P 3349/84

ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

KAZIMIERZ KURPISZ

WYZNACZANIE POLA TEMPERATURY W CIAŁACH STAŁYCH NA PODSTAWIE OBSERWACJI TEMPERATURY LUB GĘSTOŚCI STRUMIENIA CIEPŁA W WYBRANYCH PUNKTACH CIAŁA

ENERGETYKA

Z. 84
GLIWICE
1984

P 3349/84

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 783

KAZIMIERZ KURPISZ

WYZNACZANIE POLA TEMPERATURY W CIAŁACH STAŁYCH NA PODSTAWIE OBSERWACJI TEMPERATURY LUB GĘSTOŚCI STRUMIENIA CIEPŁA W WYBRANYCH PUNKTACH CIAŁA

GLIWICE 1984

OPINIODAWCY

Prof. dr inż. Jan Szargut

Prof. dr hab. inż. Stefan Wiśniewski

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), *Gerard Kosman* (redaktor działu),
Elżbieta Stinzing (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Roma Łoś

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0372-9796

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+85 Ark. wyd. 7,4 Ark druk. 7,875 Papier offset. kl. III. 70x100, 70 g
Oddano do druku 11.11.83 Podpis.do druku 3.01.84 Druk ukończ. w lutym 1984
Zam 1684|83 Z-23 Cena zł 74.—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

Wykaz ważniejszych oznaczeń 5

1. WSTĘP, CEL I ZAKRES PRACY 7

2. PRZEGLĄD LITERATURY 10

3. TERMICZNA ODPOWIEDŹ UKŁADU 13

4. OGÓLNY OPIS ZASTOSOWANEJ W PRACY METODY ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW ODWROTNYCH 16

5. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA 19
   5.1. Sformułowanie zagadnienia 19
   5.2. Rozwiązanie ogólne zagadnienia 20
   5.3. Jednowymiarowe pole niesymetryczne - dane przebiegi temperatury 22
   5.4. Jednowymiarowe pole niesymetryczne - dane przebiegi gęstości strumienia ciepła 24
   5.5. Jednowymiarowe pole niesymetryczne - warunki mieszane 25
   5.6. Jednowymiarowe pole symetryczne 27
   5.7. Pole dwuwymiarowe na przykładzie symetrycznej płyty 28
   5.8. Uwagi o rozwiązywaniu problemów nieliniowych 36

6. ROZWIĄZANIE ZADAŃ NIEUSTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA, SFORMUŁOWANYCH NUMERYCZNIE 37
   6.1. Jednowymiarowe pole nieustalone - problem ekstrapolacji rozwiązania 37
   6.2. Jednowymiarowe pole nieustalone - problem wewnętrzny 43
   6.3. Nieustalone pole dwuwymiarowe 45

7. USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA 51
   7.1. Sformułowanie zagadnienia 51
   7.2. Rozwiązanie ogólne zagadnienia 51
   7.3. Ustalone pole niesymetryczne - dane rozkłady temperatury 54
   7.4. Ustalone pole niesymetryczne - warunki mieszane 56
   7.5. Ustalone pole dwuwymiarowe symetryczne względem osi Y 57
   7.6. Uwagi o przypadkach, dla których elementy macierzy C nie są stałe 58
   7.7. Rozwiązywanie zadań ustalonego przewodzenia ciepła sformułowanych numerycznie 60
   7.8. Wyznaczanie przebiegu izoterm w trzonie wielkiego pieca jako rozwiązania zadania odwrotnego 60

Str.

8. UWAGI O PROBLEMACH OBLICZENIOWYCH 64

8.1. Obliczanie pochodnych termicznej odpowiedzi układu 64

8.1.1. Wykorzystanie wielomianów algebraicznych 64

8.1.2. Wykorzystanie funkcji sklejanych 67

8.1.3. Różniczkowanie funkcji przez rozwiązywanie równania całkowego 72

8.2. Całkowanie termicznej odpowiedzi układu 75

9. ZASTOSOWANIE RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNYCH ZADAŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA 77

10. WYNIKI OBLICZEŃ I WNIOSKI 84

10.1. Obliczenia liczbowe 84

10.2. Przykłady oparte na wynikach eksperymentu 99

10.3. Wnioski 102

11. UWAGI KOŃCOWE 105

12. LITERATURA 108

Dodatek A: Sprawdzenie warunku (4.6) dla zadania nieustalonego przewodzenia ciepła 110

Dodatek B: Sprawdzenie możliwości ekstrapolacji rozwiązania jednowymiarowego nieustalonego przewodzenia ciepła..... 112

Dodatek C: Sprawdzenie warunku (4.6) dla zadań nieustalonych sformułowanych numerycznie 115

Dodatek D: Sprawdzenie warunku (4.6) dla ustalonego pola dwuwymiarowego 122

STRESZCZENIA 124

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

a	- współczynnik wyrównywania temperatury
$Bi = \frac{\alpha l_o}{\lambda}$	- liczba Biota
$Fo = \frac{a\tau}{l_o^2}$	- liczba Fouriera
l_o	- wymiar charakterystyczny
$\dot{q}$	- gęstość strumienia ciepła
$Q = \dot{q} l_o/(\lambda \Delta t)$	- zredukowana gęstość strumienia ciepła
s	- współrzędna; oznacza czas dla zadań nieustalonych lub współrzędną geometryczną dla zadań ustalonych
S	- pole powierzchni
t	- temperatura
$t_n, \Delta t$	- umownie przyjęta temperatura odniesienia i umowna różnica temperatur
$T = (t-t_n)/\Delta t$	- temperatura zredukowana
v_i, w_i	- funkcje własne
V	- objętość
x,y,z	- współrzędne geometryczne
$\vec{r}$	- wektor - promień wodzący punktu
$X=x/l_o$, $Y=y/l_o$	- zredukowane współrzędne geometryczne
$\vec{R}=\vec{r}/l_o$	- zredukowany wektor - promień wodzący punktu
α	- współczynnik wnikania ciepła
λ	- współczynnik przewodzenia ciepła
μ_i, ϑ_i	- wartości własne
τ	- czas
ϕ, Ψ, Υ	- funkcje lub współczynniki występujące w rozwiązaniu zadania odwrotnego
A,C,D,H,Q,S	- macierze
B,P,T,U,V,Ψ,Φ	- macierze kolumnowe (wektory)
$\mathcal{L}$	- operator

$\mathcal{M}$ - funkcjonał

$\|\cdot\|^2$ - kwadrat normy funkcji własnych

$(\cdot)^T$ - symbol transponowania macierzy

- nadkreśleniem oznaczono transformaty funkcji.

Indeks "k" dotyczy zazwyczaj rzędu pochodnej, indeks "i" numeru transformaty dla metod analitycznych lub węzła siatki różnicowej dla metod numerycznych, zaś indeks "p" powierzchni lub punktu, w którym znana jest termiczna odpowiedź układu.

1. WSTĘP. CEL I ZAKRES PRACY

Celem rozprawy jest opracowanie metody rozwiązywania zagadnień ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła na podstawie obserwacji temperatury lub gęstości strumienia ciepła w pewnych wybranych punktach ciała. Liczba obserwowanych punktów oraz ich usytuowanie są określone przez zastosowaną metodę i rozpatrywany problem. Dla problemów nieustalonych jest to obserwacja bieżąca, tzn. wyznaczenie rozkładu temperatury w danym momencie czasowym nie wymaga znajomości historii procesu, a więc np. warunku początkowego. Dla stanów ustalonych metoda nie wymaga znajomości niektórych warunków brzegowych. Zatem zagadnienia poruszane w tej pracy mogą być zakwalifikowane do tzw. odwrotnych zadań przewodzenia ciepła.

Bardzo ogólna definicja zadań odwrotnych podana przez TICHONOWA [36] mówi, że przez tego typu zagadnienia rozumie się takie problemy, w których poszukiwany osl, czy określona wielkość są niedostępne bezpośrednim badaniom i wnioski dotyczące ich charakterystyk wyciąga się na podstawie pośrednich pomiarów wielkości, które są przez poszukiwane wielkości bezpośrednio spowodowane[x]. Klasycznie sformułowane problemy początkowe - brzegowe nieustalonego przewodzenia ciepła wymagają znajomości m.in. równania różniczkowego, warunku początkowego oraz warunków brzegowych. Jednakże, o ile nie można założyć wyrównanej temperatury w chwili początkowej, może okazać się niemożliwe sformułowanie warunku początkowego. Trudno bowiem sobie wyobrazić sposób, w jaki można by zmierzyć rozkład temperatury w całej objętości ciała. W innych przypadkach (w tym także dla pól ustalonych) mogą wystąpić trudności w określeniu warunków brzegowych. Tego typu problemy można rozwiązywać, jeżeli dysponujemy pewnymi informacjami o polu temperatury, nazywanymi termiczną odpowiedzią układu.

Odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła doczekały się już bardzo obszernej bibliografii i są przedmiotem zainteresowania licznej grupy badaczy. Uzyskiwane rezultaty są coraz powszechniej stosowane w praktyce. Dotyczy to zarówno badań podstawowych z zakresu przepływu ciepła (np. planowanie eksperymentu), jak też zastosowań przemysłowych. Metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych mogą służyć do opracowywania układów aparatury

---

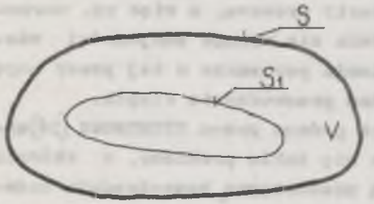
[x] Znane są inne definicje zadań odwrotnych np. "zadania odwrotne przewodzenia ciepła określają przyczyny ze skutków" [20]. W niniejszej pracy autor rozumie przez zadania odwrotne takie problemy, w których nie są znane wszystkie przyczyny, natomiast znane są niektóre skutki, przy czym celem rozwiązania jest określenie wszystkich skutków, a niekoniecznie nieznanych przyczyn.

kontrolno-pomiarowej lub diagnostycznej przy badaniach procesów cieplnych, eksploatacji maszyn cieplnych itp. Obszerny przegląd tych zastosowań znaleźć można w [4], [5], [29]. W niniejszej pracy przedstawiono także oryginalny przykład wykorzystania odwrotnego zadania ustalonego przewodzenia ciepła (punkt 7.8).

Zadania odwrotne mogą być umownie podzielone na trzy grupy:

1) identyfikacja pola temperatury,
2) identyfikacja współczynników określających właściwości fizyczne ciała,
3) identyfikacja wydajności oraz rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła.

Niniejszą pracę można zakwalifikować do grupy pierwszej.



$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \nabla^2 T$$

$$T = T_0(\vec{x}) \text{ dla } Fo = 0, \quad \vec{x} \in V$$

$$T = T_1(\vec{x}, Fo) \text{ dla } \vec{x} \in S_1$$

Rys. 1. Przykładowy problem granicznego zadania odwrotnego

Zdecydowana większość autorów, zajmujących się identyfikacją pola temperatury, rozwiązuje tzw. graniczne zadania odwrotne pól nieustalonych. W tego typu zagadnieniach zakłada się znajomość równania różniczkowego przewodzenia ciepła w rozpatrywanym obszarze V, termicznej odpowiedzi układu wzdłuż pewnego konturu $S_1 \in V$ (por. rys. 1), a także warunku początkowego.

Problem polega na ekstrapolacji rozwiązania poza kontur S_1, gdyż w obszarze ciała objętym konturem S_1 do rozwiązania pozostaje klasyczne zagadnienie początkowo-brzegowe. Rezultaty najczęściej spotykane w literaturze dotyczą problemów jednowymiarowych, a rzadziej dwuwymiarowych. Rozwiązanie uzyskuje się zarówno metodami analitycznymi, jak i numerycznymi.

W niniejszej pracy zadanie formułuje się trochę inaczej. Zakłada się mianowicie, że nie jest znany warunek początkowy, natomiast nie zawsze będzie możliwa ekstrapolacja rozwiązania poza kontur, wzdłuż którego mierzono odpowiedź termiczną układu*). Dotyczy to przede wszystkim zadań wielowymiarowych. W tym miejscu należy jednak stwierdzić, że w takich przypadkach dostępna jest bieżącej obserwacji praktycznie tylko powierzchnia wewnętrzna ciała. Prezentowana metoda może znaleźć zastosowanie zarówno dla problemów sformułowanych analitycznie, jak i numerycznie. Może znaleźć

*) Właściwie ekstrapolacja taka teoretycznie zawsze będzie możliwa, ale uzyskane rezultaty będą praktycznie bezwartościowe.

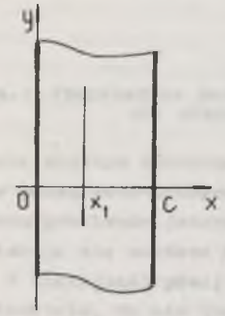
zastosowanie także do rozwiązywania problemów ustalonego przewodzenia ciepła. W tym ostatnim przypadku wyznaczanie pola temperatury nie będzie wymagało określenia niektórych warunków brzegowych.

Rozważania dotyczyć będą problemów, opisywanych jednorodnym równaniem przewodzenia ciepła. Nie jest to zbyt ostre ograniczenie, gdyż bardzo często równania z członem źródłowym lub konwekcyjnym można w prosty sposób sprowadzić do postaci jednorodnej [12]. Dla problemów sformułowanych numerycznie metoda dopuszcza przypadki, w których współczynniki opisujące właściwości substancji są funkcjami współrzędnych lub temperatury. Rozważania ograniczono do ciał o skończonych rozmiarach.

2. PRZEGLĄD LITERATURY

Odwrotne zagadnienia nieustalonego przewodzenia ciepła doczekały się bardzo obszernej bibliografii, chociaż problematyka ta stała się przedmiotem zainteresowania stosunkowo niedawno. Pierwsze prace z tej dziedziny, pomijając nieliczne wyjątki, ukazały się w połowie lat sześćdziesiątych. Bardzo obszerny przegląd literatury zamieszczono w [3], [16], [17], [20], [27]. W niniejszym rozdziale opisano tylko te prace, które bezpośrednio związane są z problemami sformułowanymi w zakończeniu rozdziału 1, tzn. identyfikacji nieustalonego pola temperatury przy braku informacji o warunku początkowym.

W tej dziedzinie znaleźć można wiele opracowań (np. [1], [8], [19]). Wydaje się jednak, że sformułowania zadania odwrotnego w tych pracach nie pozwalają na ich praktyczne wykorzystanie. Zakłada się tam, że nie jest znany warunek początkowy, ale jest znany rozkład temperatury w całej objętości ciała w pewnym momencie czasowym $\tau = \tau_1 > 0$. Trudno sobie wyobrazić sposób, w jakim można by te informacje uzyskać. Podobnie sformułowano problem w [28], przy czym tu zastosowano do rozwiązania metody numeryczne.



Rys. 2. Geometria obszaru jednowymiarowego

Natomiast rezultaty bardzo zbliżone do tych, jakie m.in. zostaną przedstawione w niniejszej pracy, uzyskał BURGGRAF [10]. W swej pracy rozważa przypadek jednowymiarowego nieustalonego przewodzenia ciepła (por. rys. 2). Do rozwiązania zadania wykorzystał pewne całki równania Fouriera-Kirchhoffa, zawierające pochodne temperatury i pochodne gradientu temperatury względem czasu, zamieszczone w [11].

Uzyskane przez niego rozwiązanie ma następującą postać:

$$T(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\phi_k(x,x_1) T_1^{(k)}(\tau) + \psi_k(x,x_1) \dot{q}_1^{(k)}(\tau) \right], \tag{2.1}$$

gdzie:

τ - czas,

$T_1(\tau), \dot{q}_1(\tau)$ - temperatura i gęstość strumienia ciepła w punkcie o współrzędnej $x = x_1$,

$\phi_k(x,x_1), \psi_k(x,x_1)$ - znane funkcje, zależne od geometrii.

Przez $(\ ,\ )^{(k)}$ oznaczono różniczkowanie według czasu.

Rozwiązanie to wymaga zatem znajomości przebiegu temperatury i gęstości strumienia ciepła w dowolnym (ale tym samym) punkcie, nie wymaga zaś informacji o warunku początkowym.

W szczególnym przypadku pola symetrycznego, jeżeli pomiar temperatury odbywa się w osi symetrii, rozwiązanie upraszcza się do postaci:

$$T(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x,0) T_1^{(k)}(\tau)^{a)}. \tag{2.2}$$

W tym miejscu należy stwierdzić, że opublikowanie tego artykułu wywołało ożywioną polemikę. Zarzucano autorowi, że tytuł pracy "Exact solution ..." sugeruje rozwiązanie dokładne, podczas gdy w wyniku niedokładności pomiarów temperatura T_1, a już tym bardziej pochodne tej temperatury obarczone będą poważnym błędem. Może to spowodować, że wyniki będą praktycznie bezwartościowe. Autor replikował, że zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do szacowania wartości pochodnych, umożliwia eliminację tej niekorzystnej właściwości. Na tym polemika zakończyła się, chociaż jak się okaże w dalszej części tej pracy, wniosek ten nie zawsze jest słuszny.

