(k)}_{s2}(\vartheta,\varrho)$ i $i^{(k)}_{s3}(\vartheta,\varrho)$ zamykają się poprzez źródło. Mówimy, że impedancja źródła tłumi prądy reakcji wtórnej stojana.

Odmiennie przedstawia się sytuacja, gdy uzwojenie stojana jest skojarzone w gwiazdę bez przewodu zerowego, bądź w "wielobok" (pięciobok). Układ połączenia nie ma wówczas wpływu na prądy $\underline{i}^{(k)}_{s1}(\vartheta,\varrho)$ i $\underline{i}^{(k)}_{s2}(\vartheta,\varrho)$, natomiast zasadniczy - na prądy $i^{(k)}_{s3}(\vartheta,\varrho)$. Jeśli stojan jest skojarzony w gwiazdę bez przewodu zerowego, wówczas równanie węzła: $i_{s1} + i_{s2} + i_{s3} + i_{s4} + i_{s5} = 0$ przyjmuje w zespolonych współrzędnych osiowych postać: $i^{(k)}_{s3} = 0$. Uzwojenie stojana dla prądów reakcji wtórnej $i^{(k)}_{s3}(\vartheta,\varrho)$ jest więc rozwarte i prądy takie w stojanie nie powstaną (w przypadku skojarzenia uzwojenia stojana w gwiazdę bez przewodu zerowego, ze schematu rozkładu uzwojenia stojana można formalnie usunąć 2 wiersz, odpowiadający 3 zespolonej współrzędnej osiowej).

Największe wartości osiągają prądy reakcji wtórnej $i^{(k)}_{s3}(\vartheta,\varrho)$ przy połączeniu faz w "wielobok". Równanie oczka we współrzędnych fazowych

$u_{s1} + u_{s2} + u_{s3} + u_{s4} + u_{s5} = 0$ przyjmuje w zespolonych współrzędnych osiowych postać: $u_{s3}^{(k)} = 0$. Prądy reakcji wtórnej stojana $i_{s3}^{(k)}(\vartheta,\varrho)$ zamykają się wówczas w "wieloboku" i nie ujawniają się w prądach przewodowych. Osiągają one większe wartości niż dla stojana o uzwojeniach fazowych nieskojarzonych, ponieważ nie są tłumione przez impedancję źródła.



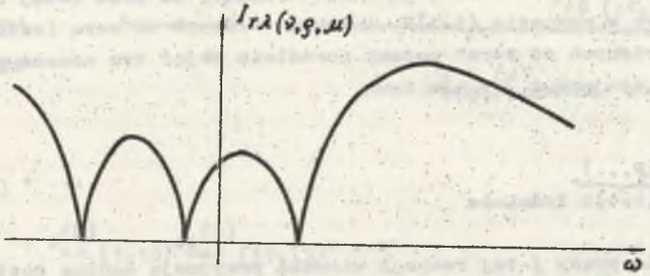
Rys. 4.4. Mechanizm generowania prądu reakcji wtórnej wirnika $\underline{i}_{r4}^{(k)}(1,11,4)$

Fig. 4.4. The path of the generation of rotor current $\underline{i}_{r4}^{(k)}(1,11,4)$ connected with a secondary armature reaction

Uwzględnianie reakcji uzwojeń o coraz to wyższych krotnościach prowadzi do stopniowego ujawniania coraz to nowych składników prądów stojana i wirnika. Przykładowo na schemacie rozkładu z rys. 4.4 przedstawiono mechanizm generowania prądu, będącego jednym ze składników prądu reakcji wtórnej wirnika. Prądy reakcji wtórnej wirników elementarnych będziemy oznaczać przez $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta,\varrho,\mu)$, gdzie λ jest indeksem zespolonej współrzędnej osiowej (numerem wiersza, w którym znajduje się wirnik elementarny), zaś ϑ, ϱ, μ są rzędami harmonicznych przestrzennych, uczestniczących w powstaniu prądu reakcji. Zaznaczony na schemacie rozkładu tor odpowiada prądowi reakcji wtórnej 4 wirnika elementarnego $\underline{i}_{r4}^{(k)}(1,11,4)$. Prąd ten przyjmuje wartość zero dla trzech różnych prędkości obrotowych, odpowiadających zerowym wartościom prądów $\underline{i}_{r1}^{(k)}(1)$ (nieruchome względem siebie pola magnetyczne w 1 maszynie elementarnej), $\underline{i}_{s1}^{(k)}(1,11)$ (nieruchome względem siebie pola magnetyczne w 11 maszynie elementarnej) oraz $i_{r4}^{(k)}(1,11,4)$ (nieruchome względem siebie pola magnetyczne w 4 maszynie elementarnej).

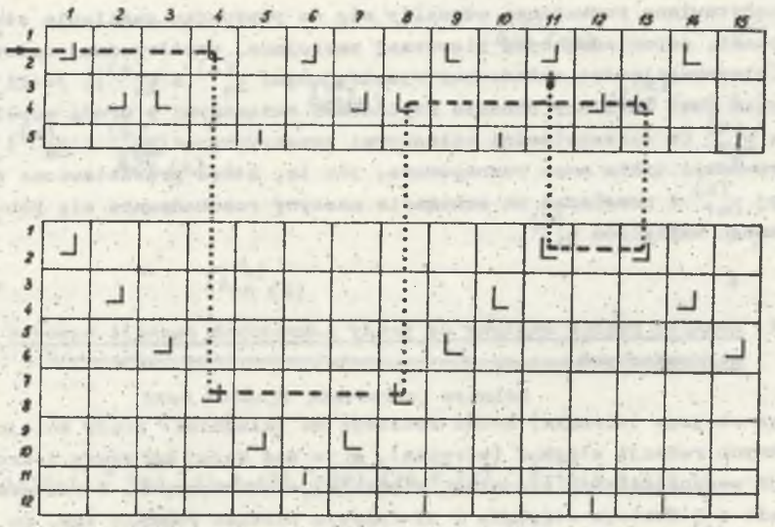
Typową charakterystykę prądów reakcji wtórnej wirników elementarnych $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta,\varrho,\mu)$ w stanie ustalonym przedstawiono na rys. 4.5.

Na rys. 4.6 uwidoczniono przykładowo tor generowania prądu 3 reakcji 11 stojana elementarnego $\underline{i}_{s1}^{(k)}(4,8,13,11)$.



Rys. 4.5. Typowa charakterystyka prądów reakcji wtórnej wirników elementarnych $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta,\varrho,\mu)$ w stanie ustalonym

Fig. 4.5. The typical curve of the currents of secondary rotor reaction $\underline{i}_{r\lambda}^{(k)}(\vartheta,\varrho,\mu)$ in steady state



Rys. 4.6. Mechanizm generowania prądu trzeciej reakcji stojana $\underline{i}_{s1}^{(k)}(4,8,13,11)$

Fig. 4.6. The path of the generation of stator current $\underline{i}_{s1}^{(k)}(4,8,13,11)$ connected with a tertiary armature reaction

W ogólnym przypadku prąd i-tej reakcji stojana przyjmuje postać $i_{s\lambda(\varrho\ldots)}^{(k)}$, gdzie indeksy w nawiasie $(\varrho\ldots)$ są numerami kolejnych maszyn elementarnych (rzędami harmonicznych przestrzennych przepływu), uczestniczących w powstawaniu prądów.

Liczba maszyn elementarnych pośredniczących w wytworzeniu prądów jest ściśle związana z krotnością i. Łatwo wykazać, że prąd i-tej reakcji stojana zawiera w nawiasie (i-1)2 indeksów różnych od zera (zaznaczając: "indeksów różnych od zera" możemy formalnie objąć tym wzorem prąd reakcji pierwotnej stojana $\underline{i}_{s1}^{(k)}(0)$):

$$\underline{i}_{s}^{(k)}\underbrace{\lambda(\varrho\ldots)}_{(i-1)2 \text{ indeksów}},$$

Analogicznie prądy j-tej reakcji wirnika przyjmują ogólną postać $\underline{i}_{r\mu(\varkappa\ldots)}^{(k)}$, gdzie liczba indeksów w nawiasie wynosi $1+(j-1)2$:

$$\underline{i}_{r}^{(k)}\mu\underbrace{(\varkappa\ldots)}_{1+(j-1)2 \text{ indeksów}}.$$

Przedstawione rozważania odnosiły się do przypadku zasilania stojana napięciami, odpowiadającymi pierwszej zespolonej współrzędnej osiowej $u_{s1}^{(k)}$ (w szczególności składowymi symetrycznymi $\underline{U}_1^{(s)}$ i $\underline{U}_4^{(s)}$). Jeśli 5-fazowy stojan jest zasilany ponadto napięciami związanymi z drugą współrzędną osiową $\underline{u}_{s2}^{(k)}$ (w szczególności składowymi symetrycznymi $\underline{U}_2^{(s)}$ i $\underline{U}_4^{(s)}$) należy przeprowadzić takie samo rozumowanie, jak to, które przedstawiono dla współrzędnej $\underline{u}_{s1}^{(k)}$ i przebadać na schemacie maszyny rozchodzenie się pobudzenia wywołanego napięciem $\underline{u}_{s2}^{(k)}$.

4.2. Rozkład prądów maszyny na prądy i-krotnych reakcji uzwojeń elementarnych

Prąd stojana (wirnika) można rozłożyć na składniki: prądy kolejnych i-krotnych reakcji stojana (wirnika), a te zaś dalej na prądy i-krotnych reakcji poszczególnych stojanów (wirników) elementarnych. W rozważanej maszynie o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku rozkład ten, po uwzględnieniu pierwotnej i wtórnej reakcji stojana i wirnika (przy rzędzie najwyższej uwzględnionej harmonicznej $\Omega = 15$ i przy napięciach zasilania odpowiadających pierwszej zespolonej współrzędnej osiowej napięcia $\underline{u}_{s1}^{(k)}$ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_{s1}^{(k)} &= \underline{i}_{s1}^{(k)}(0) + \underline{i}_{s1}^{(k)}(11,1) + \\
\underline{i}_{s2}^{(k)} &= \qquad \underline{i}_{s2}^{(k)}(14,2) + \underline{i}_{s2}^{(k)}(9,3) + \underline{i}_{s2}^{(k)}(4,8) + \\
i_{s3}^{(k)} &= \qquad i_{s3}^{(k)}(14,10) +
\end{aligned}$$

prąd reakcji
pierwotnej
stojana

prąd reakcji wtórnej stojana

$$\begin{aligned}
&+ \underline{i}_{s1}^{(k)}(1,11) + \ldots \\
&\qquad + i_{s2}^{(k)}(1,13) + \underline{i}_{s2}^{(k)}(11,13) + \ldots \\
&\qquad\qquad + i_{s3}^{(k)}(9,15) + \ldots
\end{aligned} \tag{4.1}$$

dla stojana oraz

$$\begin{aligned}
\underline{i}_{r1}^{(k)} &= \underline{i}_{r1}^{(k)}(1) \qquad + i_{r1}^{(k)}(11) + \\
\underline{i}_{r2}^{(k)} &= \qquad \underline{i}_{r2}^{(k)}(14) + \\
\underline{i}_{r3}^{(k)} &= \qquad \underline{i}_{r3}^{(k)}(9) + \underline{i}_{r3}^{(k)}(15) + \\
\underline{i}_{r4}^{(k)} &= \qquad \underline{i}_{r4}^{(k)}(4) + \\
\underline{i}_{r5}^{(k)} &= \qquad + \\
i_{r6}^{(k)} &= \qquad i_{r6}^{(k)}(6) + \\
i_{r7}^{(k)} &=
\end{aligned}$$

prąd reakcji pierwotnej wirnika

$$\begin{aligned}
&+ \underline{i}_{r1}^{(k)}(1,11,1) + \underline{i}_{r1}^{(k)}(11,1,11) + \underline{i}_{r1}^{(k)}(14,2,13) + \underline{i}_{r1}^{(k)}(4,8,13) + \\
&+ \underline{i}_{r2}^{(k)}(1,13,2) + i_{r2}^{(k)}(11,13,2) + i_{r2}^{(k)}(9,3,2) + i_{r2}^{(k)}(4,8,2) + \\
&+ \underline{i}_{r3}^{(k)}(1,13,3) + \underline{i}_{r3}^{(k)}(11,13,3) + \underline{i}_{r3}^{(k)}(4,8,3) + \underline{i}_{r3}^{(k)}(14,2,3) + \\
&+ \underline{i}_{r4}^{(k)}(1,11,4) + \underline{i}_{r4}^{(k)}(11,1,4) + \underline{i}_{r4}^{(k)}(1,13,8) + i_{r4}^{(k)}(9,3,8) + \\
&+ \underline{i}_{r5}^{(k)}(9,15,5) + \underline{i}_{r5}^{(k)}(14,10,5) + \underline{i}_{r5}^{(k)}(1,13,7) + \underline{i}_{r5}^{(k)}(11,13,7) +
\end{aligned}$$

$$+\underline{i}_{r6}^{(k)}(1,11,6) + \underline{i}_{r6}^{(k)}(11,1,6) + \dots$$

$$+\underline{i}_{r7}^{(k)}(1,13,12) + \underline{i}_{r7}^{(k)}(11,13,12) + \underline{i}_{r7}^{(k)}(9,3,12) + \underline{i}_{r7}^{(k)}(4,8,12) + \qquad (4.2)$$

$$+\underline{i}_{r1}^{(k)}(9,3,13) + \dots$$

$$+\underline{i}_{r2}^{(k)}(9,15,10) + \underline{i}_{r2}^{(k)}(11,1,14) + \underline{i}_{r2}^{(k)}(1,11,14) + \dots$$

$$+\underline{i}_{r3}^{(k)}(1,11,9) + \underline{i}_{r3}^{(k)}(11,1,9) + \underline{i}_{r3}^{(k)}(14,10,15) + \dots$$

$$+\underline{i}_{r4}^{(k)}(11,13,8) + \underline{i}_{r4}^{(k)}(14,2,8) + \dots$$

$$+\underline{i}_{r5}^{(k)}(9,3,7) + \underline{i}_{r5}^{(k)}(4,8,7) + \underline{i}_{r5}^{(k)}(14,2,7) + \dots$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\underbrace{+\ \underline{i}_{r7}^{(k)}(14,2,12) + \dots}_{\text{prąd reakcji wtórnej wirnika}}$$

dla wirnika.

Prądy reakcji pierwotnej i wtórnej stojana oraz prądy reakcji pierwotnej wirnika zestawiono w kolumny odpowiadające reakcjom poszczególnych stojanów (wirników) elementarnych. Uporządkowanie to nie zostało zachowane przy notacji prądów reakcji wtórnej wirnika w drugiej części wzoru (4.2) ze względu na zbyt dużą liczbę składników. Liczba składników prądów ujawnianych w kolejnych odbiciach narasta bardzo szybko. Jak wspomniano w rozdz. 3.1, sens techniczny ma rozważenie nie więcej jak dwóch lub trzech kolejnych odbić. Ponadto liczba składników rozkładu może być znacznie zredukowana poprzez uwzględnienie w przepływie stojana i wirnika tylko najbardziej znaczących harmonicznych przestrzennych (np. tylko harmonicznych żłobkowych).

4.3. Prądy stojana i wirnika w stanie ustalonym

W stanie ustalonym ogólną postać czasową dowolnego składnika rozkładu (4.1) lub (4.2) można łatwo określić opierając się na znajomości toru przedstawiającego mechanizm generowania prądu. O prędkości wirowania zespolonych współrzędnych osiowych prądu decyduje orientacja osi faz oraz liczba uzwojeń elementarnych, leżących wzdłuż toru. Określenie ogólnej postaci zespolonej współrzędnej osiowej prądu polega w interpretacji fizycznej na przetransformowaniu prądu reakcji pierwotnej stojana (początek

toru) na płaszczyznę uzwojenia elementarnego, wskazanego przez koniec toru. Transformacje prowadzące z jednej płaszczyzny uzwojenia elementarnego na drugą, to transformacje obrotu układu współrzędnych o kąty $\pm \nu\varphi$ (o tym, czy kąt obrotu $\nu\varphi$ jest dodatni czy ujemny, decyduje orientacja osi faz ν-tego uzwojenia elementarnego: w uzwojeniu o orientacji lewoskrętnej za dodatnie przyjmujemy kąty odmierzane w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zaś w uzwojeniu prawoskrętnym - w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara) oraz transformacje, związane ze zmianą orientacji osi układu (zmianą układu prawoskrętnego na lewoskrętny i odwrotnie). W dziedzinie liczb zespolonych transformacjom tym odpowiadają operatory obrotu $e^{\pm j\varphi}$ oraz operator sprzężenia $*$. Transformacje te w zależności od orientacji osi uzwojeń w maszynie elementarnej zebrane są również na rys. 3.8.

Postępowanie prowadzące do wyznaczenia ogólnej postaci zespolonych współrzędnych osiowych zilustrujemy szczegółowo na przykładzie dwu składników sumy (4.2): $\underline{i}_{r2}^{(k)}(1,13,2)$ oraz $\underline{i}_{r2}^{(k)}(11,13,2)$. Załóżmy, że maszynę zasila pierwsza składowa symetryczna napięcia $\underline{U}_1^{(s)}$. Wówczas zgodnie z wzorem (2.25)

$$\underline{u}_{s1}^{(k)}(t) = \underline{U}_1^{(s)} e^{j\omega_o t} \qquad (4.3)$$

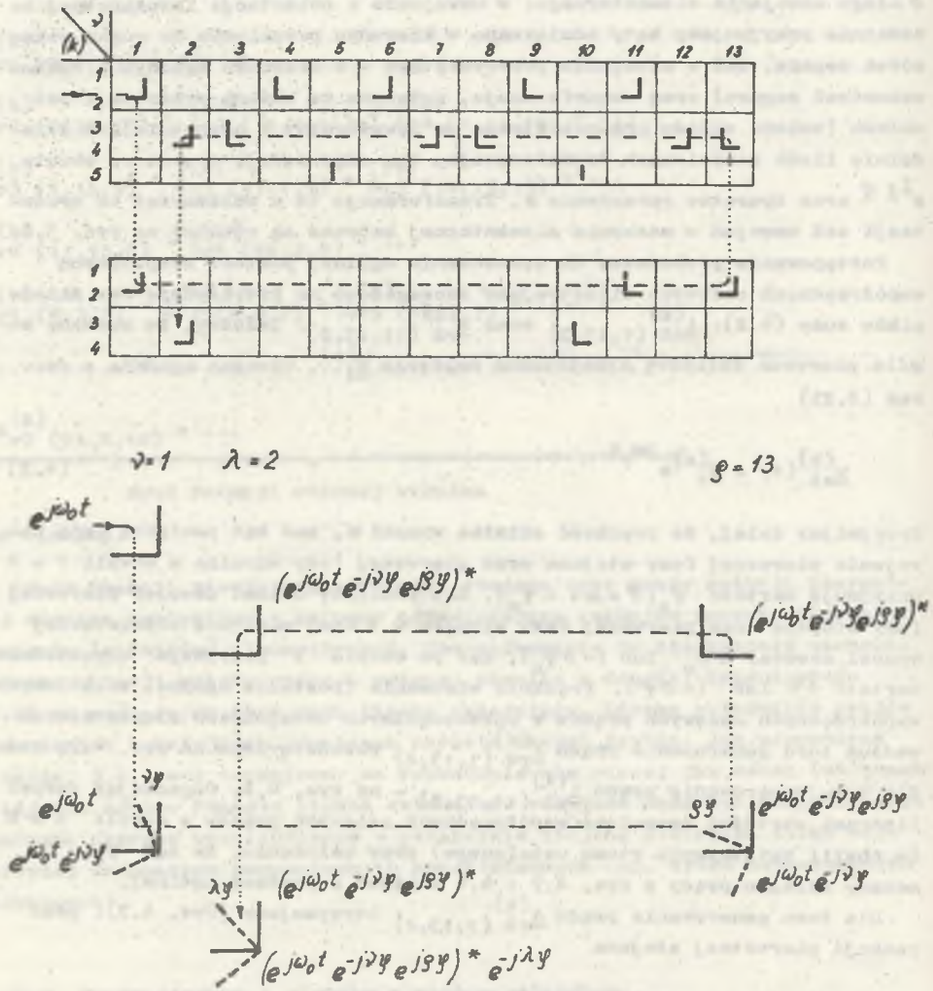
Przyjmijmy dalej, że prędkość silnika wynosi ω, zaś kąt pomiędzy osią uzwojenia pierwszej fazy stojana oraz pierwszej fazy wirnika w chwili $t = 0$ przyjmuje wartość φ_o ($\varphi = \omega t + \varphi_o$). Kąt pomiędzy osiami uzwojeń pierwszej fazy stojana oraz pierwszej fazy wirnika w ν-tej maszynie elementarnej wynosi wówczas $\nu\varphi_o$ lub $(-\nu\varphi_o)$, zaś po czasie t przyjmuje odpowiednio wartość $\nu\varphi$ lub $(-\nu\varphi)$. Prędkość wirowania (postacie ogólne) zespolonych współrzędnych osiowych prądów w poszczególnych uzwojeniach elementarnych wzdłuż toru generowania prądu $\underline{i}_{r2}^{(k)}(1,13,2)$ przedstawiono na rys. 4.7, zaś dla toru generowania prądu $\underline{i}_{r2}^{(k)}(11,13,2)$ - na rys. 4.8. Oznaczając dużymi literami wartości zespolone współrzędnych osiowych prądów w chwili $t = 0$ (w chwili zaistnienia stanu ustalonego) przy założeniu, że kąt $\varphi_o = 0$, możemy kolejno prądy z rys. 4.7 i 4.8 zapisać w postaci ogólnej.

Dla toru generowania prądu $\underline{i}_{r2}^{(k)}(1,13,2)$ otrzymujemy (rys. 4.7): prąd reakcji pierwotnej stojana

$$\underline{i}_{s1}^{(k)}(0)(t) = \underline{I}_{s1}^{(k)}(0)\, e^{j\omega_o t}$$

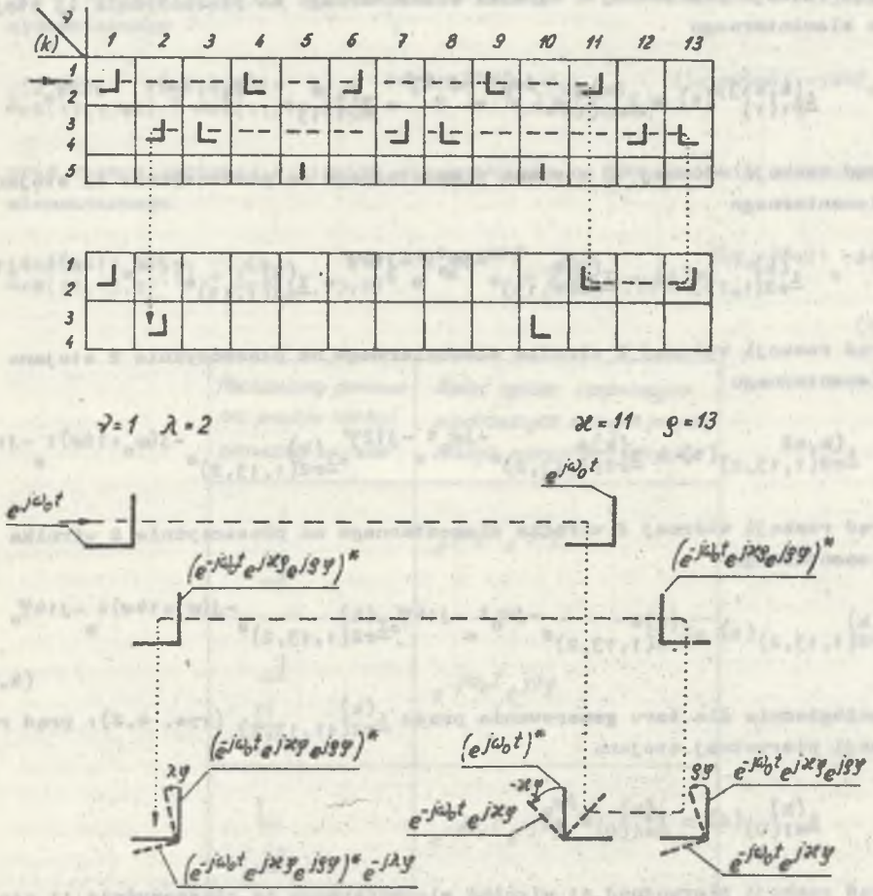
prąd reakcji pierwotnej 1 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 1 stojana elementarnego

$$\underline{i}_{r1(1)}^{(k,s1)}(t) = \underline{I}_{r1(1)}^{(k)} e^{j\omega_o t}$$



Rys. 4.7. Określenie ogólnej postaci prądu reakcji wtórnej wirnika $\underline{i}^{(k)}_{r2(1,13,2)}$ w stanie ustalonym

Fig. 4.7. The determination of the general form of the current of secondary rotor reaction $\underline{i}^{(k)}_{r2(1,13,2)}$ in steady state



Rys. 4.8. Określenie ogólnej postaci prądu reakcji wtórnej wirnika $i^{(k)}_{r2(11,13,2)}$ w stanie ustalonym

Fig. 4.8. The determination of the general form of the current of secondary rotor reaction $\underline{i}^{(k)}_{r2(11,13,2)}$ in steady state

prąd reakcji pierwotnej 1 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 1 wirnika elementarnego

$$\underline{i}^{(k)}_{r1(1)}(t) = \underline{I}^{(k)}_{r1(1)} e^{j\omega_o t} e^{-j\varphi} = \underline{I}^{(k)}_{r1(1)} e^{j(\omega_o-\omega)t} e^{-j\varphi_o}$$

prąd reakcji pierwotnej 1 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 13 stojana elementarnego

$$\underline{i}^{(k,s13)}_{r1(1)}(t) = \underline{I}^{(k)*}_{r1(1)} e^{-j\omega_o t} e^{-j12\varphi} = \underline{I}^{(k)*}_{r1(1)} e^{-j(\omega_o+12\omega)t} e^{-j12\varphi_o}$$

prąd reakcji wtórnej 13 stojana elementarnego na płaszczyźnie 13 stojana elementarnego

$$\underline{i}^{(k)}_{s2(1,13)}(t) = \underline{I}^{(k)*}_{s2(1,13)} e^{-j\omega_o t} e^{-j12\varphi} = \underline{I}^{(k)}_{s2(1,13)} e^{-j(\omega_o+12\omega)t} e^{-j12\varphi_o}$$

prąd reakcji wtórnej 2 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 2 stojana elementarnego

$$\underline{i}^{(k,s2}_{r2(1,13,2)}(t) = \underline{I}^{(k)*}_{r2(1,13,2)} e^{-j\omega_o t} e^{-j12\varphi} = \underline{I}^{(k)}_{r2(1,13,2)} e^{-j(\omega_o+12\omega)t} e^{-j12\varphi_o}$$

prąd reakcji wtórnej 2 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 2 wirnika elementarnego

$$\underline{i}^{(k)}_{r2(1,13,2)}(t) = \underline{I}^{(k)*}_{r2(1,13,2)} e^{-j\omega_o t} e^{-j14\varphi} = \underline{I}^{(k)}_{r2(1,13,2)} e^{-j(\omega_o+14\omega)t} e^{-j14\varphi_o} \tag{4.4}$$

Analogicznie dla toru generowania prądu $\underline{i}^{(k)}_{r2(11,13,2)}$ (rys. 4.8): prąd reakcji pierwotnej stojana

$$\underline{i}^{(k)}_{s1(0)}(t) = \underline{I}^{(k)}_{s1(0)} e^{j\omega_o t}$$

prąd reakcji pierwotnej 11 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 11 stojana elementarnego

$$\underline{i}^{(k-s11)}_{r1(11)}(t) = \underline{I}^{(k)}_{r1(11)} e^{j\omega_o t}$$

prąd reakcji pierwotnej 11 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 11 wirnika elementarnego

$$\underline{i}^{(k)}_{r1(11)}(t) = \underline{I}^{(k)*}_{r1(11)} e^{-j\omega_o t} e^{j11\varphi} = \underline{I}^{(k)*}_{r1(11)} e^{-j(\omega_o-11\omega)t} e^{j11\varphi_o}$$

prąd reakcji wtórnej 13 stojana elementarnego na płaszczyźnie 13 stojana elementarnego

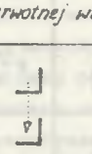
$$\underline{i}^{(k)}_{s2(11,13)}(t) = \underline{I}^{(k)}_{s2(11,13)} e^{j\omega_o t} e^{-j24\varphi} = \underline{I}^{(k)}_{s2(11,13)} e^{j(\omega_o-24\omega)t} e^{-j24\varphi_o}$$

prąd reakcji wtórnej 2 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 2 stojana elementarnego

$$\underline{i}^{(k.s2)}_{r2(11,13,2)} = \underline{I}^{(k)}_{r2(11,13,2)} = e^{j\omega_o t} e^{-j24\varphi} = \underline{I}^{(k)}_{s2(11,13)} e^{j(\omega_o-24\omega)t} e^{-j24\varphi_o}$$

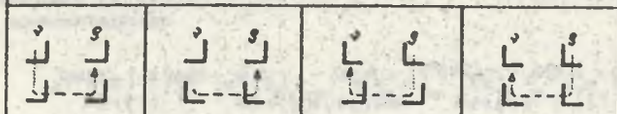
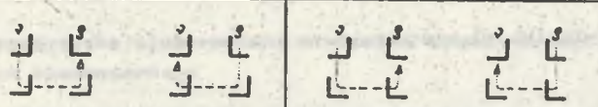
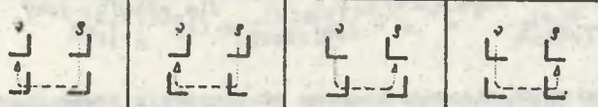
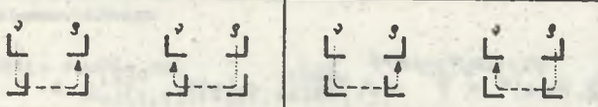
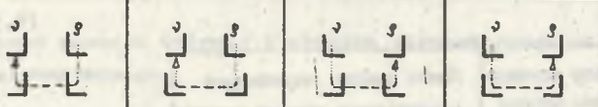
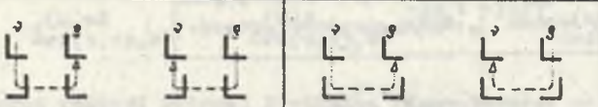
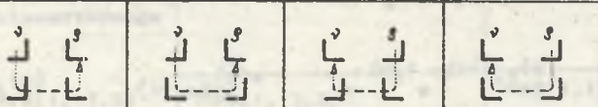
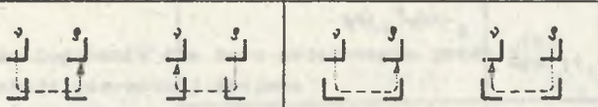
prąd reakcji wtórnej 2 wirnika elementarnego na płaszczyźnie 2 wirnika elementarnego

$$\underline{i}^{(k)}_{r2(11,13,2)}(t) = \underline{I}^{(k)}_{r2(11,13,2)} e^{j\omega_o t} e^{-j26\varphi} = \underline{I}^{(k)}_{r2(11,13,2)} e^{j(\omega_o-26\omega)t} e^{-j26\varphi_o} \tag{4.5}$$

Mechanizmy generowania prądów reakcji pierwotnej wirnika	*Postać ogólna zespolonych współrzędnych osiowych prądów reakcji pierwotnej wirnika*
	$e^{j\omega_o t} e^{-j\nu\varphi}$
	$e^{-j\omega_o t} e^{j\nu\varphi}$
	$e^{-j\omega_o t} e^{-j\nu\varphi}$
	$e^{j\omega_o t} e^{j\nu\varphi}$

Rys. 4.9. Ogólne postacie prądów reakcji pierwotnej wirnika w stanie ustalonym w zależności od mechanizmu generowania

Fig. 4.9. The general forms of the currents of primary rotor reaction in steady state according to the path of generation

Mechanizmy generowania prądów reakcji wtórnej stojana				Postać ogólna zespolonych współrzędnych osiowych prądów reakcji wtórnej stojana
				$e^{j[\omega_0+(\varrho-\vartheta)\omega]t}\, e^{j(\varrho-\vartheta)\varphi_0}$
				$e^{-j[\omega_0+(\varrho-\vartheta)\omega]t}\, e^{j(\varrho-\vartheta)\varphi_0}$
				$e^{j[\omega_0-(\varrho-\vartheta)\omega]t}\, e^{-j(\varrho-\vartheta)\varphi_0}$
				$e^{-j[\omega_0-(\varrho-\vartheta)\omega]t}\, e^{j(\varrho-\vartheta)\varphi_0}$
				$e^{j[\omega_0+(\varrho+\vartheta)\omega]t}\, e^{j(\varrho+\vartheta)\varphi_0}$
				$e^{-j[\omega_0+(\varrho+\vartheta)\omega]t}\, e^{-j(\varrho+\vartheta)\varphi_0}$
				$e^{j[\omega_0-(\varrho+\vartheta)\omega]t}\, e^{-j(\varrho+\vartheta)\varphi_0}$
				$e^{-j[\omega_0-(\varrho+\vartheta)\omega]t}\, e^{j(\varrho+\vartheta)\varphi_0}$

Rys. 4.10. Ogólne postacie prądów reakcji wtórnej stojana w stanie ustalonym w zależności od mechanizmu generowania

Fig. 4.10. The general forms of the currents of secondary stator reaction in steady state according to the path of generation

Powtarzając przedstawione powyżej rozważania dla wszystkich możliwych torów generowania prądów pierwotnej reakcji wirnika i prądów wtórnej reakcji stojana otrzymano tabele przedstawione na rys. 4.9 i 4.10. Tabele te pozwalają na określenie prędkości wirowania zespolonych współrzędnych osiowych prądów wprost na podstawie orientacji osi faz maszyn elementarnych, uczestniczących w powstawaniu prądów. Można z nich wysnuć również wiele wniosków. Zespolone współrzędne osiowe prądów wtórnej reakcji stojana przy ustalonym rzędzie harmonicznych ϑ, ϱ i prędkości wirnika ω mogą

w zależności od orientacji osi faz i kierunku przemieszczania się wzdłuż toru generowania prądów wirować z czterema różnymi prędkościami w kierunku zgodnym bądź przeciwnym. W przypadku, gdy w ϑ-tej i ϱ-tej maszynie elementarnej osie faz stojanów (wirników) są zorientowane zgodnie, a osie faz wirników (stojanów) przeciwnie - prędkości te nie zależą od strzałki kierunkowości na torze generowania prądu.