Bardzo podobną postać wyników uzyskał TIOMKIN [35]. Rozważał on jednowymiarowe pola temperatury, ale przy znanym jednorodnym warunku początkowym (graniczne zagadnienie odwrotne). Do rozwiązania zadania wykorzystał transformację Laplace'a. Wyznaczenie pola temperatury wymaga informacji o odpowiedzi termicznej w dwóch punktach dla pól niesymetrycznych lub w jednym punkcie dla pól symetrycznych. Odpowiedzią termiczną może być albo temperatura w danym punkcie, albo gęstość strumienia ciepła. Nie rozpatruje się zagadnień mieszanych. Przykładowa postać rozwiązania dla pola symetrycznego wygląda następująco:

$$T(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\phi_k(x,x_1) T_1^{(k)}(\tau) + \psi_k(x,x_1,\tau) T_1^{(k)}(0) \right]. \tag{2.3}$$

Z porównania (2.2) i (2.3) wynika, że nie są to rozwiązania tożsame. Najprawdopodobniej wynika to stąd, że BURGGRAF nie podał, jakie warunki musi spełniać termiczna odpowiedź układu. Warunki te zostaną sformułowane w rozdziale 3. Zarówno w pracy [10], jak i [35] zastosowano metody analityczne.

---

a) W rozwiązaniu przyjęto, że oś symetrii określona jest współrzędną x = 0.

Podobne rezultaty, tzn. rozwiązania w postaci szeregów zawierających pochodne termicznej odpowiedzi układu, uzyskano w wielu innych pracach, dotyczących granicznych zagadnień odwrotnych, cytowanych w [3], [16], [17], [27].

W wielu pracach można znaleźć także zastosowanie metod numerycznych (np. [2], [9], [21]). W tej ostatniej niezbędna jest znajomość warunku początkowego tylko dla obszaru $[0,x_1]$ (por. rys. 2), zaś poza x_1 warunek ten może być nieznany. Umożliwia to wyznaczenie w punkcie x_1 także gęstości strumienia ciepła. W ten sposób zadanie zostaje sformułowane podobnie jak u BURGGRAFA. Zarówno w [9], jak i [21] wykorzystuje się następnie pewne właściwości macierzy, powstałej przy różnicowym zapisie problemu przewodzenia ciepła, zaś w [2] zastosowano rachunek wariacyjny.

Natomiast prawie nie spotyka się w literaturze publikacji, związanych z rozwiązywaniem odwrotnych zadań ustalonego przewodzenia ciepła. W [6] wyznaczono w sposób przybliżony ustalone pole temperatury tak, aby uzyskać wynik w skończonej postaci, a nie w postaci szeregu. Zastosowana metoda jest bardzo zbliżona do metody opisanej w rozdziale 7 niniejszej pracy, chociaż została wykorzystana w zupełnie innym celu i przy innych danych.

Przykładem rozwiązywania odwrotnego zadania ustalonego przewodzenia ciepła, jeżeli problem jest sformułowany numerycznie, może być praca [30]. Rozważa się tam pole dwuwymiarowe, gdy na części brzegu temperatura jest nieznana. Temperaturę aproksymuje się wielomianami, a współczynniki tych wielomianów wyznacza się za pomocą specjalnego algorytmu.

Przedstawiono powyżej bardzo skrótowy przegląd literatury. Cytowano w nim tylko te przykładowe publikacje, w których albo sposób formułowania zagadnień, albo postać uzyskanych wyników jest zbliżona do problemów lub wyników, opisywanych w niniejszej pracy.

3. TERMICZNA ODPOWIEDŹ UKŁADU

Rozwiązywanie zagadnień przewodzenia ciepła, przy braku informacji o warunku początkowym lub o warunkach brzegowych, jest możliwe, o ile dysponujemy pewnymi informacjami o polu temperatury lub mówiąc inaczej, znamy rozwiązanie zadania w pewnych punktach ciała. Te informacje nazywane są termiczną odpowiedzią układu [16]. Dla pól nieustalonych jest to funkcja, podająca przebieg w czasie temperatury T lub gęstości strumienia ciepła $\dot{q}^{n)}$ dla punktu, leżącego na konturze S_1 (por. rys. 1), opisywanego wektorem - promieniem wodzącym $\bar{x}_1$

$$F(\bar{x}_1,\tau) = \begin{Bmatrix} T(\bar{x}_1,\tau) \\ \dot{q}(\bar{x}_1,\tau) \end{Bmatrix} \qquad \bar{x}_1 \in S_1 \tag{3.1}$$

Funkcja T powinna spełniać równanie nieustalonego przewodzenia ciepła także dla $\tau \to 0$, tzn.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\nabla^2 T \quad \text{dla} \quad \bar{x} \in V, \quad \tau \to 0 \tag{3.2}$$

Dodatkowo narzuca się następujące warunki na funkcję i pochodne funkcji $F(\bar{x}_1,\tau)$ względem czasu

$$F^{(k)}(\bar{x}_1,\tau) = d^k F(\bar{x}_1,\tau)/d\tau^k < \infty, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{3.3}$$

dla

$$0 \leq \tau < \infty$$

Kontur S_1 może w skrajnym przypadku pokrywać się z powierzchnią zewnętrzną ciała.

Termiczna odpowiedź układu dla pól ustalonych oznaczać będzie funkcję, podającą rozkład temperatury ciała lub gęstości strumienia ciepła na powierzchni, określonej przez ustaloną jedną współrzędną

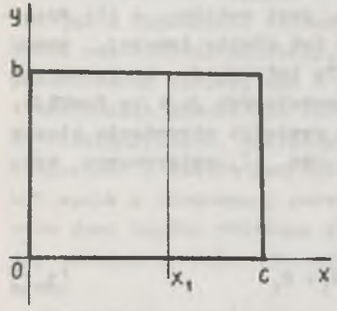
$$F(y,z) = \begin{Bmatrix} T(x_1,y,z) \\ \dot{q}(x_1,y,z) \end{Bmatrix}$$

n) Przez $\dot{q}$ rozumie się tutaj składową normalną do powierzchni wektora gęstości strumienia ciepła. Wektor ten związany jest z temperaturą prawem przewodzenia ciepła Fouriera.

gdzie x_1 oznacza ustaloną współrzędną. Temperatura T powinna spełniać równanie przewodzenia ciepła, łącznie z brzegami

$$\nabla^2 T = 0.$$

Najprościej pojęcie to można wyjaśnić na przykładzie pola dwuwymiarowego (rys. 3).



Rys. 3. Geometria obszaru dwuwymiarowego

Termiczną odpowiedzią układu może być funkcja podająca rozkład temperatury T lub gęstości strumienia ciepła $\dot{q}$ wzdłuż np. współrzędnej y dla ustalonej współrzędnej $x = x_1$

$$F(y) = \begin{Bmatrix} T(x_1,y) \\ \dot{q}(x_1,y) \end{Bmatrix} \qquad 0 \leq x_1 \leq c \qquad (3.4)$$

Funkcja T spełnia równanie przewodzenia ciepła włącznie z brzegami $y = 0$ i $y = b$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{r-1}{x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \qquad (3.5)$$

gdzie r=1 dla płyty, r=2 dla walca.

Dodatkowo narzuca się warunki na funkcję i pochodne funkcji F(y) względem y

$$F^{(k)}(y) = d^k F(y)/dy^k < \infty, \qquad k = 0,1,2,... \qquad (3.6)$$

także dla

$$y = 0 \quad i \quad y = b.$$

Założenie, że funkcja $T(\bar{x},\tau)$ lub $T(x,y)$ spełnia równanie przewodzenia ciepła także na granicach, stanowi jedyne ograniczenie w stosunku do metody TIOMKINA.

Powyższe warunki mają jednak tylko znaczenie teoretyczne. W rzeczywistości nie będzie znana postać analityczna funkcji F, a zatem nie będzie możliwe sprawdzenie równań (3.2) i (3.5). Dobrze jest zatem podać interpretację fizyczną termicznej odpowiedzi układu. Przez działanie zewnętrznych bodźców można wywołać w układzie fizycznym rozmaite procesy, np. proces nieustalonego przewodzenia ciepła. Wielkości, które są przez te bodźce powodowane, mogą być wykorzystane jako termiczna odpowiedź układu. Używając zatem nazewnictwa z teorii układów dynamicznych, odpowiedź układu

nie może być "wejściem sterującym". W tej sytuacji temperatura powierzchni ciała (I warunek brzegowy) nie może być tą odpowiedzią, o ile jej zmiany są wyłączną przyczyną stanu nieustalonego i nie zależą od pola temperatury ciała. W innych przypadkach temperatura ta może być wykorzystana.

Warto także zauważyć, że wymagania stawiane funkcji F są bardziej ostre niż wymagania stawiane warunkom brzegowym i początkowym w klasycznych zagadnieniach przewodzenia ciepła. Między innymi zachowana powinna być ciągłość między warunkiem początkowym a brzegowym. Prezentowana metoda nie pozwala zatem na rekonstrukcję warunku początkowego, który tych założeń nie spełnia. Można jednak przyjąć, że po dowolnie małym odcinku czasu ciągłość temperatury ciała z warunkiem brzegowym zostanie osiągnięta. Poza tym moment czasowy, od którego rozpoczyna się obserwację temperatury, jest nieistotny, gdyż metoda nie wymaga formułowania warunku początkowego. Podobne uwagi dotyczą zagadnień dla stanu ustalonego.

Termiczną odpowiedzią układu mogą być również inne wielkości, jak np. naprężenia termiczne. Takie zadania nie będą jednak w tej pracy rozważane.

4. OGÓLNY OPIS ZASTOSOWANEJ W PRACY METODY ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW ODWROTNYCH

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda sprowadza się do wykorzystania pewnych właściwości rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych w postaci:

$$\frac{dZ}{ds} = CZ + \sum_{p=1}^{L_p} F_p(s)B_p, \qquad (4.1)$$

gdzie:

C - nieosobliwa macierz kwadratowa o znanych stałych elementach,

B_p - macierze kolumnowe o znanych stałych elementach,

$F_p(s)$ - znane funkcje spełniające warunki

$$F_p^{(k)}(s) \equiv d^k F_p(s)/ds^k < \infty, \qquad k = 0,1,2,...$$

Z - macierz kolumnowa, której elementami są poszukiwane funkcje.

Opisywana w niniejszej pracy metoda może zatem znaleźć zastosowanie do zadań, które można sprowadzić do postaci (4.1).

Metody numeryczne stosowane do zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła prowadzą wprost do układu równań typu (4.1), o ile tylko nie zachodzi potrzeba dyskretyzacji pochodnej temperatury względem czasu (por. rozdział 6). Macierz Z zawiera wówczas temperaturę w węzłach siatki różnicowej, s - oznacza czas, F_p - termiczną odpowiedź układu, L_p - liczbę węzłów, w których dana jest termiczna odpowiedź układu, C i B_p zawierają współczynniki układu równań.

Przy numerycznym rozwiązywaniu zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła zadanie można sprowadzić do postaci (4.1) w przypadku, gdy nie zachodzi potrzeba dyskretyzacji wszystkich pochodnych cząstkowych (por. punkt 7.8). Zmienna s oznacza wtedy współrzędną geometryczną, L_p - liczbę powierzchni, które nie zostały zdyskretyzowane, a znaczenie pozostałych wielkości nie ulega zmianie. W pracy nie rozpatruje się problemów, w których wymagana jest dyskretyzacja wszystkich pochodnych dla problemów ustalonych lub pochodnej względem czasu dla problemów nieustalonych.

W metodach analitycznych, dla skończonych rozmiarów ciała, układ równań w postaci (4.1) uzyskuje się dzięki zastosowaniu transformacji całkowej (por. rozdz. 5 i 7). Macierz Z zawiera wówczas transformaty temperatury, zmienna s oznacza czas dla problemów nieustalonych lub współrzędną geometryczną dla ustalonych, zaś L_p oznacza liczbę powierzchni, na których znana jest termiczna odpowiedź układu.

Rozwiązanie układu (4.1) jest znane i przy znanych wartościach Z dla s = 0 ma postać:

$$Z = e^{Cs} Z_0 + e^{Cs} \sum_{p=1}^{L_p} \int_0^s F_p(u) e^{-Cu} B_p du, \qquad (4.2)$$

gdzie:

$Z = Z_0$ dla $s = 0$.

Rozwiązanie (4.2) można zmodyfikować, całkując przez części całkę nieskończoną liczbę razy

$$Z = e^{Cs} Z_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{L_p} \phi_{k,p} F_p^{(k)}(s) - e^{Cs} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{L_p} \phi_{k,p} F_p^{(k)}(0), \qquad (4.3)$$

gdzie:

$$\phi_{k,p} = -(C^{-1})^{k+1} B_p. \qquad (4.4)$$

Łatwo zauważyć, że macierze kolumnowe $\phi_{k,p}$ spełniają ciąg rekurencyjnych zależności

$$\begin{aligned} C\,\phi_{0,p} + B_p &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C\,\phi_{k,p} &= \phi_{k-1,p}. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Rozwiązanie w postaci (4.3) jest o tyle dogodne, że w przypadku gdy $F_p(s)$ jest termiczną odpowiedzią układu i spełnia warunki podane w rozdziale 3, to zachodzi równość:

$$Z_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{L_p} \phi_{k,p} F_p^{(k)}(0). \qquad (4.6)$$

Rozwiązanie układu równań typu (4.1) będzie miało zatem postać [24]:

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{L_p} \phi_{k,p} F_p^{(k)}(s) \qquad (4.7)$$

Szczegółową analizę zbieżności szeregów, jakie pojawiły się w (4.3) przeprowadzono w [35]. TIOMKIN uzyskał podobne szeregi przy wyznaczaniu całki splotu, jaka pojawiła się w wyniku zastosowania transformacji Laplace'a. Szeregi te są zbieżne dla bardzo szerokiej klasy funkcji.

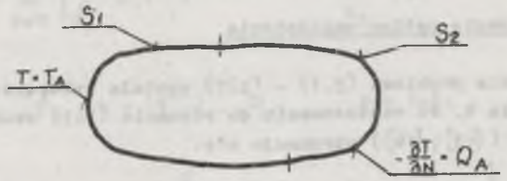
Wykorzystanie warunku (4.6) pozwala zmniejszyć niezbędną ilość informacji w stosunku do klasycznych zadań początkowo-brzegowych lub granicznych zadań odwrotnych. Dla zagadnień nieustalonych wykorzystanie warunku (4.6) pozwala wyeliminować z warunków jednoznaczności rozwiązania warunek początkowy, natomiast liczba warunków brzegowych nie ulega zmianie. Zamiast warunku początkowego wykorzystuje się informacje o pochodnych termicznej odpowiedzi układu. Dla analitycznie lub analityczno-numerycznie sformułowanych zagadnień ustalonych wykorzystanie warunku (4.6) umożliwia wyeliminowanie warunków brzegowych na dwóch powierzchniach, określonych przez stałą wartość tej samej współrzędnej.
Szczegółowo omówiono te problemy w rozdziale 11.

5. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA

5.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrywany problem polega na wyznaczeniu pola temperatury, opisywanego bezwymiarowym równaniem Fouriera-Kirchhoffa [14], [38]:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \nabla^2 T, \tag{5.1}$$



Rys. 4. Warunki brzegowe dla zadania nieustalonego przewodzenia ciepła

z warunkami brzegowymi (por. rys. 4) dla obszaru wewnątrz S_1 i S_2

$$T = T_A(\bar{X}, Fo) \quad \text{dla} \quad \bar{X} \in S_1, \tag{5.2}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \bar{N}} = Q_A(\bar{X}, F_o) \quad \text{dla} \quad \bar{X} \in S_2. \tag{5.3}$$

W równaniach tych wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe:

$Fo = a\tau / l_o^2$ - liczba Fouriera,

$T = (t-t_n)/\Delta t$ - zredukowana temperatura,

$\bar{X} = \bar{x}/l_o$ - zredukowany wektor - promień wodzący punktu,

$Q = \dot{q}\, l_o/(\lambda \Delta t)$ - zredukowana gęstość strumienia ciepła,

$N = n/l_o$ - zredukowana współrzędna w kierunku normalnym do powierzchni,

gdzie:

a - współczynnik wyrównywania temperatury,

τ - czas,

l_o - charakterystyczny wymiar liniowy,

$t_n, \Delta t$ - umownie przyjęta temperatura odniesienia i umowna różnica temperatur[m)],

$\dot{q}$ - składowa normalna do powierzchni wektora gęstości strumienia ciepła,

λ - współczynnik przewodzenia ciepła.

Funkcje T_A i Q_A spełniają postulaty stawiane termicznej odpowiedzi układu. W szczególnym przypadku można rozpatrywać zagadnienia, w których na całej powierzchni jest określony warunek (5.2) lub (5.3).

5.2. Rozwiązanie ogólne zagadnienia

Do rozwiązania problemu (5.1) - (5.3) została wykorzystana metoda opisana w rozdziale 4. Po zastosowaniu do równania (5.1) skończonej transformacji całkowej ([12], [14]) otrzymuje się:

$$\frac{d\bar{T}_i}{dFo} = -\mu_i^2 \bar{T}_i - \int_{S_1} T_A \frac{\partial v_i}{\partial N}\, dS - \int_{S_2} Q_A\, v_i\, dS, \qquad i = 1,2,\ldots, \tag{5.4}$$

gdzie μ_i oraz v_i oznaczają wartości i funkcje własne zagadnienia Sturma-Liouville'a

$$\nabla^2 v_i + \mu_i^2 v_i = 0, \tag{5.5}$$

$$v_i = 0 \qquad \text{dla} \qquad \vec{X} \in S_1, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial N} = 0 \qquad \text{dla} \qquad \vec{X} \in S_2. \tag{5.7}$$

Nadkreśleniem oznaczono transformaty funkcji.