Z ogólnej postaci prądów reakcji wielokrotnych wynika, że zmiana kąta φ_0 (spowodowana np. przejściowym przyspieszeniem wirnika) pociąga za sobą zmianę fazy prądów i-krotnych reakcji stojana (z wyjątkiem oczywiście prądu pierwotnej reakcji stojana) oraz wszystkich prądów j-krotnej reakcji wirnika.

Możliwość określenia ogólnej postaci prądów i-krotnych reakcji uzwojeń elementarnych ma istotne znaczenie praktyczne, albowiem częstotliwości prądów zawartych w prądach fazowych stojana i wirnika maszyny są wprost równe prędkościom wirowania poszczególnych składników rozkładu (4.1) i (4.2) (wniosek ten wynika wprost z osiowej transformacji odwrotnej). Reasumując, opierając się na schemacie rozkładu z uwidocznionymi torami można dla modelu maszyny uwzględniającego dowolne harmoniczne przestrzenne i dowolne współrzędne osiowe określić częstotliwości prądów generowanych w fazach maszyny w poszczególnych odbiciach. Jest to zagadnienie, które nabrało szczególnego znaczenia w związku z rozwojem nowych metod wyznaczania prądów w maszynach w stanach stacjonarnych [49 ; 51 ; 58]. Metody te - poprzez założenie ogólnej postaci rozwiązania - sprowadzają problem wyznaczenia prądów w stanach ustalonych do rozwiązania liniowego układu równań algebraicznych. Teoretycznie jest to układ złożony z nieskończonej liczby równań, którego stopień obniża się poprzez odpowiedni wybór harmonicznych przestrzennych przepływu oraz współrzędnych maszyny. Dla tak zredukowanego układu równań należy przewidzieć ogólną postać prądów w uzwojeniach, przy czym w rozwiązaniu powinny być uwzględnione częstotliwości odpowiadające prądom o największych wartościach. Znane z literatury rozwiązania tego zagadnienia dotyczą tylko szczególnych przypadków, odnoszących się do 3-fazowych maszyn pierścieniowych i klatkowych. Proponowana metoda, oparta na schemacie rozkładu maszyny, daje możliwość przewidywania postaci prądów fazowych (określania częstotliwości prądów składowych) przy dowolnych założeniach upraszczających (dotyczących wyboru harmonicznych przestrzennych przepływu, współrzędnych stojana i wirnika oraz liczby kolejnych odbić) i to w odniesieniu do szerokiej klasy maszyn asynchronicznych.

We wcześniejszych pracach prądy maszyn asynchronicznych w stanach ustalonych (przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych) były wyznaczane zgodnie z zasadą kolejnych odbić, która w niniejszym rozdziale została wykorzystana do przeprowadzenia rozkładu prądów uzwojeń w stanach nieustalonych. Metody te zostały szczegółowo rozwinięte dla 3-fazowych maszyn pierścieniowych i klatkowych [12 ; 13 ; 38 ; 40]. Analizę prowadzono we współrzędnych fazowych wyznaczając w kolejnych odbiciach rozkład pola magnetycznego

i na tej podstawie - napięcia indukowane w uzwojeniach. Taki - bardzo pracochłonny i żmudny - tok postępowania powodował konieczność ograniczania widma harmonicznych przestrzennych i liczby odbić.

Zasada kolejnych odbić, zastosowana w niniejszym rozdziale do rozkładu prądów w stanach nieustalonych, może być wykorzystana do analizy stanu ustalonego. W tym celu należy wyznaczyć przybliżone wartości prądów w rozkładzie 4.1 i 4.2 na podstawie modeli maszyny, umożliwiających na drodze transformacji obrotu uzyskiwanie równań różniczkowych o stałych współczynnikach i w konsekwencji - formułowanie schematów zastępczych.

Przy zasilaniu maszyny 1 składową symetryczną napięcia $\underline{U}_1^{(s)}$ prąd reakcji pierwotnej $\underline{I}_{s1(0)}^{(k)}$ wyznacza się opierając się na modelu maszyny z harmoniczną główną. Wpływ wyższych harmonicznych stojana uwzględnia się za pomocą indukcyjności rozproszenia różnicowego dla pierwszej składowej ortogonalnej dla 1 stojana elementarnego $\sum_{\vartheta} L_{s\vartheta}$, gdzie: $\vartheta = 4, 6, 9, 11, 14,...$ W celu wyznaczenia prądu reakcji pierwotnej wirnika należy "rozciąć" połączenia galwaniczne pomiędzy poszczególnymi wirnikami elementarnymi. Wirniki te zwieramy poprzez odpowiednie indukcyjności rozproszenia różnicowego: 1 wirnik elementarny przez indukcyjność rozproszenia różnicowego dla pierwszej składowej ortogonalnej dla 1 wirnika $\sum_{\vartheta=11,13...} L_{r\vartheta}$, 2 wirnik elementarny przez indukcyjność rozproszenia różnicowego dla drugiej składowej ortogonalnej dla 2 wirnika $\sum_{\vartheta=10,14...} L_{r\vartheta}$, 11 wirnik elementarny przez indukcyjność rozproszenia różnicowego dla pierwszej składowej ortogonalnej dla 11 wirnika $\sum_{\vartheta=1,13....} L_{r\vartheta}$ itd., wyznaczając kolejne składniki prądu reakcji pierwotnej wirnika: $\underline{I}_{r1(1)}^{(k)}$, $\underline{I}_{r2(2)}^{(k)}$, $\underline{I}_{r1(11)}^{(k)}$ itd. Dalej, włączając przykładowo siłę prądomotoryczną, równą prądowi reakcji pierwotnej 1 wirnika elementarnego $\underline{I}_{r1(1)}^{(k)}$ w obwód 11 wirnika elementarnego, a indukcyjność rozproszenia różnicowego stojana dla pierwszej składowej ortogonalnej dla 11 stojana elementarnego $\sum_{\vartheta} L_{s\vartheta}$, gdzie: $\vartheta = 1, 4, 6, 9, 14,...$ w obwód 11 stojana wyznaczamy prąd reakcji wtórnej $\underline{I}_{s1(1,11)}^{(k)}$. Włączając siłę prądomotoryczną, równą prądowi reakcji pierwotnej 14 wirnika elementarnego $\underline{I}_{r2(14)}^{(k)}$ w obwód 2 wirnika elementarnego, a indukcyjność rozproszenia różnicowego stojana dla drugiej składowej ortogonalnej dla 2 stojana elementarnego $\sum_{\vartheta} L_{s\vartheta}$, gdzie: $\vartheta = 3, 7, 8, 12, 13,...$ - w obwód 2 stojana, otrzymujemy prąd reakcji wtórnej $\underline{I}_{s2(14,2)}^{(k)}$ itd.

Kontynuując powyższe postępowanie wyznaczamy pozostałe składniki prądu reakcji wtórnej stojana. W analogiczny sposób można obliczyć przybliżoną wartość prądu wtórnej reakcji wirnika, 3 reakcji stojana itd.

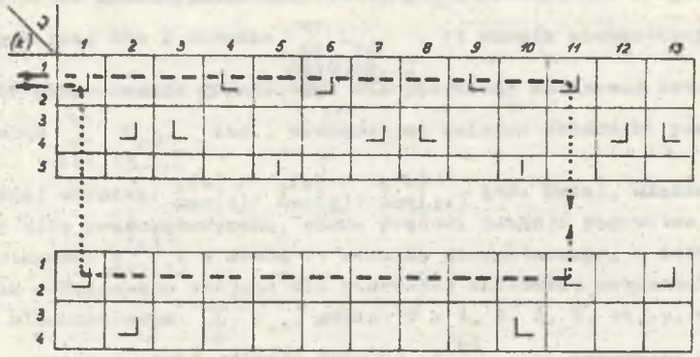
W celu uściślenia obliczeń można również na podstawie schematów zastępczych maszyny wyznaczać na kolejnych etapach obliczeń (dla kolejnych odbić)

współczynniki tłumienia dla poszczególnych indukcyjności rozproszenia różnicowego. Dokładność metody wynika z liczby uwzględnionych składników, ich właściwego wyboru oraz poprawności wyznaczenia reaktancji rozproszenia różnicowego. Wykorzystanie schematów rozkładu bardzo ułatwia posługiwanie się metodą kolejnych odbić, a ponadto znacznie rozszerza jej możliwości, pozwalając na uwzględnianie dowolnych harmonicznych przestrzennych, dowolnych współrzędnych i dowolnej liczby odbić. Proponowana metoda umożliwia wyznaczenie nie tylko wartości skutecznych prądów i-krotnych reakcji uzwojeń, ale również ich faz. Ponadto ze schematów rozkładu oraz macierzy schematycznych bezpośrednio wynikają wzory, określające reaktancje rozproszenia różnicowego dla różnych składowych ortogonalnych w kolejnych odbiciach.

5. ELEKTROMAGNETYCZNE MOMENTY PASOŻYTNICZE

5.1. Mechanizm generowania momentów pasożytniczych

Z rozkładem prądów stojana i wirnika na prądy i-krotnych reakcji poszczególnych uzwojeń elementarnych wiąże się możliwość przeprowadzenia rozkładu formy dwuliniowej momentu elektromagnetycznego maszyny indukcyjnej. Zagadnienie to przedstawimy na tym samym przykładzie maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku. Dla ustalenia uwagi model matematyczny maszyny uprościmy, pomijając 3, 4, 5, 6 i 7 zespoloną współrzędną osiową wirnika oraz przyjmiemy, że rząd najwyższej uwzględnionej harmonicznej przestrzennej wynosi 13 ($\Omega = 13$). Zredukowany schemat rozkładu, odpowiadający powyższym założeniom, przedstawiono na rys. 5.1. Rozkład prądów w maszynie zasilanej pierwszą zespoloną współrzędną osiową napięcia i przy uwzględnieniu pierwotnej i wtórnej reakcji uzwojeń jest wówczas szczególnym przypadkiem rozkładu (4.1) i (4.2):



Rys. 5.1. Mechanizm generowania pasożytniczego momentu synchronicznego I rzędu $M^{I}_{1(0)(11)}$

Fig. 5.1. The path of the generation of a parasitic synchronous torque $M^{I}_{1(0)(11)}$

$$\underline{i}^{(k)}_{s1} = \underline{i}^{(k)}_{s1(0)} + \underline{i}^{(k)}_{s1(1,11)} + \underline{i}^{(k)}_{s1(11,1)}$$

$$\underline{i}^{(k)}_{s2} = \underline{i}^{(k)}_{s2(1,13)} + \underline{i}^{(k)}_{s2(11,13)}$$

$$\underline{i}^{(k)}_{s3} = 0$$

$$\underline{i}^{(k)}_{r1} = \underline{i}^{(k)}_{r1(1)} + \underline{i}^{(k)}_{r1(11)}$$

$$\underline{i}^{(k)}_{r2} = \underline{i}^{(k)}_{r2(1,13,2)} + \underline{i}^{(k)}_{r2(11,13,2)} \tag{5.1}$$

W rozdz. 3.4 wykazano, że moment elektromagnetyczny maszyny jest sumą momentów elektromagnetycznych poszczególnych maszyn elementarnych, w rozważanym przykładzie - sumą momentów elektromagnetycznych 1, 2, 11 i 13 maszyny elementarnej (rys. 3.7):

$$M_e = L_{sr1}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1}\,\underline{i}^{(k)}_{r1}\,e^{j\varphi}\right\} + 2L_{sr2}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s2}\,\underline{i}^{(k)}_{r2}\,e^{j2\varphi}\right\} +$$
$$+ 11\,L_{sr11}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1}\,\underline{i}^{(k)}_{r1}\,e^{j11\varphi}\right\} + 13L_{sr}\,\mathrm{Re}\left\{-j\underline{i}^{(k)*}_{s2}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1}\,e^{-j13\varphi}\right\} \tag{5.2}$$

Podstawienie wzoru (5.1) do (5.2) prowadzi do rozkładu momentów elektromagnetycznych poszczególnych maszyn elementarnych na składniki związane z kolejnymi reakcjami uzwojeń:

$$\begin{aligned}
M_e = {} & L_{sr1}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(0)}\,\underline{i}^{(k)}_{r1(1)}e^{j\varphi}\right\} + L_{sr1}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(0)}\,\underline{i}^{(k)}_{r1(11)}e^{j\varphi}\right\} + \\
& + L_{sr1}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(1,11)}\,\underline{i}^{(k)}_{r1(1)}e^{j\varphi}\right\} + L_{sr1}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(1,11)}\,\underline{i}^{(k)}_{r1(11)}e^{j\varphi}\right\} + \\
& + L_{sr1}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(11,1)}\,\underline{i}^{(k)}_{r1(1)}e^{j\varphi}\right\} + L_{sr1}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(11,1)}\,\underline{i}^{(k)}_{r1(11)}e^{j\varphi}\right\} + \\
& + 2L_{sr2}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s2(1,13)}\,\underline{i}^{(k)}_{r2(1,13,2)}e^{j2\varphi}\right\} + 2L_{sr2}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s2(1,13)}\,\underline{i}^{(k)}_{r2(11,13,2)}e^{j2\varphi}\right\} + \\
& + 2L_{sr2}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s2(11,13)}\,\underline{i}^{(k)}_{r2(1,13,2)}e^{j2\varphi}\right\} + 2L_{sr2}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s2(11,13)}\,\underline{i}^{(k)}_{r2(11,13,2)}e^{j2\varphi}\right\} + \\
& + 11L_{sr11}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(0)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(1)}e^{j11\varphi}\right\} + 11L_{sr11}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(0)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(11)}e^{j11\varphi}\right\} + \\
& + 11L_{sr11}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(1,11)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(1)}e^{j11\varphi}\right\} + 11L_{sr11}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)}_{s1(1,11)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(11)}e^{j11\varphi}\right\} + \\
& + 11L_{sr11}\left\{\mathrm{Re}\;j\underline{i}^{(k)*}_{s1(11,1)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(1)}e^{j11\varphi}\right\} + 11L_{sr11}\,\mathrm{Re}\left\{j\underline{i}^{(k)*}_{s1(11,1)}\,\underline{i}^{(k)}_{r1(11)}e^{j11\varphi}\right\} + \\
& + 13L_{sr13}\,\mathrm{Re}\left\{-j\underline{i}^{(k)}_{s2(1,13)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(1)}e^{-j13\varphi}\right\} + 13L_{sr13}\,\mathrm{Re}\left\{-j\underline{i}^{(k)*}_{s2(1,13)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(11)}e^{-j13\varphi}\right\} + \\
& + 13L_{sr13}\,\mathrm{Re}\left\{-j\underline{i}^{(k)*}_{s2(11,13)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(1)}e^{-j13\varphi}\right\} + 13L_{sr13}\,\mathrm{Re}\left\{-j\underline{i}^{(k)*}_{s2(11,13)}\,\underline{i}^{(k)*}_{r1(11)}e^{-j13\varphi}\right\}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Pierwszych 6 składników jest związanych z 1 maszyną elementarną, 7, 8, 9 i 10 składnik - z 2 maszyną elementarną, 11, 12, 13, 14, 15 i 16 składnik z 11 maszyną elementarną oraz 17, 18, 19 i 20 składnik - z 13 maszyną elementarną.

Poszczególne składniki momentu będziemy oznaczali w sposób wiążący się bezpośrednio ze sposobem notacji zespolonych współrzędnych osiowych prądów uczestniczących w formowaniu danego momentu.

Momentowi elektromagnetycznemu, powstającemu w ϑ-tej maszynie elementarnej na skutek elektrodynamicznego współdziałania prądu i-tej reakcji ϑ-tego stojana elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{s\lambda(\varrho\ldots)}$ oraz prądu j-tej reakcji ϑ-tego wirnika elementarnego $\underline{i}^{(k)}_{r\mu(\varkappa\ldots)}$ przypisujemy oznaczenie $M_{\vartheta(\varrho\ldots)(\varkappa\ldots)}$. Indeks ϑ wskazuje na numer maszyny elementarnej, zbiór indeksów z pierwszego nawiasu jest zbiorem indeksów określających prąd i-tej reakcji stojana elementarnego, zaś zbiór indeksów z drugiego nawiasu - zbiorem indeksów określających prąd j-tej reakcji wirnika elementarnego. Z takim sposobem notacji koresponduje możliwość graficznego przedstawienia mechanizmów generowania poszczególnych składników momentu na schemacie rozkładu maszyny na maszyny elementarne. W tym celu wystarczy uwidocznić tory, na których dochodzi do powstania współdziałających ze sobą pól magnetycznych stojana i wirnika w poszczególnych maszynach elementarnych. Tory te nanosimy zgodnie z zasadami przyjętymi dla prądów i-krotnych reakcji w rozdz. 4.1.

Pośród składników momentu elektromagnetycznego ϑ-tej maszyny elementarnej można wyróżnić składniki odpowiadające prądom pierwotnej reakcji stojana i pierwotnej reakcji wirnika, pierwotnej reakcji stojana i wtórnej reakcji wirnika, wtórnej reakcji stojana i pierwotnej reakcji wirnika, wtórnej reakcji stojana i wtórnej reakcji wirnika itd. Im wyższa jest krotność reakcji prądów uczestniczących w formowaniu momentu, tym mniejsza jego wartość. Momenty elektromagnetyczne można więc uporządkować według wskaźnika związanego z krotnościami reakcji uzwojeń, który będziemy nazywać rzędem r. Rząd r jest miarą wytłumienia momentu elektromagnetycznego. Momentowi elektromagnetycznemu ϑ-tej maszyny elementarnej, powstającemu na skutek współdziałania prądów i-tej reakcji stojana oraz j-tej reakcji wirnika, przypisujemy rząd r, określony wzorem:

$$r = i + j - 1 \tag{5.4}$$

Rząd momentu będziemy oznaczać cyfrą rzymską. W rozważanym przykładzie uwzględniono prądy pierwotnej i wtórnej reakcji uzwojeń, stąd powstające momenty elektromagnetyczne są momentami I, II i III rzędu:

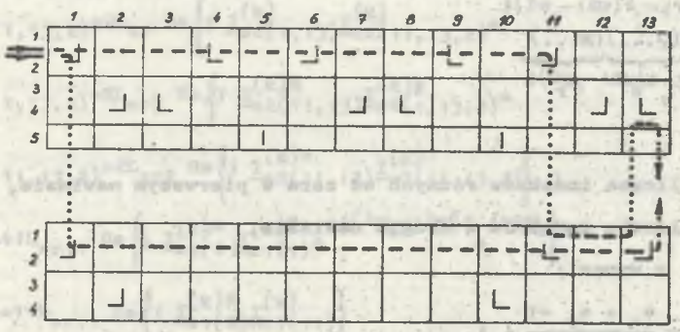
$$M_e = M^{I}_{1(0)(1)} + M^{I}_{1(0)11)} + M^{II}_{1(1,11)(1)} + M^{II}_{1(1,11)(11)} + M^{II}_{1(11,1)(1)} + M^{II}_{1(11,1)(11)} +$$

$$+ M^{III}_{2(1,13)(1,13,2)} + M^{III}_{2(1,13)(11,13,2)} + M^{III}_{2(11,13)(1,13,2)} + M^{III}_{2(11,13)(11,13,2)} +$$

$$+ M^{I}_{11(0)(1)} + M^{I}_{11(0)(11)} + M^{II}_{11(1,11)(1)} + M^{II}_{11(1,11)(11)} + M^{II}_{11(11,1)(1)} +$$

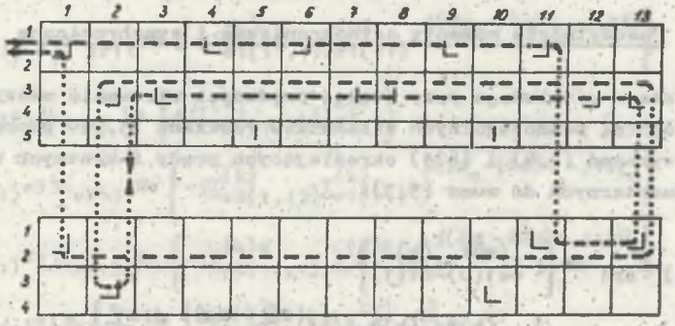
$$+ M^{II}_{11(11,1)(11)} + M^{II}_{13(11,13)(1)} + M^{II}_{13(11,13)(11)} \tag{5.5}$$

Mechanizmy generowania momentów różnych rzędów przedstawiono na schemacie rozkładu na przykładzie składników $M^{I}_{1(0)(11)}$, $M^{II}_{13(11,13,1)}$ oraz $M^{III}_{2(11,13)(1,13,2)}$ na rys. 5.1, 5.2 i 5.3.



Rys. 5.2. Mechanizm generowania pasożytniczego momentu synchronicznego II rzędu $M^{II}_{13(11,13)(1)}$

Fig. 5.2. The path of the generation of a parasitic synchronous torque $M^{II}_{13(11,13)(1)}$



Rys. 5.3. Mechanizm generowania pasożytniczego momentu synchronicznego III rzędu $M^{III}_{2(11,13)(1,13,2)}$

Fig. 5.3. The path of the generation of a parasitic synchronous torque $M^{III}_{2(11,13)(1,13,2)}$

W modelu matematycznym maszyny 2-biegunowej, uwzględniającym 1 harmoniczną przestrzenną (harmoniczną główną) występuje tylko składnik $M^{I}_{1(0)(1)}$. Moment elektromagnetyczny $M^{I}_{1(0)(1)}$ to moment główny (użyteczny) maszyny. Wszystkie pozostałe składniki są elektromagnetycznymi momentami pasożytniczymi.

Rząd momentu r można również powiązać z liczbą indeksów zawartych w pierwszym oraz drugim nawiasie oznaczenia momentu pasożytniczego. Jeśli pasożytniczy moment elektromagnetyczny, powstający w ϑ-tej maszynie elementarnej, ma ogólną postać:

$$M_{\vartheta\underbrace{(\varrho\ldots)}_{a_s}\underbrace{(\varkappa\ldots)}_{a_r}}$$

gdzie:

a_s - liczba indeksów różnych od zera w pierwszym nawiasie,

a_r - liczba indeksów w drugim nawiasie,

to rząd r wynosi:

$$r = \frac{a_s + a_r - 1}{2} + 1$$

Zaznaczając, że a_s oznacza liczbę indeksów różnych od zera, formalnie uwzględniono momenty pasożytnicze związane z prądami reakcji pierwotnej stojana. Dla prądu reakcji pierwotnej stojana $\underline{i}^{(k)}_{s1(0)}$ wskaźnik a_s wynosi bowiem 0.

5.2. Pasożytnicze momenty asynchroniczne i synchroniczne

Dla stanu ustalonego przy stałej prędkości wirowania maszyny określmy postać ogólną poszczególnych składników rozkładu (5.5) poprzez podstawienie wyrażeń (4.4) i (4.5) określających prądy i-krotnych reakcji uzwojeń elementarnych do sumy (5.3):

$$M^{I}_{1(0)(1)} = L_{sr1}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)*}_{s1(0)} \underline{I}^{(k)}_{r1(1)} \right\}$$

$$M^{I}_{1(0)(11)} = L_{sr1}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)*}_{s1(0)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(11)} e^{-j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{II}_{1(1,11)(1)} = L_{sr1}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)}_{s1(1,11)} \underline{I}^{(k)}_{r1(1)} e^{j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{-j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{II}_{1(1,11)(11)} = L_{sr1}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)}_{s1(1,11)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(11)} \right\}$$

$$M^{II}_{1(11,1)(1)} = L_{sr1}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)}_{s1(11,1)} \underline{I}^{(k)}_{r1(1)} e^{j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{-j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{II}_{1(11,1)(11)} = L_{sr1}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)}_{s1(11,1)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(11)} \right\}$$

$$M^{III}_{2(1,13)(1,13,2)} = 2L_{sr2}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)}_{s2(1,13)} \underline{I}^{(k)*}_{r2(1,13,2)} \right\}$$

$$M^{III}_{2(1,13)(11,13,2)} = 2L_{sr}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)}_{s2(1,13)} \underline{I}^{(k)}_{r2(11,13,2)} e^{j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{-j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{III}_{2(11,13)(1,13,2)} = 2L_{sr2}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)*}_{s2(11,13)} \underline{I}^{(k)*}_{r2(1,13,2)} e^{-j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{III}_{2(11,13)(11,13,2)} = 2L_{sr2}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)*}_{s2(11,13)} \underline{I}^{(k)}_{r2(11,13,2)} \right\}$$

$$M^{I}_{11(0)(1)} = 11L_{sr11}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)*}_{s1(0)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(1)} e^{-j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{I}_{11(0)(11)} = 11L_{sr11}\ \mathrm{Re}\left\{ j\ \underline{I}^{(k)*}_{s1(0)} \underline{I}^{(k)}_{r1(11)} \right\}$$

$$M^{II}_{11(1,11)(1)} = 11L_{sr11}\ \mathrm{Re}\left\{ jI^{(k)}_{s1(1,11)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(1)} \right\}$$

$$M^{II}_{11(1,11)(11)} = 11L_{sr11}\ \mathrm{Re}\left\{ j\underline{I}^{(k)}_{s1(1,11)} \underline{I}^{(k)}_{r1(11)} e^{j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{-j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{II}_{11(11,1)(1)} = 11L_{sr11}\ \mathrm{Re}\left\{ j\underline{I}^{(k)}_{s1(11,1)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(1)} \right\}$$

$$M^{II}_{11(11,1)(11)} = 11L_{sr11}\ \mathrm{Re}\left\{ j\underline{I}^{(k)}_{s1(11,1)} \underline{I}^{(k)}_{r1(11)} e^{j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{-j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{II}_{13(1,13)(1)} = 13L_{sr13}\ \mathrm{Re}\left\{ -j\underline{I}^{(k)}_{s2(1,13)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(1)} \right\}$$

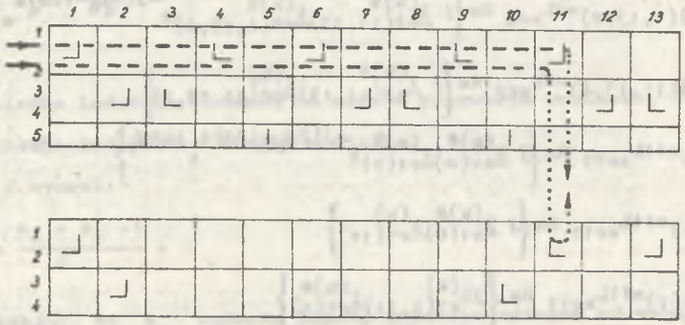
$$M^{II}_{13(1,13)(11)} = 13L_{sr13}\ \mathrm{Re}\left\{ -j\underline{I}^{(k)}_{s2(1,13)} \underline{I}^{(k)}_{r1(11)} e^{j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{-j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{II}_{13(11,13)(1)} = 13L_{sr13}\ \mathrm{Re}\left\{ -j\underline{I}^{(k)*}_{s2(11,13)} \underline{I}^{(k)*}_{r1(1)} e^{-j(2\omega_o - 12\omega)t} e^{j12\varphi_o} \right\}$$

$$M^{II}_{13(11,13)(11)} = 13L_{sr13}\ \mathrm{Re}\left\{ -j\underline{I}^{(k)*}_{s2(11,13)} \underline{I}^{(k)}_{r1(11)} \right\} \qquad (5.6)$$

Wśród dwudziestu składników momentu elektromagnetycznego można wyróżnić momenty, których wartość jest stała przy każdej prędkości obrotowej wirnika oraz takie, które wartość stałą przyjmują dla jednej tylko prędkości obrotowej. Momenty te nazywamy odpowiednio elektromagnetycznymi momentami asynchronicznymi i elektromagnetycznymi momentami synchronicznymi.

Moment asynchroniczny $M^{I}_{1(0)(1)}$ odpowiadający harmonicznej głównej (pracującej) jest momentem użytecznym, natomiast składniki $M^{I}_{11(0)(11)}$, $M^{II}_{1(1,11)(11)}$, $M^{II}_{1(11,1)(11)}$, $M^{II}_{11(1,11)(1)}$, $M^{II}_{11(11,1)(1)}$, $M^{II}_{13(1,13)(1)}$, $M^{II}_{13(11,13)(11)}$, $M^{III}_{2(1,13)(1,13,2)}$, $M^{III}_{2(11,13)(11,13,2)}$ są asynchronicznymi momentami pasożytniczymi. Pasożytnicze momenty asynchroniczne I rzędu przyjmują wartość zero dla jednej tylko prędkości obrotowej wirnika, zaś momenty asynchroniczne wyższych rzędów - dla większej liczby prędkości. Na rys. 5.4, 5.5 i 5.6 przedstawiono charakterystyczne przebiegi torów związanych z generowaniem pasożytniczych momentów asynchronicznych o różnych rzędach.



Rys. 5.4. Mechanizm generowania pasożytniczego momentu asynchronicznego I rzędu $M^{I}_{11(0)(11)}$

Fig. 5.4. The path of the generation of the parasitic asynchronous torque $M^{I}_{11(0)(11)}$

Pozostałe składniki sumy (5.5) - to elektromagnetyczne momenty przemienne (pulsujące) o wartości średniej równej 0 i o częstotliwości zależnej od prędkości obrotowej wirnika. Składniki te przy prędkości kątowej $\omega_s = \frac{2\omega_o}{12}$ przyjmują wartość stałą, stając się pasożytniczymi momentami synchronicznymi. W ogólnym przypadku pasożytnicze momenty synchroniczne powstają w maszynie asynchronicznej przy prędkościach kątowych, określonych wzorami:

$$\omega_s = \pm \frac{2\omega_o}{cn} \tag{5.7}$$

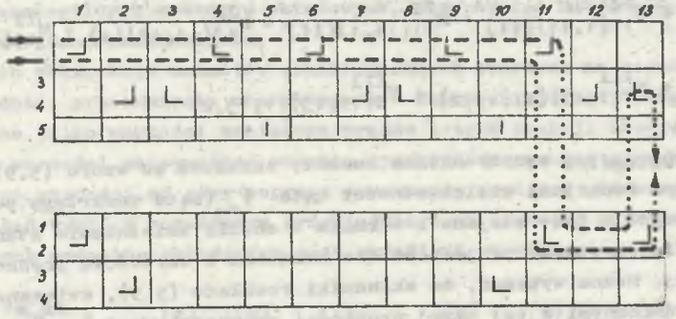
gdzie:

c - liczba całkowita,

n - liczba faz wirnika,

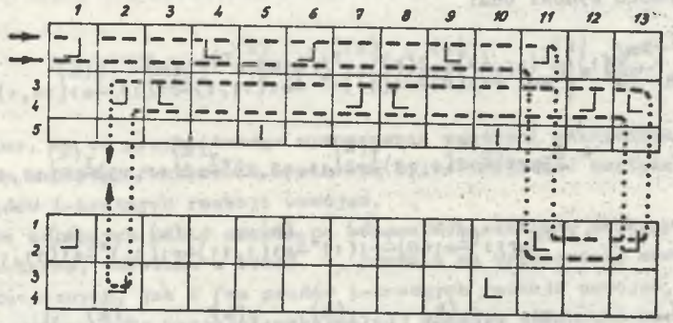
oraz

$$\omega_s = 0 \tag{5.8}$$



Rys. 5.5. Mechanizm generowania pasożytniczego momentu asynchronicznego II rzędu $M^{II}_{13(11,13)(11)}$

Fig. 5.5. The path of the generation of the parasitic asynchronous torque $M^{II}_{13(11,13)(11)}$



Rys. 5.6. Mechanizm generowanie pasożytniczego momentu asynchronicznego III rzędu $M^{III}_{2(11,13)(11,13,2)}$

Fig. 5.6. The path of the generation of the parasitic asynchronous torque $M^{III}_{2(11,13)(11,13,2)}$

Z tą samą prędkością synchroniczną są związane momenty synchroniczne odpowiadające różnym składnikom rozkładu typu (5.5). W rozważanej maszynie asynchronicznej prędkości synchronicznej $\omega_s = \frac{2\omega_o}{12}$ odpowiada 10 różnych składników (10 składowych momentów synchronicznych). Wypadkowy pasożytniczy moment synchroniczny jest więc sumą:

$$M_s\left(\frac{2\omega_o}{12}\right) = M^{I}_{1(0)(11)} + M^{I}_{11(0)(1)} + M^{II}_{1(1,11)(1)} + M^{II}_{1(11,1)(1)} +$$

$$+ M^{II}_{11(1,11)(11)} + M^{II}_{11(11,1)(11)} + M^{II}_{13(11,13)(1)} + M^{II}_{13(1,13)(11)} +$$

$$+ M^{III}_{2(1,13)(11,13,2)} + M^{III}_{2(11,13)(1,13,2)} \qquad (5.9)$$

Poszczególne synchroniczne momenty składowe ze wzoru (5.9) są sinusoidalnymi funkcjami wielokrotności kąta φ_o (kąta zawartego pomiędzy osiami uzwojeń i fazy stojana i wirnika w chwili zaistnienia stanu ustalonego). Wielokrotność ta jest ściśle związana z wartością prędkości synchronicznej. Można wykazać, że składniki rozkładu (5.5), związane z momentami synchronicznymi o tej samej prędkości synchronicznej $\pm \frac{2\omega_o}{cn}$ są sinusoidalnymi funkcjami tego samego kąta $cn\varphi_o$ (wspólne c). Prowadzi to do istotnego wniosku, że synchroniczny moment wypadkowy przy prędkości $\pm \frac{2\omega_o}{cn}$ pomimo tego, że jest sumą różnych składników rozkładu momentu, ma przebieg sinusoidalny i jest funkcją tego samego kąta $cn\varphi_o$. Zasadnicze znaczenie odgrywa znajomość maksymalnej wartości momentu synchronicznego. W rozważanym przypadku wynosi ona:

$$M_{smx}\left(\frac{2\omega_o}{12}\right) = \Big| L_{sr1}\left(\underline{I}^{(k)}_{s1(0)}\underline{I}^{(k)}_{r1(11)} + \underline{I}^{(k)}_{s1(11,1)}\underline{I}^{(k)}_{r1(1)} + \underline{I}^{(k)}_{s1(11,1)}\underline{I}^{(k)}_{r1(1)}\right) +$$

$$+ 2L_{sr2}\left(\underline{I}^{(k)}_{s2(1,13)}\underline{I}^{(k)}_{r2(11,13,2)} + \underline{I}^{(k)}_{s2(11,13)}\underline{I}^{(k)}_{r2(11,13,2)}\right) +$$

$$+ 11L_{sr11}\left(\underline{I}^{(k)}_{s1(0)}\underline{I}^{(k)}_{r1(1)} + \underline{I}^{(k)}_{s1(1,11)}\underline{I}^{(k)}_{r1(11)} + \underline{I}^{(k)}_{s1(11,1)}\underline{I}^{(k)}_{r1(11)}\right) -$$

$$- 13L_{sr13}\left(\underline{I}^{(k)}_{s2(1,13)}\underline{I}^{(k)}_{r1(11)} + \underline{I}^{(k)}_{s2(11,13)}\underline{I}^{(k)}_{r1(1)}\right)\Big| \qquad (5.10)$$

Na charakterystyce momentu asynchronicznego $M_a = f(\omega)$ pasożytnicze momenty synchroniczne nanosi się w postaci odcinków równoległych do osi momentów o długości równej dwukrotnej maksymalnej wartości momentu synchronicznego M_{smx}.

Charakterystyczne przebiegi dróg, związane z generowaniem momentów synchronicznych różnych rzędów przedstawiono na rys. 5.1, 5.2 i 5.3.

Rozważania i wnioski dotyczące pasożytniczych momentów synchronicznych można ująć w inną formę, wprowadzając - poprzez analogię do maszyny synchronicznej - charakterystykę kątową momentu synchronicznego. Charakterystyka kątowa pasożytniczego momentu synchronicznego przedstawia zależność elektromagnetycznego momentu synchronicznego od kąta φ_o (lub kąta $cn\,\varphi_o$). Pasożytnicze składowe momenty synchroniczne o wspólnej prędkości synchronicznej $\pm \frac{2\omega_o}{cn}$ mają sinusoidalne charakterystyki kątowe o takim samym okresie $\frac{2\pi}{cn}$, lecz o różnych fazach. Do wyznaczenia charakterystyki kątowej wypadkowego momentu synchronicznego (a tym samym i wartości maksymalnej

momentu) konieczna jest więc znajomość nie tylko amplitud charakterystyk kątowych poszczególnych momentów składowych, ale również kątów określających ich wzajemne przesunięcie.

W metodach obliczania momentów synchronicznych opartych na zasadzie kolejnych odbić, przesunięcia charakterystyk kątowych nie były uwzględniane (obliczano tylko wartości skuteczne prądów i-tych reakcji uzwojeń), a wyznaczenie wartości maksymalnej momentu synchronicznego zastępowano oszacowaniem jego wartości od góry poprzez zsumowanie amplitud poszczególnych momentów składowych. W rozważanym przykładzie suma wartości maksymalnych poszczególnych momentów składowych jest określona wzorem:

$$M_{s\Sigma}\left(\frac{2\omega_o}{12}\right) = L_{sr1}\left(I^{(k)}_{s1(0)}I^{(k)}_{r1(11)} + I^{(k)}_{s1(11,1)}I^{(k)}_{r1(1)} + I^{(k)}_{s1(11,1)}I^{(k)}_{r1(1)}\right) +$$

$$+ 2L_{sr2}\left(I^{(k)}_{s2(1,13)}I^{(k)}_{r2(11,13,2)} + I^{(k)}_{s2(11,13)}I^{(k)}_{r2(11,13,2)}\right) +$$

$$+ 11L_{sr11}\left(I^{(k)}_{s1(0)}I^{(k)}_{r1(1)} + I^{(k)}_{s1(1,11)}I^{(k)}_{r1(11)} + I^{(k)}_{s1(11,1)}I^{(k)}_{r1(11)}\right) +$$

$$+ 13L_{sr13}\left(I^{(k)}_{s2(1,13)}I^{(k)}_{r1(11)} + {}^{(k)}_{s2(11,13)}I^{(k)}_{r1(1)}\right) \qquad (5.11)$$

Widzimy, że do przybliżonego wyznaczenia wartości maksymalnej momentu jako sumy amplitud faktycznie wystarcza tylko znajomość wartości skutecznych prądów i-krotnych reakcji uzwojeń.

Metoda kolejnych odbić oparta na schematach rozkładu maszyny na maszyny elementarne, omówiona w rozdz. 4, pozwala na wyznaczanie zarówno wartości skutecznych, jak i faz prądów i-krotnych reakcji uzwojeń, a tym samym - na wyznaczenie wartości maksymalnej momentu synchronioznego przy uwzględnieniu wzajemnego przesunięcia charakterystyk kątowych.

W maszynach klatkowych okresy charakterystyk kątowych momentów synchronicznych są powiązane z podziałką żłobkową wirnika $\frac{2\pi}{n}$, przy czym $n = Z_2$. Podziałka żłobkowa wirnika stanowi najmniejszą wspólną wielokrotność okresów charakterystyk kątowych poszczególnych synchronicznych momentów składowych, a dla momentu składowego o największym okresie (c = 1) jest mu równa.

5.3. Pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu

Wśród pasożytniczych momentów synchronicznych decydującą rolę odgrywają momenty synchroniczne I rzędu, powstające jako wynik elektrodynamicznego współdziałania prądów pierwotnej reakcji stojana oraz prądów pierwotnej reakcji wirnika. Rozważmy przykładowo moment synchroniczny I rzędu, zwią-

zany z 11 maszyną elementarną $M^{I}_{11(0)(1)}$ (rys. 5.1). W interpretacji fizycznej, w nawiązaniu do teorii maszyny synchronicznej, można 11 maszynę elementarną przyrównać do maszyny synchronicznej, której uzwojenie wzbudzenia (11 wirnik elementarny) jest zasilane z 1 wirnika elementarnego jako wzbudnicy, zaś twornik - z sieci. 11 maszynę elementarną będziemy umownie nazywać maszyną synchroniczną, zaś 1 maszynę elementarną - maszyną wzbudzającą. Ta analogia do maszyn synchronicznych pozwala lepiej zrozumieć istotne własności pasożytniczych momentów synchronicznych.

Załóżmy, że maszyną wzbudzającą o orientacji osi faz takiej, jak w 1 maszynie elementarnej (lewostronnie zorientowany stojan i wirnik), jest w ogólnym przypadku ϑ-ta maszyna elementarna, zaś maszyną synchroniczną o orientacji osi faz takiej, jak w 11 maszynie elementarnej (lewostronnie zorientowany stojan i prawostronnie zorientowany wirnik) - ϱ-ta maszyna elementarna ($\vartheta = 1, \varrho = 11$). Pole magnetyczne ϱ-tej elementarnej maszyny synchronicznej, wywołane prądem pierwotnej reakcji stojana, wiruje z prędkością $\frac{\omega_o}{\varrho}$. Pole magnetyczne stojana ϑ-tej elementarnej maszyny wzbudzającej o prędkości kątowej $\frac{\omega_o}{\vartheta}$ indukuje w wirniku siłę elektromotoryczną o częstotliwości $\omega_o - \vartheta\omega$. Taka jest więc częstotliwość prądu wzbudzenia zasilającego wirnik (uzwojenie wzbudzenia) ϱ-tej synchronicznej maszyny elementarnej. Pole magnetyczne wzbudzenia wiruje względem magneśnicy z prędkością $-\frac{\omega_o - \vartheta\omega}{\varrho}$ (znak minus wynika z prawostronnej orientacji osi faz), zaś względem twornika z prędkością

$$-\frac{\omega_o - \vartheta\omega}{\varrho} + \omega = \frac{-\omega_o + (\vartheta + \varrho)\omega}{\varrho}$$

Elektromagnetyczny moment synchroniczny powstaje w ϱ-tej maszynie elementarnej przy takiej prędkości wirowania, przy której pola magnetyczne twornika i wzbudzenia są względem siebie nieruchome:

$$\frac{-\omega_o + (\vartheta + \varrho)\omega}{\varrho} = \frac{\omega_o}{\varrho}$$

Stąd

$$\omega_s = \frac{2\omega_o}{\vartheta + \varrho} \tag{5.12}$$

W rozważanym przykładzie dla $\vartheta = 1$ i $\varrho = 11$ otrzymuje się $\omega_s = \frac{2\omega_o}{12}$. Prędkość synchroniczna elementarnej maszyny synchronicznej (związanej z momentem synchronicznym I rzędu) zależy więc od numerów maszyn elementarnych, pełniących rolę maszyny wzbudzającej i synchronicznej oraz od orientacji osi faz w obu maszynach.

Powtarzając przytoczone tu rozumowanie dla różnych maszyn elementarnych otrzymano tablicę przedstawioną na rys. 5.7, pozwalającą określić prędkości synchroniczne momentów pasożytniczych I rzędu wprost na podstawie orien-

maszyna synchroniczna

maszyna wzbudzająca ϑ \ ϱ	┘└	┘┘	└┘	└└
┘└	0	$\frac{2\omega_o}{\varrho+\vartheta}$	$-\frac{2\omega_o}{\varrho-\vartheta}$	0
┘┘	$\frac{2\omega_o}{\varrho+\vartheta}$	0	0	$-\frac{2\omega_o}{\varrho-\vartheta}$
└└	$\frac{2\omega_o}{\varrho-\vartheta}$	0	0	$-\frac{2\omega_o}{\varrho+\vartheta}$
└┘	0	$\frac{2\omega_o}{\varrho-\vartheta}$	$-\frac{2\omega_o}{\varrho+\vartheta}$	0

Rys. 5.7. Prędkości synchroniczne momentów synchronicznych I rzędu w zależności od orientacji osi faz maszyny wzbudzającej i maszyny synchronicznej

Fig. 5.7. The synchronous speeds of the synchronous torques of a I order according to the orientation of phase axes in a excitation machine and a synchronous machine

tacji osi faz w maszynie wzbudzającej i maszynie synchronicznej. Jeśli zamienimy rolami rozważane maszyny elementarne, a mianowicie przyjmiemy, że ϱ-ta maszyna elementarna jest maszyną wzbudzającą, a ϑ-ta maszyna elementarna - maszyną synchroniczną, to prędkość synchroniczna pozostanie ta sama.

Tablicę z rys. 5.7 można uzyskać również w inny, bardziej formalny sposób, a mianowicie poprzez rozważenie wszystkich możliwych mechanizmów generowania pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu na podstawie rys. 3.7 (zawierającego wyrażenia na momenty elektromagnetyczne maszyn elementarnych o różnych orientacjach osi faz) oraz rys. 4.9 (zawierającego wyrażenia na prądy pierwotnej reakcji wirników elementarnych przy różnych torach generowania). Jako przykład rozważmy ten sam mechanizm, co uprzednio: ϑ-ta maszyna elementarna (maszyna wzbudzająca) posiada stojan i wirnik zorientowany lewostronnie, zaś ϱ-ta maszyna elementarna (maszyna synchroniczna) - lewostronnie zorientowany stojan i prawostronnie zorientowany wirnik. Moment elektromagnetyczny ϱ-tej maszyny elementarnej określony na podstawie rys. 3.7 wynosi

$$M_e = \varrho L_{sr\varrho} \operatorname{Re}\left\{ j\underline{i}^{(k)*}_{s\lambda}\, \underline{i}^{(k)}_{r\mu}\, e^{j\varrho\varphi} \right\}$$

Pasożytniczy moment synchroniczny I rzędu w ϱ-tej maszynie elementarnej może więc być obliczony na podstawie wyrażenia:

$$M^{I}_{\varrho(0)(\vartheta)} = \varrho L_{sr\varrho} \operatorname{Re}\left\{ j\underline{i}^{(k)*}_{s\lambda(0)}\, \underline{i}^{(k)*}_{r\mu(\vartheta)}\, e^{j\varrho\varphi} \right\}$$

Prąd reakcji pierwotnej ϑ-tego wirnika elementarnego wynosi w stanie ustalonym zgodnie z rys. 4.9:

$$\underline{i}^{(k)}_{r\mu(\vartheta)} = \underline{I}^{(k)}_{r\mu(\vartheta)} e^{j\omega_o t} e^{-j\vartheta\varphi}$$

Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$M^{I}_{\varrho(0)(\vartheta)} = \varrho L_{sr\varrho} \operatorname{Re}\left\{ j\underline{I}^{(k)*}_{s\lambda(0)} e^{-j\omega_o t} \underline{I}^{(k)*}_{r\mu(\vartheta)} e^{-j\omega_o t} e^{j\vartheta\varphi} e^{j\vartheta\varphi} \right\} =$$

$$= \varrho L_{sr\varrho} \operatorname{Re}\left\{ j\underline{I}^{(k)*}_{s\lambda(0)} \underline{I}^{(k)*}_{r\mu(\vartheta)} e^{-j\left[2\omega_o - (\vartheta+\varrho)\omega\right]t} e^{j(\vartheta+\varrho)\varphi_o} \right\}$$

W rozważanym przykładzie dla $\vartheta = 1$, $\varrho = 11$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ mamy (rys. 5.1):

$$M^{I}_{11(0)(1)} = 11 L_{sr11} \operatorname{Re}\left\{ j\underline{I}^{(k)*}_{s1(0)} \underline{I}^{(k)}_{r1(1)} e^{-j\left[2\omega_o - 12\omega\right]t} e^{j12\varphi_o} \right\}$$

Prędkość synchroniczną określa równanie

$$2\omega_o - (\vartheta + \varrho)\omega_s = 0$$

Stąd:

$$\omega_s = \frac{2\,\omega_o}{\vartheta + \varrho}$$

a dla rozważanego powyżej przypadku (rys. 5.1)

$$\omega_s = \frac{2\,\omega_o}{12}$$

Wartość synchronicznego momentu elektromagnetycznego ϱ-tej maszyny elementarnej zależy od kąta zawartego pomiędzy osiami pól magnetycznych (przepływów) twornika i wzbudzenia. W rozważanym przykładzie ($\vartheta = 1, \varrho = 11$) prąd wzbudzenia przyjmuje ogólną postać $\underline{I}^{(k)}_{r1} e^{j(\omega_o - \vartheta\omega)t} e^{-j\vartheta\varphi_o}$. Zmiana wartości kąta φ_o (poprzez przejściowe przyspieszenie wirnika) prowadzi do zmiany fazy prądu wzbudzenia, a tym samym zmiany położenia osi pola magnetycznego wzbudzenia w ϱ-tej elementarnej maszynie synchronicznej. Zależność momentu synchronicznego od kąta φ_o - to charakterystyka kątowa momentu synchronicznego ϱ-tej maszyny elementarnej. Na wspólnym wale są umieszczone różne elementarne maszyny synchroniczne o charakterystykach kątowych wzajemnie względem siebie przesuniętych. Charakterystyka kątowa wypadkowego pasożytniczego momentu synchronicznego powstaje poprzez zsumowanie charakterystyk poszczególnych elementarnych maszyn synchronicznych.

W maszynach z wirnikiem klatkowym pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu przyjmują szczególnie duże wartości wówczas, gdy maszyną wzbudzającą jest p-ta maszyna elementarna (maszyna elementarna o numerze równym rzędowi harmonicznej pracującej), zaś maszyną synchroniczną maszyna elementarna o numerze Z_1-p lub Z_1+p (numery te odpowiadają rzędom harmonicznych żłobkowych stojana o największym znaczeniu). Orientacja osi faz stojana i wirnika p-tej elementarnej maszyny jest lewostronna (przeciwna do ruchu wskazówek zegara), tak więc prędkość synchroniczna będzie zależeć od orientacji osi faz w ($Z_1 \pm$ p) elementarnej maszynie synchronicznej, a ta - od liczby żłobków wirnika Z_2(n = Z_2). Jeśli ($Z_1 \mp$ p) elementarny stojan ma orientację lewostronną, to prędkość synchroniczna - zgodnie z rys. 5.7 - może być równa 0 lub $\frac{2\omega_o}{\varrho+\vartheta}$. Moment synchroniczny powstanie w maszynie zwartej (ω_s = 0), jeśli zostanie spełnione równanie

$$Z_2 + p = Z_1 \mp p \tag{5.13}$$

czyli wówczas, gdy

$$Z_2 = Z_1 - 2p \quad \text{lub} \quad Z_2 = Z_1 \tag{5.14}$$

Pasożytniczy moment synchroniczny powstanie w maszynie indukcyjnej przy pracy silnikowej (przy prędkości $\frac{2\omega_o}{Z_2}$), jeśli zostanie spełnione równanie

$$Z_2 - p = Z_1 \mp p \tag{5.15}$$

czyli wówczas, gdy

$$Z_2 = Z_1 \quad \text{lub} \quad Z_2 = Z_1 + 2p \tag{5.16}$$

Jeśli ($Z_1 \pm$ p) elementarny stojan ma orientację prawostronną to prędkość synchroniczna może być równa 0 lub $-\frac{2\omega_o}{\varrho-\vartheta}$. Dla liczby żłobków wirnika, określonej warunkiem (5.14), pasożytniczy moment synchroniczny powstaje przy pracy prądnicowej (przy prędkości $-\frac{2\omega_o}{Z_2}$), zaś dla liczby żłobków wirnika, określonej warunkiem (5.16) - przy prędkości równej 0.

Wyszukiwanie pasożytniczych momentów synchronicznych można również oprzeć na notacji schematycznej macierzy indukcyjności. Na możliwość generowania pasożytniczych momentów synchronicznych bezpośrednio wskazuje postać macierzy schematycznej stojan-wirnik $\left[M^{(k)}_{sr}\right]$.

Pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu powstają w wyniku elektromagnetycznego współdziałania wszystkich możliwych par harmonicznych przestrzennych, należących do tej samej podmacierzy (o ile osiowe współrzędne napięcia zasilania stojana, związane z tą podmacierzą, są różne od zera).

Jeśli rzędy harmonicznych żłobkowych stojana (np. rzędy harmonicznych o największym znaczeniu $Z_1 \mp$ p) oraz rząd harmonicznej głównej znajdują się w tej samej podmacierzy, to w maszynie indukcyjnej powstaną pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu o względnie dużych wartościach.

5.4. Dobór liczby żłobków stojana i wirnika

Wybór liczby żłobków stojana i wirnika jest podyktowany wieloma różnymi względami natury ekonomicznej, technologicznej i eksploatacyjnej. W odniesieniu do własności eksploatacyjnych maszyny, właściwa liczba żłobków ma zapewnić możliwie najmniejsze wartości momentów pasożytniczych, ograniczyć drgania i hałasy oraz zmniejszyć straty dodatkowe.

W niniejszym rozdziale optymalny dobór liczby żłobków zostanie rozważony wyłącznie pod kątem eliminacji i ograniczenia wartości pasożytniczych momentów elektromagnetycznych.

Zagadnienie doboru liczby żłobków w 3-fazowych maszynach indukcyjnych, zasilanych symetrycznie, należy do klasycznych zagadnień teorii maszyn asynchronicznych. Rozwiązywane metodami tradycyjnymi prowadzi do zbioru warunków wskazujących na liczby żłobków, których należy w trakcie projektowania unikać. Warunki te składają się na układ równości (ewentualnie nierówności) algebraicznych, wyznaczających zakazane liczby żłobków wirnika oraz zakazane różnice i stosunki liczb żłobków stojana i wirnika. Poszczególne równości i nierówności są wynikiem indywidualnego rozważania różnych niekorzystnych przypadków, wskutek czego nie ujmują zagadnienia doboru żłobków w sposób dostatecznie ogólny. Przykładowo, osobno analizuje się momenty pasożytnicze w maszynie wirującej i odrębnie - w maszynie zatrzymanej, przy czym w obu przypadkach korzysta się z różnych metod. Momenty przy pracy silnikowej lub prądnicowej określa się na podstawie rozkładu pola magnetycznego na harmoniczne przestrzenne, podczas gdy w maszynie w stanie zwarcia - na podstawie wypadkowego rozkładu pola magnetycznego (bez rozkładania przepływu w szereg Fouriera) [12]. Zagadnienie doboru liczby żłobków było przez różnych autorów analizowane nie tylko teoretycznie, ale również szczegółowo badane doświadczalnie na maszynach o różnych możliwych kombinacjach liczb żłobków stojana i wirnika [29 ; 12].

Podsumowaniem wniosków płynących z rozważań teoretycznych i badań doświadczalnych, a ponadto wynikających z praktyki konstrukcyjnej są tabele zawierające zalecane liczby żłobków wirnika (przy określonej liczbie żłobków stojana i liczbie par biegunów).

W procesie projektowania dobór właściwej - ze względu na momenty pasożytnicze - liczby żłobków sprowadza się więc bądź do unikania zakazanych liczb żłobków określonych odpowiednim zbiorem warunków, bądź też do przyjmowania liczb żłobków zalecanych przez wspomniane tabele.

Przeciwieństwem takiego toku postępowania jest omówiona poniżej metoda, oparta na schematach rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne. Schematy rozkładu dają pełny i wyczerpujący przegląd momentów pasożytniczych, generowanych w maszynie, a równocześnie bezpośrednio dostarczają wielu informacji o samych momentach. Dla pasożytniczych momentów synchronicznych i asynchronicznych pozwalają określić prędkość synchroniczną,

wskazują na momenty, których wartość zależy od połączenia faz stojana oraz pozwalają znaleźć takie, które występują przy połączeniu faz stojana w trójkąt, a znikają przy połączeniu w gwiazdę. Przede wszystkim jednak dają możliwość oceny wzajemnych względnych wartości momentów pasożytniczych (na podstawie numerów maszyn elementarnych uczestniczących w generowaniu momentów, współczynników uzwojeń poszczególnych stojanów i wirników elementarnych, krotności reakcji prądów w uzwojeniach, wartości indukcyjności rozproszenia różnicowego itd.), i pozwalają na wyodrębnienie momentów o dominującym znaczeniu. Ta łatwość w wyszukiwaniu momentów pasożytniczych o określonych własnościach i możliwość porównywania ich wartości (bez konieczności dokładnych obliczeń) czyni ze schematów rozkładu narzędzie szczególnie przydatne i pomocne przy wyborze właściwej liczby żłobków maszyny.

Do oceny wyboru żłobków sporządzamy schemat rozkładu maszyny i poddajemy go redukcji poprzez usunięcie zbędnych kolumn (harmonicznych przestrzennych) oraz wierszy (współrzędnych osiowych). Rząd najwyższej uwzględnionej harmonicznej przestrzennej Ω powinien wynosić około $(3 \div 4)Ż_2$ (schemat rozkładu wirnika składa się wówczas z $3 \div 4$ liter V). Umownymi symbolami można wyróżnić kolumny odpowiadające harmonicznym przestrzennym o tej samej wartości współczynnika uzwojenia stojana (harmoniczne należące do tej samej klasy). Najważniejszą klasę stanowi klasa harmonicznych żłobkowych stojana. Znaczenie pozostałych klas (klas harmonicznych strefowych) maleje wraz z wartością współczynnika uzwojenia. Harmoniczne przestrzenne, którym odpowiada taka sama wartość współczynnika uzwojenia wirnika, są bezpośrednio wskazywane przez wirniki elementarne przynależne do tego samego wiersza schematu. W szczególności harmoniczne żłobkowe stojana są wyznaczone przez wirniki elementarne należące do p-tego wiersza.

Opierając się na zredukowanym schemacie rozkładu maszyny z wyróżnionymi klasami harmonicznych przestrzennych stojana i wirnika można wyszukać poszczególne momenty pasożytnicze, generowane w maszynie oraz określić ich znaczenie. Wśród pasożytniczych momentów synchronicznych decydującą rolę odgrywają momenty I rzędu. Jak wykazano w rozdz. 5.3, momenty synchroniczne I rzędu mogą być traktowane jako momenty generowane przez pary maszyn elementarnych, złożone z maszyny wzbudzającej i maszyny synchronicznej. Momenty te przyjmują tym większe wartości, im wyższe są współczynniki uzwojeń stojanów i wirników elementarnych oraz im niższe są numery (liczby porządkowe) obu maszyn. Maszyną wzbudzającą o dominującym znaczeniu jest p-ta maszyna elementarna, dlatego też elementarne maszyny synchroniczne wzbudzane przez p-ty wirnik powinny mieć jak najwyższe numery (można przyjąć np. $\vartheta > 3Ż_2$), a stojany ich (twornik) powinny należeć do klasy uzwojeń o możliwie najniższym współczynniku uzwojenia. Najniekorzystniejszy przypadek występuje wówczas, gdy $(cŻ_2-p)$ lub $(cŻ_2+p)$ wirnik elementarny natrafia na $(cŻ_1-p)$ lub $(cŻ_1+p)$ stojan elementarny, albowiem wówczas moment synchroniczny I rzędu jest wynikiem współdziałania harmonicznych

żłobkowych stojana i wirnika. Pozostałe wirniki elementarne z lewego ramienia pierwszej litery V, chociaż nie odgrywają takiej roli jak p-ty wirnik (prądy są w nich indukowane przez harmoniczne pasmowe stojana), również nie powinny wzbudzać elementarnych maszyn synchronicznych o wysokim współczynniku uzwojenia twornika (zwłaszcza równym współczynnikowi dla harmonicznej głównej), ani też maszyn leżących zbyt blisko.