---

m) Temperatura zredukowana w ogólności jest ułamkiem, którego licznik jest różnicą temperatur, zawierającą temperaturę t, a mianownik charakterystyczną dla danego zjawiska różnicą temperatur, a jeżeli takiej nie ma, inną wielkością lub zespołem wielkości, mającym wymiar temperatury. Sposób tworzenia zredukowanej temperatury jest podyktowany dążeniem do jak najprostszego zapisu kryterialnej postaci równania różniczkowego i warunków brzegowych i zależy od konkretnego zagadnienia brzegowego (por. [14]).

Z porównania układu równań (5.4) i (4.1) wynika, że macierz C jest macierzą diagonalną o elementach na przekątnej głównej równych $-\mu_i^2$, macierz kolumnowa B_1 ma elementy równe $-\partial v_i / \partial N$, macierz kolumnowa B_2 ma elementy równe $-v_i$, zaś elementami macierzy kolumnowej Z są kolejne transformaty temperatury. F_1 jest w tym przypadku równe T_A, a F_2 równe Q_A. Układ równań (5.4) może być zapisany w postaci:

$$\frac{d\bar{T}}{dFo} = C\,\bar{T} + \int_{S_1} B_1\, T_A\, dS + \int_{S_2} B_2\, Q_2\, dS. \tag{5.8}$$

Równanie układu (5.8) może być przedstawione w postaci (4.7), jeżeli tylko słuszny jest warunek (4.6)

$$\bar{T}(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{S_1} \phi_{k,1}\, T_A^{(k)}(\vec{X},Fo)\, dS + \int_{S_2} \phi_{k,2} Q_A^{(k)}(\vec{X},Fo)\, dS \right], \tag{5.9}$$

gdzie:

$$\phi_{k,p} = -(C^{-1})^{k+1} B_p, \qquad p = 1,2, \tag{5.10}$$

zaś

$$(C^{-1})^{k+1} = (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} 1/\mu_1^{2k+2}, & 0, & \ldots \\ 0, & 1/\mu_2^{2k+2}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Dowód na poprawność warunku (4.6) przedstawiono w Dodatku A.

Ostatecznie, po retransformacji, rozwiązanie zadania (5.1) - (5.3) można zapisać:

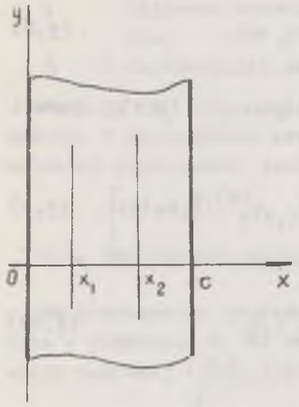
$$T(\vec{X},Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{S_1} \phi_{k,1}^T\, T_A^{(k)}(\vec{X},Fo)\, dS + \int_{S_2} \phi_{k,2}^T\, Q_A^{(k)}(\vec{X},Fo)\, dS \right] V. \tag{5.12}$$

gdzie macierz kolumnowa V zawiera elementy równe $v_i / \|v_i\|^2$, $\|v_i\|^2$ oznacza kwadrat normy funkcji własnych v_i, a $(.)^T$ jest symbolem transponowania macierzy kolumnowej.

Jak można zauważyć, rozwiązanie problemu nieustalonego przewodzenia ciepła w postaci (5.12) nie wymaga sformułowania warunku początkowego. W dalszej części pracy rozpatrzono rozwiązania szczegółowe dla typowych przypadków.

5.3. Jednowymiarowe pole niesymetryczne - dane przebiegi temperatury

W rozpatrywanym poniżej przypadku termiczna odpowiedź układu dana jest w postaci warunku (5.2), zaś kontur S_i redukuje się do dwóch punktów X_1 i X_2 (por. rys. 5).



Rys. 5. Geometria jednowymiarowego pola niesymetrycznego

Jeżeli bezwymiarowa współrzędna geometryczna zostanie zdefiniowana jako (l_o=c)

$$X = x/c,$$

to równanie opisujące pole temperatury może być zapisane w postaci:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{r-1}{X}\frac{\partial T}{\partial X}, \qquad (5.13)$$

gdzie r=1 dla nieskończenie rozległej płyty, r=2 dla nieskończenie rozległego walca, r=3 dla kuli, zaś warunek (5.2) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} T_1(Fo) &= T(X_1,Fo), \\ T_2(Fo) &= T(X_2,Fo). \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Rozwiązanie zagadnienia (5.13) - (5.14) przedstawia równanie (5.12)

$$T(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\phi_{k,1}^T T_1^{(k)}(Fo) + \phi_{k,2}^T T_2^{(k)}(Fo)\right] V \qquad (5.15)$$

Dla zadań jednowymiarowych można w prosty sposób wyznaczyć wartości sumy $\phi_{k,p}^T V$. W tym celu należy retransformować zależności (5.10), definiujące macierze kolumnowe $\phi_{k,p}$. W wyniku retransformacji wektory te przekształcają się w funkcję Ψ_k, której argumentami są: współrzędna X oraz X_1 i X_2. Ostatecznie otrzymuje się:

$$T(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\Psi_k(X,X_1,X_2)T_1^{(k)}(Fo) + \Psi_k(X,X_2,X_1)T_2^{(k)}(Fo)\right]. \qquad (5.16)$$

Łatwo zauważyć, że funkcje $\Psi_k(X,P,R)$ [x] spełniają następujący ciąg równań różniczkowych zwyczajnych i warunków brzegowych

$$\frac{d^2\Psi_0}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\Psi_0}{dX} = 0, \qquad \begin{aligned} \Psi_0 &= 1 \quad \text{dla} \quad X = P, \\ \Psi_0 &= 0 \quad \text{dla} \quad X = R, \end{aligned} \qquad (5.17)$$

.....

$$\frac{d^2\Psi_k}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\Psi_k}{dX} = \Psi_{k-1}, \qquad \begin{aligned} \Psi_k &= 0 \quad \text{dla} \quad X = P, \\ \Psi_k &= 0 \quad \text{dla} \quad X = R, \end{aligned} \qquad (5.18)$$

Poprawność tego rozumowania można sprawdzić przez stransformowanie zagadnień brzegowych (5.17) i (5.18). Otrzymuje się w wyniku macierze kolumnowe $\phi_{k,p}$.

Ponieważ w zależności (5.16) udało się wyeliminować funkcje własne v_i zagadnienia brzegowego, to istnieje możliwość ekstrapolacji rozwiązania poza przedział $X_1 \leq X \leq X_2$, w którym funkcje własne zostały zdefiniowane. Jest ono poprawne dla całego obszaru, w którym obowiązuje równanie (5.13). Punkty X_1 i X_2 mogą być zatem przyjmowane zupełnie dowolnie, a w szczególnym przypadku mogą także znajdować się na powierzchni zewnętrznej ciała, jeżeli tylko temperatura tej powierzchni spełnia postulaty stawiane termicznej odpowiedzi układu. W tym miejscu należy podkreślić, że jeżeli punkty X_1 i X_2 znajdują się na powierzchni zewnętrznej ciała, to nie jest to równoznaczne z rozwiązywaniem klasycznego zagadnienia z warunkiem brzegowym I rodzaju, gdyż rozwiązanie (5.16) nie wymaga sformułowania warunku początkowego [xx]. Dowód na możliwość ekstrapolacji rozwiązania (5.16) przedstawiono w Dodatku B.

Wyznaczenie jednowymiarowego niesymetrycznego pola temperatury, przy braku informacji o warunku początkowym, wymaga zatem znajomości przebiegu temperatury ciała w dwóch dowolnie wybranych punktach, Mówiąc inaczej, wyznaczenie tego pola w danym momencie czasowym, określonym przez liczbę Fouriera, wymaga informacji o temperaturze i jej pochodnych względem czasu w tym samym momencie czasowym dla dwóch punktów ciała. Z tym że dla określenia tych pochodnych niezbędna jest znajomość tej temperatury także dla kilku innych momentów czasowych.

Podobne funkcje Ψ_k uzyskał TIOMKIN [35] i nazwał je wielomianami radialnymi.

---

[x] Przez P i R oznaczono współrzędne punktów, w których znana jest temperatura (lub gęstość strumienia ciepła). Symbol P dotyczy tego punktu, dla którego termiczna odpowiedź układu i jej pochodne są mnożone przez odpowiednie funkcje Ψ_k w rozwiązaniu.

[xx] W dalszej części pracy takie zadanie zostanie umownie nazwane zagadnieniem wewnętrznym.

Poniżej przedstawiono przykład rozwiązania zadania dla nieskończenie rozległej płyty.

Przykład: nieskończenie rozległa płyta.

Funkcje $\psi_k(X,P,R)$ określone są równaniami

$$\psi_k(X,P,R) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \left\{ A_n \frac{X^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} - B_n \frac{X^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\}, \qquad (5.19)$$

gdzie:

$$A_0 = 1/\Delta x, \quad B_0 = R/\Delta x, \quad \Delta x = P-R, \quad P \neq R,$$

$$A_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\Delta x} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left\{ A_n \frac{P^{2(k-n)+1} - R^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} - B_n \frac{P^{2(k-n)} - R^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\}$$

$$B_k = (-1)^k \left\{ \sum_{n=0}^{k} (-1)^n A_n \frac{P^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} - \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n B_n \frac{P^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\} \qquad (5.20)$$

Poprawność tych formuł można łatwo sprawdzić metodą indukcji. Wystarczy zauważyć, że skoro

$$\frac{d^2\psi_{k+1}}{dX^2} = \psi_k$$

to

$$\psi_{k+1} = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \left\{ A_n \frac{X^{2(k-n)+3}}{[2(k-n)+3]!} - B_n \frac{X^{2(k-n)+2}}{[2(k-n)+2]!} \right\} + C_1 X + C_2, \qquad (5.21)$$

i podstawić w miejsce C_1 i C_2 wyrażenia na A_{k+1} i B_{k+1}. Z drugiej strony łatwo sprawdzić, że ψ_{k+1} spełnia warunki brzegowe (5.18). Wystarczy podstawić (5.21) do (5.18) i jeszcze raz obliczyć C_1 i C_2.

5.4. Jednowymiarowe pole niesymetryczne - dane przebiegi gęstości strumienia ciepła

Przypadek ten ze względu na swoją specyfikę i małą praktyczną przydatność nie będzie tu szczegółowo analizowany. Specyfika tego przypadku polega na tym, że dla zagadnień z warunkami brzegowymi II rodzaju w postaci

$$\frac{\partial T}{\partial X} = Q_1(Fo) \quad \text{dla} \quad X = X_1$$

$$-\frac{\partial T}{\partial X} = Q_2(Fo) \quad \text{dla} \quad X = X_2 \qquad (5.22)$$

pierwsza wartość własna $\mu_1 = 0$, co powoduje, że macierz C staje się osobliwa. Nie jest zatem możliwe jej odwrócenie i wyznaczenie macierzy kolumnowych $\phi_{k,p}$. Aby wyeliminować tę niekorzystną właściwość, należy jeszcze raz powrócić do układu równań w postaci (5.4) i najpierw niezależnie rozwiązywać pierwsze równanie, odpowiadające zerowej wartości własnej. Macierze kolumnowe $\phi_{k,p}$ będą natomiast związane ze zmodyfikowaną macierzą C, pomniejszoną o pierwszy zerowy wiersz. Jak łatwo zauważyć, takie postępowanie pozwala wyznaczyć rozwiązanie z dokładnością do stałej, gdyż z całkowania równania odpowiadającego wartości własnej $\mu_1 = 0$ pozostaje stała C równa

$$C = \int_{X_1}^{X_2} T_o(X)\, v_1(\mu_1, X)\, dX.$$

Podobnie wygląda ten problem w klasycznych zagadnieniach początkowo-brzegowych z warunkami brzegowymi II rodzaju. Nie wystarcza tam informacja tylko o strumieniach ciepła. Niezbędne są także dane o temperaturze, które w tym przypadku mają postać warunku początkowego.

Najłatwiej jest uzyskać rozwiązanie dla nieskończenie rozległej płyty, gdyż równanie (5.13) może być zapisane także dla gęstości strumienia ciepła

$$\frac{\partial Q}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} \qquad (5.23)$$

Rozwiązanie można zatem przedstawić w postaci (przy zmianie znaku Q_1):

$$Q(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k(X,X_1,X_2) Q_1^{(k)}(Fo) + \psi_k(X,X_2,X_1) Q_2^{(k)}(Fo) \right], \qquad (5.24)$$

gdzie funkcje $\psi_k(X,P,R)$ są określone równaniami (5.19) - (5.20). Temperaturę T (z dokładnością do stałej) można teraz uzyskać przez scałkowanie zależności (5.24).

5.5. Jednowymiarowe pole niesymetryczne - warunki mieszane

Rozpatrzono poniżej zadanie wyznaczenia pola temperatury, opisywanego równaniem (5.12) z następującymi warunkami:

$$T_A(Fo) = T(X_1, Fo), \qquad (5.25)$$

$$Q_A(Fo) = -\partial T(X_2,Fo)/\partial X = Q(X_2,Fo)^{x)}.$$

W celu rozwiązania zagadnienia przeprowadza się analogiczne rozumowanie jak w punkcie 5.3. Ostatecznie otrzymuje się:

$$T(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k(X,X_1,X_2)T_A^{(k)}(Fo) + \phi_k(X,X_2,X_1)Q_A^{(k)}(Fo)\right] \qquad (5.26)$$

Funkcje ψ_k spełniają następujący ciąg równań:

$$\frac{d^2\psi_0}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\psi_0}{dX} = 0, \quad \psi_0 = 1 \quad \text{dla} \quad X = X_1 \qquad (5.27)$$

$$\frac{d\psi_0}{dX} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2$$

.....

$$\frac{d^2\psi_k}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\psi_k}{dX} = \psi_{k-1}, \quad \psi_k = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1 \qquad (5.28)$$

$$\frac{d\psi_k}{dX} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2$$

zaś ϕ_k

$$\frac{d^2\phi_0}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\phi_0}{dX} = 0, \quad \phi_0 = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1 \qquad (5.29)$$

$$\frac{d\phi_0}{dX} = 1 \quad \text{dla} \quad X = X_2$$

.....

$$\frac{d^2\phi_k}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\phi_k}{dX} = \phi_{k-1}, \quad \phi_k = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1 \qquad (5.30)$$

$$\frac{d\phi_k}{dX} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2.$$

Rozwiązanie (5.26) charakteryzuje się analogicznymi właściwościami jak (5.16), tzn. punkty X_1 i X_2 mogą być dobrane dowolnie oraz rozwiązanie (5.26) może być ekstrapolowane poza przedział $X_1 \leq X \leq X_2$. Można także przyjmować $X_1 = X_2$.

x) Warunek ten może mieć praktyczne znaczenie tylko w przypadku, gdy punkt X_2 położony jest na powierzchni zewnętrznej ciała lub w osi symetrii.

W tym przypadku otrzymuje się rezultat analogiczny jak u BURGGRAFA [10] (por. równanie (2.1)). Dowód na słuszność tych wniosków można przeprowadzić podobnie jak w Dodatku B.

Przykład: nieskończenie rozległa płyta.

Dla nieskończenie rozległej płyty otrzymuje się:

$$\phi_k(X,P,R) = \sum_{n=0}^{k}\left[A_n\frac{X^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} + B_n\frac{X^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!}\right], \qquad (5.31)$$

gdzie:

$$A_0 = 1, \quad B_0 = -R,$$

$$A_k = -\sum_{n=0}^{k-1}\left[A_n\frac{P^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} + B_n\frac{P^{2(k-n)-1}}{[2(k-n)-1]!}\right], \qquad (5.32)$$

$$B_k = -\sum_{n=0}^{k-1}\left[A_n\frac{R^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} + B_n\frac{R^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!}\right] - A_k R.$$

Współczynniki ψ_k mają analogiczną postać jak ϕ_k, tylko z tą różnicą, że

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 1. \qquad (5.33)$$

5.6. Jednowymiarowe pole symetryczne

Jednowymiarowe pole symetryczne jest szczególnym przypadkiem zagadnień rozpatrywanych w punktach 5.4 i 5.5. Wystarczy zauważyć, że w osi symetrii gęstość strumienia ciepła jest równa zero. Poniżej przedstawiono szczególne rozwiązania dla trzech typowych przykładów, jeżeli dany jest przebieg temperatury w czasie dla jednego punktu

$$T_A(Fo) = T(X_1,Fo). \qquad (5.34)$$

W rozwiązaniach tych przyjęto, że płaszczyzna symetrii jest określona współrzędną $X = 0$. Ogólna ich postać jest następująca:

$$T(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(X,X_1)T_A^{(k)}(Fo). \qquad (5.35)$$

Wyznaczenie pola temperatury wymaga informacji o przebiegu temperatury tylko w jednym punkcie X_1. Punkt ten może być obrany zupełnie dowolnie. Możliwa jest także ekstrapolacja rozwiązania poza przedział $0 \leq X \leq X_1$. W szczególnym przypadku $X_1 = 0$ otrzymuje się rezultat analogiczny jak u BURGGRAFA [10] (por. równanie (2.2)).

Rozwiązanie szczegółowe:

płyta: $\phi_0 = 1$

$$\phi_k(X,X_1) = \frac{X^{2k}}{(2k)!} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{X_1^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!}\,\phi_n(X,X_1) \tag{5.36}$$

walec: $\phi_0 = 1$,

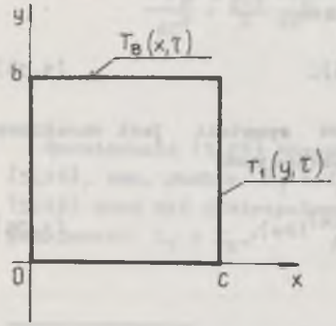
$$\phi_k(X,X_1) = \frac{X^{2k}}{2^2\,4^2\ldots(2k)^2} - \sum_{n=1}^{k} \frac{X_1^{2(k-n+1)}}{2^2\,4^2\ldots[2(k-n+1)]^2}\,\phi_{n-1}(X,X_1) \tag{5.37}$$

kula: $\phi_0 = 1$

$$\phi_k(X,X_1) = \frac{X^{2k}}{(2k+1)!} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{X_1^{2(k-n)}}{[2(k-n)+1]!}\,\phi_n(X,X_1) \tag{5.38}$$

5.7. Pole dwuwymiarowe na przykładzie symetrycznej płyty

Rozpatrywanie poszczególnych przypadków pól wielowymiarowych jest niecelowe z uwagi na ich różnorodność. Ogólne rozwiązanie tego typu zadań może być przedstawione równaniem (5.12). W rozwiązaniu tym nie jest możliwe wyznaczenie sumy $\dot{\phi}^{T}_{k,p}\,V$. Dlatego też, z uwagi na obecność funkcji własnych, nie jest praktycznie możliwa ekstrapolacja poza kontur, wzdłuż którego dokonywano pomiaru termicznej odpowiedzi układu. Tego typu zadania zostały umownie nazwane w punkcie 5.3 zadaniami wewnętrznymi. Warto przypomnieć, że zadania wewnętrzne nie są równoznaczne z rozwiązywaniem klasycznych zagadnień początkowo-brzegowych z warunkiem brzegowym I rodzaju, gdyż równanie (5.12) nie wymaga znajomości początkowego rozkładu temperatury. Są one zgodne z celem tej pracy określonym w rozdziale 1.



Rys. 6. Geometria płyty dwuwymiarowej

Wyznaczanie dwuwymiarowego nieustalonego pola temperatury zostało poniżej zilustrowane na przykładzie symetrycznej płyty (rys. 6).

Równanie Fouriera-Kirchhoffa dla tego przypadku ma postać następującą:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}, \tag{5.39}$$

gdzie:

$$X = x/c, \qquad Y = y/c$$

Symetrię pola temperatury opisują warunki:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = 0 \tag{5.40}$$

Termiczną odpowiedź układu stanowi informacja o przebiegu temperatury wzdłuż powierzchni $X = 1$ i $Y = B = b/c$, ($l_0 = c$)

$$T_1(Y,Fo) = T(X,Y,Fo)\Big|_{X=1}$$
$$T_B(X,Fo) = T(X,Y,Fo)\Big|_{Y=B} \tag{5.41}$$

Dwukrotne zastosowanie skończonej transformacji całkowej prowadzi do układu równań

$$\frac{d\,\bar{T}_{i,m}}{dFo} = -(\mu_i^2 + \vartheta_m^2)\bar{T}_{i,m} - \frac{dw_m}{dX}\Big|_{X=1}\bar{T}_{1,i} - \frac{dv_i}{dY}\Big|_{Y=B}\bar{T}_{B,m}$$
$$i,m = 1,2,\ldots \tag{5.42}$$

Wartości własne μ_i i ϑ_m oraz funkcje własne v_i, w_m są rozwiązaniami zagadnień brzegowych

$$\frac{d^2 v_i}{dY^2} + \mu_i^2 v_i = 0,$$
$$v_i = 0 \quad \text{dla} \quad Y = B, \tag{5.43}$$
$$\frac{dv_i}{dY} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = 0$$

oraz

$$\frac{d^2w_i}{dX^2} + \vartheta_i^2 w_i = 0,$$

$$w_i = 0 \qquad \text{dla} \qquad X = 1, \tag{5.44}$$

$$\frac{dw_i}{dX} = 0 \qquad \text{dla} \qquad X = 0.$$

Mają one postać

$$\vartheta_i = \frac{\pi}{2} + (i-1)\pi, \qquad w_i = \cos \vartheta_i X, \tag{5.45}$$

$$\mu_i = \vartheta_i/B, \qquad v_i = \cos \mu_i Y \tag{5.46}$$

Przez $\bar{T}_{1,i}$ oraz $\bar{T}_{B,m}$ oznaczono transformaty warunków brzegowych

$$\bar{T}_{1,i}(Fo) = \int_0^B T_1(Y,Fo)v_i \, dY, \quad \bar{T}_{B,m}(Fo) = \int_0^1 T_B(X,Fo)w_m dX \tag{5.47}$$

Rozwiązanie układu równań (5.42) w obszarze transformat jest dane zależnością (5.9)

$$\bar{T}_{i,m}(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi_{k,i,m} \bar{T}_{1,i}^{(k)}(Fo) + \phi_{k,i,m}\bar{T}_{B,m}^{(k)}(Fo)\right] \tag{5.48}$$

Współczynniki $\varphi_{k,i,m}$ oraz $\phi_{k,i,m}$ wyznacza się z równań

$$-(\mu_i^2 + \vartheta_m^2)\varphi_{0,i,m} - \left.\frac{dw_m}{dX}\right|_{X=1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{5.49}$$

$$-(\mu_i^2 + \vartheta_m^2)\varphi_{k,i,m} = \varphi_{k-1,i,m}, \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$-(\mu_i^2 + \vartheta_m^2)\phi_{0,i,m} - \left.\frac{dv_i}{dY}\right|_{Y=B} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{5.50}$$

$$-(\mu_i^2 + \vartheta_m^2)\phi_{k,i,m} = \phi_{k-1,i,m}, \qquad k = 1,2,\ldots$$

Retransformacja rozwiązania (5.48) prowadzi do szeregu potrójnego. Aby tego uniknąć, wystarczy zauważyć, że można łatwo wyznaczyć sumy:

$$\bar{\Psi}_{k,i}(X,1,\mu_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,i,m} w_m / \|w_m\|^2 \tag{5.51}$$

oraz

$$\bar{\Psi}_{k,m}(Y,B,\vartheta_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{k,i,m} v_i / \|v_i\|^2, \tag{5.52}$$

gdzie kwadraty normy funkcji własnych wynoszą:

$$\|v_i\|^2 = \frac{1}{2} B + \frac{1}{4\mu_i} \sin 2\mu_i B,$$

$$\|w_i\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\vartheta_i} \sin 2\vartheta_i.$$

Funkcje $\bar{\Psi}_{k,i}(Z,P,\xi_i)$ są rozwiązaniami następujących problemów brzegowych:

$$\frac{d^2\bar{\Psi}_{0,i}}{dZ^2} - \xi_i^2 \bar{\Psi}_{0,i} = 0, \qquad \bar{\Psi}_{0,i} = 1 \quad \text{dla} \quad Z = P$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \frac{d\bar{\Psi}_{0,i}}{dZ} = 0 \quad \text{dla} \quad Z = 0, \tag{5.53}$$

$$\frac{d^2\bar{\Psi}_{k,i}}{dZ^2} - \xi_i^2 \bar{\Psi}_{k,i} = \bar{\Psi}_{k-1,i}, \qquad \bar{\Psi}_{k,i} = 0 \quad \text{dla} \quad Z = P,$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_{k,i}}{dZ} = 0 \text{ dla } Z = 0.$$

Poniżej podano wzory na pierwsze cztery funkcje $\bar{\Psi}_{k,i}$:

$$\bar{\Psi}_{0,i}(Z,P,\xi_i) = \operatorname{ch}(\xi_i Z)/\operatorname{ch}(\xi_i P),$$

$$\bar{\Psi}_{1,i} = -\bar{\Psi}_{0,i} F_{1P} + F_1,$$

$$\bar{\Psi}_{2,i} = \bar{\Psi}_{0,i}\left(\frac{1}{4\xi_i^2} F_{1P} + \frac{Z^2 - P^2}{8\xi_i^2} + F_{1P}^2\right) - F_1\left(F_{1P} + \frac{1}{4\xi_i^2}\right)$$

$$\bar{\psi}_{3,i} = \bar{\psi}_{0,i}\left(-F_{1P}\frac{1}{8\xi_i^2} + F_{1P}\frac{3P^2}{24\xi_i^2} - \frac{Z^2-P^2}{16\xi_i^4} - \frac{1}{8\xi_i^4}F_{1P} - F_{1P}^3 - \frac{1}{2\xi_i^2}F_{1P}^2\right)$$

$$+ F_1\left(\frac{Z^2}{24\xi_i^2} + \frac{1}{2\xi_i^2}F_{1P} + F_{1P}^2 + \frac{1}{8\xi_i^4} - \frac{P^2}{8\xi_i^2}\right) \qquad (5.54)$$

gdzie:

$$F_1(Z,P,\xi_i) = Z\,\mathrm{sh}(\xi_i Z)/\left[2\xi_i\,\mathrm{ch}(\xi_i P)\right],$$

$$F_{1P} = F_1(P,P,\xi_i).$$

Rozwiązanie zadania (5.39) - (5.41) dane jest zatem wzorem:

$$T(X,Y,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\bar{\psi}_{k,i}(X,1,\mu_i)\bar{T}_{1,i}^{(k)}(Fo)w_i(Y)}{\|w_i\|^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{\psi}_{k,i}(Y,B,\rho_i)\bar{T}_{B,i}^{(k)}(Fo)w_i(X)}{\|w_i\|^2}\right]. \qquad (5.55)$$

Ponieważ równanie (5.55) zawiera funkcje własne zagadnienia brzegowego, nie jest możliwa jego ekstrapolacja poza kontur X = 1, Y = B. W rozdziale 1 niniejszej pracy wspomniano, że taka możliwość teoretycznie istnieje. W tym celu należy obliczyć wartość całek (5.47). Wykonując całkowanie przez części nieskończoną liczbę razy na przykład pierwszej z nich, otrzymuje się:

$$\int_0^B T_1(Y,Fo)w_i\,dY = \frac{(-1)^{i-1}}{\mu_i}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l T_1^{(21)}(B,Fo)}{\mu_i^{21}},$$

gdzie

$$T_1^{(1)}(B,Fo) = \left.\frac{\partial^1 T_1(Y,Fo)}{\partial Y^1}\right|_{Y=B}$$

Pojawiające się teraz sumy $\bar{\psi}_{k,i}w_i$ mogą być zapisane w postaci funkcji $\psi_{k,l}(X,Y,X_1,Y_1)$, a samo rozwiązanie

$$T(X,Y,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\psi_{k,l}(X,Y,X_1,Y_1)T_{X_1}^{(21)(k)}(Y_1,Fo) + \right.$$

$$\left. + \psi_{k,l}(Y,X,Y_1,X_1)T_{Y_1}^{(21)(k)}(X_1,Fo)\right], \qquad (5.56)$$

gdzie np.:

$$T_{Y_1}^{(21)(k)}(X_1,Fo) = \left.\frac{\partial^k}{\partial Fo^k}\frac{\partial^{21}T_B(X,Fo)}{\partial X^{21}}\right|_{X=X_1}$$

$$T_B(X,Fo) = T(X,Y_1,Fo)$$

Współrzędne X_1, Y_1 mogą być wybrane dowolnie. Funkcje $\psi_{k,l}$ wymagają rozwiązania odwrotnego zadania, sformułowanego podobnie jak dla stanu ustalonego, np.:

$$\frac{\partial^2\psi_{0,0}(X,Y,X_1,Y_1)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi_{0,0}(X,Y,X_1,Y_1)}{\partial Y^2} = 0, \qquad (5.57)$$

$$\psi_{0,0} = 1 \quad \text{dla} \quad X = X_1, \quad \psi_{0,0} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = Y_1,$$

$$\frac{\partial\psi_{0,0}}{\partial X} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0, \quad \frac{\partial\psi_{0,0}}{\partial Y} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = 0.$$

Jednakże równanie (5.56) jest praktycznie bezwartościowe, gdyż dwukrotne różniczkowanie funkcji powoduje, że uzyskane wartości liczbowe są bardzo słabo stabilne i bardzo słabo zbieżne. Zbliżony rezultat, tzn. szeregi, gdzie występuje różniczkowanie funkcji według dwóch współrzędnych, uzyskano w [26].

Ekstrapolacja rozwiązania jest jednak możliwa wzdłuż jednej współrzędnej dla pewnych szczególnych przypadków. Dotyczy to np. zadania, w którym rozwiązanie klasycznego zagadnienia początkowo-brzegowego można przedstawić w postaci iloczynowej, tzn. w przypadku, gdy wszystkie warunki brzegowe są jednorodne [12].

Przykładowo

$$T(X,Y,Fo) = T_X(X,Fo)T_Y(Y,Fo) \qquad (5.58)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial X} + Bi_X T = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1 \qquad (5.59)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} + Bi_Y T = 0 \quad \text{dla} \quad Y = B \qquad (5.60)$$

przy czym powinny być znane warunki brzegowe dla jednej ze zmiennych, tzn. (5.59) lub (5.60).

Funkcja $T_X(X,Fo)$ dane jest wzorem:

$$T_X(X,Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i}{\|w_i\|^2} \left(\int_0^1 T_X(X,0)\, w_i\, dX\right) e^{-\vartheta_i^2 Fo},$$

gdzie:

$$w_i = \cos \vartheta_i X, \qquad \vartheta_i \operatorname{tg} \vartheta_i = Bi_X, \tag{5.61}$$

zaś

$$T_Y(Y,Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|^2} \left(\int_0^B T_Y(Y,0) v_i\, dY\right) e^{-\mu_i^2 Fo}, \tag{5.62}$$

gdzie:

$$v_i = \cos \mu_i Y, \qquad \mu_i \operatorname{tg} \mu_i B = Bi_Y$$

Niech znany jest początkowy rozkład temperatury dla $X = X_1$.

Wtedy

$$T_Y(Y,0) = \frac{1}{\delta} T(X_1,Y,0), \tag{5.63}$$

gdzie

$$\delta = T_X(X_1,0)$$

jest nieznaną liczbą.

Równanie (5.62) można teraz przedstawić w postaci:

$$T_Y(Y,Fo) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|^2} \left(\int_0^B T(X_1,Y,0) v_i\, dY\right) e^{-\mu_i^2 Fo} = \frac{1}{\delta} F_Y(Y,Fo). \tag{5.64}$$

Gdyby funkcja $T_Y(Y,Fo)$ była znana, to problem sprowadziłby się do rozwiązania jednowymiarowego zadania odwrotnego. Z uwagi na to, że rozpatrywane pole jest polem symetrycznym, wystarczałaby informacja o przebiegu funkcji $T_X(X,Fo)$ dla jednego dowolnie wybranego punktu o współrzędnych X_1Y_1.

Funkcja odpowiadająca termicznej odpowiedzi układu może być zapisana w postaci:

$$T_{AX}(X_1,Fo) = \frac{T(X_1,Y_1,Fo)}{T_Y(Y_1,Fo)} = \frac{\delta T(X_1,Y_1,Fo)}{F_Y(Y_1,Fo)} = \delta F_X(X_1,Fo). \tag{5.65}$$

Rozwiązanie jednowymiarowego symetrycznego zadania odwrotnego dane jest równaniem (5.35)

$$T_X(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(X,X_1) T_{AX}^{(k)}(X_1,Fo) = \delta \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(X,X_1) F_X^{(k)}(X_1,Fo) \tag{5.66}$$

Podstawiając (5.64) i (5.66) do (5.58), otrzymuje się:

$$T(X,Y,Fo) = T_X(X,Fo) T_Y(Y,Fo) = F_Y(Y,Fo) \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(X,X_1) F_X^{(k)}(X_1,Fo) \tag{5.67}$$

W rozwiązaniu (5.67) uprościła się nieznana liczba δ. Rozwiązanie to wymaga zatem informacji o początkowym rozkładzie temperatury wzdłuż dowolnie przyjętej współrzędnej $X = X_1$ (tzn. funkcji $T(X_1,Y,0)$), o jednorodnych warunkach brzegowych dla $Y = 0$ i $Y = B$ oraz informacji o przebiegu temperatury dla punktu o współrzędnych X_1, Y_1, tzn. funkcji $T(X_1,Y_1,Fo)$. Na podstawie tych informacji wyznacza się funkcję

$$F_Y(Y,Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|^2} \left(\int_0^B T(X_1,Y,0) v_i\, dY\right) e^{-\mu_i^2 Fo}, \tag{5.68}$$

a następnie

$$F_X(X_1,Fo) = \frac{T(X_1,Y_1,Fo)}{F_Y(Y_1,Fo)}$$

i wreszcie temperaturę $T(X,Y,Fo)$, określoną równaniem (5.67).