Oddziaływanie maszyn wzbudzających o numerach $\nu > \frac{Ż_2}{2}$ jest już wyraźnie mniejsze ze względu na znaczny wzrost reaktancji rozproszenia różnicowego dla kolejnych składowych ortogonalnych wirnika. Tak duże wartości tych reaktancji wynikają przede wszystkim z dołączenia "impedancji" wirników elementarnych, przynależnych do lewego ramienia pierwszej litery V (reaktancja rozproszenia różnicowego dla ν-tego wirnika elementarnego, leżącego w i-tym wierszu schematu rozkładu jest sumą "impedancji" widzianych z zacisków wszystkich pozostałych wirników elementarnych i-tego wiersza). W przypadku braku reakcji wtórnej stojana "impedancje" te przyjmują maksymalne wartości, równe reaktancjom głównym wirników elementarnych. Zjawisko to nabiera szczególnego znaczenia przy analizie momentów elementarnych maszyn synchronicznych, współdziałających z maszynami wzbudzającymi o numerach $cŻ_1+p$ (a więc maszynami odpowiadającymi harmonicznym żłobkowym stojana). Wartości momentów wszystkich elementarnych maszyn synchronicznych, wzbudzanych przez wirnik o numerze $cŻ_1 \pm p$, znajdujący się w i-tym wierszu schematu, zależą w znacznym stopniu od możliwości wystąpienia oraz od natężenia reakcji wtórnej stojana dla pierwszego wirnika elementarnego z i-tego wiersza schematu (w przypadku, gdy maszyną wzbudzającą jest maszyna o numerze $Ż_1 \pm p$, jest to wirnik o numerze $|Ż_2 - (Ż_1 \pm p)|$). "Impedancja" widziana z zacisków tego właśnie wirnika w zasadniczy sposób decyduje o wartości reaktancji rozproszenia różnicowego. Możliwe są tu trzy różne przypadki. Pierwszy zachodzi, gdy naprzeciw rozważanego wirnika nie ma uzwojenia elementarnego stojana. "Impedancja" widziana z zacisków wirnika elementarnego jest wówczas równa reaktancji głównej uzwojenia. Reaktancja rozproszenia różnicowego przyjmuje w konsekwencji wartość maksymalną i powoduje wytłumienie momentów pasożytniczych, związanych z $(cŻ_1+p)$ (a w szczególności z $(Ż_1 \pm p)$) maszyną wzbudzającą. Drugi - gdy naprzeciwko rozważanego wirnika znajduje się 2-fazowe uzwojenie elementarne. W stojanie płyną wówczas prądy reakcji wtórnej, lecz zamykające się przez źródło. Impedancja takiej pętli znacznie ogranicza wartości prądów. Przy dużej impedancji pętli przypadek ten jest praktycznie równoważny pierwszemu. Ostatni, najniekorzystniejszy przypadek zachodzi wówczas, gdy rozważanemu wirnikowi odpowiada 1-fazowy stojan elementarny. Reaktancja wtórna zależy wówczas od układu połączeń uzwojeń stojana. Przy uzwojeniach fazowych skojarzonych w gwiazdę bez przewodu zerowego ciąg 1-fazowych stojanów elementarnych jest rozwarty (prądy reakcji wtórnej są równe zero), natomiast przy uzwojeniach skojarzonych w trójkąt - zwarty (prądy reakcji wtórnej zamykają się w trójkącie i przyjmują znaczne wartości, ponieważ nie są

tłumione przez impedancję wewnętrzną źródła). Momenty pasożytnicze w obu układach połączeń są zdecydowanie różne. Przy skojarzeniu uzwojeń fazowych w gwiazdę bez przewodu zerowego, pasożytnicze momenty są takie same, jak w przypadku pierwszym, natomiast przy skojarzeniu w trójkąt - znacznie (nawet kilka razy) większe [12]. Analogiczne rozumowanie jak w przypadku harmonicznych żłobkowych stojana można przeprowadzić dla harmonicznych strefowych o dużym współczynniku uzwojenia.

Z powyższych rozważań płynie wniosek, że liczbę żłobków wirnika należy tak dobrać, aby wirniki elementarne z lewego ramienia litery V, wzbudzane przez maszyny o numerach $\nu > \frac{Ż_2}{2}$, nie sprzęgały się z 1-fazowymi stojanami elementarnymi.

Obok momentów pasożytniczych, powiększających wartości przy zmianie układu połączeń z gwiazdy w trójkąt, mogą pojawiać się nowe, dodatkowe momenty pasożytnicze. Przy zasilaniu maszyny symetrycznym 3-fazowym układem napięć są to pasożytnicze momenty asynchroniczne II i wyższych rzędów. Dla ich uniknięcia konieczne jest wyeliminowanie możliwości powstawania prądów reakcji wtórnej w 1-fazowych stojanach elementarnych.

Istotne w niektórych przypadkach jest także zwrócenie uwagi na to, aby zbyt duża liczba momentów synchronicznych, nawet o niewielkich amplitudach, nie posiadała tej samej prędkości synchronicznej, bowiem i wówczas może dojść - poprzez zsumowanie składników - do powstania momentu synchronicznego o znacznej wartości.

Schematy rozkładu pozwalają wyciągnąć i sformułować jeszcze wiele innych wniosków dotyczących eliminacji i ograniczania pasożytniczych momentów synchronicznych i asynchronicznych w maszynach indukcyjnych. Te, na które zwrócono uwagę, należą do najbardziej istotnych. Mogą one być rozszerzone na maszyny zasilane niesymetrycznie (np. silniki 3-fazowe zasilane jednofazowo) lub zasilane przebiegami odkształconymi, jak też na maszyny o budowie niesymetrycznej (np. silniki jednofazowe z kondensatorem pracy, analizowane jako niesymetryczne maszyny 4-fazowe [20]).

Skonfrontujmy na kilku wybranych przykładach 3-fazowych maszyn klatkowych znane zasady doboru liczby żłobków z omówionymi wnioskami oraz pokażmy, w jaki sposób warunki określające zakazane liczby żłobków dają się wyjaśnić i wywieść ze schematów rozkładu maszyny. Warunki te, formułowane przez różnych autorów, są zebrane i skomentowane m.in. w monografii [12]. Rozważmy kolejno najważniejsze z nich.

1) W maszynie o liczbie żłobków wirnika

$$Ż_2 = 6pc + 2p \tag{5.17}$$

gdzie:

c - dodatnia liczba całkowita,

powstają pasożytnicze momenty synchroniczne przy pracy silnikowej. Przyjmując dla przykładu, że $2p = 4$, $c = 1$ oraz $\Omega = 48$ otrzymujemy schemat

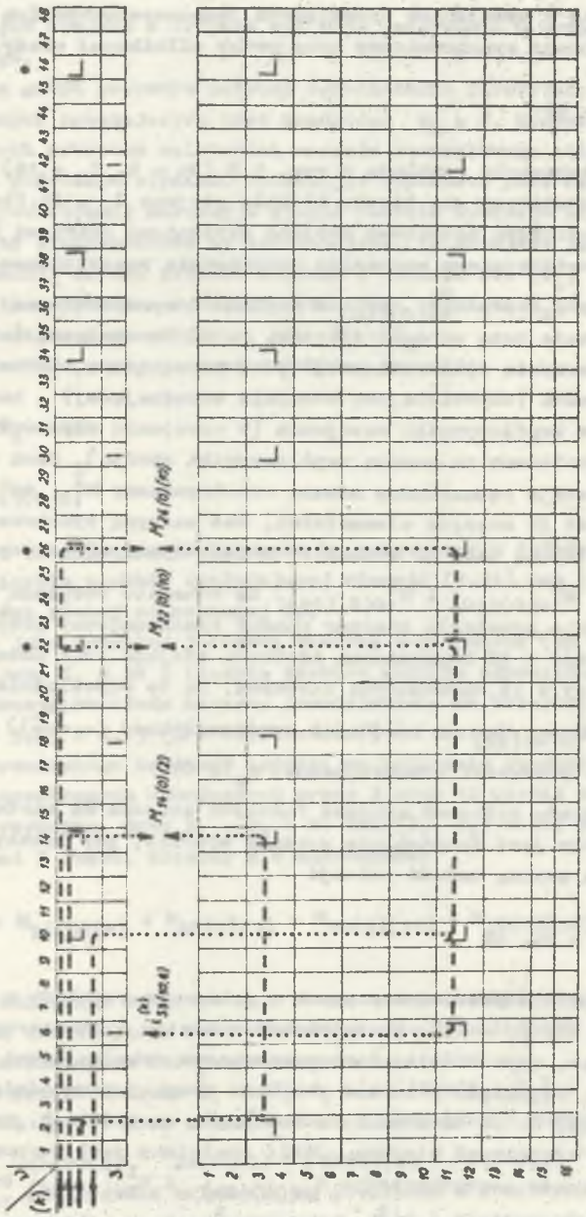
rozkładu, przedstawiony na rys. 5.8 ($Z_2 = 16$). Na schemacie uwidoczniono mechanizm generowania pasożytniczego momentu synchronicznego I rzędu $M_{14(0)(2)}$ o prędkości synchronicznej $\frac{2\omega_o}{16}$ związanego z harmoniczną główną (maszyna wzbudzająca) i harmoniczną żłobkową wirnika (maszyna synchroniczna). Przed tym momentem, mogącym osiągać duże wartości, ma chronić warunek (5.17).

Liczba żłobków wirnika $Z_2 = 16$ jest jednak niekorzystna również z innych względów. Prócz momentu $M^{I}_{14(0)(2)}$ powstają w maszynie inne znaczące momenty synchroniczne I rzędu, np. $M^{I}_{34(0)(2)}$ o prędkości synchronicznej $(-\frac{2\omega_o}{32})$ i $M^{I}_{46(0)(2)}$ o prędkości synchronicznej 0. Wartości momentów synchronicznych: $M^{I}_{22(0)(10)}$ (prędkość synchroniczna $(-\frac{2\omega_o}{32})$), $M^{I}_{26(0)(10)}$ (prędkość synchroniczna $\frac{2\omega_o}{16}$) i $M^{I}_{38(0)(10)}$ (prędkość synchroniczna 0) zależą zaś od układu połączeń uzwojeń stojana, ponieważ "impedancja" 6 wirnika elementarnego, decydującego o wartości reaktancji rozproszenia różnicowego dla 6 składowej ortogonalnej wirnika maleje przy połączeniu uzwojeń fazowych w trójkąt (6 wirnik elementarny współdziała z 1-fazowym stojanem elementarnym). Mechanizmy generowania momentów $M^{I}_{22(0)(10)}$ i $M^{I}_{26(0)(10)}$ oraz prądu reakcji wtórnej stojana $i^{(k)}_{s3(10,6)}$ odpowiedzialnego za zmianę reaktancji rozproszenia różnicowego uwidoczniono na rys. 5.8. Ponadto w stojanie skojarzonym w trójkąt są generowane prądy reakcji wtórnej $i^{(k)}_{s3(2,18)}$ oraz $i^{(k)}_{s3(2,30)}$ związane z momentami pasożytniczymi II rzędu. Momenty te (na przykład momenty synchroniczne $M^{II}_{6(2,18)(10)}$ i $M^{II}_{6(2,30)(10)}$) pojawią się przy połączeniu uzwojeń w trójkąt, a znikają przy połączeniu w gwiazdę.

2) W maszynie o liczbie żłobków wirnika

$$Z_2 = 6pc - 2p \tag{5.18}$$

powstają pasożytnicze momenty synchroniczne przy pracy hamulcowej. Przyjmując dla przykładu, że $2p = 6$, $c = 2$ oraz $\Omega = 48$, otrzymujemy schemat rozkładu przedstawiony na rys. 5.9 ($Z_2 = 30$). Na schemacie naniesiono mechanizm generowania momentu pasożytniczego I rzędu $M^{I}_{33(0)(3)}$ o prędkości synchronicznej $(-\frac{2\omega_o}{30})$ związanego z harmoniczną główną i harmoniczną żłobkową wirnika. Obok momentu $M^{I}_{33(0)(3)}$, przed którym ma chronić warunek (5.18), powstają w maszynie jeszcze inne niepożądane momenty synchroniczne, np. moment $M^{I}_{39(0)(21)}$ o prędkości synchronicznej $\frac{2\omega_o}{60}$ (wartość tego momentu będzie zależeć od połączenia uzwojeń stojana, ponieważ 9 wirnik elementarny współdziała z 1-fazowym stojanem elementarnym).



Rys. 5.8. Zredukowany schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne ($2p = 4$, $Z_2 = 16$, $Z_1 = 24$, $\Omega = 48$)

Fig. 5.8. The simplified diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor ($2p = 4$, $Z_2 = 16$, $Z_1 = 24$, $\Omega = 48$)

3) W maszynie z uzwojeniem średnicowym jednowarstwowym lub dwuwarstwowym powstaje moment synchroniczny przy pracy silnikowej wtedy, gdy

$$Ż_2 = Ż_1 - 4p \tag{5.19}$$

Dla maszyny o schemacie rozkładu z rys. 5.8 ($2p = 4$, $Ż_2 = 16$) warunek (5.19) będzie spełniony dla liczby żłobków stojana $Ż_1 = 24$ (kolumny odpowiadające harmonicznym żłobkowym stojana wyróżniono czarnymi kropkami). Na schemacie uwidoczniono mechanizm generowania pasożytniczego momentu synchronicznego I rzędu $M^{I}_{26(0)(10)}$ o prędkości synchronicznej $\frac{2\omega_o}{16}$. Moment ten przyjmuje dużą wartość dlatego, że 26 harmoniczna (odpowiadająca elementarnej maszynie synchronicznej) jest harmoniczną żłobkową stojana, zaś 10 harmoniczna (odpowiadająca maszynie wzbudzającej) - harmoniczną pasmową o dużym współczynniku uzwojenia (w uzwojeniu cięciwowym harmoniczna ta jest ograniczana za pomocą współczynnika skrótu). Obok momentu $M^{I}_{26(0)(10)}$ powstaje równorzędny moment synchroniczny $M^{I}_{10(0)(26)}$ (maszyną wzbudzającą jest 26 maszyna elementarna, zaś maszyną synchroniczną - 10 maszyna elementarna) tak, że wypadkowy moment synchroniczny przy prędkości $\frac{2\omega_o}{16}$ jest sumą $M^{I}_{26(0)(10)} + M^{I}_{10(0)(26)}$. Ze schematu rozkładu wynika ponadto, że w maszynie powstanie znaczny moment synchroniczny przy pracy prądnicowej, związany z 22 harmoniczną żłobkową stojana oraz moment przy $\omega_s = 0$, związany z 16 harmoniczną żłobkową. Są to odpowiednio momenty: $M^{I}_{22(0)(10)} + M^{I}_{10(0)(22)}$ (o prędkości synchronicznej $(-\frac{2\omega_o}{32})$) oraz $M^{I}_{46(0)(2)} + M^{I}_{2(0)(46)}$ (o prędkości synchronicznej $\omega_s = 0$).

4) Wpływ układu połączeń uzwojeń fazowych stojana na wartości pasożytniczych momentów jest szczególnie wyraźny wówczas, gdy liczby żłobków stojana i wirnika czynią zadość relacji

$$Ż_2 - Ż_1 = 2p,\ 4p \tag{5.20}$$

Warunek ten spełnia rozważana maszyna o schemacie rozkładu z rys. 5.8 ($2p = 4$, $Ż_2 = 16$, $Ż_1 = 24$). Na zależność momentów elementarnych maszyn synchronicznych, współdziałających z maszynami wzbudzającymi o numerach 10, 22, 26,... od układu połączeń zwrócono uwagę już wcześniej. Warunek (5.20) powoduje, że są to momenty o znacznych wartościach, powiązane z harmonicznymi żłobkowymi stojana. Jeśli spełniony jest warunek (5.20) pasożytnicze momenty asynchroniczne $M^{I}_{22(0)(22)}$ i $M^{I}_{26(0)(26)}$ oraz pasożytnicze momenty synchroniczne $M^{I}_{26(0)(10)} + M^{I}_{10(0)(26)}$ (o prędkości synchronicznej $\frac{2\omega_o}{16}$) i $M^{I}_{22(0)(10)} + M_{10(0)(22)}$ o prędkości synchronicznej $(-\frac{2\omega_o}{32})$) znacznie silniej deformują charakterystykę mechaniczną maszyny przy połączeniu uzwojeń stojana w trójkąt niż przy połączeniu w gwiazdę bez przewodu zerowego.

5) Osobna grupa warunków dotyczy ograniczania pasożytniczych momentów synchronicznych powstających przy prędkości $\omega_s = 0$. Momenty te są jedną z zasadniczych przyczyn zależności momentu rozruchowego silnika od początkowego kąta położenia wirnika. Analizując wypadkowe pole magnetyczne w szczelinie powietrznej maszyny w stanie zwarcia wykazuje się, że pasożytnicze momenty synchroniczne są tym mniejsze, im mniejszy jest największy wspólny dzielnik liczby żłobków stojana i wirnika NWD ($Ż_1$, $Ż_2$). Najmniejsze momenty pasożytnicze występują wtenczas, gdy $Ż_1$ i $Ż_2$ są liczbami pierwszymi, zaś największe wtenczas, gdy $Ż_1 = Ż_2$.

Czasem formułuje się jeszcze dodatkowe warunki:

$$Ż_1 - Ż_2 = 6pc \tag{5.21}$$

$$Ż_2 = 6pc \tag{5.22}$$

stanowiące szczególny przypadek warunku związanego z istnieniem NWD. Dla maszyny o liczbie żłobków spełniającej równość (5.21) lub (5.22) istnieje NWD o wartości równej co najmniej 6p.

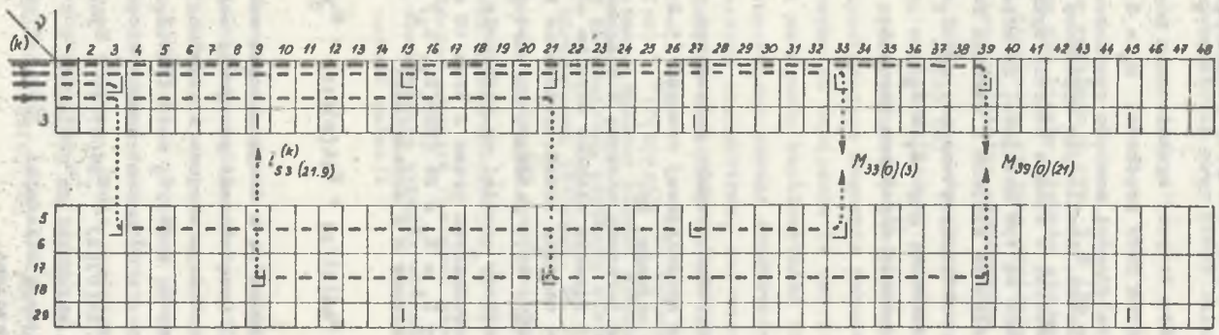
Rozważmy jako przykład 3-fazową maszynę 4-biegunową ($2p = 4$) o liczbie żłobków stojana $Ż_1 = 24$ i liczbie żłobków wirnika odpowiednio $Ż_2 = 24, 12, 18, 17$. Schematy rozkładu maszyny przedstawiono na kolejnych rysunkach 5.10, 5.11, 5.12 i 5.13 ($\Omega = 48$). Załóżmy, że wartość pasożytniczego momentu synchronicznego będziemy oceniać na podstawie momentów elementarnych maszyn synchronicznych wzbudzanych przez 2 oraz 10 wirnik elementarny. W pierwszym przypadku, przy $Ż_1 = Ż_2 = 24$ (NWD($Ż_1$, $Ż_2$) = 24) powstaje w maszynie moment I rzędu, złożony z 6 składników:

$$M_{22(0)(2)} + M_{26(0)(2)} + M_{46(0)(2)} + M_{14(0)(10)} + M_{34(0)(10)} + M_{38(0)(10)}$$

Pierwsze 3 składniki związane są z drugą maszyną wzbudzającą, pozostałe - z 10 maszyną wzbudzającą. Dużą wartość przyjmują składniki 1, 2 i 3 odpowiadające harmonicznym żłobkowym stojana i wirnika.

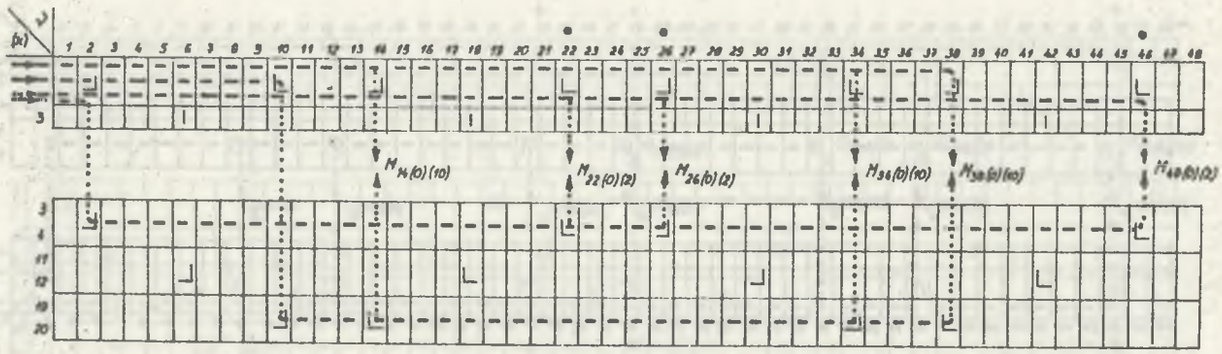
W drugim przypadku przy $Ż_1 = 24$, $Ż_2 = 12$ (NWD($Ż_1$, $Ż_2$) = 12 oraz spełniony warunek (5.21) przy c = 1) moment synchroniczny przyjmuje postać $M_{10(0)(2)} + M_{14(0)(2)} + M_{22(0)(2)} + M_{26(0)(2)} + M_{34(0)(2)} + M_{38(0)(2)} + M_{46(0)(2)}$, a wszystkie składniki są powiązane z 2 maszyną wzbudzającą. Największe wartości przyjmują składniki 3, 4 i 7 odpowiadające harmonicznym żłobkowym wirnika i stojana.

Przy liczbie żłobków $Ż_2 = 18$ (NWD($Ż_1$, $Ż_2$) = 6) moment synchroniczny składa się już tylko z czterech składników $M_{34(0)(2)} + M_{38(0)(2)} + M_{26(0)(10)} + M_{46(0)(10)}$. Składniki 1 i 2 są związane z 2 maszyną wzbu-



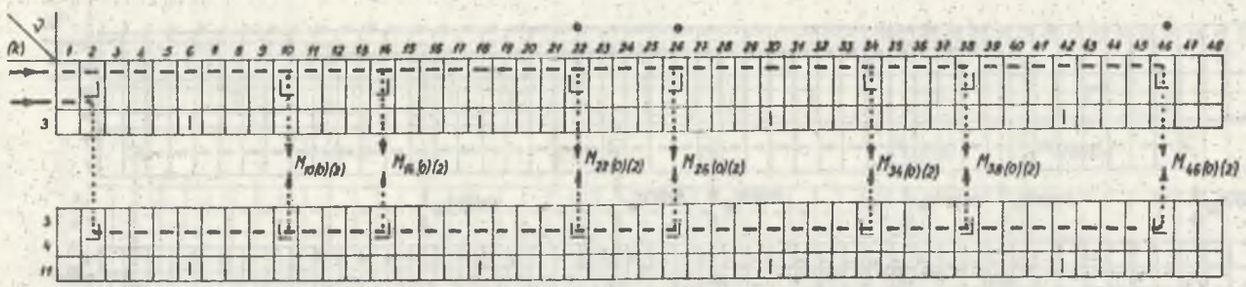
Rys. 5.9. Zredukowany schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne
($2p = 6$, $Z_2 = 30$, $\Omega = 48$)

Fig. 5.9. The simplified diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor
($2p = 6$, $Z_2 = 30$, $\Omega = 48$)



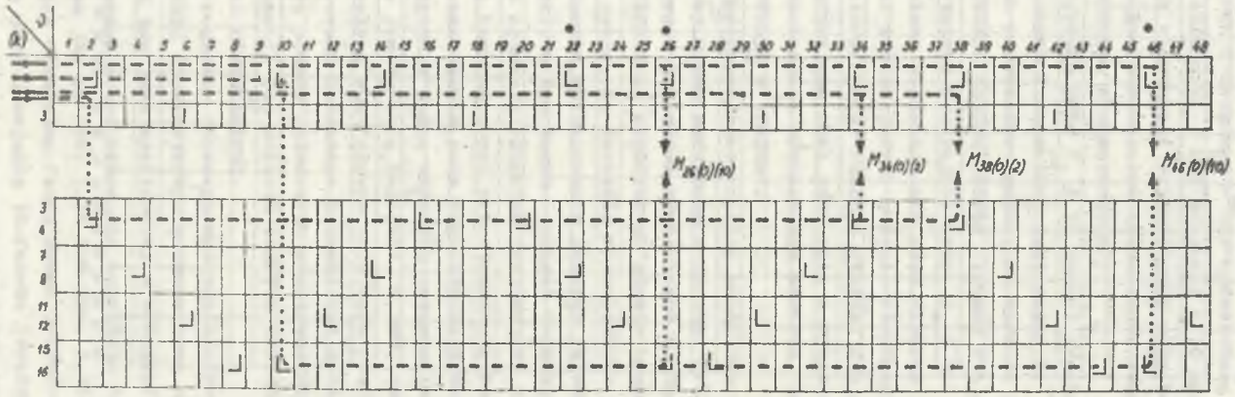
Rys. 5.10. Zredukowany schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne
($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 24$)

Fig. 5.10. The simplified diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor
($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 24$)



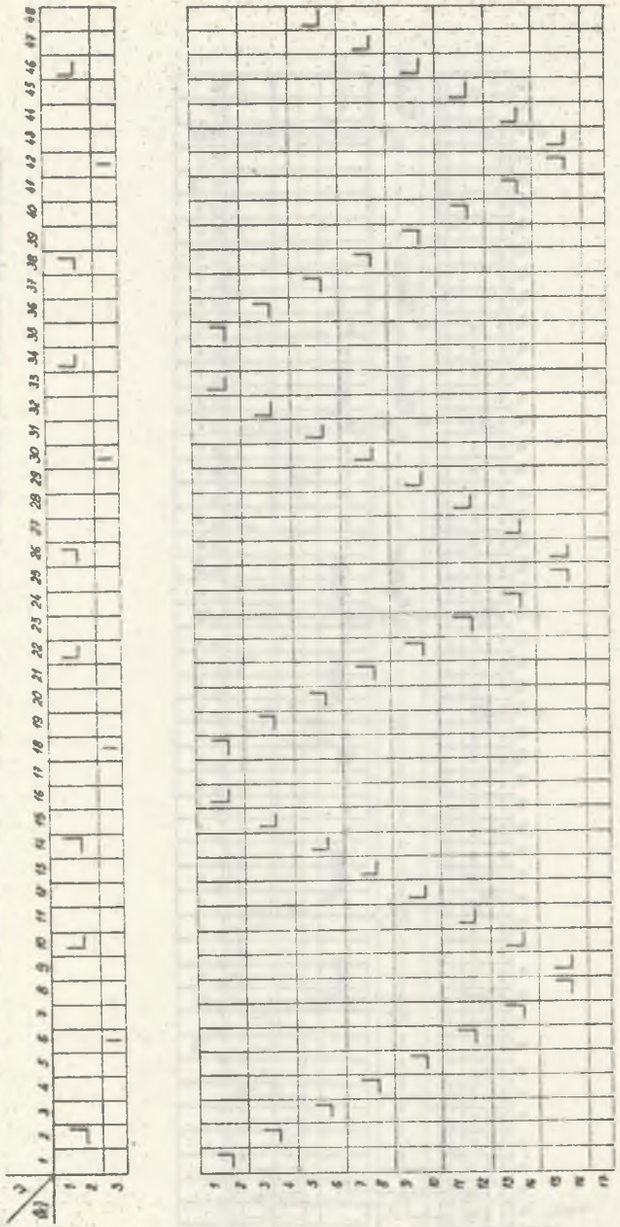
Rys. 5.11. Zredukowany schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne
($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 12$)

Fig. 5.11. The simplified diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor
($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 12$)



Rys. 5.12. Zredukowany schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne
($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 18$)

Fig. 5.12. The simplified diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor
($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 18$)



Rys. 5.13. Zredukowany schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne ($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 17$)

Fig. 5.13. The simplified diagram of the decomposition of a 3-phase squirrel-cage motor ($2p = 4$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 17$)

dzającą (harmoniczną główną), ale w ich powstaniu - w przeciwieństwie do przypadku pierwszego i drugiego - nie uczestniczą harmoniczne żłobkowe stojana. Do tego składniki 3 i 4 związane z 10 maszyną wzbudzającą są silnie tłumione przez reaktancję rozproszenia różnicowego dla 10 składowej ortogonalnej wirnika (dominującym składnikiem reaktancji staje się reaktancja główna 8 wirnika elementarnego).

W ostatnim przypadku przy $Z_1 = 17$ moment synchroniczny (w zakresie rozważanych harmonicznych i momentów) jest równy 0.

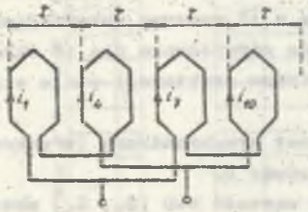
Z przytoczonych przykładów wynika, że wartość NWD (Z_1, Z_2) może być miarą nieprawidłowości doboru liczby żłobków stojana i wirnika ze względu na momenty pasożytnicze powstające przy $\omega_s = 0$.

Dodatkowe problemy pojawiają się przy wyborze liczby żłobków w maszynach z uzwojeniami zawierającymi gałęzie równoległe. W gałęziach równoległych mogą powstawać prądy reakcji wtórnej stojana, nie zamykające się przez źródło, odgrywające taką samą rolę i wywierające taki sam wpływ na indukcyjności rozproszenia różnicowego wirnika, jak prądy reakcji wtórnej w stojanie skojarzonym w trójkąt.

W rozdz. 2.3 przeprowadzono analizę przepływu wytwarzanego w szczelinie powietrznej maszyny przez uzwojenie m-fazowe. Wykazano, że składowe ortogonalne wektora prądu (składowe symetryczne w stanie ustalonym) są odpowiedzialne za generowanie określonych ciągów harmonicznych przestrzennych. Ponadto zwrócono uwagę, że łączenie niezależnych uzwojeń fazowych w węzły i oczka może wykluczyć występowanie pewnych składowych symetrycznych (niezgodnych z więzami), a tym samym - ciągów harmonicznych przestrzennych.

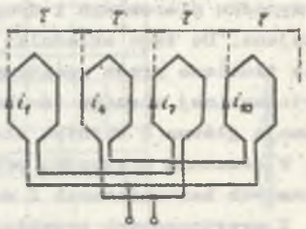
Rozważmy teraz sytuację odwrotną przyjmując, że uzwojenie jest kolejno pobudzane różnymi harmonicznymi przestrzennymi pola magnetycznego. Dowolna harmoniczna przestrzenna pola magnetycznego może wyindukować w m-fazowym uzwojeniu wyłącznie jedną składową ortogonalną lub odpowiednio - jedną lub dwie składowe symetryczne napięcia. O tym, czy pod wpływem siły elektromotorycznej popłyną w m-fazowym uzwojeniu prądy, decyduje układ połączeń uzwojeń fazowych. Rozważana harmoniczna może spowodować powstanie w stojanie wyłącznie prądów składowych symetrycznych, zgodnych z więzami (z węzłami i oczkami). Ten wniosek odgrywa zasadnicze znaczenie w analizie maszyn z gałęziami równoległymi.