Inny przypadek, także związany z ekstrapolacją wzdłuż jednej tylko współrzędnej wynika bezpośrednio z równania (5.55). Jeżeli w równaniu tym przyjąć, że jedna z występujących tam temperatur (np. T_B) jest równa zero, to rozwiązanie przyjmie postać:

$$T_I(X,Y,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_{k,i}(X,X_1,\mu_i) \bar{T}_{1,I,i}^{(k)}(Fo) v_i(Y)}{\|v_i\|^2}. \tag{5.69}$$

Funkcje $\bar{\varphi}_{k,i}$ określone są zależnościami (5.54) po przyjęciu $P = X_1$, $0 < X_1 \leqslant 1$. Można wykazać w sposób analogiczny jak w Dodatku B, że rozwiązanie (5.69) może być ekstrapolowane poza przedział $[0,X_1]$. Do przypadku tego można sprowadzić zagadnienie opisane równaniami (5.39) - (5.41) przez zastosowanie zasady superpozycji, przyjmując, że:

$$T_I(X,Y,Fo) = T(X,Y,Fo) - T_{II}(X,Y,Fo),$$

$$T_{1,I}(Y,Fo) = T(X_1,Y,Fo) - T_{II}(X_1,Y,Fo).$$

Funkcja T_{II} jest rozwiązaniem problemu opisanego równaniem (5.39), warunkami (5.40) i spełnia jednorodny warunek początkowy oraz

$$T_{II}(X\ Y,Fo) = T_B(X,Fo) \quad \text{dla} \quad Y = B,$$

$$T_{II}(X,Y,Fo) = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1.$$

Dla innych przypadków pól wielowymiarowych (np. niesymetryczne, inna geometria ciała) można uzyskiwać rozwiązanie w sposób analogiczny jak dla zadań opisanych w tym punkcie.

5.8. Uwagi o rozwiązywaniu problemów nieliniowych

Za pomocą opisanej w tym rozdziale metody można rozwiązywać każde zagadnienie, które dopuszcza stosowane tu przekształcenia. Można jednak w sposób przybliżony rozwiązywać problemy nieliniowe, dla których współczynniki określające właściwości substancji są funkcjami temperatury. Ponieważ metoda nie wymaga formułowania warunku początkowego, to każdy moment czasowy może być uważany za początek procesu nieustalonego. Wystarczy zatem podzielić rozpatrywany przedział czasu na dowolnie małe podprzedziały, w których odwrotne zadanie jest niezależnie rozwiązywane. W każdym z takich podprzedziałów należy uśrednić wartości tych współczynników.

6. ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ NIEUSTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA SFORMUŁOWANYCH NUMERYCZNIE

Numeryczne sformułowanie zadań nieustalonego przewodzenia ciepła prowadzi wprost do układu równań typu (4.1), którego rozwiązanie można przedstawić w postaci (4.7). Liczba poszukiwanych wartości temperatury w węzłach powinna być równa liczbie równań różnicowych. Po dokładniejszej analizie okazuje się jednak, że nie jest to warunek wystarczający. Problem ten został poniżej opisany na przykładach kilku typowych zadań.

Dla wygody opisu węzły podziału różnicowego podzielono w niniejszym rozdziale umownie na trzy grupy: węzły powierzchniowe, brzegowe i wewnętrzne. Węzłami powierzchniowymi nazwano takie, dla których przyjmuje się pojemność cieplną równą zero, a opór przewodzenia ciepła między nimi jako nieskończenie wielki. Węzłami brzegowymi nazwano takie, dla których element różnicowy, którego reprezentantem jest węzeł brzegowy, kontaktuje się z powierzchnią zewnętrzną ciała. Pozostałe węzły nazwano wewnętrznymi.

Rozpatrywane tu zadania można podzielić na dwie grupy: zagadnienia wewnętrzne i problemy ekstrapolacji rozwiązania. Każda z tych grup charakteryzuje się swoją specyfiką. W zadaniach tych zakłada się, że elementy macierzy A, zawierającej współczynniki równań różnicowych nie zależą od temperatury, natomiast mogą zależeć od miejsca. Rozpatrywane będą wyłącznie takie problemy, w których nie zachodzi potrzeba dyskretyzacji pochodnej temperatury względem czasu.

6.1. Jednowymiarowe pole nieustalone - problem ekstrapolacji rozwiązania

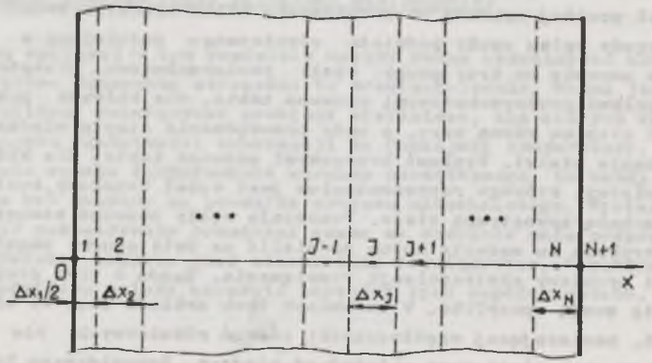
Jak wynika z rozważań rozdziału 5, rozwiązanie odwrotnego zagadnienia dla pola jednowymiarowego wymaga informacji albo o przebiegu temperatury dla dwóch punktów (węzłów) ciała, albo o przebiegu temperatury i gęstości strumienia ciepła. W tym ostatnim przypadku informacje te mogą dotyczyć tego samego punktu. Dla pól symetrycznych wystarcza znajomość przebiegu temperatury w jednym punkcie.

Ekstrapolacja rozwiązania jest możliwa wtedy, gdy każde równanie różnicowe, w którym występuje termiczna odpowiedź układu zawiera tylko jedną nieznaną temperaturę, przy czym nie może to być temperatura tego węzła, dla którego równanie to sporządzono. Oznacza to, że muszą być dane przebiegi temperatury dla dwóch kolejnych węzłów lub inaczej musi być znany

w danym punkcie przebieg temperatury i gęstości strumienia ciepła, np. temperatura węzła brzegowego przy znanym warunku brzegowym, temperatura węzła położonego w osi symetrii itp.

Jak widać z powyższych rozważań, problem powinien być sformułowany analogicznie jak w analitycznej metodzie BURGGRAFA [10]. Przy spełnieniu powyższych warunków nie rozwiązuje się układu równań różniczkowych, gdyż z każdego równania można wprost wyznaczyć poszukiwane funkcje. Nie występuje tu też problem sformułowania warunku początkowego. Poniżej przedstawiono przykłady wyznaczania pola temperatury w płycie symetrycznej i niesymetrycznej.

Przykład 1: płyta symetryczna



Rys. 7. Podział różnicowy płyty symetrycznej

Dla płyty przedstawionej na rys. 7 powierzchnia x=0 jest płaszczyzną symetrii. Węzły od 1 do N-1 są węzłami wewnętrznymi, węzeł N - brzegowym, N+1 - powierzchniowym. Pole temperatury opisane jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\frac{dT_1}{d\tau} = A_{1,1}\,T_1 + A_{1,2}\,T_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.1)$$

$$\frac{dT_i}{d\tau} = A_{i,i-1}\,T_{i-1} + A_{i,i}\,T_i + A_{i,i+1}\,T_{i+1}$$

$$i = 2,3,\ldots,N,$$

gdzie [32]:

$$A_{1,2} = \frac{4}{(\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2})c_1 \varrho_1 \Delta x_1}, \qquad A_{1,1} = -A_{1,2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{i,i-1} = \frac{2}{(\frac{\Delta x_i}{\lambda_i} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\lambda_{i-1}})c_i \varrho_i \Delta x_i}, \qquad A_{i,i+1} = \frac{2}{(\frac{\Delta x_i}{\lambda_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{\lambda_{i+1}})c_i \varrho_i \Delta x_i}$$

$$A_{i,i} = -(A_{i,i-1} + A_{i,i+1}) \qquad i = 2,3,\ldots,N-1, \qquad (6.2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{N,N-1} = \frac{2}{(\frac{\Delta x_N}{\lambda_N} + \frac{\Delta x_{N-1}}{\lambda_{N-1}})\, c_N \varrho_N \Delta x_n},$$

$$A_{N,N+1} = \frac{2\lambda_N}{\Delta x_N^2\, c_N \varrho_N}, \qquad A_{N,N} = -(A_{N,N-1} + A_{N,N+1}).$$

W równaniach tych c_i, ϱ_i, λ_i oznaczają odpowiednio pojemność cieplną właściwą, gęstość i współczynnik przewodzenia ciepła dla materiału wypełniającego i-ty element różnicowy.

Jeżeli dany jest przebieg temperatury T_1 dla węzła położonego w osi symetrii, to, jak łatwo zauważyć, w każdym równaniu układu (6.1) występuje tylko jedna nieznana funkcja. I tak z pierwszego równania można wyznaczyć temperaturę T_2, z drugiego T_3 itd. z N-tego - T_{N+1}. Nie występuje tu zatem potrzeba rozwiązywania układu równań różniczkowych, stąd nie występuje też problem sformułowania warunku początkowego.

Ostatecznie, jeżeli tylko $A_{i,m} = \text{const}$, temperaturę w węzłach można przedstawić zależnością:

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \phi_{k,i}\, T_1^{(k)}(\tau). \qquad (6.3)$$

Współczynniki $\phi_{k,i}$ wyznacza się z równań:

$$\phi_{0,1} = 1,$$

$$\phi_{0,2} = -A_{1,1}/A_{1,2}, \qquad (6.4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi_{0,i+1} = -(A_{i,i}\,\phi_{0,i} + A_{i,i-1}\,\phi_{0,i-1})/A_{i,i+1},$$

$$i = 2,3,\ldots,N,$$

$$\phi_{k,1} = 0,$$

$$\phi_{k,2} = (\phi_{k-1,1} - A_{1,1}\,\phi_{k,1})/A_{1,2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6.5)$$

$$\phi_{k,i+1} = (\phi_{k-1,i} - A_{i,i}\,\phi_{k,i} - A_{i,i-1}\,\phi_{k,i-1})/A_{i,i+1},$$

$$k = 1,2,\ldots,N,$$

$$i = 2,3,\ldots,N.$$

Łatwo zauważyć, że współczynniki te spełniają układ równań algebraicznych, którego macierz zbudowana jest z współczynników $A_{i,m}$.

$$A_{1,1}\,\phi_{0,1} + A_{1,2}\,\phi_{0,2} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6.6)$$

$$A_{i,i-1}\,\phi_{0,i-1} + A_{i,i}\,\phi_{0,i} + A_{i,i+1}\,\phi_{0,i+1} = 0,$$

$$i = 2,3,\ldots,N$$

oraz

$\phi_{0,1} = 1$ (współczynnik odpowiadający znanej temperaturze),

$$A_{1,1}\,\phi_{k,1} + A_{1,2}\,\phi_{k,2} = \phi_{k-1,1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6.7)$$

$$A_{i,i-1}\,\phi_{k,i-1} + A_{i,i}\,\phi_{k,i} + A_{i,i+1}\,\phi_{k,i+1} = \phi_{k-1,i},$$

$$k = 1,2,\ldots,N,$$

$$i = 2,3,\ldots,N,$$

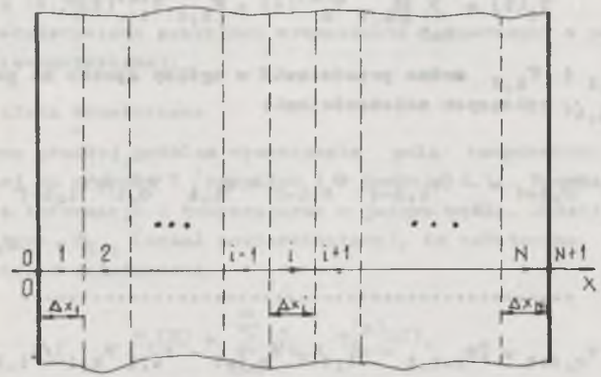
oraz

$$\phi_{k,1} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\ldots$$

Jeżeli współczynniki $A_{i,m}$ są zmienne z temperaturą, to można posłużyć się metodą iteracji tak, jak w klasycznych problemach różnicowych lub podzielić rozpatrywany przedział czasu na podprzedziały tak, jak to opisano w punkcie 5.8.

Podobny rezultat uzyskano w [21], z tym że tam również pochodne $dT_i/d\tau$ przedstawiono w postaci ilorazu różnicowego. W związku z tym w ostatecznym rozwiązaniu występują ilorazy różnicowe wyższych rzędów, chociaż autor nie pisze o tym wyraźnie.

Przykład 2: płyta niesymetryczna



Rys. 8. Podział różnicowy płyty niesymetrycznej

Dla płyty przedstawionej na rys. 8 węzły 0 i N+1 są węzłami powierzchniowymi, 1 i N - brzegowymi, a pozostałe wewnętrznymi. Pole temperatury opisane jest następującym układem równań:

$$\frac{dT_1}{d\tau} = A_{1,0}\,T_0 + A_{1,1}\,T_1 + A_{1,2}\,T_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6.8)$$

$$\frac{dT_i}{d\tau} = A_{i,i-1}\,T_{i-1} + A_{i,i}\,T_i + A_{i,i+1}\,T_{i+1}$$

$$i = 2,3,\ldots,N,$$

gdzie:

$$A_{1,0} = \frac{2\lambda_1}{\Delta x_1^2\, c_1 \varrho_1}, \qquad A_{1,2} = \frac{2}{(\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}) c_1 \varrho_1 \Delta x_1},$$

$$A_{1,1} = -(A_{1,0} + A_{1,2}),$$

a pozostałe współczynniki są opisywane zależnościami analogicznymi jak w przykładzie 1 (równania (6.2)).

W szczególnym przypadku temperatury T_0 i T_{N+1} mogą oznaczać temperaturę otoczenia, a nie temperaturę w węzłach powierzchniowych (modyfikacji ulegną tylko współczynniki $A_{1,0}$ i $A_{N,N+1}$ [32]).

Jak już wspomniano, ekstrapolacja rozwiązania jest możliwa, jeżeli znana jest temperatura w dwóch kolejnych węzłach, np. T_0 i T_1. W ten sposób w każdym równaniu (6.8) występuje jedna nieznana funkcja. Rozwiązanie zaś można przedstawić w postaci (przy $A_{i,m}$ = const):

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \left[\phi_{k,i}\, T_0^{(k)}(\tau) + \psi_{k,i}\, T_1^{(k)}(\tau)\right]. \qquad (6.9)$$

Wielkości $\phi_{k,i}$ i $\psi_{k,i}$ można przedstawić w ogólny sposób za pomocą współczynników $\Psi_{k,i}$, opisanych zależnościami:

$$\Psi_{0,i+1} = -\left(A_{i,i-1}\,\Psi_{0,i-1} + A_{i,i}\,\Psi_{0,i}\right)/A_{i,i+1}$$

$$i = 1,2,\ldots,N,$$

$$\Psi_{k,i+1} = \left(\Psi_{k-1,i} - A_{i,i-1}\,\Psi_{k,i-1} - A_{i,i}\,\Psi_{k,i}\right)/A_{i,i+1} \qquad (6.10)$$

$$k = 1,2,\ldots,N,$$

$$i = 1,2,\ldots,N,$$

przy czym

$$\phi_{k,i} \equiv \Psi_{k,i}$$

po przyjęciu

$$\phi_{0,0} = \Psi_{0,0} = 1,\ \phi_{0,1} = \Psi_{0,1} = 0,\ \phi_{k,1} = \Psi_{k,1} = 0,\quad k = 1,2,\ldots \qquad (6.11)$$

zaś

$$\psi_{k,i} \equiv \Psi_{k,i},$$

po przyjęciu

$$\psi_{0,0} = \Psi_{0,0} = 0,\ \psi_{0,1} = \Psi_{0,1} = 1,\ \psi_{k,1} = \Psi_{k,1} = 0.\quad k = 1,2,\ldots \qquad (6.12)$$

6.2. Jednowymiarowe pole nieustalone - problem wewnętrzny[x)]

Rozwiązanie jednowymiarowego problemu wewnętrznego wymaga informacji o temperaturze w dwóch węzłach powierzchniowych dla pól niesymetrycznych lub w jednym węźle dla pól symetrycznych. Można też rozpatrywać zagadnienia mieszane (znana temperatura w jednym i gęstość strumienia ciepła w drugim węźle). Rozwiązanie układu równań różniczkowych przyjmuje wtedy postać (4.7). Współczynniki $\phi_{k,p}$ wyznacza się z układu równań algebraicznych typu (4.5). W tym miejscu należy jednak stwierdzić, że od pewnej wartości k, układ ten staje się słabo uwarunkowany. Ogranicza to liczbę wyrazów szeregu (4.7).

Poniżej przedstawiono przykłady wyznaczania temperatury w płycie symetrycznej i niesymetrycznej.

Przykład 1: płyta symetryczna

Rozpatrzono poniżej problem wyznaczania pola temperatury w płycie, przedstawionej na rysunku 7 (przykład 1 w punkcie 6.1). Rozwiązanie zagadnienia wymaga informacji o temperaturze w jednym węźle. Jeżeli dany przebieg temperatury T_{N+1} (węzeł powierzchniowy), to ostateczne rozwiązanie można przedstawić zależnością:

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k,i}\, T_{N+1}^{(k)}(\tau), \qquad (6.13)$$

gdzie współczynniki $\phi_{k,i}$ są rozwiązaniami układów równań algebraicznych analogicznych jak (6.6) i (6.7) z tą różnicą, że w tym przypadku

$$\phi_{0,N+1} = 1 \quad \text{i} \quad \phi_{k,N+1} = 0 \qquad \text{dla} \qquad k = 1,2,\ldots, \qquad (6.14)$$

czyli wartość 1 ma zawsze zerowy współczynnik, stojący przy współczynniku $A_{i,m}$, związanym ze znaną temperaturą T_m, a wartość 0 wszystkie k-te współczynniki, związane z $A_{i,m}$.

Rozwiązanie (6.13) jest poprawne, jeżeli tylko spełniony jest warunek (4.6), Łatwo można tego dowieść. Wystarczy zauważyć, że współczynniki $\phi_{k,i}$ są wynikiem różnicowego rozwiązania zadania typu (5.27) i (5.28). Inny dowód zamieszczono w Dodatku C.

Można też rozpatrywać zagadnienia złożone, polegające na równoczesnej ekstrapolacji i rozwiązywaniu zadań wewnętrznych. Dla jednowymiarowych pól symetrycznych przypadek taki ma miejsce wtedy, gdy znana jest temperatura w dowolnym węźle wewnętrznym, np. T_J (por. rys. 7). Przy tak sformułowanym problemie najpierw rozwiązuje się zagadnienie wewnętrzne, traktując węzeł J-ty tak, jak węzeł powierzchniowy, tzn. układ równań (6.1) ograni-

x) Pojęcie "problem wewnętrzny" objaśniono w punkcie 5.3.

cza się do równań od 1 do J-1. Następnie po wyznaczeniu temperatury T_{J-1} można przeprowadzić ekstrapolację rozwiązania do T_{N+1}, wykorzystując równania J, J+1, ..., N.

Przykład 2: płyta niesymetryczna

Dla płyty przedstawionej na rys. 8 znana jest temperatura w węzłach 0 i N+1 (węzły powierzchniowe)*). Rozwiązanie zagadnienia przedstawia zależność:

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\phi_{k,i}\, T_0^{(k)}(\tau) + \varphi_{k,i}\, T_{N+1}^{(k)}(\tau) \right] \qquad (6.15)$$

Wielkości $\phi_{k,i}$ i $\varphi_{k,i}$ można przedstawić za pomocą współczynników $\psi_{k,i}$, spełniających układ równań:

$$A_{i,i-1}\,\psi_{0,i-1} + A_{i,i}\,\psi_{0,i} + A_{i,i+1}\,\psi_{0,i+1} = 0 \qquad (6.16)$$

$$i = 1,2,\ldots,N,$$

$$A_{i,i-1}\,\psi_{k,i-1} + A_{i,i}\,\psi_{k,i} + A_{i,i+1}\,\psi_{k,i+1} = \psi_{k-1,i} \qquad (6.17)$$

$$k = 1,2,\ldots,$$

$$i = 1,2,\ldots,N,$$

przy czym

$$\phi_{k,i} \equiv \psi_{k,i},$$

po przyjęciu

$$\phi_{0,0} = \psi_{0,0} = 1, \quad \phi_{0,N+1} = \psi_{0,N+1} = 0$$

$$\phi_{k,0} = \psi_{k,0} = \phi_{k,N+1} = \psi_{k,N+1} = 0 \qquad (6.18)$$

oraz

$$\varphi_{k,i} \equiv \psi_{k,i},$$

po przyjęciu

$$\varphi_{0,N+1} = \psi_{0,N+1} = 1, \quad \varphi_{0,0} = \psi_{0,0} = 0 \qquad (6.19)$$

$$\varphi_{k,0} = \psi_{k,0} = \varphi_{k,N+1} = \psi_{k,N+1} = 0$$

*) T_0 i T_{N+1} nie mogą tu oznaczać temperatury otoczenia, gdyż nie spełnia ona postulatów stawianych termicznej odpowiedzi układu, zaś własności termicznej odpowiedzi układu są wykorzystane w wykazaniu słuszności warunku (4.6).

Dowód, że w tym przypadku spełniony jest warunek (4.6) można przeprowadzić analogicznie jak w przykładzie poprzednim.

Jeżeli dana jest temperatura dla dwóch węzłów wewnętrznych, to najpierw rozwiązuje się zagadnienie wewnętrzne między tymi węzłami, a następnie z każdej strony ekstrapoluje się rozwiązanie aż do węzłów powierzchniowych.

6.3. Nieustalone pole dwuwymiarowe

Przy wyznaczaniu dwuwymiarowego pola temperatury także można mówić o zagadnieniu wewnętrznym i o ekstrapolacji rozwiązania. Zagadnienie wewnętrzne występuje wówczas, gdy węzły, w których temperatura jest znana, tworzą zamknięty kontur (traktuje się je jak powierzchniowe). Wewnątrz tego konturu znajdują się wyłącznie węzły brzegowe lub wewnętrzne. W szczególnym przypadku tym konturem może być powierzchnia zewnętrzna ciała.

Ekstrapolacja rozwiązania możliwa jest wówczas, gdy w każdym równaniu różniczkowym, które zawiera termiczną odpowiedź układu, występuje tylko jedna nieznana funkcja, przy czym nie może to być temperatura tego węzła, dla którego równanie to sporządzono. Istnieją tu jednak dalsze ograniczenia w doborze punktów, dla których znane są przebiegi temperatury. Warunek, aby liczba niewiadomych była równa liczbie równań nie jest w tym przypadku warunkiem wystarczającym i nie w każdej sytuacji możliwe jest wyznaczenie wszystkich niewiadomych. Podobny problem zasygnalizowano w [21]. Ograniczenia te zilustrowano w dalszej części pracy przykładem dwuwymiarowego pola symetrycznego.

Rozwiązanie zadania, polegającego na wyznaczeniu pola temperatury, dane jest równaniem (4.7). Poniżej przedstawiono go w trochę innej postaci. Obejmuje ona także przypadki omówione w punktach 6.1 i 6.2.

Wprowadza się następujące oznaczenia:

N - liczba węzłów wewnętrznych lub brzegowych,

L - liczba węzłów powierzchniowych,

L_p - liczba węzłów, w których znana jest temperatura, przy czym $L_p = L$,

przy czym indeksy węzłów wewnętrznych lub brzegowych przybierają wartości 1,2,...,N, zaś węzłów powierzchniowych N+1, N+2, ..., N+L.

J - macierz kolumnowa L-elementowa, zawierająca indeksy węzłów, dla których temperatura jest znana,

T - macierz kolumnowa N-elementowa, zawierająca temperatury w węzłach brzegowych lub wewnętrznych,

R - macierz kolumnowa M-elementowa, zawierająca temperatury we wszystkich węzłach, przy czym $R_i = T_i$, $i = 1,2,\ldots,N$,

A - macierz N x M-elementowa, zawierająca współczynniki układu równań różnicowych.

Pole temperatury może być opisane układem równań:

$$\frac{dT}{d\tau} = A\,R. \tag{6.20}$$

Dla zapisu rozwiązania wprowadza się macierz H o wymiarach M x M, składającą się z podmacierzy A i podmacierzy B

$$H = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Macierz B o wymiarach L x M zawiera w każdym wierszu jeden niezerowy element równy jedności, występujący kolejno w kolumnach o indeksach odpowiadających indeksom węzłów o znanej temperaturze, tzn.:

$$B_{i,m} = 1 \quad \text{dla} \quad m = J_i, \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,L, \\ m = 1,2,\ldots,M \end{matrix} \tag{6.22}$$

$$B_{i,m} = 0 \quad \text{dla} \quad m \neq J_i, \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,L, \\ m = 1,2,\ldots,M. \end{matrix}$$

Przez $\Psi_{k,p}$ $(p = 1,2,\ldots,L_p)$ oznaczono macierze kolumnowe M-elementowe, zawierające współczynniki rozwiązania zadania odwrotnego, a przez $P_{k,p}$ macierze kolumnowe M-elementowe, przy czym macierze $P_{0,p}$ zawierają elementy zerowe z wyjątkiem elementu N + p, który jest równy 1, zaś dla macierzy $P_{k,p}$ $(k > 0)$, pierwszych N elementów równych jest kolejno pierwszym N elementom macierzy $\Psi_{k-1,p}$, a pozostałe są równe zero, tzn.

$$\Psi^T_{k,p} = \left[\Psi_{k,p,1},\ \Psi_{k,p,2},\ \ldots,\ \Psi_{k,p,i},\ldots,\Psi_{k,p,M}\right]\ ^{x)}, \tag{6.23}$$

$$P^T_{k,p} = \left[P_{k,p,1},\ P_{k,p,2},\ \ldots,\ P_{k,p,i},\ldots,P_{k,p,M}\right], \tag{6.24}$$

przy czym

$$P_{0,p,i} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq N+p, \quad p = 1,2,\ldots,L_p, \quad i = 1,2,\ldots,M \tag{6.25}$$

$$P_{0,p,p+N} = 1, \quad p = 1,2,\ldots,L_p,$$

$$P_{k,p,i} = \Psi_{k-1,p,i} \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,M,$$

x) $(.)^T$ oznacza operację transponowania.

$$P_{k,p,i} = 0 \quad \text{dla} \quad i = N+1,\ N+2,\ldots,M,$$

$$\text{dla} \quad p = 1,2,\ldots,L_p$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Rozwiązanie zagadnienia może być przedstawione zależnością (przy warunku koniecznym N = M - L)

$$T(\tau) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{p=1}^{L_p} \Psi_{k,p}\, T^{(k)}_{J_p}(\tau), \tag{6.26}$$

gdzie macierze kolumnowe $\Psi_{k,p}$ spełniają układy równań algebraicznych

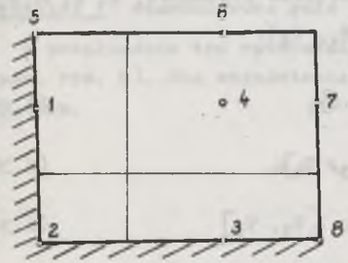
$$H\,\Psi_{k,p} = P_{k,p}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots,L_p. \tag{6.27}$$

Badając rząd macierzy H, można stwierdzić, czy istnieje rozwiązanie problemu.

Dla zadania ekstrapolacji wskaźnik K = N (dla $k > N$ macierze $\Psi_{k,p} = 0$). Zadanie to zilustrowano przykładem dwuwymiarowego pola symetrycznego.

Przykład 1: dwuwymiarowe pole symetryczne

Dla płyty przedstawionej na rys. 9 węzły 5,1,2,3,8 leżą w osi symetrii, węzły od 1 do 4 są węzłami wewnętrznymi (lub brzegowymi), a od 5 do 8 - powierzchniowymi. W przykładzie zatem N = 4, L = 4 i M = 8. Można zapisać N = 4 równania różniczkowe w postaci:



Rys. 9. Symetryczna płyta dwuwymiarowa

$$\frac{dT_1}{d\tau} = A_{11}\,T_1 + A_{12}\,T_2 + A_{14}\,T_4 + A_{15}\,T_5, \tag{6.28}$$

$$\frac{dT_2}{d\tau} = A_{21}\,T_1 + A_{22}\,T_2 + A_{23}\,T_3,$$

$$\frac{dT_3}{d\tau} = A_{32}\,T_2 + A_{33}\,T_3 + A_{34}\,T_4 + A_{38}\,T_8,$$

$$\frac{dT_4}{d\tau} = A_{41}\,T_1 + A_{43}\,T_3 + A_{44}\,T_4 + A_{46}\,T_6 + A_{47}\,T_7$$

lub w zapisie macierzowym

$$\frac{dT}{d\tilde{z}} = A\,R$$

Niech dana jest temperatura w węzłach 5,1,2,3. Liczba niewiadomych jest równa liczbie równań, ale jak łatwo zauważyć, nie jest możliwe wyznaczenie wszystkich temperatur.

Można obliczyć z pierwszego równania T_4, z trzeciego T_8, ale pozostają T_6 i T_7. Przy większej liczbie węzłów okazałoby się, że przy tak zadanych wielkościach nie jest możliwe wyznaczenie temperatury dla węzłów leżących poza prostą, łączącą skrajne węzły powierzchniowe (tu: 5 i 8). Wynika to stąd, że na przykład w drugim równaniu układu (6.28) występują wyłącznie wielkości dane i tym samym jest ono nieprzydatne. Poza tym w otwartym równaniu występują dwa węzły powierzchniowe.

Zadanie to może być natomiast rozwiązane, jeżeli dane są np. T_1, T_2, T_5, T_6. Tak sformułowane zadanie przypomina problem opisywany w punkcie 5.7 (ekstrapolacja wzdłuż jednej współrzędnej).

Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że ekstrapolacja rozwiązania wymaga znajomości temperatury w pewnej liczbie węzłów powierzchniowych (tu: w połowie). Nie może też wystąpić w jednym równaniu więcej niż jedna niezmana temperatura w węźle powierzchniowym. W ogólnym przypadku należy badać rząd macierzy H((6.21)).

Dla porządku zostaną zapisane jeszcze macierze kolumnowe J, T, R, $P_{k,p}$ oraz macierze A i D (dla danych T_1, T_2, T_5, T_6):

$$J^T = [1,\ 2,\ 5,\ 6], \tag{6.29}$$

$$T^T = [T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4], \tag{6.30}$$

$$R^T = [T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ \ldots, T_7,\ T_8] \tag{6.31}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}, & \ldots, & A_{18} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{41}, & \ldots, & A_{48} \end{bmatrix} \tag{6.32}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

$$P^T_{0,1} = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0] \tag{6.34}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^T_{0,4} = [0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1]$$

$$P^T_{k,1} = [\psi_{k-1,1,1},\ \psi_{k-1,1,2},\ \ldots,\ \psi_{k-1,1,4},\ 0,\ \ldots,\ 0] \tag{6.35}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^T_{k,4} = [\psi_{k-1,4,1},\ \psi_{k-1,4,2},\ \ldots,\ \psi_{k-1,4,4},\ 0,\ \ldots,\ 0].$$

Ostatecznie np.:

$$T_4(\tilde{z}) = \sum_{k=0}^{4} \sum_{p=1}^{4} \psi_{k,p,4}\, T^{(k)}_{J_p}(\tilde{z}). \tag{6.36}$$

Rozwiązanie zadania wewnętrznego przedstawia równanie (4.7)*). Można je także przedstawić zależnością (6.26), z tym że teraz K→∞. Zilustrowano je przykładem pola symetrycznego.

Przykład 2: dwuwymiarowe pole symetryczne.

W przykładzie tym wykorzystano oznaczenia z przypadku 1 tego punktu (por. rys. 9). Dla zagadnienia wewnętrznego dane są temperatury T_5, T_6, T_7, T_8, tzn.

$$N = 4, \quad L = 4, \quad M = 8,$$

$$J^T = [5,\ 6,\ 7,\ 8].$$

Macierz B przedstawia się następująco:

$$D = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

*) Przy ograniczeniach związanych z rozwiązywaniem układów (4.5) - por. punkt 6.2.

Macierz A ma postać analogiczną jak (6.32), macierze kolumnowe T jak (6.30), R - (6.31), $P_{0,p}$ - (6.34), $P_{k,p}$ - (6.35), a przykładowa temperatura $T_4(\tau)$ - (6.36), z tym że $k \to \infty$.

Poprawność warunku (4.6) można wykazać w sposób analogiczny jak dla pola jednowymiarowego, tzn. najpierw ekstrapolacja (przykład 1), a potem zadanie wewnętrzne (przykład 2). Przedstawiono ten sposób w Dodatku C.

7. USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA

7.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrywany w tym rozdziale problem polega na wyznaczeniu ustalonego dwuwymiarowego pola temperatury, opisywanego równaniem Laplace'a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{r-1}{X}\frac{\partial T}{\partial X} + \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = 0, \tag{7.1}$$

gdzie $r = 1$ dla płyty i $r = 2$ dla walca*).

Równanie (7.1) rozwiązuje się przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned} F_1(Y) &= T_A(X_1, Y) = T(X,Y) \quad \text{dla} \quad X = X_1 \\ F_2(Y) &= T_A(X_2, Y) = T(X,Y) \quad \text{dla} \quad X = X_2 \end{aligned} \tag{7.2}$$

lub

$$\begin{aligned} F_1(Y) &= T_A(X_1, Y) = T(X,Y) \quad \text{dla} \quad X = X_1, \\ F_2(Y) &= Q_2(X_2, Y) = -\partial T/\partial X \quad \text{dla} \quad X = X_2 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Zmienne bezwymiarowe T, Q, X i Y są zdefiniowane tak, jak w punkcie 5.1 i 5.7 (por. rys. 6). Funkcje T_A i Q_A spełniają postulaty stawiane termicznej odpowiedzi układu.

Nie będą natomiast szczegółowo rozpatrywane przypadki, gdy dana jest termiczna odpowiedź wzdłuż osi X, tzn. $F_p(X)$ $(p = 1,2)$.

7.2. Rozwiązanie ogólne zagadnienia

Do rozwiązania problemu (7.1), (7.2) lub (7.3) wykorzystano metody opisane w rozdziale 4 (por. [22]).

*) Analizę ograniczono do pól dwuwymiarowych, chociaż można ją uogólnić na pola trójwymiarowe. Dla walca współrzędna X oznacza współrzędną promieniową.

W tym celu należy zastosować do równania (7.1) skończoną transformację całkową. Otrzymuje się

$$\frac{d^2T_i}{dY^2} - \mu_i^2 T_i = -\left(X^{r-1} v_i \frac{dT}{dX}\right)\Big|_{X_1}^{X_2} + \left(X^{r-1} T \frac{dv_i}{dX}\right)\Big|_{X_1}^{X_2} \qquad (7.4)$$

$$i = 1,2,\ldots$$

Wartości własne μ_i i funkcje własne v_i są rozwiązaniami zagadnienia Sturma - Liouville'a

$$\frac{1}{X^{r-1}} \frac{d}{dX}\left(X^{r-1} \frac{dv_i}{dX}\right) + \mu_i^2 v_i = 0, \qquad (7.5)$$

$$v_i = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1, \qquad (7.6)$$

$$v_i = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2$$

dla warunków (7.2) oraz

$$v_i = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1$$

$$\frac{dv_i}{dX} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2 \qquad (7.7)$$

dla warunków (7.3).