Jako przykład rozważmy 3-fazową maszynę klatkową o $2p = 4$, $Z_1 = 48$, $Z_2 = 42$ o uzwojeniu dwuwarstwowym z dwoma oraz czterema gałęziami równoległymi (przykład ten jest analizowany w monografii [12]). Każda faza składa się z czterech grup, które dla uzyskania dwóch gałęzi równoległych można połączyć tak jak na rys. 5.14 lub rys. 5.15. Przyjmując, że każda grupa (biegun) jest oddzielną fazą, można 3-fazowe uzwojenie 4-biegunowe traktować umownie jako uzwojenie 12-fazowe (prądy fazowe i_1, i_2, i_3...i_{11}, i_{12}). Schemat rozkładu maszyny przy takim założeniu przedstawiono na rys. 5.16 ($\Omega = 50$). Czarnymi kropkami wyróżniono harmoniczne żłobkowe stojana.



Rys. 5.14. 3-fazowe uzwojenie z dwoma gałęziami równoległymi (I sposób)

Fig. 5.14. 3-phase winding forming two parallel paths (I case)



Rys. 5.15. 3-fazowe uzwojenie z dwoma gałęziami równoległymi (II sposób)

Fig. 5.15. 3-phase winding forming two parallel paths (II case)

Składowe symetryczne 12-fazowe przedstawiono na rys. 5.17. 2 i 10 składowa symetryczna umownego uzwojenia 12-fazowego odpowiada 1 i 2 składowej symetrycznej uzwojenia 3-fazowego. Wynika to z równań więzów, które trzeba nałożyć na umowne uzwojenie 12-fazowe dla otrzymania 3-fazowego uzwojenia 4-biegunowego. Jeśli uzwojenie stojana zasilimy symetrycznym 3-fazowym układem napięć kolejności zgodnej, to jest to równoznaczne z zasileniem umownego 12-fazowego uzwojenia 2 składową symetryczną napięcia. W maszynie powstają znaczne momenty pasożytnicze I rzędu, związane z 46 i 50 harmoniczną żłobkową stojana, a mianowicie moment synchroniczny $M^{I}_{46(0)(38)} + M^{I}_{38(0)(46)} + M^{I}_{50(0)(34)} + M^{I}_{34(0)(50)}$ przy prędkości $\omega_s = 0$ oraz momenty asynchroniczne $M^{I}_{46(0)(46)}$ i $M^{I}_{50(0)(50)}$. Na wartość reaktancji rozproszenia różnicowego wirnika dla momentów związanych z 46 harmoniczną żłobkową zasadniczy wpływ będzie miała "impedancja" 4 wirnika elementarnego, zaś dla momentów związanych z 50 harmoniczną żłobkową - "impedancja" 8 wirnika elementarnego.

Dla połączenia przedstawionego na rys. 5.14 obowiązują równania

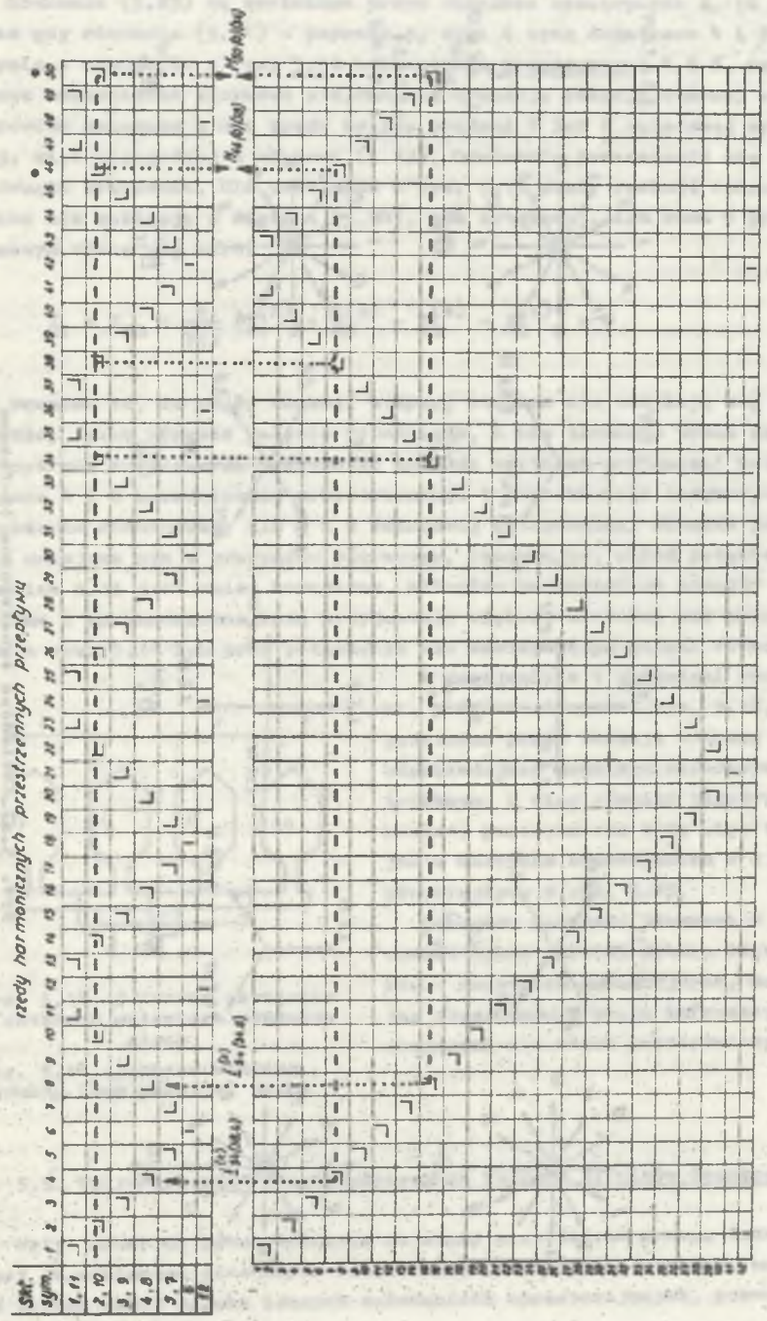
$$i_1 = -i_4 \qquad (5.23)$$

$$i_7 = -i_{10}$$

zaś dla połączenia z rys. 5.15 - równania

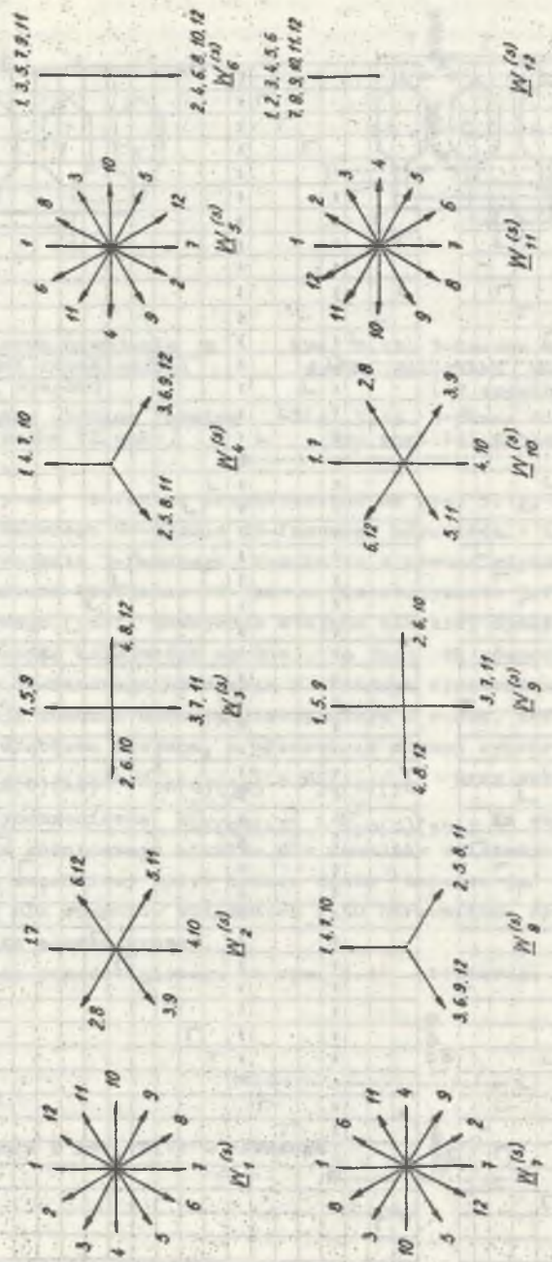
$$i_1 = i_7 \qquad (5.24)$$

$$i_4 = i_{10}$$



Rys. 5.16. Schemat rozkładu 12-fazowej maszyny klatkowej na maszyny elementarne ($Ż_2$ = 42)

Fig. 5.16. The diagram of the decomposition of a 12-phase squirrel-cage motor ($Ż_2$ = 42)



Rys. 5.17. Składowe symetryczne 12-fazowe
Fig. 5.17. 12-phase symmetrical components

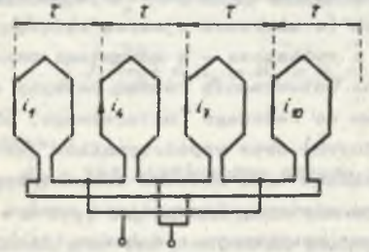
Równania (5.23) są spełnione przez składowe symetryczne 2, 10 i 6, podczas gdy równania (5.24) - poprzez 2, 10 i 6 oraz dodatkowo 4 i 8. W maszynie o uzwojeniu z rys. 5.14 harmoniczne przestrzenne 4 i 8, wzbudzone przez harmoniczne żłobkowe stojana nie wywołują reakcji wtórnej stojana, albowiem związane z nią prądy byłyby prądami 4 lub 8 składowej symetrycznej, więc niezgodnej z więzami (5.23). Odmiennie przedstawia się sytuacja w drugim przypadku. Dla uzwojenia z rys. 5.15 prądy reakcji wtórnej nie tylko nie kolidują z więzami (5.24), ale co więcej, ich suma w przewodzie fazowym równa się zero:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_{10} = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(\underline{I}_4^{(s)} + \underline{I}_8^{(s)} - \underline{I}_4^{(s)} - \underline{I}_8^{(s)}\right) = 0 \qquad (5.25)$$

Oznacza to, że prądy reakcji wtórnej stojana nie zamykają się przez źródło, tylko poprzez gałęzie równoległe, a nie tłumione przez impedancję wewnętrzną źródła mogą przyjmować znaczne wartości i wygaszać pole magnetyczne 4 i 8 harmonicznej przestrzennej. W konsekwencji indukcyjność rozproszenia różnicowego dla 4 i 8 składowej ortogonalnej wirnika jest znacznie mniejsza niż w przypadku pierwszym. Reasumując, układ połączeń z rysunkiem 5.15 jest mniej korzystny, albowiem pasożytnicze momenty asynchroniczne i synchroniczne będą przyjmowały większe wartości niż przy połączeniu z rys. 5.14 lub przy połączeniu nie zawierającym gałęzi równoległych.

W uzwojeniu z 4 gałęziami równoległymi, przedstawionym na rys. 5.18, mogą powstawać prądy reakcji wtórnej stojana, odpowiadające dowolnym składowym symetrycznym, a więc również składowym 4 i 8. Momenty pasożytnicze będą więc takie same jak w maszynie z uzwojeniem o 2 gałęziach równoległych z rys. 5.15.

Schematy rozkładu tłumaczą w jednolity sposób znane warunki doboru liczby żłobków w maszynach indukcyjnych, dostarczając równocześnie wielu informacji o powstających momentach pasożytniczych.



Rys. 5.18. 3-fazowe uzwojenie o czterech gałęziach równoległych
Fig. 5.18. 3-phase winding forming four parallel paths

5.5. Wpływ momentów pasożytniczych na rozruch silników indukcyjnych

Wpływ momentów pasożytniczych na stany nieustalone maszyn indukcyjnych jest zagadnieniem stosunkowo słabo znanym. Metody analityczne, bazujące na bardzo nawet daleko idących założeniach upraszczających, pozwalają

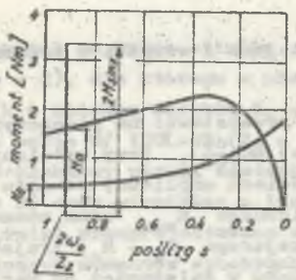
uzyskiwać rozwiązania o charakterze przybliżonym dla szczególnych tylko przypadków. Nowe możliwości pojawiły się dopiero wraz z rozwojem ETO.

Modele matematyczne maszyn indukcyjnych o stałych skupionych są układami równań różniczkowych zwyczajnych, dobrze uwarunkowanymi numerycznie, dla których wybór odpowiedniej metody całkowania nie nastręcza trudności. Zasadniczym problemem staje się więc oszczędność czasu obliczeń. W kontekście tego zmienia się sens i rozumienie terminu - prosty model matematyczny. Pojawiają się nowe wymogi i zupełnie odmienne własności oraz cechy modeli wysuwają się na plan pierwszy. Rzeczą wtórną staje się liniowość bądź nieliniowość równań, stałość bądź zmienność współczynników, natomiast istotnego znaczenia nabiera liczba równań, współczynników, szybkość zmian współczynników w czasie itd.

O ile w tradycyjnej analizie założenia upraszczające, transformacje współrzędnych, przekształcenia itp. miały na celu przede wszystkim rozwiązanie układu równań, to przy wykorzystaniu ETO - przede wszystkim skrócenie czasu potrzebnego do przygotowania programu oraz przeprowadzenia obliczeń. Punkt ciężkości, spoczywający pierwotnie na metodach analitycznego rozwiązywania równań oraz na budowaniu schematów zastępczych, przesuwa się w kierunku zagadnień związanych z optymalnym (z punktu widzenia ETO) - formułowaniem modeli matematycznych.

Takim wymogom w zakresie symulacji numerycznej stanów nieustalonych maszyn indukcyjnych przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu czyni zadość model matematyczny maszyny we współrzędnych osiowych. Schematy rozkładu maszyny na maszyny elementarne pozwalają na wybór modelu maszyny o pożądanych właściwościach (w zakresie zjawisk związanych z wyższymi harmonicznymi przestrzennymi, a zwłaszcza - z momentami pasożytniczymi), zaś notacja schematyczna - na odtworzenie równań maszyny od razu we współrzędnych osiowych. W stosunku do fazowego (naturalnego) układu współrzędnych liczba równań (współrzędnych) oraz współczynników jest znacznie mniejsza, a dzięki schematom rozkładu oraz notacji schematycznej może być zawsze zredukowana do niezbędnego minimum. Szczególnie ważnym dla konstrukcji maszyn stanem nieustalonym, powiązanym z doborem liczby żłobków jest rozruch silnika. Przy niewłaściwej liczbie żłobków momenty pasożytnicze mogą utrudnić bądź nawet uniemożliwić przeprowadzenie rozruchu, za co odpowiedzialne są przede wszystkim pasożytnicze momenty synchroniczne o prędkościach synchronicznych $\omega_s = 0$ oraz $\omega_s = \frac{2\omega_o}{cZ_2}$. To, czy nastąpi, czy też nie nastąpi rozruch, zależy od parametrów charakteryzujących nieustalony stan elektrodynamiczny maszyny oraz od wartości początkowej kąta położenia wirnika, ustalającej się każdorazowo po zatrzymaniu silnika w sposób przypadkowy. Niemożność osiągnięcia przez silnik prędkości znamionowej jest wynikiem symosynchronizacji maszyny pod wpływem pasożytniczego momentu synchronicznego.

Próbą opisu tego procesu na podstawie modelu matematycznego maszyny z harmoniczną przestrzenną główną i tradycyjnych środków matematycznych jest



Rys. 5.19. Charakterystyka momentu elektromagnetycznego silnika

Fig. 5.19. The torque-speed curve of the motor

metoda omówiona w monografii [12]. Analizę teoretyczną przeprowadzono dla szczególnie niekorzystnego przypadku, odpowiadającego warunkowi (5.16): $Z_2 = Z_1 + 2p$, w którym moment synchroniczny I rzędu powstaje przy prędkości $\omega_s = \frac{2\omega_o}{Z_2}$ jako wynik elektrodynamicznego współdziałania harmonicznych żłobkowych stojana i wirnika.

Scharakteryzujmy krótko powyższą metodę, posługując się terminologią wprowadzoną w rozdz. 5.3. Metoda opiera się na znajomości charakterystyki statycznej momentu asynchronicznego silnika oraz amplitudy momentu synchronicznego I rzędu (rys. 5.19). Stan nieustalony, spowodowany wytrąceniem z punktu równowagi statycznej ($Z_1 - p$) -tej elementarnej maszyny synchronicznej przez moment zakłócający o wartości $M_a - M_o$ (gdzie: M_a - moment asynchroniczny przy prędkości $\frac{2\omega_o}{Z_2}$, M_o - moment obciążenia maszyny) można uważać za stan quasi-ustalony i w otoczeniu punktu $\frac{2\omega_o}{Z_2}$ analizować opierając się na równaniu stanu elektromechanicznego (3.2), wprowadzając w miejsce formy dwuliniowej momentu elektromagnetycznego różnicę wartości ustalonej momentu asynchronicznego M_a i momentu synchronicznego M_s (strzałki kierunkowości momentu zgodne z pracą [12]):

$$\frac{1}{p} J \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = M_a - M_s - M_o \tag{5.26}$$

gdzie:

φ_e - kąt elektryczny obrotu wirnika

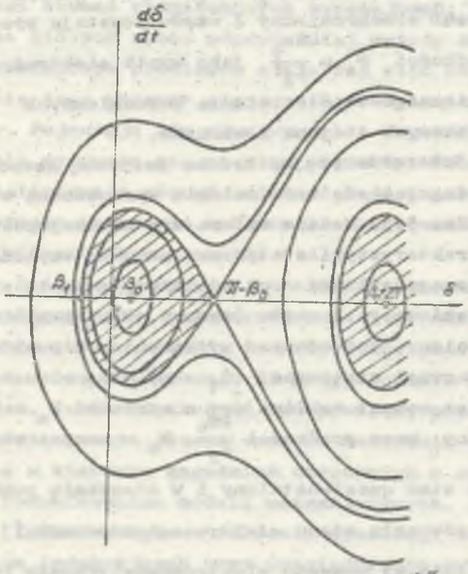
O tym, czy elementarna maszyna synchroniczna wypadnie ze stanu synchronizmu, czy też powróci do punktu równowagi, decyduje wartość momentu zakłócającego $M_a - M_o$ oraz wartość kąta elektrycznego δ_o, zawartego pomiędzy osią przepływu stojana (przepływu twornika) i osią przepływu wirnika (przepływu wzbudzenia) w chwili zaistnienia zaburzenia. Rozwiązania równania różniczkowego (5.26):

$$\frac{d\delta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{K} M_{smx}(\cos\delta - \cos\delta_o) + (M_a - M_o)(\delta - \delta_o)} \tag{5.27}$$

gdzie:

$$K = \frac{J}{Z_2}$$

δ - kąt elektryczny pomiędzy przepływem stojana i wirnika w elementarnej maszynie synchronicznej



Rys. 5.20. Płaszczyzna fazowa $(\delta, \frac{d\delta}{dt})$

Fig. 5.20. Phase plane $(\delta, \frac{d\delta}{dt})$

można przedstawić na płaszczyźnie fazowej $(\delta, \frac{d\delta}{dt})$. Przy ustalonych wartościach amplitudy momentu synchronicznego M_{smx} oraz momentu zaburzającego $M_a - M_o$, trajektorie ruchu w zależności od wartości kąta δ_o są krzywymi zamkniętymi bądź otwartymi (rys. 5.20). Krzywe zamknięte opisują oscylacje, po których maszyna powraca do punktu równowagi, zaś krzywe otwarte - stan nieustalony, w wyniku którego następuje utrata stabilności i wypadnięcie z synchronizmu maszyny elementarnej. Krzywa separująca, oddzielająca trajektorie obu rodzajów, wyznacza na osi odciętych punkty osobliwe: $\pi - \beta_o$ i β_1. Wykazuje się, że ich położenie nie zależy od momentu bezwładności wirnika (parametru K). Dla zadanego stosunku $\frac{M_a - M_o}{M_{smx}}$ punkty osobliwe określa układ równań:

$$M_{smx} \sin \beta_o = M_a - M_o$$

$$M_{smx}\left[\cos(\pi-\beta_o)-\cos \beta_1\right] + (M_a - M_o)(\pi - \beta_o - \beta_1) = 0 \qquad (5.28)$$

Wyniki uproszczonej metody badania stabilności dynamicznej elementarnej pasożytniczej maszyny synchronicznej wyzyskano w pracy [12] do określenia prawdopodobieństwa utknięcia silnika indukcyjnego podczas rozruchu w wyniku samosynchronizacji pod wpływem pasożytniczego momentu synchronicznego. Prawdopodobieństwo to szacuje się według wzoru:

$$P = \frac{\pi - \beta_o - \beta_1}{2} \qquad (5.29)$$

Zastosowanie maszyn cyfrowych umożliwia znacznie dokładniejsze i pełniejsze badania wpływu wyższych harmonicznych przestrzennych na stany nieustalone w maszynach indukcyjnych.

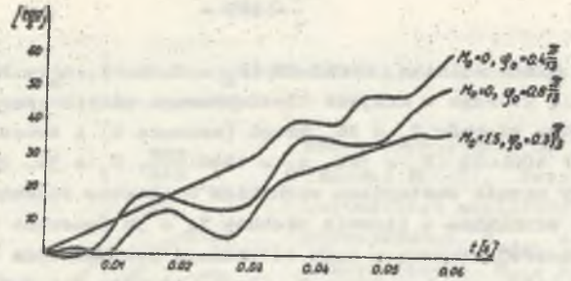
Badania symulacyjne zostały przeprowadzone na przykładzie trzech umyślonych indukcyjnych silników klatkowych A, B i C. Pierwszy z nich (maszyna A)

powstał na bazie silnika Skf63-2B (P_n = 0,25 kW, n_n = 2800 $\frac{obr}{min}$, Z_1 = 24, 2p = 2), dla którego w miejsce 17-żłobkowego wirnika zaprojektowano wirnik o liczbie żłobków Z_2 = 26. Drugi (maszyna B) i trzeci (maszyna C) - na bazie Sf 100L-4B (P_n = 3kW, n_n = 1440 $\frac{obr}{min}$, Z_1 = 36, 2p = 4), w którym 28-żłobkowy wirnik zastąpiono wirnikiem o liczbie żłobków Z_2 = 40 (maszyna B) oraz wirnikiem o liczbie żłobków Z_2 = 36 (maszyna C). Oryginalne wirniki przeprojektowano w celu sztucznego powiększenia wartości pasożytniczych momentów synchronicznych. Liczby żłobków tak dobrano, aby pasożytnicze momenty synchroniczne były formowane przez harmoniczne główne i harmoniczne żłobkowe przepływu stojana i wirnika. W silniku A dominujący moment pasożytniczy powstaje przy pracy silnikowej przy prędkości $\frac{2\omega_o}{26}$, w silniku B przy pracy silnikowej przy prędkości $\frac{2\omega_o}{40}$, zaś w silniku C - w maszynie zatrzymanej (ω = 0).

Analiza oparta została na modelu matematycznym maszyny we współrzędnych osiowych, przy wykorzystaniu schematów rozkładu maszyny na maszyny elementarne oraz notacji schematycznej równań. W silniku A uwzględniono harmoniczne przestrzenne: 1 i 25 ($\vartheta = \vartheta' = 1,25$), w silniku B - 2 i 40 (ϑ = 2,40, czyli $\vartheta' = \frac{2}{p}$ = 1,20), zaś w silniku C - 2, 34 i 38 (ϑ = 2,34, 38, czyli ϑ' = 1, 17, 19). W silnikach A i B pasożytnicze momenty synchroniczne powstają przy pracy silnikowej. Silniki te różnią się między sobą mocą znamionową oraz liczbą par biegunów (odpowiednio 2p = 2 i 2p = 4). Silniki B i C posiadają identyczne stojany, a różni je liczba żłobków wirnika (odpowiednio Z_2 = 40 i Z_2 = 36) tak dobrana, że w maszynie B pasożytniczy moment synchroniczny powstaje przy pracy silnikowej, zaś w maszynie C przy ω = 0. We wszystkich trzech przykładach okresem charakterystyki kątowej pasożytniczego momentu synchronicznego I rzędu (momentu dominującego) jest podziałka żłobkowa wirnika $\frac{2\pi}{Z_2}$. Dla poszczególnych maszyn podziałkę żłobkową wirnika podzielono na dziesięć równych części i symulację rozruchu przeprowadzono dla 10 różnych kątów początkowych położenia wirnika.

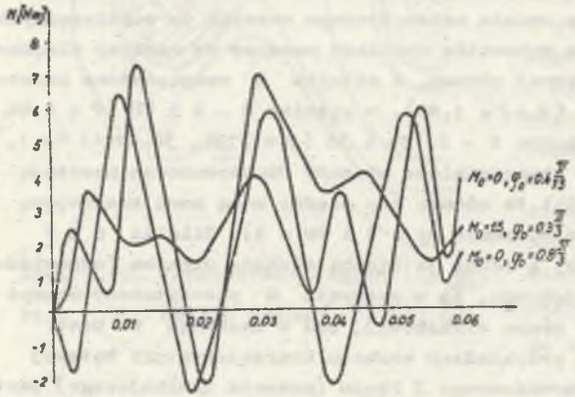
Równania nieustalonego stanu elektrodynamicznego maszyn A, B i C po sprowadzeniu do postaci kanonicznej podano w dodatku D.1, D.2, D.3.

Silnik A (o najmniejszej mocy) każdorazowo, zarówno przy braku obciążenia, jak i przy obciążeniu znamionowym, wyrywał się spod działania pasożytniczego momentu synchronicznego i osiągał prędkość znamionową. W żadnym z przypadków nie nastąpiła synchronizacja momentu pasożytniczego, tym niemniej "przechodzeniu" silnika przez prędkości zbliżone do synchronicznej towarzyszyły oscylacje prędkości obrotowej o amplitudach zależnych od początkowego położenia wirnika. Przykładowo trzy krzywe prędkości obrotowej w funkcji czasu dla różnych kątów początkowych i różnych momentów obciążenia przedstawiono na rys. 5.21. Uwzględnienie 25 harmonicznej przepływu wywiera istotny wpływ na przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prądu stojana podczas rozruchu. Szczytowa wartość momentu elektromagnetycznego oraz czas jej pojawienia stają się zależne od początkowego położenia wir-



Rys. 5.21. Przebiegi czasowe prędkości obrotowej przy rozruchu silnika przy różnych wartościach kąta początkowego położenia wirnika (maszyna A)

Fig. 5.21. The time functions of a speed during the start of a motor with the various initial positions of a rotor (machine A)



Rys. 5.22. Przebiegi czasowe momentu elektromagnetycznego przy rozruchu silnika przy różnych wartościach kąta początkowego położenia wirnika (maszyna A)

Fig. 5.22. The time functions of a torgue during the start of a motor with the various initial positions of a rotor (machine A)

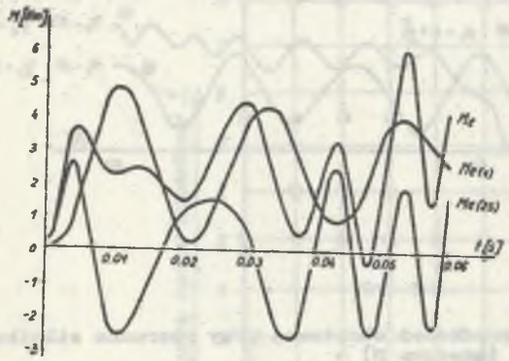
nika. Przykładowo szczytowa wartość momentu elektromagnetycznego, wynosząca w modelu z harmoniczną przestrzenną główną około 4 Nm wzrosła - w najbardziej niekorzystnym przypadku - do około 8 Nm (rys. 5.22). Wpływ ten tłumaczy rys. 5.23. Moment elektromagnetyczny silnika jest sumą momentów elektromagnetycznych poszczególnych maszyn elementarnych, a więc w rozważanym przypadku - 1 i 25 maszyny elementarnej:

$$M_e = M_{e(1)} + M_{e(25)} \tag{5.30}$$

Przy uwzględnieniu tylko momentów I rzędu mamy:

$$M_{e(1)} \cong M^{I}_{1(0)(1)} + M^{I}_{1(0)(25)}$$

$$M_{e(25)} \cong M^{I}_{25(0)(1)} + M^{I}_{25(0)(25)} \tag{5.31}$$



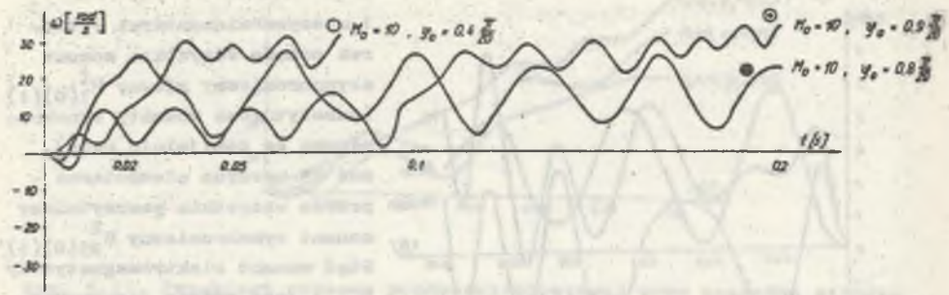
Rys. 5.23. Przebiegi momentów składowych i momentu wypadkowego (maszyna A)

Fig. 5.23. The time functions of the components of a torque and the resultant torque (machine A)

1 maszyna elementarna wytwarza przede wszystkim moment asynchroniczny główny $M^{I}_{1(0)(1)}$ (pasożytnicze momenty synchroniczne są pomijalnie małe), zaś 25 maszyna elementarna - przede wszystkim pasożytniczy moment synchroniczny $M^{I}_{25(0)(1)}$. Stąd moment elektromagnetyczny $M_{e(1)}$ jest prawie identyczny z momentem elektromagnetycznym otrzymanym dla modelu z harmoniczną główną i praktycznie niezależny od kąta początkowego wirnika φ_o. Po uwzględnieniu 25 harmonicznej pojawia się pasożytniczy moment 25 maszyny elementarnej $M_{e(25)}$, który w zależności od przypadkowej wartości kąta φ_o w różny sposób sumuje się ze składową $M_{e(1)}$. Dla niektórych wartości kąta φ_o w miejsce pierwszego maksimum występuje moment o wartości ujemnej. Prawdopodobieństwo utknięcia silnika A wyznaczone na podstawie przybliżonej metody analitycznej wynosiło P = 0,46, podczas gdy badania symulacyjne wskazują na wartość P = 0. Metoda omówiona w monografii [12] pozwala z pewnością na lepsze poznanie i głębsze fizyczne zrozumienie wpływu pasożytniczych momentów synchronicznych na przebiegi nieustalone w maszynie, niestety - ze względu na zbyt daleko idące założenia upraszczające - jest mało przydatna w ocenie prawdopodobieństwa samosynchronizacji.

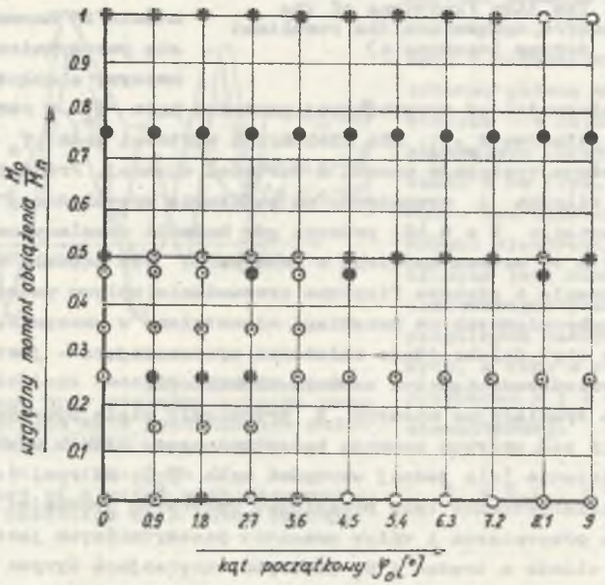
Badania symulacyjne maszyny B przyniosły wiele przypadków samosynchronizacji pod wpływem momentu pasożytniczego. Silnik utykał nawet przy braku obciążenia (dla jednej wartości kąta φ_o). Na rys. 5.24 przedstawiono 3 charakterystyczne typy przebiegów czasowych prędkości obrotowej: silnik silnie przyspiesza i wpływ momentów pasożytniczych jest prawie niezauważalny, silnik z trudem i po licznych oscylacjach wyrywa się spod działania momentu pasożytniczego i wreszcie - silnik ulega samosynchronizacji i utyka (prędkość oscyluje wokół prędkości synchronicznej momentu pasożytniczego). Na dalszych rysunkach te 3 charakterystyczne typy przebiegów czasowych prędkości obrotowej będziemy oznaczać odpowiednio symbolami: ○ (lekki rozruch), ⊙ (ciężki rozruch) i ● (samosynchronizacja pod wpływem momentów pasożytniczych).

Wyniki badań symulacyjnych zebrano na rys. 5.25 i 5.26. Na rys. 5.25 określono charakter rozruchu w zależności od wartości początkowej kąta położenia wirnika φ_o i względnej wartości momentu obciążenia $\frac{M_o}{M_n}$ przy



Rys. 5.24. Przebiegi czasowe prędkości obrotowej przy rozruchu silnika (maszyna B)

Fig. 5.24. The time functions of a speed during the start (machine B)



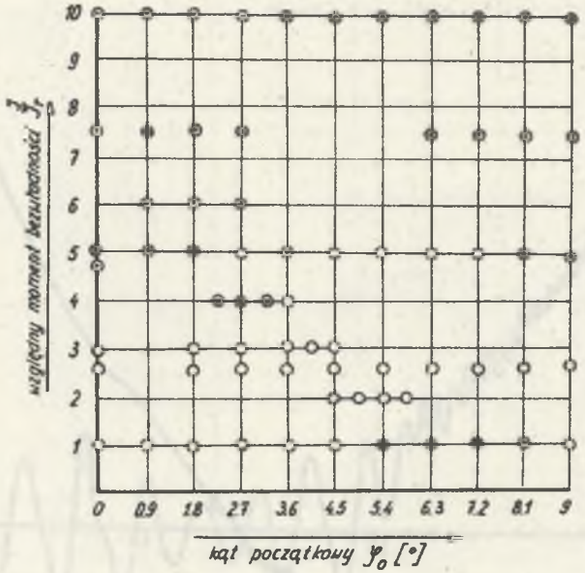
○ - lekki rozruch

⊙ - ciężki rozruch

● - samosynchronizacja

Rys. 5.25. Typ rozruchu silnika w zależności od kąta początkowego położenia wirnika i względnej wartości momentu obciążenia (maszyna B)

Fig. 5.25. The type of the start of a motor according to initial positions of a rotor and relative load torques (machine B)



○ - lekki rozruch

⊙ - ciężki rozruch

● - samosynchronizacja

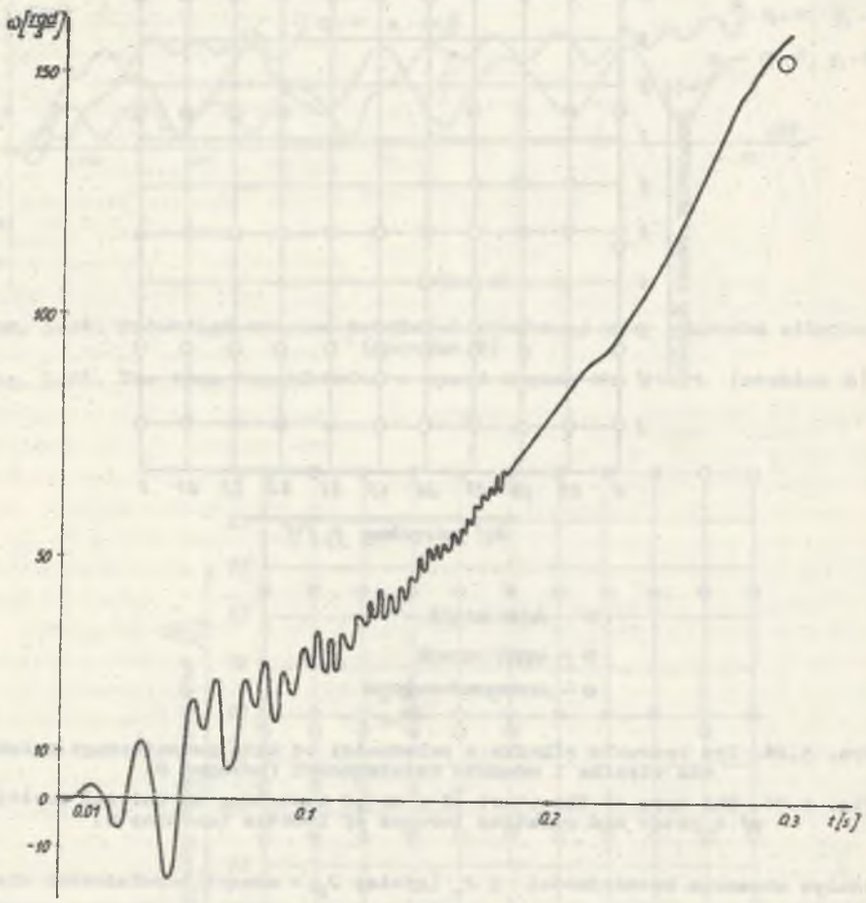
Rys. 5.26. Typ rozruchu silnika w zależności od kąta początkowego położenia wirnika i momentu bezwładności (maszyna B)

Fig. 5.26. The type of the start of a motor according to initial positions of a rotor and relative torques of inertia (machine B)

stałym momencie bezwładności $5\ J_r$ (gdzie: J_r - moment bezwładności wirnika). Na rys. 5.26 zilustrowano wpływ kąta początkowego φ_o oraz momentu bezwładności J przy momencie obciążenia $M_o = 0$.

Badania symulacyjne prowadzone dla różnych kątów początkowych φ_o, różnych wartości momentu obciążenia M_o i momentu bezwładności J podważają wnioski z przybliżonej metody V. Hamaty i B. Hellera. Przede wszystkim stwierdzono, że przebieg procesu samosynchronizacji zależy od momentu bezwładności J i że jego wartość może decydować o pomyślnym lub niepomyślnym rozruchu. Po drugie - prawdopodobieństwo utyku P nie rośnie monotonicznie wraz z momentem obciążenia. Czasami, jak widać na rys. 5.25, właśnie po wzroście obciążenia, a przy nie zmienionej wartości kąta początkowego wirnika, silnik ponownie począł wyrywać się spod działania momentu pasożytniczego.

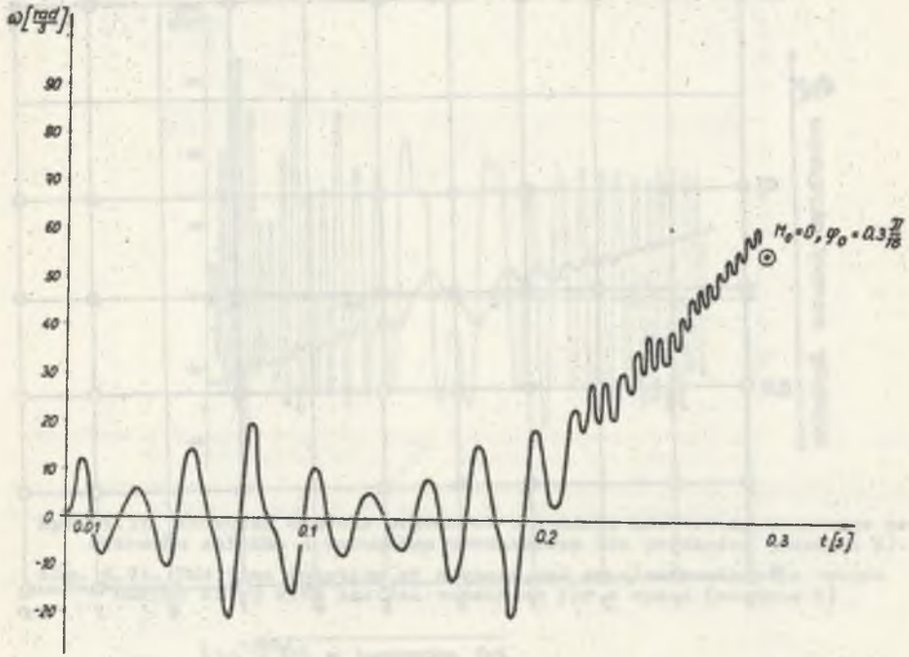
Podobne rezultaty otrzymano dla silnika C (prędkość synchroniczna momentu pasożytniczego $\omega_s = 0$). Rys. 5.27, 5.28 i 5.29 obrazują 3 charakte-



Rys. 5.27. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy lekkim rozruchu (maszyna C)

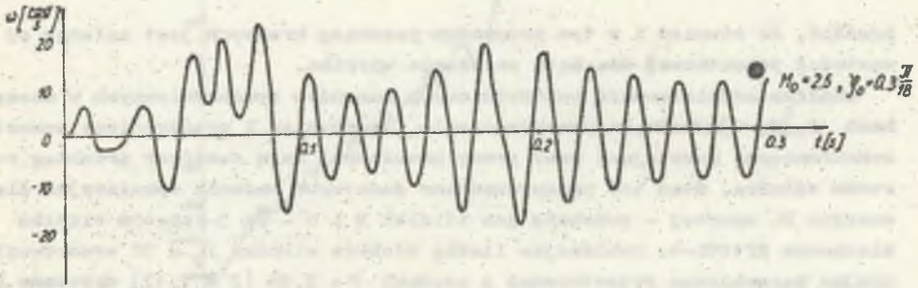
Fig. 5.27. The time functions of a speed during the easy start (machine C)

rystyczne typy rozruchu: lekki rozruch, ciężki rozruch oraz utykanie silnika, będące wynikiem samosynchronizacji. Na rys. 5.30 określono charakter rozruchu w zależności od wartości początkowej kąta położenia wirnika oraz względnej wartości momentu obciążenia $\frac{M_o}{M_n}$ ($J = 5J_r$). Na rys. 5.31 zestawiono przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prędkości obrotowej przy rozruchu z warunkiem początkowym dla prędkości obrotowej $\omega(+0) = -120\ \frac{rad}{s}$. Oddziaływanie pasożytniczego momentu synchronicznego jest szczególnie wyraźne przy prędkościach zbliżonych do $\omega = 0$. Warto pod-



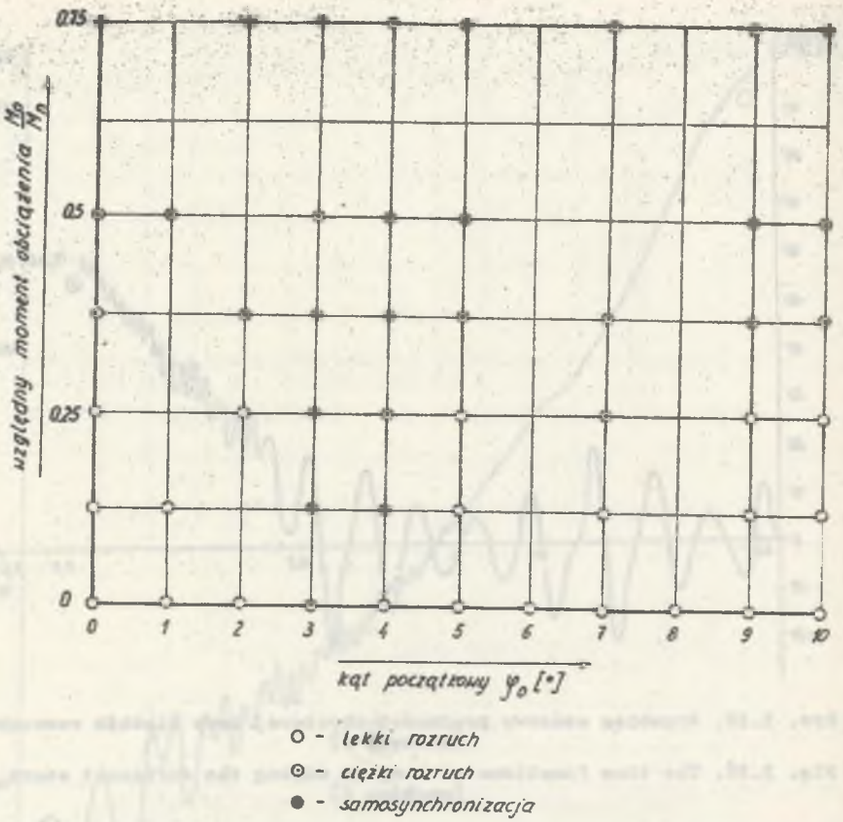
Rys. 5.28. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy ciężkim rozruchu (maszyna C)

Fig. 5.28. The time functions of a speed during the difficult start (machine C)



Rys. 5.29. Przebieg czasowy prędkości obrotowej w procesie samosynchronizacji maszyny (maszyna C)

Fig. 5.29. The time function of a speed during the self-synchronization of a machine (machine C)

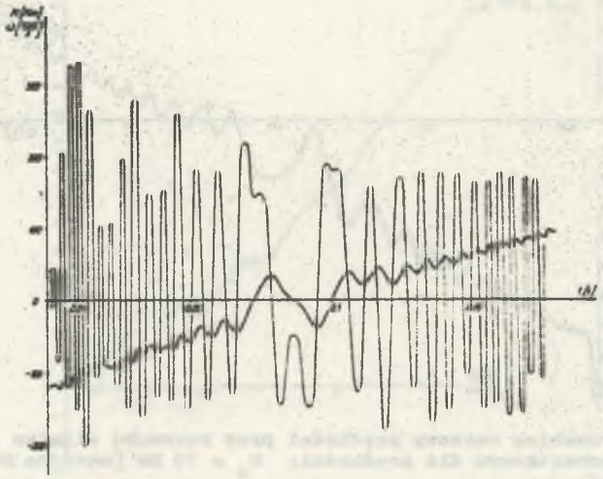


Rys. 5.30. Typ rozruchu silnika w zależności od kąta początkowego położenia wirnika i względnej wartości momentu obciążenia (maszyna C)

Fig. 5.30. The type of the start of a motor according to initial positions of a rotor and relative load torques (machine C)

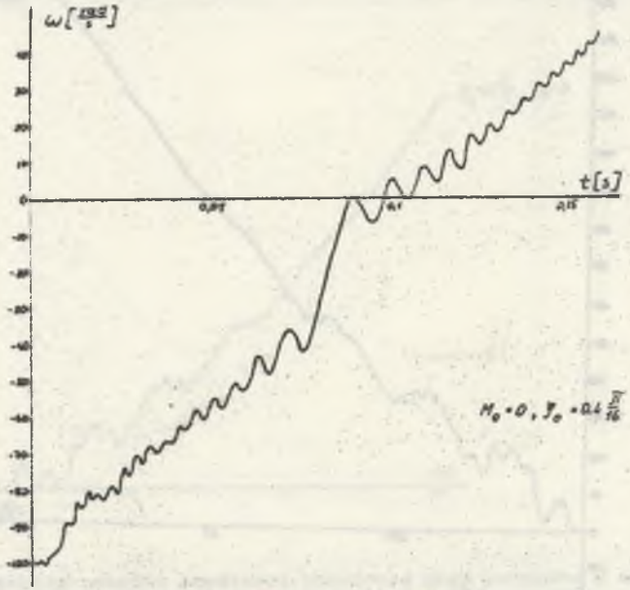
kreślić, że również i w tym przypadku przebieg krzywych jest zależny od wartości początkowej dla kąta położenia wirnika.

Analiza oddziaływania pasożytniczych momentów synchronicznych w maszynach A, B, C nasunęła przypuszczenie, że również i pysożytnicze momenty synchroniczne powstające przy pracy hamulcowej mogą zakłócać przebieg rozruchu silnika. Stąd też przeprowadzono dodatkowe badania symulacyjne dla maszyny D, opartej - podobnie jak silniki B i C - na 3-fazowym silniku klatkowym Sf100L-4. Dobierając liczbę żłobków wirnika Z_2 = 32 oraz uwzględniając harmoniczne przestrzenne o rzędach ν = 2,34 (ν' = 1,17) uzyskano pasożytniczy moment synchroniczny przy pracy hamulcowej przy prędkości $\omega_s = -\frac{2\omega_o}{32}$ (równania maszyny w dodatku D.4). Wpływ tego momentu jest wyraźnie widoczny na rys. 5.32 i 5.33, obrazujących rozruch silnika z warunkiem początkowym dla prędkości obrotowej $\omega(+0) = -100\ \frac{rad}{s}$. Przebiegi czasowe



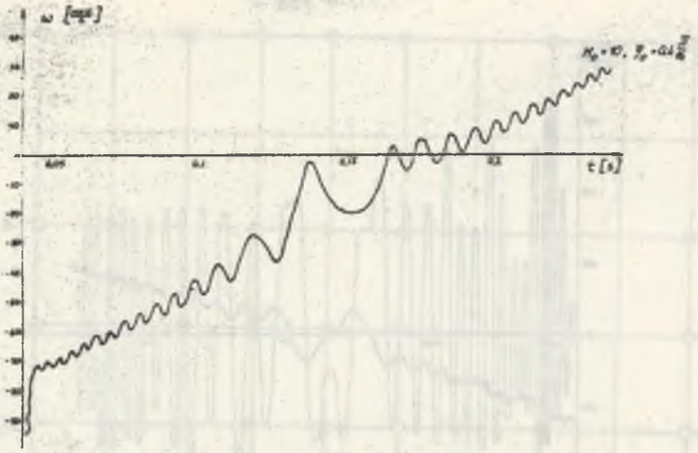
Rys. 5.31. Przebieg czasowy prędkości i momentu elektromagnetycznego przy rozruchu silnika z warunkiem początkowym dla prędkości (maszyna C)

Fig. 5.31. The time function of a speed and an elektromagnetic torque during start with initial condition for a speed (machine C)



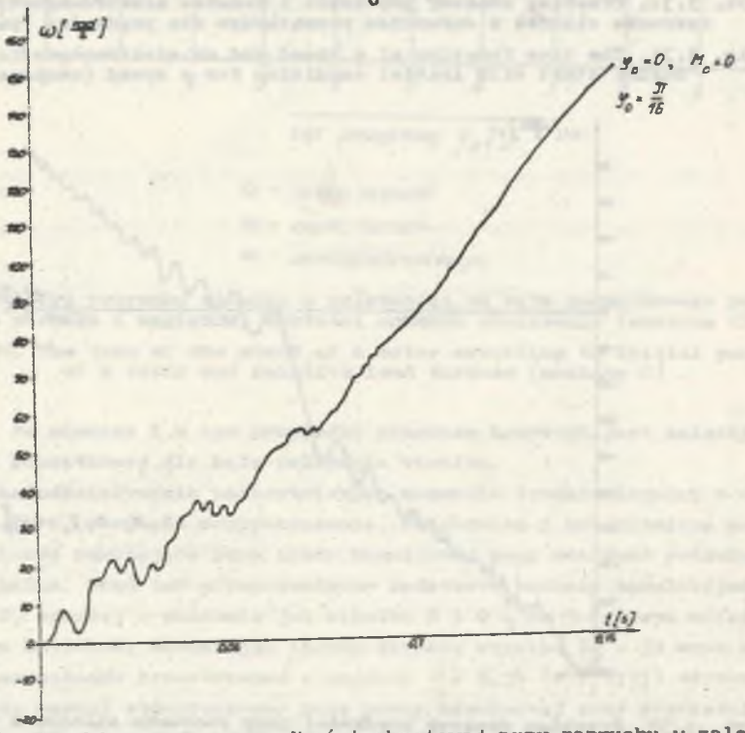
Rys. 5.32. Przebieg czasowy prędkości przy rozruchu silnika z warunkiem początkowym dla prędkości; M_o = 0 (maszyna D)

Fig. 5.32. The time function of a speed during the start with initial condition for a speed; M_o = 0 (machine D)



Rys. 5.33. Przebieg czasowy prędkości przy rozruchu silnika z warunkiem początkowym dla prędkości; M_o = 10 Nm (maszyna D)

Fig. 5.33. The time function of a speed during the start with initial condition for a speed; M_o = 10 Nm (machine D)



Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D):

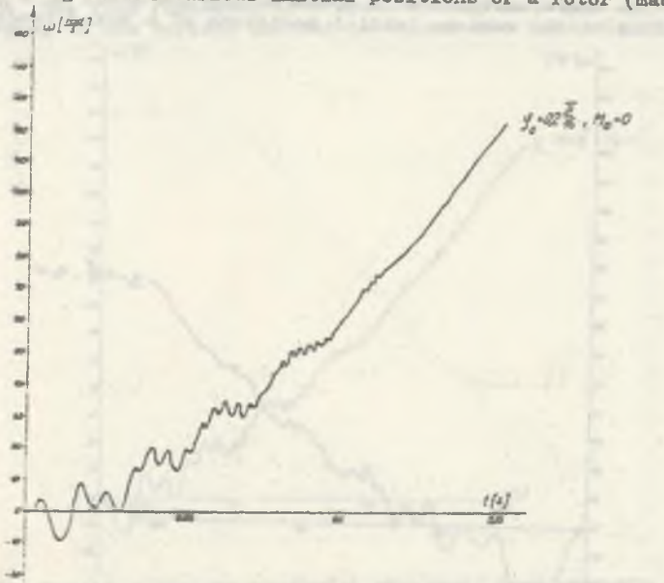
a) $\varphi_o = 0$ i $\varphi_o = \frac{\pi}{16}$

Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)

Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D):

b) $\varphi_o = 0,1 \frac{\pi}{16}$

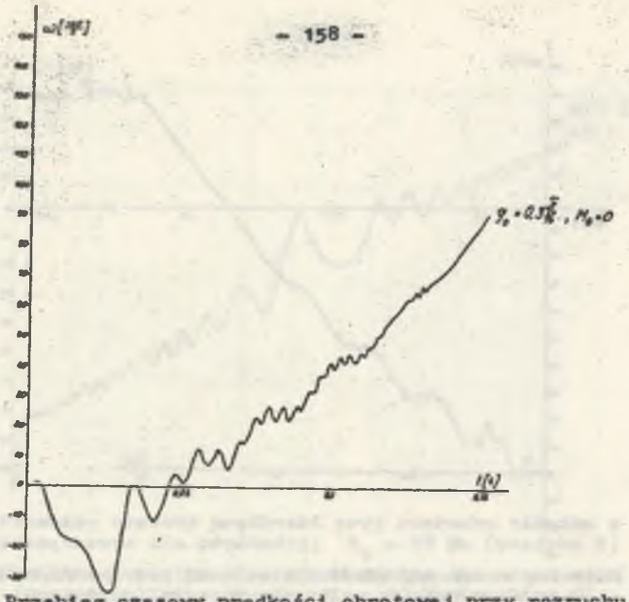
Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)



Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D):

c) $\varphi_o = 0,2 \frac{\pi}{16}$

Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)



Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D)

d) $\varphi_o = 0,3 \frac{\pi}{16}$

Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)

Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D)

e) $\varphi_o = 0,4 \frac{\pi}{16}$

Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)

Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D)

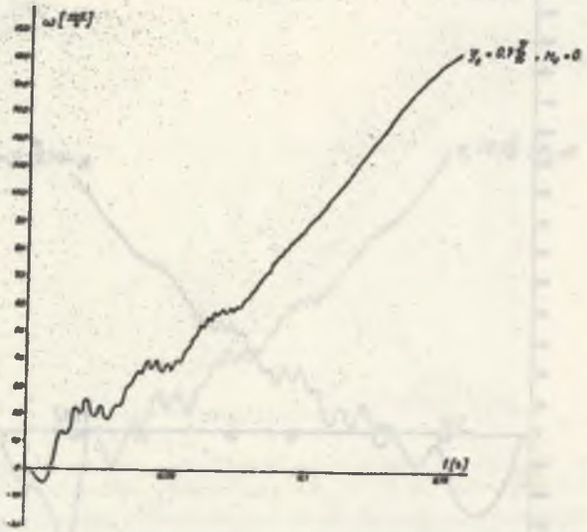
f) $\varphi_o = 0,5 \frac{\pi}{16}$

Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)

Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D)

g) $\varphi_o = 0,6 \frac{\pi}{16}$

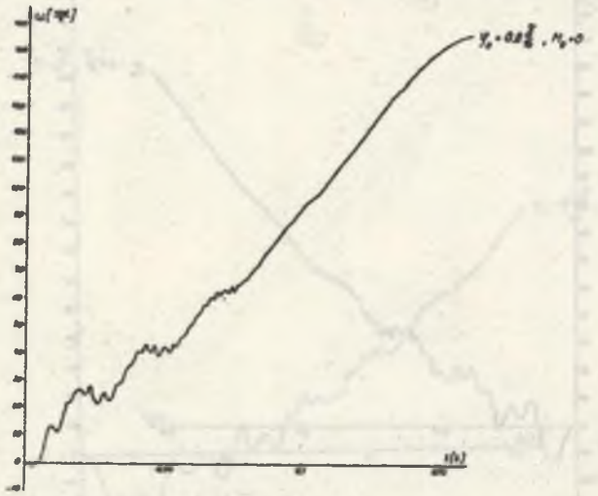
Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)



Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D)

h) $\varphi_0 = 0{,}7\,\frac{\pi}{16}$

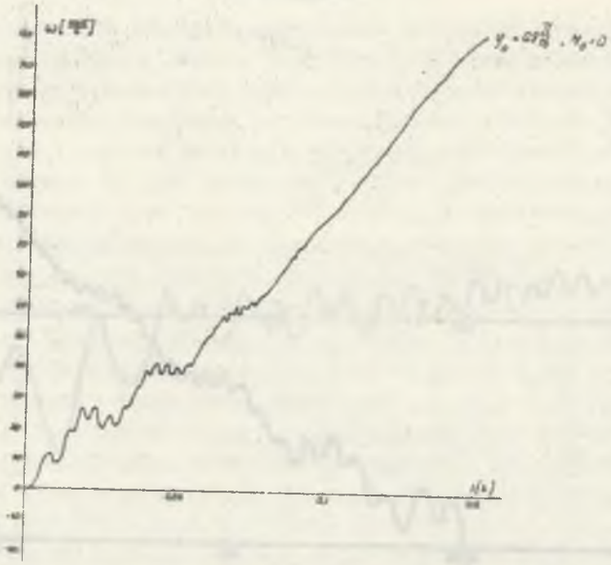
Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)



Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D)

i) $\varphi_0 = 0{,}8\,\frac{\pi}{16}$

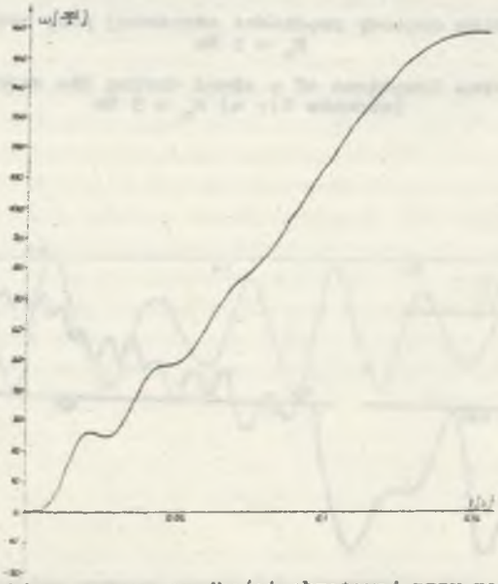
Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)



Rys. 5.34. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu w zależności od kąta początkowego położenia wirnika (maszyna D)

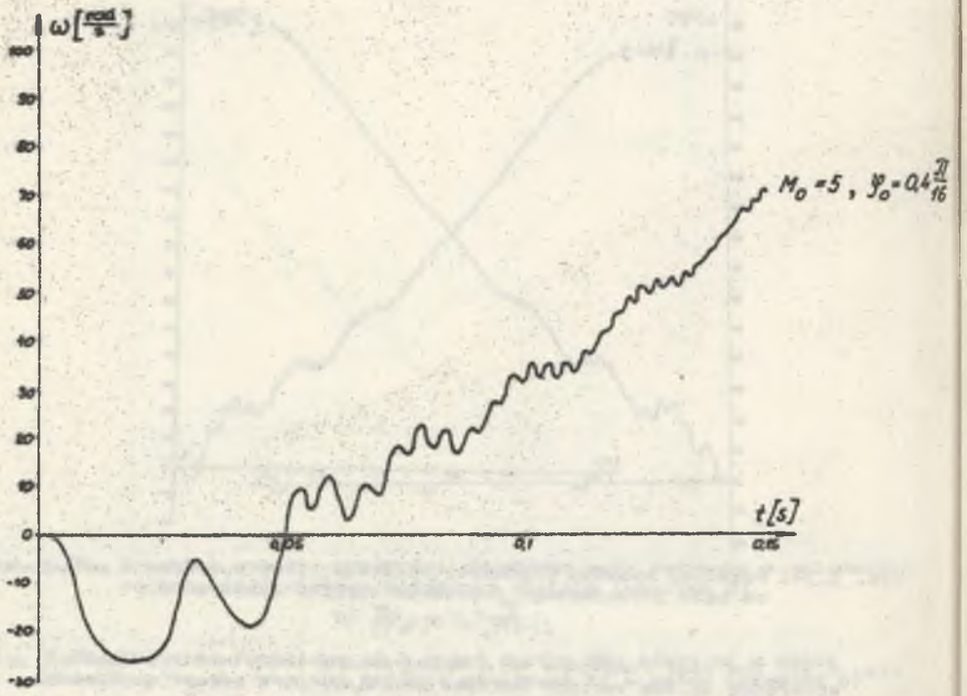
j) $\varphi_0 = 0{,}9\,\frac{\pi}{16}$

Fig. 5.34. The time functions of a speed during the start of a motor according to the various initial positions of a rotor (machine D)