Wprowadzając macierz kolumnową Z, zdefiniowaną

$$Z_{2i-1} = T_i,$$

$$Z_{2i} = \frac{dT_i}{dY}, \qquad (7.8)$$

otrzymuje się układ równań (7.4) w postaci (4.1)

$$\frac{dZ}{dY} = C Z + B_1 F_1(Y) + B_2 F_2(Y), \qquad (7.9)$$

gdzie przez $B_1F_1(Y) + B_2F_2(Y)$ oznaczono symbolicznie prawą stronę układu (7.4).

Macierz C może być zapisana za pomocą podmacierzy c_i, o wymiarach 2 x 2, położonych na głównej przekątnej, tzn.

$$C = \begin{bmatrix} c_1, & 0, & 0, & \ldots \\ 0, & c_2, & 0, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \qquad (7.10)$$

gdzie:

$$c_i = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ \mu_i^2, & 0 \end{bmatrix} \qquad (7.11)$$

Macierze kolumnowe B_1 i B_2 można także przedstawić za pomocą dwuelementowych podmacierzy kolumnowych w postaci

$$B_p = \begin{bmatrix} B_{p,1} \\ B_{p,2} \\ \ldots \end{bmatrix}_{p=1,2}, \qquad B_{p,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{p,i} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} p = 1,2, \\ i = 1,2,\ldots \end{matrix} \qquad (7.12)$$

gdzie szczegółowa postać $B_{p,i}$ zależy od rodzaju warunków brzegowych.

Rozwiązanie układu równań (7.9) może być przedstawione w postaci (4.7), jeżeli tylko słuszny jest warunek (4.6).

$$Z(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\phi_{k,1} F_1^{(k)}(Y) + \phi_{k,2} F_2^{(k)}(Y)\right], \qquad (7.13)$$

gdzie

$$F_p^{(k)}(Y) = d^k F_p / dY^k.$$

Macierze kolumnowe $\phi_{k,p}$ można także przedstawić za pomocą dwuelementowych podmacierzy kolumnowych

$$\phi_{k,p} = \begin{bmatrix} \phi_{k,p,1} \\ \phi_{k,p,2} \\ \ldots \end{bmatrix}, \qquad \phi_{k,p,i} = \begin{bmatrix} \phi_{k,p,i} \\ \varphi_{k,p,i} \end{bmatrix} \qquad (7.14)$$

Z uwagi na to, że poszukiwane są funkcje T_i, a zatem Z_{2i-1}, interesujące są tylko współczynniki $\phi_{k,p,i}$ [m]).

Macierze $\phi_{k,p}$ spełniają układy równań (4.5). Łatwo zauważyć, że skoro

$$c_i^{-(2k+1)} = \begin{bmatrix} 0, & 1/\mu_i^{2k+2} \\ 1/\mu_i^{2k}, & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_i^{-2k} = \begin{bmatrix} 1/\mu_i^{2k}, & 0 \\ 0, & 1/\mu_i^{2k} \end{bmatrix} \qquad (7.15)$$

---

m) Współczynniki $\varphi_{k,p,i}$ związane są z pochodnymi dT_i/dy.

to

$$\phi_{2k,p,i} = - B_{p,i}/\mu_i^{2k+2} \qquad (7.16)$$

$$\phi_{2k+1,p,i} = 0, \quad p = 1,2, \quad k = 0,1,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots$$

Transformaty T_i są zatem funkcjami tylko parzystych pochodnych funkcji F_p.

Z powyższych rozważań wynika, że rozwiązanie zagadnienia nie wymaga sformułowania warunków brzegowych na powierzchniach $Y = 0$ i $Y = B = b/c$ (por. rys.6).

Podobnie jak dla jednowymiarowego pola nieustalonego można wyznaczyć sumy

$$\phi^T_{k,p} \, V, \qquad (7.17)$$

gdzie macierz kolumnowa V zawiera unormowane funkcje własne.

W dalszej części pracy rozpatrzono rozwiązania szczegółowe dla typowych przypadków.

7.3. Ustalone pole niesymetryczne - dane rozkłady temperatury

W rozpatrywanym poniżej przypadku termiczna odpowiedź układu dana jest w postaci warunków (7.2). Elementy macierzy kolumnowych B_p mają postać:

$$B_{1,i} = - X^{r-1} \, dv_i/dX \qquad \text{dla} \quad X = X_1,$$

$$B_{2,i} = - X^{r-1} \, dv_i/dX \qquad \text{dla} \quad X = X_2.$$

W wyniku retransformacji sumy (7.17) elementy $\phi_{k,p,i}$ przekształcają się w ciąg funkcji Ψ_k, której argumentami są współrzędne X, X_1, X_2. Ostatecznie rozwiązanie otrzymuje się w postaci:

$$T(X,Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\Psi_{2k}(X,X_1,X_2) F_1^{(2k)}(Y) + \Psi_{2k}(X,X_2,X_1) F_2^{(2k)}(Y) \right] \qquad (7.18)$$

Funkcje $\Psi_k(X,P,R)$ spełniają następujący ciąg równań różniczkowych zwyczajnych i warunków brzegowych:

$$\frac{1}{X^{r-1}} \frac{d}{dX}\left(X^{r-1} \frac{d\Psi_0}{dX}\right) = 0, \qquad \Psi_0(X,P,R) = 1 \quad \text{dla} \quad X = P,$$

$$\Psi_0(X,P,R) = 0 \quad \text{dla} \quad X = R,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7.19)$$

$$\frac{1}{X^{r-1}} \frac{d}{dX}\left(X^{r-1} \frac{d\Psi_{2k}}{dX}\right) + \Psi_{2k-2} = 0, \qquad \Psi_{2k}(X,P,R) = 0 \quad \text{dla} \quad X = P,$$

$$\Psi_{2k}(X,P,R) = 0 \quad \text{dla} \quad X = R. \qquad (7.20)$$

Ponieważ w rozwiązaniu (7.18) nie występują już funkcje własne zagadnienia brzegowego, to może być ono ekstrapolowane poza przedział $X_1 \leq X \leq X_2$ i obowiązuje dla całej objętości ciała, gdzie słuszne jest równanie (7.1). Punkty X_1 i X_2 mogą być przyjmowane dowolnie, a w szczególnym przypadku mogą znajdować się także na powierzchni zewnętrznej ciała (zagadnienie wewnętrzne), jeżeli tylko temperatura tej powierzchni spełnia postulaty stawiane termicznej odpowiedzi układu. Jeżeli punkty X_1 i X_2 leżą na powierzchni zewnętrznej, to nie jest to równoważne rozwiązywaniu klasycznego zagadnienia brzegowego z warunkami brzegowymi I rodzaju, gdyż równanie (7.18) nie wymaga sformułowania warunków brzegowych na powierzchniach $Y=0$ i $Y=B$. Dowód na możliwość ekstrapolacji rozwiązania prowadzi się analogicznie, jak dowód na możliwość ekstrapolacji rozwiązania dla jednowymiarowego pola nieustalonego (por. Dodatek B).

Wyznaczenie dwuwymiarowego pola niesymetrycznego wymaga zatem informacji o rozkładzie temperatury wzdłuż współrzędnej Y dla dowolnie ustalonych dwóch współrzędnych X_1 i X_2.

Mówiąc inaczej, jeżeli poszukuje się rozkładu temperatury wzdłuż obranej prostej $Y = Y_1$, tzn. $T(X,Y_1)$, to wystarcza informacja o wartości temperatury i jej pochodnych względem Y dla dwóch dowolnie wybranych punktów (X_1,Y_1) i (X_2,Y_1).

Poniżej przedstawiono przykład rozwiązania zadania dla płyty,

Przykład: płyta niesymetryczna

Funkcje $\Psi_k(X,P,R)$ określone są równaniami:

$$\Psi_{2k}(X,P,R) = (-1)^k \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \left\{ A_n \frac{X^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} - B_n \frac{X^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\}, \qquad (7.21)$$

gdzie:

$$A_0 = 1/\Delta X, \quad B_0 = R/\Delta X, \quad \Delta X = P - R,$$

$$A_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\Delta X} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left\{ A_n \frac{P^{2(k-n)+1} - R^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} - B_n \frac{P^{2(k-n)} - R^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\} \qquad (7.22)$$

$$B_k = (-1)^k \left\{ \sum_{n=0}^{k} (-1)^n A_n \frac{P^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} - \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n B_n \frac{P^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\}.$$

Poprawność formuł (7.21) i (7.22) można wykazać metodą indukcji matematycznej (por. punkt 5.3). Poprawność warunku (4.6) wykazano w Dodatku D.

7.4. Ustalone pole niesymetryczne - warunki mieszane

Rozpatrzono poniżej zadanie wyznaczenia pola temperatury z warunkami w postaci (7.3). Celem uzyskania rozwiązania przeprowadza się analogiczne rozumowanie, jak w punkcie 7.3.
Ostatecznie otrzymuje się:

$$T(X,Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_{2k}(X,X_1,X_2) F_1^{(2k)}(Y) + \phi_{2k}(X,X_2,X_1) F_2^{(2k)}(Y) \right] \qquad (7.23)$$

Funkcje $\psi_{2k}(X,X_1,X_2)$ spełniają ciąg równań

$$\frac{d^2\psi_0}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\psi_0}{dX} = 0, \quad \psi_0 = 1 \quad \text{dla} \quad X = X_1, \qquad (7.24)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\psi_0}{dX} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2$$

$$\frac{d^2\psi_{2k}}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\psi_{2k}}{dX} + \psi_{2k-2} = 0, \quad \psi_{2k} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1 \qquad (7.25)$$

$$\frac{d\psi_{2k}}{dX} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2,$$

zaś funkcje $\phi_{2k}(X,X_2,X_1)$

$$\frac{d^2\phi_0}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\phi_0}{dX} = 0, \quad \phi_0 = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1 \qquad (7.26)$$

$$\frac{d\phi_0}{dX} = 1 \quad \text{dla} \quad X = X_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^2\phi_{2k}}{dX^2} + \frac{r-1}{X}\frac{d\phi_{2k}}{dX} + \phi_{2k-2} = 0, \quad \phi_{2k} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_1 \qquad (7.27)$$

$$\frac{d\phi_{2k}}{dX} = 0 \quad \text{dla} \quad X = X_2$$

Rozwiązanie (7.23) charakteryzuje się analogicznymi właściwościami, jak (7.18), tzn. punkty X_1 i X_2 mogą być wybrane dowolnie oraz rozwiązanie może być ekstrapolowane poza przedział $X_1 \leq X \leq X_2$. W tym przypadku można także przyjmować $X_1 = X_2$. Poniżej przedstawiono przykład rozwiązania zadania dla płyty.

Przykład: płyta niesymetryczna

Funkcje $\psi_k(X,P,R)$ dane są zależnościami:

$$\psi_{2k}(X,P,R) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k+n} \left\{ A_n \frac{X^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} + B_n \frac{X^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\}, \qquad (7.28)$$

gdzie:

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 1,$$

$$A_k = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{k+n-1} \left\{ A_n \frac{R^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} + B_n \frac{R^{2(k-n)-1}}{[2(k-n)-1]!} \right\}, \qquad (7.29)$$

$$B_k = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{k+n-1} \left\{ A_n \frac{P^{2(k-n)+1}}{[2(k-n)+1]!} + B_n \frac{P^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \right\} - A_k P,$$

zaś funkcje $\phi_{2k}(X,P,R)$ wyrażają się tymi samymi zależnościami, z tym że należy przyjąć

$$A_0 = 1, \quad B_0 = -R. \qquad (7.30)$$

7.5. Ustalone pole dwuwymiarowe symetryczne względem osi Y

Ustalone pole symetryczne względem osi Y jest szczególnym przypadkiem zadania rozpatrywanego w punkcie 7.4. Jeżeli oś symetrii określona jest współrzędną $X = 0$, to $Q(0,Y) = 0$ i rozwiązanie przyjmuje postać:

$$T(X,Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}(X,X_1) F_1^{(2k)}(Y), \qquad (7.31)$$

gdzie

$$F_1(Y) = T(X_1,Y).$$

Wyznaczenie pola temperatury wymaga zatem informacji o rozkładzie temperatury wzdłuż osi Y dla jednego wybranego punktu $X = X_1$. Punkt ten może być wybrany dowolnie i możliwa jest także ekstrapolacja rozwiązania poza przedział $0 \leqslant X \leqslant X_1$.

Rozwiązania szczegółowe:

<u>płyta</u> $\psi_0 = 1$

.....

$$\psi_{2k}(X,X_1) = (-1)^k \left\{ \frac{X^{2k}}{(2k)!} - \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \frac{X_1^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \psi_{2n} \right\} \tag{7.32}$$

<u>walec</u> $\psi_0 = 1$

.....

$$\psi_{2k}(X,X_1) = (-1)^k \left\{ \frac{X^{2k}}{2^2.4^2...(2k)^2} - \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \frac{X_1^{2(k-n)}}{2^2.4^2...[2(k-n)]^2} \psi_{2n} \right\} \tag{7.33}$$

7.6. <u>Uwagi o przypadkach, dla których elementy macierzy C nie są stałe</u>

Jeżeli termiczna odpowiedź układu jest sformułowana w postaci warunków (7.2) lub (7.3), to elementy macierzy C ((7.10)), powstałej w wyniku stransformowania równania (7.1) są stałe. W rezultacie wyznaczenie współczynników $\phi_{k,p}$ nie nastręcza żadnych trudności. Inaczej przedstawia się problem, gdy zadana jest termiczna odpowiedź układu wzdłuż osi X dla geometrii walcowej.

Transformując równanie (7.1) względem współrzędnej Y, otrzymuje się macierz C, której elementy są funkcjami X. Układ równań różniczkowych (7.9) zawiera zmienne współczynniki i jego rozwiązanie, choć możliwe, stwarza duże trudności rachunkowe.

Przy warunkach (7.2) lub (7.3) i po podstawieniach (7.8) otrzymuje się następującą postać tego układu

$$\frac{d\bar{Z}}{dX} = C\bar{Z} + B_1F_1(X) + B_2F_2(X). \tag{7.34}$$

Macierz C może być przedstawiona jako

$$C = \begin{bmatrix} C_1, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & C_2, & 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

gdzie

$$C_i = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ \mu_i^2, & -1/X \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

a macierze kolumnowe B_1 i B_2 mają postać analogiczną jak (7.12). Rozwiązanie układu (7.34) nie może być przedstawione za pomocą formuły (4.2). Można je natomiast zapisać jako

$$\bar{Z} = \Theta(X,X_0)\,\bar{Z}_0 + \int_{X_0}^{X} \Theta(X,u)\,[B_1F_1(u) + B_2F_2(u)]\,du, \tag{7.37}$$

gdzie macierz $\Theta(X,X_0)$ jest rozwiązaniem układu równań różniczkowych

$$\frac{d\,\Theta(X,X_0)}{dX} = C\,\Theta(X,X_0), \tag{7.38}$$

przy czym

$$\Theta(X_0, X_0) = I, \tag{7.39}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową

Problem sprowadza się teraz do rozwiązywania równań układu (7.38), które są równaniami Bessela. Przedstawiając

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & \Theta_2, & 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

otrzymuje się:

$$\Theta_i(X,X_0) = \frac{1}{w_0} \begin{bmatrix} -\mu_i[I_0(\mu_iX)K_1(\mu_iX_0) + K_0(\mu_iX)I_1(\mu_iX_0)], \\ -I_0(\mu_iX)K_0(\mu_iX_0) + K_0(\mu_iX)I_0(\mu_iX_0) \\ -\mu_i^2[I_1(\mu_iX)K_1(\mu_iX_0) - K_1(\mu_iX)I_1(\mu_iX_0)], \\ -\mu_i[I_1(\mu_iX)K_0(\mu_iX_0) + K_1(\mu_iX)I_0(\mu_iX_0)] \end{bmatrix}^{x)}$$

$$w_0 = -\mu_i\left[I_0(\mu_iX_0)K_1(\mu_iX_0) + K_0(\mu_iX_0)I_1(\mu_iX_0)\right]$$

gdzie I_0, K_0, I_1, K_1 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela.

x) Kolejne wiersze przedstawiają następujące elementy macierzy Θ_i: (1,1)(1,2)(2,1)(2,2).

Całkowanie teraz równania (7.37), chociaż teoretycznie możliwe, praktycznie z uwagi na skomplikowaną postać rozwiązania czyni ten rezultat bezwartościowym.
Najrozsądniejszym rozwiązaniem wydaje się w takiej sytuacji numeryczne sformułowanie problemu przez dyskretyzację pochodnej $\partial^2 T/\partial Y^2$. Przykład rozwiązania problemu w ten sposób zdyskretyzowanego przedstawiono w punkcie 7.8.