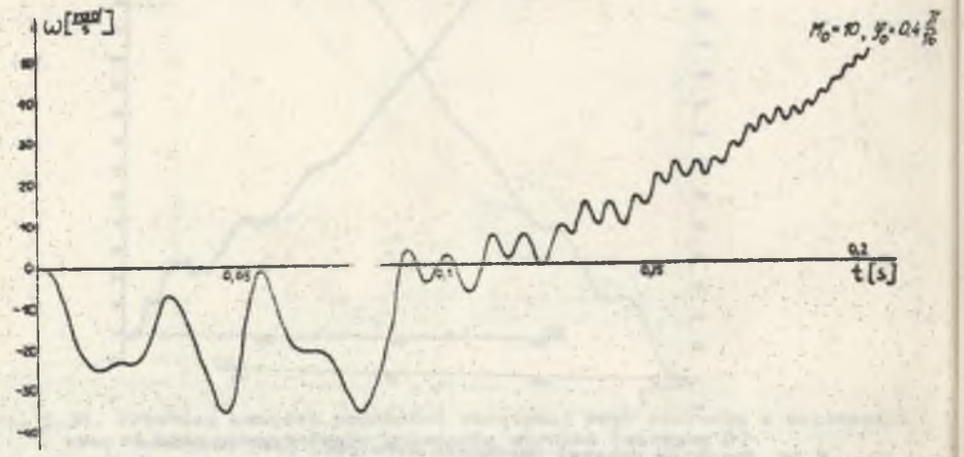
Rys. 5.35. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu przy uwzględnieniu tylko głównej harmonicznej przestrzennej; $\vartheta = 2$ (maszyna D)

Fig. 5.35. The time functions of a speed during the start of a motor taking into account only working space harmonic; $\vartheta = 2$ (machine D)



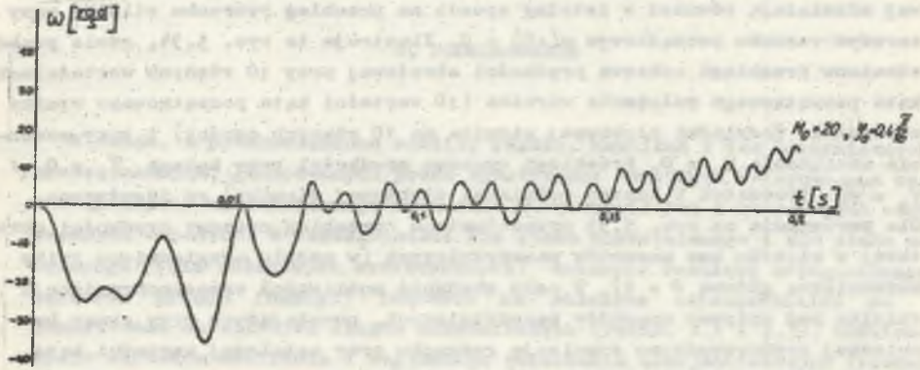
Rys. 5.36. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu (maszyna D): M_o = 5 Nm

Fig. 5.36. The time functions of a speed during the start of a motor (machine D): a) M_o = 5 Nm



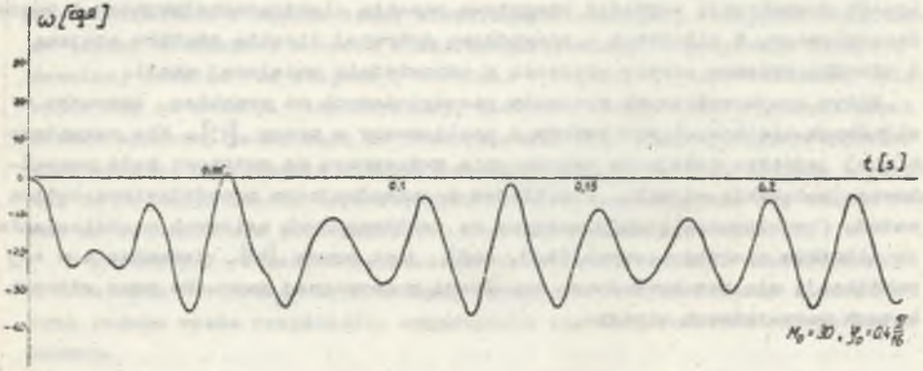
Rys. 5.36. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu (maszyna D): b) M_o = 10 Nm

Fig. 5.36. The time functions of a speed during the start of a motor (machine D): b) M_o = 10 Nm



Rys. 5.36. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu (maszyna D): c) M_o = 20 Nm

Fig. 5.36. The time functions of a speed during the start of a motor (machine D): c) M_o = 20 Nm



Rys. 5.36. Przebieg czasowy prędkości obrotowej przy rozruchu (maszyna D): d) M_o = 30 Nm (samosynchronizacja)

Fig. 5.36. The time functions of a speed during the start of a motor (machine D): d) M_o = 30 Nm (self-synchronization)

prędkości (charakter przebiegu w otoczeniu prędkości synchronicznej) zależą od wartości początkowej kąta położenia wirnika i momentu obciążenia silnika. Pasożytnicze momenty synchroniczne powstające przy pracy hamulcowej oddziałują również w istotny sposób na przebieg rozruchu silnika przy zerowym warunku początkowym $\omega(+0) = 0$. Ilustruje to rys. 5.34, gdzie przedstawiono przebiegi czasowe prędkości obrotowej przy 10 różnych wartościach kąta początkowego położenia wirnika (10 wartości kąta początkowego wynika z podziału podziałki żłobkowej wirnika na 10 równych części) i przy momencie obciążenia $M_o = 0$. Przebiegi czasowe prędkości przy kątach $\varphi_o = 0$ i $\varphi_o = \frac{\pi}{10}$ (początek i koniec podziałki żłobkowej wirnika) są identyczne. Dla porównania na rys. 5.35 przedstawiono przebieg czasowy prędkości obrotowej w silniku bez momentów pasożytniczych (w modelu uwzględniono tylko harmoniczną główną $\nu = 2$). W celu zbadania możliwości samosynchronizacji silnika pod wpływem momentów pasożytniczych, powstających przy pracy hamulcowej przeprowadzono symulację rozruchu przy ustalonej wartości kąta początkowego położenia wirnika $\varphi_o = 0{,}4\,\frac{\pi}{10}$ (najniekorzystniejsza wartość kąta przy $M_o = 0$) i przy momencie obciążenia $M_o = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5\ M_n$ (rys. 5.36). W ostatnim z rozważanych przypadków silnik został wciągnięty w synchronizm przez pasożytniczy moment synchroniczny związany z pracą hamulcową (przy pominięciu harmonicznej $\nu = 34$, a więc przy braku momentu pasożytniczego silnik ruszał ponownie).

Reasumując, wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu i związane z nimi pasożytnicze momenty synchroniczne wywierają niekorzystny wpływ na rozruch silników indukcyjnych (wydłużają czas rozruchu, powodują oscylacje prędkości obrotowej, a w krańcowym przypadku - utknięcie silnika). W istotny sposób powiększają wartości szczytowe momentu elektromagnetycznego i prądu łączeniowego. W silnikach o prawidłowo dobranej liczbie żłobków stojana i wirnika opisane efekty wystąpią w odpowiednio mniejszej skali.

Wpływ synchronicznych momentów pasożytniczych na przebieg rozruchu w silnikach klatkowych był badany i analizowany w pracy [13]. Nie rozważono w niej jednakże istotnego zagadnienia związanego ze zmianami kąta początkowego położenia wirnika. Przykładem potwierdzającym przedstawioną ogólną metodę formułowania równań maszyny we współrzędnych osiowych w odniesieniu do silników pierścieniowych (m=3, n=3) jest praca [46]. Jednakże i w tej publikacji nie przeprowadzono symulacji numerycznej rozruchu przy różnych kątach początkowych wirnika.

6. PODSUMOWANIE

W rozdz. 2 przeprowadzono analizę rzędów, amplitud i faz harmonicznych przestrzennych, generowanych przez symetryczne uzwojenie m-fazowe, na podstawie modelu matematycznego uzwojenia w rzeczywistych i zespolonych współrzędnych osiowych. W szczególności dla stanu nieustalonego i dla stanu ustalonego (dla składowych symetrycznych) dokonano rozkładu ortogonalnego wektorów prądów (napięć) fazowych na składowe odpowiedzialne za generowanie określonych ciągów harmonicznych (rozdz. 2.1 i 2.3). Omówiono wpływ warunków zasilania i wzajemnego połączenia uzwojeń fazowych (równań więzów) na widma rozkładów przestrzennych przepływu uzwojeń m-fazowych. Wykazano, że - wprowadzone za pośrednictwem rzeczywistych współrzędnych osiowych - zespolone współrzędne osiowe odpowiadają wektorom przestrzennym zdefiniowanym przez J. Stepinę i stanowią - poprzez związek z rozkładem ortogonalnym - ich uogólnienie.

W rozdz. 3.1 - 3.4 na przykładzie maszyny asynchronicznej o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku omówiono schemat rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne oraz notację schematyczną równań (macierze schematyczne indukcyjności) we współrzędnych osiowych.

Wskazano, w jaki sposób bezpośrednio ze schematów rozkładu wynikają stransformowane równania stanu elektromagnetycznego i elektromechanicznego (formy dwuliniowe momentu elektromagnetycznego) w przypadku maszyn o dowolnej liczbie faz stojana i wirnika. W kolejnych podrozdziałach, opierając się na notacji schematycznej, omówiono zasady wyboru harmonicznych przestrzennych, prowadzące do rozsprzęgania się układu równań różniczkowych maszyny na równania dla poszczególnych współrzędnych stojana i wirnika, do redukcji liczby współrzędnych oraz do rozsprzęgania się układu równań na równania dla poszczególnych harmonicznych przestrzennych.

W rozdz. 3.7 rozważono zagadnienie naturalnej redukcji współrzędnych w maszynach o rozrzedzonych widmach przepływu uzwojeń stojana i wirnika oraz podano wiele przykładów, odnoszących się do 3-fazowych maszyn klatkowych.

Nowe ujęcie indukcyjności rozproszenia różnicowego, ważne dla maszyn o dowolnej liczbie faz i szczególnie przydatne z punktu widzenia ETO przedstawiono w rozdz. 3.6.

Rozdz. 4 poświęcono analizie prądów fazowych maszyny przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych. Opierając się na schemacie rozkładu dokonano rozkładu prądów fazowych na prądy i-krotnych reakcji poszczególnych uzwojeń elementarnych, stwarzając w ten sposób możliwość gra-

ficznego przedstawiania mechanizmów generowania prądów obcych częstotliwości w stojanie i wirniku (rozdz. 4.1 i 4.2). Na przykładzie maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku omówiono charakterystyczne tory generowania prądów reakcji wielokrotnych uzwojeń. Indeksy określające prądy są syntetycznym zapisem torów uwidocznionych na schematach rozkładu. Znajomość torów pozwala na wyznaczenie ogólnej postaci czasowej prądów w stanie ustalonym (rozdz. 4.3).

Rozkład prądów umożliwia przeprowadzenie rozkładu momentu maszyny asynchronicznej na składniki związane z kolejnymi maszynami elementarnymi i z różnymi prądami i-krotnych reakcji uzwojeń elementarnych. Podobnie jak w przypadku prądów, rozkład ten umożliwia graficzne przedstawienie mechanizmów generowania poszczególnych momentów pasożytniczych na schemacie rozkładu maszyny. Oznaczenia momentów stanowią zapis torów ich generowania (ściślej - torów generowania prądów, w wyniku współdziałania których dochodzi w maszynach elementarnych do powstawania momentów pasożytniczych).

W rozdz. 5.1 zdefiniowano rząd momentu pasożytniczego w nawiązaniu do krotności reakcji prądów uczestniczących w jego powstaniu. Na przykładzie maszyny o 5-fazowym stojanie i 12-fazowym wirniku przedstawiono charakterystyczne tory generowania pasożytniczych momentów asynchronicznych i synchronicznych pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu. Znajomość torów umożliwia określenie ogólnej postaci czasowej poszczególnych składników momentu w stanie ustalonym i w konsekwencji stwierdzenie, czy rozważany moment jest momentem asynchronicznym, czy synchronicznym. W stosunku do momentów synchronicznych pozwala m.in. na wyznaczenie prędkości synchronicznej i okresu charakterystyki kątowej, w odniesieniu do momentów asynchronicznych - liczby miejsc zerowych na charakterystyce poślizg - moment itd.

W rozdz. 5.3 omówiono szczegółowo momenty pasożytnicze o dominującym znaczeniu, a mianowicie momenty I rzędu. Dla pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu podano interpretację fizyczną, nawiązującą do teorii maszyny synchronicznej i pozwalającą na wprowadzenie do analizy takich pojęć, jak elementarna maszyna wzbudzająca, elementarna maszyna synchroniczna, charakterystyka kątowa pasożytniczego momentu synchronicznego itp. Przedstawiono również tabelę umożliwiającą określanie prędkości synchronicznej pasożytniczego momentu synchronicznego wprost na podstawie orientacji osi faz maszyny wzbudzającej oraz maszyny synchronicznej.

W rozdz. 5.4 na wybranych przykładach 3-fazowych maszyn klatkowych omówiono zasady doboru liczby żłobków stojana i wirnika w maszynach asynchronicznych na podstawie schematów rozkładu. Wykazano, że wszystkie znane warunki doboru (w tym również te dla maszyn z gałęziami równoległymi) wynikają ze schematów rozkładu i dają się na ich podstawie uzasadnić.

Rozdz. 5.5 poświęcono badaniu wpływu wyższych harmonicznych przestrzennych na rozruch silnika klatkowego. Na wstępie omówiono analityczną metodę badania zjawiska samosynchronizacji maszyny pod wpływem momentu pasożytniczego i wyznaczania prawdopodobieństwa rozruchu, opartą na analizie stabilności dynamicznej elementarnej maszyny synchronicznej. Następnie przeprowadzono badania symulacyjne rozruchu na maszynie cyfrowej. Omówiono wpływ momentów pasożytniczych na wartości szczytowe momentów, prądów łączeniowych oraz na czas rozruchu. Uwypuklono kluczowe znaczenie początkowego kąta położenia wirnika. Szczególną uwagę zwrócono na przebieg procesu samosynchronizacji w obecności pasożytniczych momentów synchronicznych o różnych prędkościach synchronicznych.

Z przedstawionego podsumowania wynika, że cele pracy, sformułowane w rozdz. 1, zostały osiągnięte. Wykazano, że model matematyczny maszyny asynchronicznej we współrzędnych osiowych, schemat rozkładu maszyny na maszyny elementarne oraz notacja schematyczna równań pozwalają w jednolity sposób opisywać i analizować zagadnienia i zjawiska związane z pasożytniczymi momentami asynchronicznymi i synchronicznymi w maszynach asynchronicznych, dają możliwość uogólniania i rozszerzania tradycyjnych metod obliczeniowych, a jednocześnie umożliwiają posługiwanie się metodami ETO. Rozwiązanie zagadnienia dotyczącego wzajemnych związków pomiędzy harmonicznymi przestrzennymi a współrzędnymi w maszynach indukcyjnych o dowolnej liczbie faz oraz opracowanie jakościowych metod badania momentów pasożytniczych wprost na podstawie układów równań różniczkowych stworzyło drogę do optymalizacji modeli matematycznych z punktu widzenia ETO.

Kierunki dalszych prac

Model matematyczny we współrzędnych osiowych, schematy rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne oraz notację schematyczną można również wykorzystać do analizy i badań symulacyjnych maszyn asynchronicznych, zasilanych z układów energoelektronicznych.

W zakresie badań teoretycznych dalsze prace powinny koncentrować się wokół rozszerzenia modelu matematycznego maszyny asynchronicznej i uogólnienia prezentowanych metod na zjawiska, związane z nierównomierną szczeliną powietrzną (użłobkowaniem stojana i wirnika).

LITERATURA

[1] Alger P.L.: Induced High-frequency Currents in Squirrel-cage Windings. "Power Apparatus and systems", 1957, s. 724-729.

[2] Brodzki M.: O współzmienniczości równań i metodach rozwiązywania sieci elektrycznych o pewnych symetriach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Gliwice 1972, nr 24.

[3] Brown J.E., Jha C.S.: Generalized Rotating-field Theory of Polyphase Induction Motors and its Realtionship to Symmetrical - component Theory. "Proceedings IEE" 1962, 109 A, s. 59.

[4] Dąbrowski M.: Pola i obwody magnetyczne maszyn elektrycznych. WNT, Warszawa 1971.

[5] Dubicki B.: Rozproszenie szczelinowe w maszynach elektrycznych. "Archiwum Elektrotechniki" 1972, nr 1.

[6] Jagiełło A., Pawluk K.: Problemy ogólnej teorii transformacji w bezkomutatorowych maszynach elektrycznych. Zeszyty Naukowe AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Kraków 1977, z. 85.

[7] Jefimow N.W., Rozendorn E.R.: Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową. PWN, Warszawa 1974.

[8] Hamata V. Vliv dynamiky rozbehu na momentovou charakteristiku asynchronnich motoru. "Elektrotechnicky Časopis" 1969, nr 9.

[9] Heller B.: Vliv pridavnych synchronnich momentu na rozbeh motoru s kotvou nakratko "Elektrotechnický Obzor" 1949 s. 213-215.

[10] Heller V., Klima V.: Die synchronen parasitären Momente bei Stillstand und bei Anlauf des Käfigankermotors". "Archiv für Elektrotechnik" 1970, s. 215-325.

[11] Heller V., Klima V.: Die sekundäre Ankerrückwirkung im Käfigankermotor, Acta Technica CSAV 1970, nr 4, s. 321-330.

[12] Heller V., Hamata V.: Harmonic Field Effects in Induction Machines. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praque 1977.

[13] Hommes E., Paap G.C.: The Analysis of the 3-phase Squirrel-cage Induction Motor with Space Harmonics. Part 1: Equations Developed by a New Time-dependent Transformation. Part 2: The Influence of Space Harmonics on the Transient Behaviour., "Archiv für Elektrotechnik" 1984, z. 67, s. 217-236.

[14] Klima V.: Synchronni sedla asynchronnich motoru s klecovou kotvou. Vznik a zpusoby potlaceni, "Elektrotechnický Obzor" 1963, s. 475-485.

[15] Kluszczyński K.: Podstawy teoretyczne transformacji k-osiowej i jej zastosowanie do analizy rozgałęzionych obwodów elektromagnetycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Gliwice 1978, z. 61.

[16] Kluszczyński K.: Uogólnienie transformacji dwuosiowej i jej zastosowanie do analizy niesymetrycznych maszyn indukcyjnych, a w szczególności jednofazowego silnika z kondensatorem pracy o uzwojeniach stojana typu T. Politechnika Śląska, Gliwice 1978.

[17] Kluszczyński K.: Składowe aktywne i zerowe prądów w obwodach elektromagnetycznych. Mat. VIII Sympozjum nt. "Metody matematyczne w elektronice". Zeszyty Naukowe WSI, cz. 1, z. 8, Opole 1979.

[18] Kluszczyński K.: Składowe aktywne i zerowe prądów w obwodach elektromagnetycznych. "Rozprawy Elektrotechniczne" 1981, nr 27, z. 3, s. 697-712.

[19] Kluszczyński K.: Przestrzenie aktywne i zerowe macierzy indukcyjności w maszynach asynchronicznych przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego. Prace X Sympozjum nt. "Metody matematyczne w elektrotechnice", Karpacz 1981.

[20] Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Ogólna metoda obliczeń silników indukcyjnych jednofazowych z kondensatorem roboczym. "Przegląd Elektrotechniczny" 1984, nr 2.

[21] Kluszczyński K.: Model matematyczny wielofazowej maszyny asynchronicznej. Mat. XX Ogólnopolskiej Konferencji nt. "Maszyny Elektryczne". Sulejów, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Elektryka, Łódź 1983, z. 74.

[22] Kluszczyński K.: Topologiczna metoda wyznaczania bazy przestrzeni zerowej macierzy indukcyjności. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka, Gliwice 1984, z. 88.

[23] Kluszczyński K.: Harmoniczne przestrzenne przepływu w maszynach asynchronicznych. Mat. VII SPETO, Ustroń 1984 i Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Gliwice 1985, z. 95.

[24] Kluszczyński K.: Wpływ momentów pasożytniczych na rozruch indukcyjnego silnika klatkowego. Mat. VIII SPETO, Ustroń 1985 i Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka 1985, z. 98.

[25] Kluszczyński K.: Zagadnienie samosynchronizacji pasożytniczych momentów synchronicznych w maszynach indukcyjnych. Materiały Konferencji nt. "Metody matematyczne w technice". Zeszyty Naukowe WSI, Matematyka, Opole 1985, z. 9.

[26] Kwaśnicki S., Sala W.: Obliczanie synchronicznych momentów pasożytniczych w silniku indukcyjnym. Zeszyty Problemowe Branżowego Ośrodka Badawczo-Rozwojowego Maszyn Elektrycznych, Katowice 1983, nr 37.

[27] Liwschitz M.M.: Differential Leakage with Respect to the Fundamental Wave and to the Harmonics, "Transactions AIEE", 1944, s. 1139-1140.

[28] Liwschitz M.M.: Differential Leakage of a Fractional-slot Winding "Transactions AIEE", 1944, s. 1139-1140.

[29] Möller H.: Über die Drehmomente beim Anlauf von Drehstrommotoren mit Käfigankern, "Archiv für Elektrotechnik" 1930, s. 401-424.

[30] Mostowski A., Stark M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1965.

[31] Noga M.: Analizy awaryjne związane z wewnętrzną niesymetrią silników asynchronicznych. Zeszyty Naukowe AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Kraków 1975, z. 68.

[32] Nowomiejski Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Gliwice 1963, z. 15.

[33] Nowomiejski Z.: Uogólniona teoria mocy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Gliwice 1975, z. 46.

[34] Oberretl K.: Die Oberfeldtheorie des Käfigmotors unter Berücksichtigung der durch die Ankerrückwirkung verursachten Statoroberströme und der parallelen Wicklungszweige. "Archiv für Elektrotechnik", 1965, cz. 49, z. 6, s. 343-364.

[35] Oberretl K.: Über den Einfluss vvon parallelen Wicklungszweigen Dreieckschaltung, Spulensehnung, Nutschlitzbreite und Nutenschragung auf das Drehmoment von Käfiglaufermotoren "Elektrotechnische Zeitschrift-A" 1965, s. 619-627.

[36] Oberretl K.: Field-harmonic Theory of Slip-ring Motor Taking Multiple Armature Reaction into Account. "Proceedings IEE" 1970, nr 8, s. 1667-1674.

[37] Park R.H.: Two-reaction Theory of Synchronous Machines. "Transactions AIEE", 1933.

[38] Parusel P., Toma W.: Analiza momentów pasożytniczych w maszynach indukcyjnych na przykładzie 3-fazowego silnika Skf 63-2B. Politechnika Śląska, Gliwice 1983 (praca dyplomowa).

[39] Paszek W.: Stany nieustalone w maszynach elektrycznych. Część I: Maszyny asynchroniczne. Część II: Maszyny synchroniczne. Politechnika Śląska, Gliwice 1981.

[40] Paszek W.: Stany nieustalone maszyn elektrycznych prądu przemiennego. WNT, Warszawa 1986.

[41] Paszek W., Kudła J., Pawelec Z.: Badanie rozruchu i ponownego załączania silników indukcyjnych głębokożłobkowych w elektrodynamicznym stanie nieustalonym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Gliwice 1978, z. 61.

[42] Pawluk K., Bednarek S.: Rozruch i stany asynchroniczne silników synchronicznych. WNT, Warszawa 1968.

[43] Postnikow J.M.: Parazitnyje momienty i potieri ot wyszszich garmonik rieakcyj jakoria w asinchronnych dwigatielach s korotkozamknutim rotorom. "Elektriczestwo" 1963, nr 7, s. 39-40.

[44] Puchała A.: Formy liniowe i kwadratowe niesymetrycznych maszyn elektrycznych. Zeszyty Naukowe AGH, Rozprawy nr 27, Kraków 1964, nr 87.

[45] Puchała A.: Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych. WNT, Warszawa, 1977.

[46] Rawicki S.: Dynamiczny model trójfazowej maszyny indukcyjnej z wirnikiem pierścieniowym z uwzględnieniem wyższych harmonicznych rozkładu przestrzennego pola. "Archiwum Elektrotechniki" 1985, t. XXXII z. 3/4.

[47] Rusek J.: Drehmoment und Strom einer über stromeinprägenden Wechselrichter gespeisten Asynchronmaschine im stationären Betriebszustand. "Archiv für Elektrotechnik" 1984, z. 67, s. 151-160.

[48] Sieklucki K.: Geometria z elementami topologii i algebry liniowej. PWN, Warszawa 1974.

[49] Sobczyk T.: Analiza procesów stacjonarnych maszyn elektrycznych. Zeszyty Naukowe AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Kraków 1977, z. 97.

[50] Sobczyk T., Rusek J., Weinreb K.: Model matematyczny silnika asynchronicznego z wirnikiem klatkowym. Zeszyty Naukowe AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Kraków 1976, z. 71.

[51] Späth H.: Berechnung der Ströme und des Drehmoments von Drehstromasynchronmaschinen mit Käfigläufer im stationären Betrieb unter Berücksichtigung räumlicher Feldoberwellen. "Archiv für Elektrotechnik" 1975, z. 57, s. 165-172.

[52] Stein Z.: Zagadnienia stanów niesymetrycznych trójfazowych maszyn indukcyjnych. Politechnika Poznańska, Poznań 1976, Rozprawy nr 79.

[53] Stepina J.: Vevwertung der Raumzeiger bei den Problemen der Nutungsoberfelder in den Asynchronmaschinen. Acta Technica CSAV, 1967, nr 2, s. 171-186.

[54] Stepina J.: Space Vector Analysis of Synchronising Torques in Squirrel-cage Induction Motors. Acta Technica CSAV, 1967, nr 6, s. 685-701.

[55] Stepina J.: Raumzeiger in Matrizendarstellung in der Theorie der elektrischen Maschinen. "Archiv für Elektrotechnik" 1972, z. 55, s. 91-97.

[56] Śliwiński T., Głowacki A.: Parametry rozruchowe silników indukcyjnych. PWN, Warszawa 1982.

[57] Taegen F., Hommes E.: Das algemeine Gleichungssystem des Käfigläufermotors unter Berücksichtigung der Oberfelder. "Archiv für Elektrotechnik" 1972, z. 55, s. 21-31 (cz. 1), 98-105 (cz. 2).

[58] Taegen F., Hommes E.: Die Theorie des Käfigläufermotors unter Berücksichtigung der Ständer-und Läufernutung. "Archiv für Elektrotechnik" 1974, z. 56, s. 331-339.

[59] Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.

[60] Van der Merve F.S.: The Analysis of an Electric Machine with a Smooth Air-gap Allowing for All Winding MMF Harmonics. Cz. 1: The Basic Space Vector Component Machine Equations. Application of the Basic Equations to Steday-state and Transient Conditions. "Archiv für Elektrotechnik" 1976, z. 58, s. 283-303.

[61] Van der Merve F.S.: Reference Frames and Transformations for Rotating Machines with Smooth Air-gap and MMF Harmonics. "Archiv für Elektrotechnik" 1978, z. 60, s. 181-191.

[62] Van der Merve F.S.: The Basic Voltage and Torque Equations for Squirrel-cage Induction Motors Allowing for All MFF and Permeance Harmonics. "Archiv für Elektrotechnik" 1982, z. 64, s. 251-261.

[63] Wach P.: Niesymetrie wewnętrzne maszyn indukcyjnych. Zeszyty Naukowe WSI, Opole 1982, z. 19.

[64] Zembrzuski J.: Atlas uzwojeń silników asynchronicznych. WNT, Warszawa 1976.

DODATKI

D.1. Równania stanu elektrodynamicznego maszyny A

Układ równań różniczkowych indukcyjnego silnika klatkowego ($P_n \approx 0{,}25$ kW, $2p = 2$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 26$) przy uwzględnieniu harmonicznych przestrzennych przepływu $\vartheta = 1{,}25$ przyjmuje postać kanoniczną:

$$
\begin{aligned}
1)\quad \frac{d}{dt} i_{s1}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{ & -W_2 B R_s i_{s1}^{(k)} - 2(EM + DN)B R_s i_{s2}^{(k)} + \\
& + \left[W_2(E + N)R_r + w(EM + DN)(D + M)R_r\right] i_{r1}^{(k)} + \\
& + \left[2(EM + DN)(E - N)R_r - W_2(D - M)R_r\right] i_{r2}^{(k)} + \\
& + \Big\{2(EM + DN)\left[-(D + M)(D + S) - (E - N)(E - T)\right] + \\
& + W_2\left[(D - M)(E - T) - (E + N)(D + S)\right]\Big\}\omega i_{s1}^{(k)} + \\
& + \Big\{2(EM + DN)\left[(D + M)(E + T) - (E - N)(D - S)\right] + \\
& + W_2\left[(E + N)(E + T) + (D - M)(D - S)\right]\Big\}\omega i_{s2}^{(k)} + \\
& + \left[W_2 B(D + S) - 2(EM + DN)B(E + T)\right]\omega i_{r1}^{(k)} + \\
& + \left[W_2 B(E - T) + 2(EM + DN)B(D - S)\right]\omega i_{r2}^{(k)} + \\
& + W_2 B u_{s1}^{(k)} + 2(EM + DN(B u_{s2}^{(k)}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad \frac{d}{dt} i_{s2}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{ & -2(EM + DN)B R_s i_{s1}^{(k)} - B R_s W_1 i_{s2}^{(k)} + \\
& + \left[(D + M)R_r W_1 + 2(EM + DN)(E + N)R_r\right] i_{r1}^{(k)} + \\
& + \left[(E - N)R_r W_1 - 2(EM + DN)(D - M)R_r\right] i_{r2}^{(k)} + \\
& + \Big\{2(EM + DN)\left[(D - M)(E - T) - (E + N)(D + S)\right] + \\
& + W_1\left[-(D + M)(D + S) - (E - N)(E - T)\right]\Big\}\omega i_{s1}^{(k)} +
\end{aligned}
$$

$$+ \Big\{ 2(EM + DN)\Big[(E + N)(E + T) + (D - M)(D - S)\Big] +$$

$$+ W_1\Big[(D + M)(E + T) - (E - N)(D - S)\Big]\Big\} \omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \Big[2(EM + DN)B(D - S) - B\, W_1(E + T)\Big]\, \omega i_{r1}^{(k)} +$$

$$+ \Big[2(EM + DN)B(E - T) + B\, W_1(D - S)\Big]\, \omega i_{r2}^{(k)} +$$

$$+ 2(EM + DN)B\, u_{s1}^{(k)} + W_1\, B\, u_{s2}^{(k)}$$

$$3)\ \frac{d}{dt} i_{r1}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{\Big[(E + N)W_4\, R_s - 2(EM - DN)(D - M)R_s\Big]\, i_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \Big[(D + M)R_s\, W_4 + 2(EM - DN)(E - N)R_s\Big]\, i_{s2}^{(k)} -$$

$$- A\, R_r\, W_4\, i_{r1}^{(k)} - 2(EM - DN)\, A\, R_r\, i_{r2}^{(k)} +$$

$$+ \Big[A\, W_4(D + S) + 2(EM - DN)(E - T)A\Big]\, \omega i_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \Big[2(EM - DN)A(D - S) - (E + T)A\, W_4\Big]\, \omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \Big\{2(EM - DN)\Big[(D - M)(D + S) + (E - N)(E + T)\Big] +$$

$$+ W_4\Big[(D + M)(E + T) - (E + N)(D + S)\Big]\Big\} \omega i_{r1}^{(k)} +$$

$$+ \Big\{2(EM - DN)\Big[(D - M)(E - T) - (E - N)(D - S)\Big] +$$

$$+ W_4\Big[-(E + N)(E - T) - (D + M)(D - S)\Big]\Big\} \omega i_{r2}^{(k)} +$$

$$+ \Big[2(EM - DN)(D - M) - (E + N)W_4\Big]\, u_{s1}^{(k)} -$$

$$- \Big[2(EM - DN)(E - N) + (D + M)W_4\Big]\, u_{s2}^{(k)}\Big\}$$

$$4)\ \frac{d}{dt} i_{r2}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{\Big[2(EM - DN)(E + N)R_s - (D - M)R_s\, W_3\Big]\, i_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \Big[2(EM - DN)(D + M)R_s + (E - N)W_3\, R_s\Big]\, i_{s2}^{(k)} -$$

$$- 2(EM - DN)A\, R_r\, i_{r1}^{(k)} - A\, W_3\, R_r\, i_{r2}^{(k)} +$$

$$+ \Big[2(EM - DN)(D + S)L_1 + (E - T)W_3\, L_1\Big]\, \omega i_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \Big[A(D - S)W_3 - 2(EM - DN)A(E + T)\Big]\, \omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \Big\{2(EM - DN)\Big[(D + M)(E + T) - (E + N)(D + S)\Big] +$$

$$+ W_3\Big[(D - M)(D - S) + (E - N)(E + T)\Big]\Big\} \omega i_{r1}^{(k)} +$$

$$+ \Big\{2(EM - DN)\Big[-(E + N)(E - T) - (D + M)(D - S)\Big] +$$

$$+ W_3\Big[(D - M)(E - T) - (E - N)(D - S)\Big]\Big\} \omega i_{r2}^{(k)} +$$

$$+ \Big[(D - M)W_3 - 2(EM - DN)(E + N)u_{s1}^{(k)} -$$

$$- \Big[(E - N)W_3 + 2(EM - DN)(D + M)\Big]\, u_{s2}^{(k)}\Big\}$$

$$5)\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}\Big\{\Big[-(D + S)i_{s1}^{(k)} + (E + T)i_{s2}^{(k)}\Big]i_{r1}^{(k)} +$$

$$+ \Big[(T - E)i_{s1}^{(k)} + (S - D)i_{s2}^{(k)}\Big]i_{r2}^{(k)} - M_o\Big\}$$

gdzie:

$$\varphi = \int_0^t \omega dt + \varphi_o$$

$$u_{s1}^{(k)} = \sqrt{3}\, 220 \cos(100\pi t + \alpha_o)$$

$$u_{s2}^{(k)} = \sqrt{3}\, 220 \sin(100\pi t + \alpha_o)$$

$$R_r = (R_o - 2R_{pr} \cos\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$L_{\sigma r} = (L_{\sigma o} - 2\, L_{\sigma pr} \cos\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$A = L_{\sigma s} + \sum_{\vartheta} L_{s\vartheta} \quad \text{dla } \vartheta = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$

$$B = L_{\sigma r} + \sum_{\vartheta} \frac{26}{3}\left(\frac{\xi_r}{\xi_s}\right)^2 \quad \text{dla } \vartheta = 27, 51, 53, 77, 79, \ldots$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{26}{3}}\ \frac{\xi_{r1}\xi_{\varkappa 1}}{\xi_{s1}}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{26}{3}}\ \frac{\xi_{r25}\xi_{\varkappa 25}}{\xi_{s25}}$$

$$D = C_1 L_{s1} \sin\varphi$$

$$E = C_1 L_{s1} \cos\varphi$$

$$M = C_2 L_{s25} \sin 25\varphi$$

$$N = C_2 L_{s25} \cos 25\varphi$$

$$S = 25 C_2 L_{s25} \sin 25\varphi$$

$$T = 25 C_2 L_{s25} \cos 25\varphi$$

$$W = W_1 W_2 - 4(EM + DN)^2 = W_3 W_4 - 4(EM - DN)^2$$

$$W_1 = AB - \left[(E + N)^2 + (D - M)^2\right]$$

$$W_2 = AB - \left[(D + M)^2 + (E - N)^2\right]$$

$$W_3 = AB - \left[(E + N)^2 + (D + M)^2\right]$$

$$W_4 = AB - \left[(D - M)^2 + (E - N)^2\right]$$

D.2. <u>Równania stanu elektrodynamicznego maszyny B</u>

Układ równań różniczkowych indukcyjnego silnika klatkowego B ($P_n \approx 3$ kW, $2p = 4$, $Z_1 = 36$, $Z_2 = 40$) przy uwzględnieniu harmonicznych przestrzennych $\vartheta = 2{,}38$ ($\vartheta' = 1{,}19$) przyjmuje postać kanoniczną:

$$1)\ \frac{d}{dt} i_{s1}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{- W_2 B u_{s1}^{(k)} + 2(EM + DN)B u_{s2}^{(k)} - W_2 B R_s i_{s1}^{(k)} - 2(EM + DN)B R_s i_{s2}^{(k)} + \left[W_2(E + N)R_r + 2(EM + DN)(D + M)R_r\right] i_{r3}^{(k)} + \left[- W_2(D - M)R_r + 2(EM + DN)(E - N)R_r\right] i_{r4}^{(k)} + \left[W_2 K_1 + 2(EM + DN)K_2\right]\omega i_{s1}^{(k)} + \left[W_2 K_3 + 2(EM + DN)K_4\right]\omega i_{s2}^{(k)} + \left[W_2 B(F + S) - 2(EM + DN)B(G + T)\right]\omega i_{r3}^{(k)} + \left[W_2 B(G - T) + 2(EM + DN)B(F - S)\right]\omega i_{r4}^{(k)}\Big\}$$

$$2)\ \frac{d}{dt} i_{s2}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{2(EM + DN)B u_{s1}^{(k)} + B W_1 u_{s2}^{(k)} - 2(EM + DN)B R_s i_{s1}^{(k)} - B R_s W_1 i_{s2}^{(k)} + \left[(D+M)R_r W_1 + 2(EM + DN)(E+N)R_r\right] i_{r3}^{(k)} + \left[(E-N)R_r W_1 - (D-M)R_r 2(EM + DN)\right] i_{r4}^{(k)} + \left[W_1 K_2 + 2(EM + DN)K_1\right]\omega i_{s1}^{(k)} + \left[W_1 K_4 + 2(EM+DN)K_3\right]\omega i_{s2}^{(k)} + \left[2(EM + DN)B(F + S) - B W_3(G + T)\right]\omega i_{r3}^{(k)} + \left[B(F - S)W_1 + 2(EM + DN)B(G - T)\right]\omega i_{r4}^{(k)}\Big\}$$

$$3)\ \frac{d}{dt} i_{r3}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{- W_4 \left[(E + N)u_{s1}^{(k)} + (D + M)u_{s2}^{(k)}\right] + 2(EM - DN)\left[(D - M)u_{s1}^{(k)} (E - N)u_{s2}^{(k)}\right] + \left[W_4(E + N)R_s - 2(EM - DN)(D - M)R_s\right] i_{s1}^{(k)} + \left[(D + M)R_s W_4 + 2(EM - DN)(E - N)R_s\right] i_{s2}^{(k)} - A R_r W_4 i_{r3}^{(k)} - 2(EM - DN)A R_r i_{r4}^{(k)} + \left[2(EM - DN)A(F - S) - A(G + T)W_4\right]\omega i_{s2}^{(k)} + \left[W_4 K_5 + 2(EM - DN)K_6\right]\omega i_{r3}^{(k)} + \left[W_4 K_7 + 2(EM - DN)K_8\right]\omega i_{r4}^{(k)}\Big\}$$

$$4)\ \frac{d}{dt} i_{r4}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{W_3 \left[(D - M)u_{s1}^{(k)} - (E - N)u_{s2}^{(k)}\right] + 2(EM - DN)\left[(N - E)u_{s1}^{(k)} - (D + M)u_{s2}^{(k)}\right] + \left[2(EM - DN)(E + N)R_s - (D - M)R_s W_3\right] i_{s1}^{(k)} + \left[W_3(E - N)R_s + 2(EN - DN)(D + M)R_s\right] i_{s2}^{(k)} - 2(EM - DN)A R_r i_{r3}^{(k)} - W_3 A R_r i_{r4}^{(k)} + \left[W_3(G - T)A + 2(EM - DN)(F + S)A\right]\omega i_{s1}^{(k)} + \left[W_3(F - S)A - 2(EM - DN)(G + T)A\right]\omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_3 K_6 + 2(EM - DN)K_3\right] \omega i_{r3}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_3 K_8 + 2(EM - DN)K_7\right] \omega i_{r4}^{(k)}$$

5) $$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}\left\{ -(F + S)i_{s1}^{(k)} + (G + T)i_{s2}^{(k)} \right\} i_{r3}^{(k)} + \left\{ (T-G)i_{s1}^{(k)} + (S-F)i_{s2}^{(k)} \right\} i_{r4}^{(k)} - M_o$$

gdzie:

$$\varphi = \int_0^t \omega\, dt + \varphi_o$$

$$u_{s1}^{(k)} = \sqrt{3}\, 220 \cos(100\pi t + \alpha_o)$$

$$u_{s2}^{(k)} = \sqrt{3}\, 220 \sin(100\pi t + \alpha_o)$$

$$R_r = (R_o - 2 R_{pr} \cos 2\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$L_{\sigma r} = (L_{\sigma o} - 2 L_{\sigma pr} \cos 2\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$A = L_{\sigma s} + \sum_{\vartheta} L_{s\vartheta} \qquad \text{dla } \vartheta = 10, 14, 22, 26, 34, 46, 58, 62, \ldots$$

$$B = L_{\sigma r} + \sum_{\vartheta} \frac{40}{3} \left(\frac{\xi_{r\vartheta}}{\xi_{s\vartheta}}\right)^2 L_{s\vartheta} \quad \text{dla } \vartheta = 42, 78, 82, \ldots$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{40}{3}}\, \frac{\xi_{r2}\, \xi_{\varkappa 2}}{\xi_{s2}}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{40}{3}}\, \frac{\xi_{r38}\, \xi_{\varkappa 38}}{\xi_{s38}}$$

$$D = C_1 L_{s2} \sin 2\varphi$$

$$E = C_1 L_{s2} \cos 2\varphi$$

$$F = 2C_1 L_{s2} \sin 2\varphi$$

$$G = 2C_1 L_{s2} \cos 2\varphi$$

$$M = C_2 L_{s38} \sin 38\varphi$$

$$N = C_2 L_{s38} \cos 38\varphi$$

$$S = 38\, C_2 L_{s38} \sin 38\varphi$$

$$T = 38\, C_2 L_{s38} \cos 38\varphi$$

$$W_1 = AB - D^2 - E^2 - M^2 - N^2 - 2(EN - DM)$$

$$W_2 = AB - D^2 - E^2 - M^2 - N^2 + 2(EN - DM)$$

$$W_3 = AB - D^2 - E^2 - M^2 - N^2 + 2(DM + EN)$$

$$W_4 = AB - D^2 - E^2 - M^2 - N^2 - 2(DM + EN)$$

$$K_1 = (D - M)(G - T) - (E + N)(F + S)$$

$$K_2 = -(D + M)(F + S) - (E - N)(G - T)$$

$$K_3 = (E + N)(G + T) + (D - M)(F - S)$$

$$K_4 = (D + M)(G + T) - (E - N)(F - S)$$

$$K_5 = (D + M)(G + T) - (E + N)(F + S)$$

$$K_6 = (D - M)(F + S) + (E - N)(G + T)$$

$$K_7 = -(E + N)(G - T) - (D + M)(F - S)$$

$$K_8 = (D - M)(G - T) - (E - N)(F - S)$$

$$W = W_1 W_2 - 4(EM + DN)^2 = W_3 W_4 - 4(EM - DN)^2$$

D.3. <u>Równania stanu elektrodynamicznego maszyny C</u>

Układ równań różniczkowych indukcyjnego silnika klatkowego C ($P_n \approx 3$ kW, $2p = 4$, $z_1 = 36$, $z_2 = 36$) przy uwzględnieniu harmonicznych przestrzennych $\vartheta = 2, 34, 38$ ($\vartheta' = 1, 17, 19$) przyjmuje postać kanoniczną:

1) $$\frac{d}{dt} i_{s1}^{(k)} = \frac{1}{W_1}\Big[B u_{s1}^{(k)} - R_s B i_{s1}^{(k)} + (E + N + I)R_r i_{r3}^{(k)} - (D - M + H)R_r i_{r4}^{(k)} + K_1 \omega i_{s1}^{(k)} + K_2 \omega i_{s2}^{(k)} + B(G + S + Q)\omega i_{r3}^{(k)} + B(F - T + P)\omega i_{r4}^{(k)}\Big]$$

2) $$\frac{d}{dt} i_{s2}^{(k)} = \frac{1}{W_1}\Big[B u_{s2}^{(k)} - R_s B i_{s2}^{(k)} + (D - M + H)R_r i_{r3}^{(k)} + (E + N + I)R_r i_{r4}^{(k)} - K_2 \omega i_{s1}^{(k)} + K_1 \omega i_{s2}^{(k)} - B(F - T + P)\omega i_{r3}^{(k)} + B(G + S + Q)\omega i_{r4}^{(k)}\Big]$$

$$3)\quad \frac{d}{dt} i_{r3}^{(k)} = \frac{1}{W_1}\Big[-(E+N+I)u_{s1}^{(k)} - (D-M+H)u_{s2}^{(k)} + (E+N+I)R_s\, i_{s1}^{(k)} +$$
$$+ (D-M+H)R_s\, i_{s2}^{(k)} - A\, R_r\, i_{r3}^{(k)} +$$
$$+ (G+S+Q)A\omega i_{s1}^{(k)} + (F-T+P)A\omega i_{s2}^{(k)} +$$
$$+ K_1\omega i_{r3}^{(k)} - K_2\omega i_{r4}^{(k)}\Big]$$

$$4)\quad \frac{d}{dt} i_{r4}^{(k)} = \frac{1}{W_1}\Big[(D-M+H)u_{s1}^{(k)} - (E+N+I)u_{s2}^{(k)} -$$
$$- (D-M+H)R_s\, i_{s1}^{(k)} + (E+N+I)R_s\, i_{s2}^{(k)} - A\, R_r\, i_{r4}^{(k)} +$$
$$+ (F-T+P)A\omega i_{s1}^{(k)} + (G+S+Q)A\omega i_{s2}^{(k)} +$$
$$+ K_2\omega i_{r3}^{(k)} + K_1\omega i_{r4}^{(k)}\Big]$$

$$5)\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}\Big\{\Big[(-G-S-Q)\, i_{s1}^{(k)} + (F+T+P)i_{s2}^{(k)}\Big]\, i_{r3}^{(k)} +$$
$$+ \Big[(-F+T-P)i_{s1}^{(k)} + (-G-S-Q)i_{s2}^{(k)}\Big]\, i_{r4}^{(k)} - M_o\Big\}$$

gdzie:

$$\varphi = \int_0^t \omega dt + \varphi_o$$

$$u_{s1}^{(k)} = \sqrt{3}\, 220 \cos(100\pi t + \alpha_o)$$

$$u_{s2}^{(k)} = \sqrt{3}\, 220 \sin(100\pi t + \alpha_o)$$

$$R_r = (R_o - 2R_{pr}\cos 2\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$L_{\sigma r} = (L_{\sigma o} - 2L_{\sigma pr}\cos 2\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$A = L_{\sigma s} + \sum_{\vartheta} L_{s\vartheta} \quad \text{dla} \quad \vartheta = 10, 14, 22, 26, 46, 58, 62, \ldots$$

$$B = L_{\sigma r} + \sum_{\vartheta} \frac{36}{3}\left(\frac{\xi_{r\vartheta}}{\xi_{s\vartheta}}\right)^2 L_{s\vartheta} \quad \text{dla} \quad \vartheta = 70, 74, 106, 110, \ldots$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{36}{3}}\, \frac{\xi_{r2}\xi_{\varkappa 2}}{\xi_{s2}}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{36}{3}}\, \frac{\xi_{r34}\xi_{\varkappa 34}}{\xi_{s34}}$$

$$C_3 = \sqrt{\frac{36}{3}}\, \frac{\xi_{r38}\xi_{\varkappa 38}}{\xi_{s38}}$$

$$D = C_1\, L_{s2} \sin 2\varphi$$

$$E = C_1\, L_{s2} \cos 2\varphi$$

$$F = 2C_1\, L_{s2} \cos 2\varphi$$

$$G = 2C_1\, L_{s2} \sin 2\varphi$$

$$M = C_2\, L_{s34} \sin 34\varphi$$

$$N = C_2\, L_{s34} \cos 34\varphi$$

$$T = 34\, C_2\, L_{s34} \cos 34\varphi$$

$$S = 34\, C_2\, L_{s34} \sin 34\varphi$$

$$H = C_3\, L_{s38} \sin 38\varphi$$

$$I = C_3\, L_{s38} \cos 38\varphi$$

$$P = 38\, C_3\, L_{s38} \cos 38\varphi$$

$$Q = 38\, C_3\, L_{s38} \sin 38\varphi$$

$$W_1 = AB - E^2 - N^2 - I^2 - D^2 - M^2 - H^2 - 2(EN + EI + NI + DH - DM - MH)$$

$$K_1 = -\Big[(E+N+I)(G+S+Q) - (D-M+H)(F-T+P)\Big]$$

$$K_2 = \Big[(E+N+I)(F-T+P) + (D-M+H)(G+S+Q)\Big]$$

D.4. Równania stanu elektrodynamicznego maszyny D

Układ równań różniczkowych indukcyjnego silnika klatkowego D ($P_n \approx 3$ kW, $2p = 4$, $Z_1 = 36$, $Z_2 = 32$) przy uwzględnieniu harmonicznych przestrzennych $\vartheta = 2, 34$ ($\vartheta' = 1, 17$) przyjmuje postać kanoniczną:

$$1)\quad \frac{d}{dt} i_{s1}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{W_2\, B\, u_{s1}^{(k)} + 2(DN - EM)B\, u_{s2}^{(k)} - W_2\, B\, R_s\, i_{s1}^{(k)} +$$
$$+ 2(DN - EM)B\, R_s\, i_{s2}^{(k)} + \Big[W_2(E+N) + 2(DN - EM)(D - M)\Big]R_r i_{r3}^{(k)} +$$
$$+ \Big[2(DN - EM)(E - N) - W_2(D + M)\Big]R_r\, i_{r4}^{(k)} +$$

$$+ \left[K_1 W_2 + 2(DN-EM)K_2\right] \omega i_{s1}^{(k)} + \left[W_2 K_3 + 2(DN-EM)K_4\right] \omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_2(2D+S) - 2(DN-EM)(2E-T)\right] B\omega i_{r3}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_2(2E+T) + 2(DN-EM)(2D-S)\right] B\omega i_{r4}^{(k)}\Big\}$$

$$2)\ \frac{d}{dt} i_{s2}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{2(DN-EM)B\, u_{s1}^{(k)} + W_1 B\, u_{s2}^{(k)} - 2(DN-EM)B R_s i_{s1}^{(k)} -$$

$$- W_1 B R_s i_{s2}^{(k)} + \left[W_1(D-M) + 2(DN-EM)(E+N)\right] R_r i_{r3}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_1(E-N) - 2(DN-EM)(E+M)\right] R_r i_{r4}^{(k)} +$$

$$+ \left[2(DN-EM)K_1 + W_1 K_2\right]\omega i_{s1}^{(k)} + \left[2(DN-EM)K_3 + W_1 K_4\right] \omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \left[2(DN-EM)(2D+S) - W_1(2E-T)\right] B\omega i_{r3}^{(k)} +$$

$$+ \left[2(DN-EM)(2E+T) + W_1(2D-S)\right] B\omega i_{r4}^{(k)}\Big\}$$

$$3)\ \frac{d}{dt} i_{r3}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{-\left[W_4(E+N) + 2(DN+EM)(D+M)\right] u_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \left[2(DN+EM)(E-N) - W_4(D-M)\right] u_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_4(E+N) + 2(DN+EM)(D+M)\right] R_s i_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_4(D-M) - 2(DN+EM)(E-N)\right] R_s i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ W_4 A R_r i_{r3}^{(k)} + 2(DN+EM)A R_r i_{r4}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_4(2D+S) - 2(DN+EM)(2E+T)\right] A\omega i_{s1}^{(k)} -$$

$$- \left[W_4(2E-T) + 2(DN+EM)(2D-S)\right] A\omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_4 K_5 - 2(DN+EM)K_6\right] \omega i_{r3}^{(k)} + \left[W_4 K_7 - 2(DN+EM)K_8\right] \omega i_{r4}^{(k)}\Big\}$$

$$4)\ \frac{d}{dt} i_{r4}^{(k)} = \frac{1}{W}\Big\{\left[W_3(D+M) + 2(DN+EM)(E+N)\right] u_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \left[-W_3(F-N) + 2(DN+EM)(D-M)\right] u_{s2}^{(k)} -$$

$$- \left[W_3(D+M) + 2(DN+EM)(E+N)\right] R_s i_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_3(E-N) - 2(DN+EM)(D-M)\right] R_s i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ 2(DN+EM)A R_r i_{r3}^{(k)} - W_3 A R_r i_{r4}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_3(2E+T) - 2(DN+EM)(2D+S)\right] A\omega i_{s1}^{(k)} +$$

$$+ \left[W_3(2D-S) + 2(DN+EM)(2E-T)\right] A\omega i_{s2}^{(k)} +$$

$$+ \left[-2(DN+EM)K_5 + W_3 K_6\right] \omega i_{r3}^{(k)} +$$

$$+ \left[-2(DN+EM)K_7 + W_3 K_8\right] \omega i_{r4}^{(k)}\Big\}$$

$$5)\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}\Big\{\left[-(2D+S)i_{s1}^{(k)} + (2E-T)i_{s2}^{(k)}\right] i_{r3}^{(k)} +$$

$$+ \left[-2E+T)i_{s1}^{(k)} + (-2D+S)i_{s2}^{(k)}\right] i_{r4}^{(k)} - M_o\Big\}$$

gdzie:

$$\varphi = \int_0^t \omega dt + \varphi_o$$

$$u_{s1}^{(k)} = \sqrt{3}\ 220 \cos(100\pi t + \alpha_o)$$

$$u_{s2}^{(k)} = \sqrt{3}\ 220 \sin(100\pi t + \alpha_o)$$

$$R_r = (R_o - 2R_{pr} \cos 2\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$L_{\sigma r} = (L_{\sigma o} - 2L_{\sigma pr} \cos 2\alpha_r)\left(\frac{z_s}{z_r}\right)^2$$

$$A = L_{\sigma s} + \sum_{\vartheta} L_{s\vartheta} \quad \text{dla } \vartheta = 10, 14, 22, 26, 38, 46, 50, 58, \ldots$$

$$B = L_{\sigma r} + \sum_{\vartheta} \frac{32}{3}\left(\frac{\xi_{r\vartheta}}{\xi_{s\vartheta}}\right)^2 L_{s\vartheta} \quad \text{dla } \vartheta = 30, 62, 66, 94, 98, \ldots$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{32}{3}}\ \frac{\xi_{r2}\xi_{x2}}{\xi_{s2}}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{32}{3}}\ \frac{\xi_{r34}\xi_{x34}}{\xi_{s34}}$$

$$D = C_1 L_{s2} \sin 2\varphi$$

$$E = C_1 L_{s2} \cos 2\varphi$$

$$M = C_2 L_{s34} \sin 34\varphi$$

$$N = C_2 L_{s34} \cos 34\varphi$$

$$S = 34\, C_2 L_{s34} \sin 34\varphi$$

$$T = 34\, C_2 L_{s34} \cos 34\varphi$$

$$W_1 = AB - (D^2 + E^2 + M^2 + N^2) - 2(DM + EN)$$

$$W_2 = AB - (D^2 + E^2 + M^2 + N^2) + 2(DM + EN)$$

$$W_3 = AB - (D^2 + E^2 + M^2 + N^2) + 2(DM - EN)$$

$$W_4 = AB - (D^2 + E^2 + M^2 + N^2) - 2(DM - EN)$$

$$W = W_1 W_2 - 4(DN - EM)^2 = W_3 W_4 - 4(DN - EM)^2$$

$$K_1 = (D + M)(2E + T) - (E + N)(2D + S)$$

$$K_2 = -\left[(D - M)(2D + S) + (E - N)(2E + T)\right]$$

$$K_3 = (D + M)(2D - S) + (E + N)(2E - T)$$

$$K_4 = (D - M)(2E - T) - (E - N)(2D - S)$$

$$K_5 = (D - M)(2E - T) - (E + N)(2D + S)$$

$$K_6 = (D + M((2D + S) + (E - N)(2E - T)$$

$$K_7 = -\left[(D - M)(2D - S) + (E + N)(2E + T)\right]$$

$$K_8 = (D + M)(2E + T) - (E - N)(2D - S)$$

MOMENTY PASOŻYTNICZE W MASZYNACH ASYNCHRONICZNYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono model matematyczny wielofazowej maszyny asynchronicznej, uwzględniający harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojeń stojana i wirnika. Modelowi matematycznemu maszyny we współrzędnych osiowych odpowiadają w interpretacji fizycznej ciągi 2- i 1-fazowych elektrycznie i mechanicznie sprzężonych maszyn elementarnych. Taki model, ujęty w uproszczoną formę tablicy, nazwano schematem rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne. Schematy rozkładu pozwalają na graficzne przedstawienie mechanizmów powstawania pasożytniczych momentów asynchronicznych i synchronicznych przy uwzględnieniu reakcji wielokrotnej uzwojeń stojana i wirnika, a znajomość tych mechanizmów - na dalszą analizę momentów pasożytniczych bez potrzeby uprzedniego rozwiązywania równań; wskazują na harmoniczne przestrzenne i współrzędne uczestniczące w powstawaniu poszczególnych składowych momentu, pozwalają szacować wartości względne i wyodrębniać momenty o znaczeniu dominującym, a w stosunku do pasożytniczych momentów synchronicznych umożliwiają określenie prędkości synchronicznej i okresu charakterystyki kątowej.

Na przykładzie 3-fazowej maszyny klatkowej omówiono sposób posługiwania się schematami rozkładu przy doborze liczby żłobków w maszynach asynchronicznych.

Ze schematami rozkładu wiąże się uproszczona forma zapisu równań maszyny, tak zwana notacja schematyczna. Opierając się na niej rozwiązano zagadnienie rozsprzęgania się układu równań różniczkowych na równania dla poszczególnych współrzędnych oraz dla poszczególnych harmonicznych przestrzennych, zagadnienie redukcji współrzędnych oraz dokonano uogólnienia indukcyjności rozproszenia różnicowego dla maszyn o dowolnej liczbie faz stojana i wirnika.

Schematy rozkładu maszyny oraz notacja schematyczna są przydatne w badaniach symulacyjnych na maszynach matematycznych, pozwalając na łatwe i szybkie formułowanie równań maszyny (o z góry założonych własnościach w zakresie zjawisk związanych z wyższymi harmonicznymi przestrzennymi) oraz na optymalizację modelu matematycznego maszyny z punktu widzenia ETO.

Przeanalizowano wpływ wyższych harmonicznych przestrzennych na rozruch silnika indukcyjnego, a w szczególności zjawisko samosynchronizacji pod wpływem momentów pasożytniczych. Uwypuklono kluczowe znaczenie kąta początkowego położenia wirnika.

Wykazano, że model matematyczny maszyny asynchronicznej we współrzędnych osiowych, schemat rozkładu maszyny na maszyny elementarne oraz notacja schematyczna równań pozwalają ująć całokształt zagadnień i zjawisk

związanych z wyższymi harmonicznymi przestrzennymi przepływu, a zwłaszcza z momentami pasożytniczymi, stwarzają możliwość uogólnienia i rozszerzenia tradycyjnych metod analizy, a jednocześnie umożliwiają posługiwanie się metodami ETO.

ПАРАЗИТНЫЕ МОМЕНТЫ В АСИНХРОННЫХ МАШИНАХ

Р е з ю м е

В работе представлена математическая модель многофазной асинхронной машины, учитывающая пространственные гармоники магнитодвижущей силы обмоток статора и ротора. Математической модели машины в осевых координатах соответствуют в физической интерпретации ряды 2- и 1-фазных электрически и механической сопряженных машин. Эту модель, представленную в виде упрощенной таблицы, названо схемой разложения многофазной машины на элементарные машины. Схемы разложения позволяют графически представить механизмы образования паразитных асинхронных и синхронных моментов с учетом многократного взаимодействия обмоток статора и ротора, а знание этих механизмов дает возможность дальнейшего анализа паразитных моментов без необходимости предварительного решения уравнений. Эти схемы указывают пространственные гармоники и координаты, участвующие в возникновении отдельных составляющих момента, позволяют оценить относительные значения и выделить доминирующие моменты, а по отношению к паразитным синхронным моментам делают возможным определение синхронной скорости и периода угловой характеристики.

На примере трехфазной короткозамкнутой машины представлен метод использования схем разложения при выборе количества пазов в синхронных машинах.

Со схемами разложения связана упрощенная форма записи уравнений машины, так называемая схематическая нотация, при помощи которой решен вопрос распределения системы дифференциальных уравнений на уравнения для отдельных координат и для отдельных пространственных гармоник, вопрос редукции координат, а также сделано обобщение индуктивности дифференциального рассеяния для машин с произвольным количеством фаз статора и ротора.

Схемы разложения машины и схематическая нотация пригодны для исследований на вычислительных машинах и дают возможность легко и быстро составлять уравнения машины (с заранее заданными свойствами в области явлений, связанных с высшими пространственными гармониками) создавать оптимальные математические модели машины с точки зрения ЭВМ.

В работе проанализировано влияние высших гармоник на пуск асинхронного двигателя, особенно явление самосинхронизации паразитных моментов, подчеркнуто важное значение начального угла положения ротора. Показано, что математическая модель асинхронной машины в осевых координатах, схема разложения машины на элементарные машины и схематическая нотация позволяют охватить все вопросы и явления, связанные с высшими пространственными гармониками магнитодвижущей силы, особенно с паразитными моментами, создают возможность

обобщения и расширения традиционных методов анализа, а одновременно делают возможным пользование современными методами ЭВМ.

PARASITIC TORQUES IN ASYNCHRONOUS MACHINES

S u m m a r y

In the paper the mathematical model of the polyphase asynchronous machine with all MFF space harmonics is derived. In axis coordinates the machine can be imagined as series of mutually electrically and mechanically coupled 2- and 1-phase elementary machines. The model expressed in simplified tabula form is called the diagram of the decomposition of a polyphase machine into elementary machines. Basing on the diagram both asynchronous and synchronous parasitic torques arising in the motor can be easily found. Moreover, the principles of the generation of torques can be shown on the diagram in a form of so-called paths which give a lot of detailed information about parasitic torques.

A method of the choice of the number of slots based on the diagrams of the decomposition is described e.g. 3-phase squirrel-cage motor.

According to the diagrams the matrix equations of a machine can be written in simplified form of so-called schematic notation. Such schematic notation leads to solutions of series of problems concerning the separation of coordinates and space harmonics, the reduction of coordinates, the generalization of a differential leakage inductance etc. in a polyphase induction machines.

The diagrams and the schematic notation are very convenient in computer simulations and enable the optimization of the mathematical model from such point of new.

To illustrate the influence of space harmonics on the dynamic behaviour of the motor, the starting characteristics are derived on a digital computer for the various initial positions of a rotor.

The numerical solutions are presented for the cases when the induction motor slips to normal speed or when parasitic synchronous torques synchronize the motor.

The mathematical model of asynchronous machine in axis coordinates, the diagrams of the decompositions and the schematic notation make it possible to study all the problems concerning parasitic torques using both the conventional methods as well as modern computer methods.

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.