7.7. Rozwiązanie zadań ustalonego przewodzenia ciepła sformułowanych numerycznie

Zadania dla ustalonego pola temperatury, sformułowane numerycznie, mogą być rozwiązywane przy wykorzystaniu metody opisanej w rozdziale 4. W szczególnym przypadku, gdy wystarczy dyskretyzacja tylko jednej pochodnej, można wprost zaadaptować metody opisane w rozdziale 6. Dlatego nie będą one przedmiotem szczegółowych rozważań w tej pracy. Przykład takiego rozwiązania przedstawiono w punkcie 7.8. Nieliniowe zadania ustalonego przewodzenia ciepła, w przypadku gdy współczynnik przewodzenia ciepła jest funkcją temperatury, można sprowadzić do zagadnień liniowych przez zastosowanie przekształcenia Kirchhoffa

$$u = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t}\lambda(t)dt$$

Metoda opisana w rozdziale 4 wymaga, by przynajmniej jedna zmienna była traktowana jako zmienna ciągła. Ponadto rozwiązanie zadania wymaga informacji o odpowiedniej liczbie dyskretnych wartości tej zmiennej, aproksymowanych następnie funkcją ciągłą. Zadania, w których wymagana jest dyskretyzacja wszystkich pochodnych wymagają odmiennego podejścia. Można tu wykorzystać pewne elementy metody opisanej w [21]. Z uwagi na tę odmienność, nie są te zadania przedmiotem rozważań w niniejszej pracy.

7.8. Wyznaczanie przebiegu izoterm w trzonie wielkiego pieca jako rozwiązanie zadania odwrotnego

Obliczenia cieplne trzonów wielkich pieców były przedmiotem licznych prac badawczych, prowadzonych w Instytucie Techniki Cieplnej Politechniki Śląskiej (por. prace cytowane w [25]). Obliczenia te polegały na wyznaczeniu przebiegu izoterm w wyłożeniu węglowym trzonu przy zadanej konstrukcji wyłożenia oraz zadanym systemie ochłodzenia. Mimo założeń upraszczających, uzyskane wyniki dość dobrze zgadzały się z wynikami pomiarów temperatury w wybranych punktach wyłożenia. Obliczenia te pozwalały w sposób optymalny dobrać kształt kotliny pierwotnej, układ warstw materiałowych

itp. Jednakże w okresie eksploatacji pieca pojawiają się oddziaływania, których nie można było uwzględnić w modelu teoretycznym. Przede wszystkim w czasie spustu następują silne zawirowania surówki w garze, nie tylko zmieniające warunki wymiany ciepła, ale także powodujące mechaniczne wypłukiwanie warstw wyłożenia. Pogarszają się również warunki chłodzenia zewnętrznego wskutek powstawania osadów. Wszystko to powoduje, że istnieje potrzeba bieżącej kontroli stanu wykładziny, gdyż stan ten w poważnym stopniu determinuje długość okresu pracy pieca między kolejnymi remontami. Zwykle kontrolę tę przeprowadza się w ten sposób, że w dowolny na ogół dość przypadkowy sposób rozmieszcza się wewnątrz wyłożenia termoelementy i obserwuje ich wskazania. Obserwacje te dają jedynie przybliżony obraz stanu wykładziny. W oparciu o rozwiązanie odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła istnieje możliwość bardziej precyzyjnego określenia pola temperatury. Poniżej przedstawiono taką koncepcję.

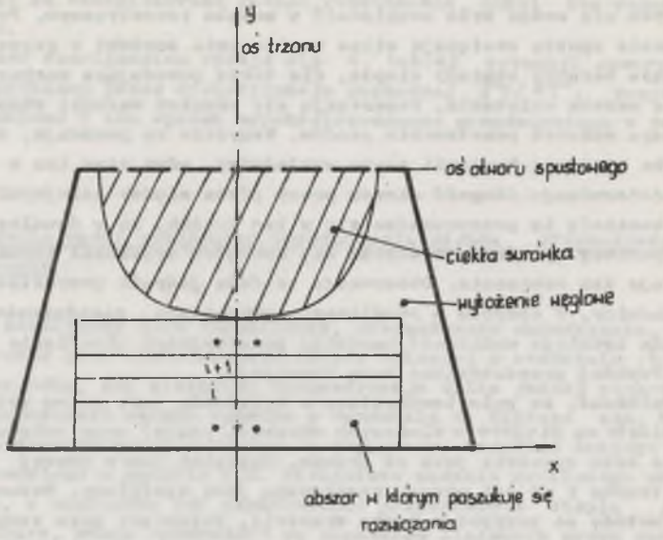
Załóżmy, że pole temperatury w wyłożeniu jest polem ustalonym (co rzeczywiście ma miejsce w dłuższych okresach czasu) oraz osiowo-symetrycznym, gdzie osią symetrii jest oś trzonu. Postulat ten w pewnej odległości od dna trzonu i od osi otworu spustowego jest spełniony. Można zresztą uogólnić metodę na przypadek braku symetrii. Natomiast pole temperatury jest niesymetryczne względem osi otworów spustowych. Rozwiązanie zadania odwrotnego wymaga zatem informacji o termicznej odpowiedzi układu w dwóch płaszczyznach prostopadłych do osi trzonu. Mogą to być informacje o temperaturach bądź o strumieniach ciepła. Ze względów technologicznych (umieszczenie termoelementów) płaszczyzny te powinny znajdować się blisko siebie i najlepiej w obrębie pierwszej warstwy bloków wyłożenia. W dalszej części przyjęto, że znana jest temperatura na dwóch płaszczyznach, odpowiadających kolejnym warstwom podziału różnicowego trzonu.

Przebieg izoterm w wyłożeniu upoważnia także do przyjęcia założenia, że w równaniu przewodzenia ciepła niezbędna jest dyskretyzacja tylko jednej pochodnej cząstkowej, o ile poszukuje się rozkładu temperatury tylko w samym wyłożeniu, aż do momentu pojawienia się ciekłej surówki. Obszar ten zaznaczono na rys. 10. Postępowanie to jest uzasadnione także tym, że wyznaczenie izoterm w ciekłej surówce wobec występowania ruchów konwekcyjnych, jest praktycznie niecelowe.

Wyłożenie węglowe trzonu podzielono płaszczyznami prostopadłymi do osi trzonu, otrzymując układ warstw, odpowiadających podziałowi różnicowemu. Dla każdej warstwy można sporządzić bilans energii, co przy uwzględnieniu ostatniego z przyjętych założeń daje układ równań w postaci:

$$\nabla^2 T_i(x) + A_{i,i}T_i(x) + A_{i,i-1}T_{i-1}(x) + A_{i,i+1}T_{i+1}(x) = 0 \qquad (7.40)$$

$$i = 2,3,\ldots,N.$$



Rys. 10. Geometria trzonu wielkiego pieca

gdzie:

$$A_{i,m} = 2/(\lambda_{ri}\,\Delta y_i(\frac{\Delta y_i}{\lambda_i} + \frac{\Delta y_m}{\lambda_m})), \qquad m = i-1, i+1,$$

$$A_{i,i} = -(A_{i,i-1} + A_{i,i+1}),$$

$$\nabla^2 T_i = \frac{d^2T_i}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dT_i}{dx}.$$

Przez λ_{ri} oznaczono współczynnik przewodzenia ciepła i-tej warstwy w kierunku promieniowym, a λ_i - w kierunku osiowym. Zgodnie z przyjętymi założeniami współczynniki te zachowują stałą wartość w obrębie jednej warstwy, wyznaczoną dla średniej temperatury warstwy. Ponadto

$$\frac{dT_i}{dx} = 0, \qquad \text{dla} \qquad x = 0 \tag{7.41}$$

Jeżeli dane są temperatury dla dwóch pierwszych warstw różnicowych, tzn. $T_1(x)$ i $T_2(x)$, to rozwiązanie układu równań (7.40) może być przedstawione w postaci:

$$T_i(x) = \sum_{k=0}^{N-2} \phi_{2k,i}\ \nabla^{2k}T_1(x) + \psi_{2k,i}\ \nabla^{2k}T_2(x), \tag{7.42}$$

gdzie:

$$\nabla^0 T = T,$$

$$\nabla^{2k} T = \nabla^2(\nabla^{2k-2}T), \qquad k = 2,3,\ldots,$$

$$\phi_{0,1} = 1, \quad \phi_{0,2} = 0, \quad \phi_{2k,1} = 0, \quad \phi_{2k,2} = 0,$$

$$\phi_{0,i+1} = -(A_{i,i-1}\,\phi_{0,i-1} + A_{i,i}\,\phi_{0,i})/A_{i,i+1},$$

$$\phi_{2k,i+1} = -(\phi_{2k-2,i} + A_{i,i}\,\phi_{2k,i} + A_{i,i-1}\,\phi_{2k,i-1})/A_{i,i+1}$$

$$\psi_{0,1} = 0, \quad \psi_{0,2} = 1, \quad \psi_{2k,1} = 0, \quad \psi_{2k,2} = 0,$$

$$k = 1,2,\ldots,$$

$$i = 2,3,\ldots,N-1,$$

zaś $\psi_{0,i+1}$ i $\psi_{2k,i+1}$ wyznacza się ze wzorów analogicznych, jak $\phi_{0,i+1}$ i $\phi_{2k,i+1}$.

Postać rozwiązania (7.42) wynika z rozważań podobnych do tych, jakie przeprowadzono w punkcie 6.1. dla zadania ekstrapolacji.

8. UWAGI O PROBLEMACH OBLICZENIOWYCH

Do podstawowych problemów, jakie napotyka się przy obliczeniach liczbowych opartych na wzorach opisanych w poprzednich rozdziałach należą: obliczanie pochodnych i całkowanie termicznej odpowiedzi układu. Informacja o przebiegu temperatury lub gęstości strumienia ciepła w wybranych punktach ciała dana jest w postaci dyskretnych wartości, dodatkowo obarczonych błędami wyników pomiaru. Przedstawione poniżej metody mają tylko charakter pewnych propozycji i należy podkreślić, że nie są to metody optymalne w każdym przypadku.

8.1. Obliczanie pochodnych termicznej odpowiedzi układu

W literaturze znaleźć można rozmaite propozycje obliczania pochodnych funkcji zadanych dyskretnie. Problem jest o tyle istotny, że różniczkowanie funkcji obarczonej błędami daje na ogół niestabilne wyniki liczbowe. Poniżej opisano niektóre z tych metod.

8.1.1. Wykorzystanie wielomianów algebraicznych

Najbardziej uniwersalną jest metoda polegająca na aproksymacji zbioru danych wielomianem, a następnie różniczkowaniu tego wielomianu. W najprostszym przypadku mogą to być wielomiany algebraiczne. Dodatkowo przyjęto, że krok próbkowania, tzn. przedział czasowy między kolejnymi informacjami o termicznej odpowiedzi układu dla stanów nieustalonych lub kolejnymi punktami dla stanów ustalonych jest stały. Przyjęto zatem, że dane zbiera się dla

$$\ldots, s_j-2h, s_j-h, s_j, s_j+h, s_j+2h, \ldots, \tag{8.1}$$

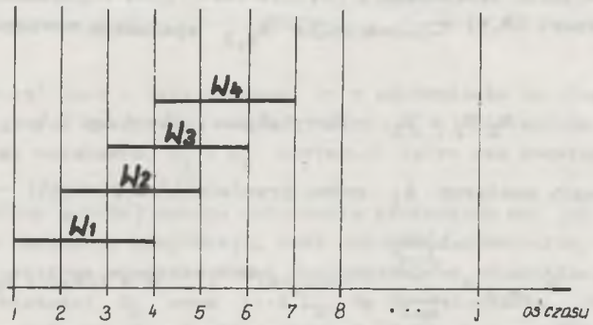
gdzie s_j odpowiada wybranemu momentowi czasowemu dla zadań nieustalonych lub punktowi Y dla zadań ustalonych.

Przy rozwiązywaniu nieustalonych zadań przewodzenia ciepła z każdym nowym momentem czasowym dochodzi nowa informacja. Oznacza to, że z każdym momentem czasowym należy wyznaczyć nowy wielomian, a właściwie jego współczynniki. Poza tym jest istotne, aby dla rozpatrywanego momentu czasowego j wykorzystywać do konstrukcji wielomianu informacje o termicznej odpowiedzi układu dla momentów poprzedzających, tj.

$$j, j-1, j-2, \ldots, j-L_T, \tag{8.2}$$

przy czym wartość L_T powinna być tak dobrana, aby otrzymany wielomian najlepiej aproksymował zbiór punktów. Nie powinno L_T przyjmować zbyt dużych wartości, gdyż wpływ daleko od j odległych punktów jest już na kształt wielomianu znikomy. Zatem dla stanów nieustalonych charakterystyczne jest "kroczenie" wielomianu wraz z kolejnymi momentami czasowymi. Przedstawiono to na rys. 11. Na rys. 11 1,2... oznaczają kolejne momenty czasowe, a w_1, w_2,... wielomiany aproksymujące zbiór punktów, oparte w tym przypadku na $L_T = 4$ punktach. Jeżeli przyjąć warunek (8.2), to wyznaczenie pola temperatury jest możliwe dopiero od $j \geqslant L_T$.

Podobne "kroczenie" występuje także dla stanów ustalonych. Wynika to stąd, że wielomian najlepiej aproksymuje zbiór punktów w okolicy centralnego węzła aproksymacji. Stąd tak powinno się go dobierać, aby rozpatrywany punkt Y_j był punktem centralnym.



Rys. 11. Konstruowanie wielomianu dla stanów nieustalonych

Obliczanie współczynników wielomianu, wyznaczonych przy użyciu metody najmniejszych kwadratów, prowadzi do rozwiązywania układu równań algebraicznych. Jeżeli następuje wspomniany wyżej efekt "kroczenia", to dla każdej nowej wartości j należałoby rozwiązywać układ równań. Można tego uniknąć przez przyjęcie wielomianu w szczególnej postaci

$$g(s) = a_1 + a_2 \frac{s-s_j}{h} + a_3 \left(\frac{s-s_j}{h}\right)^2 + \ldots \tag{8.3}$$

Oznacza to, że

$$g(s_j) = a_1, \quad g'(s_j) = \frac{a_2}{h}, \ \ldots, \ g^{(k)}(s_j) = \frac{k!}{h^k} a_{k+1} \tag{8.4}$$

Jak łatwo wykazać (por. [35]) współczynniki a_k są liniową kombinacją wartości funkcji $F(s)$ [*)] w punktach (8.1) i mogą być zapisane w postaci:

$$a_k = \sum_{l=1}^{L_1+L_2+1} B_{k,l}\, F(j + l - L_1 - 1), \tag{8.5}$$

gdzie oznaczono

$$F(j) \equiv F(s_j),$$

zaś dane zbiera się dla punktów

$$j-L_1,\quad j-L_1+1,\ \ldots;\ j,\ \ldots,\ j+L_2-1,\ j+L_2 \text{ [**)]} \tag{8.6}$$

Przy przyjęciu wielomianu w postaci (8.3) oraz reprezentacji współczynników w postaci (8.5) współczynniki $B_{k,l}$ spełniają następujące układy równań:

$$A_l B_l = P_l, \qquad l = 1,2,\ldots,\ L_1 + L_2 + 1, \tag{8.7}$$

gdzie elementy macierzy A_l można przedstawić w postaci:

$$A_{1,m,l} = \sum_{n=1}^{L_1+L_2+1} (n-L_1-1)^{m-1}, \qquad m = 1,2,\ldots\ Q_L+1$$

$$A_{m,Q_L+1,l} = \sum_{n=1}^{L_1+L_2+1} (n-L_1-1)^{Q_L+m-1}, \qquad m = 2,3,\ldots Q_L+1 \tag{8.8}$$

$$A_{n,m,l} = A_{n-1,m+1,l}, \qquad n = 2,3,\ldots,\ Q_L+1,$$
$$m = 1,2,\ldots,Q_L,$$

macierze kolumnowe B_l

$$B_l^T = [B_{1,l},\ B_{2,l},\ldots,\ B_{Q_L+1,l}], \tag{8.9}$$

macierze kolumnowe P_l

$$P_l^T = [P_{1,l},\ P_{2,l},\ldots,P_{Q_L+1,l}], \tag{8.10}$$

[*)] Wielomian $g(s)$ aproksymuje zadaną dyskretnie funkcję $F(s)$

[**)] Dla stanów nieustalonych, przy warunku (8.2) $L_2 = 0$.

przy czym

$$P_{1,l} = 1, \tag{8.11}$$

$$P_{k,l} = (1 - L_1 - 1)^{k-1}, \qquad k = 2,3,\ldots,Q_L + 1,$$

a Q_L jest stopniem wielomianu.

Ostatecznie

$$F^{(k)}(j) \approx g^{(k)}(j) = \frac{k!}{h^k} \sum_{l=1}^{L_1+L_2+1} B_{k+1,l} F(j+l-L_1-1), \qquad k = 0,1\ldots,K \tag{8.12}$$

gdzie

$$K \leqslant Q_L$$

Postać (8.12) jest o tyle dogodna, że w odróżnieniu od klasycznej metody najmniejszych kwadratów, współczynniki $B_{k,l}$ nie zależą od wartości funkcji i przy ustalonym L_1 i L_2 wystarczy tylko raz rozwiązać układy równań (8.7).

Przedstawiona powyżej metoda obliczania pochodnych ma, jak już wspomniano, tylko charakter propozycji. Jest ona dość uniwersalna, ale charakteryzuje się wieloma ograniczeniami dotyczącymi np. minimalnej wartości h, maksymalnej wartości Q_L oraz L_1 i L_2. Są to wielkości determinowane m.in. stabilnością rozwiązań układu równań (8.7). W szczególnych przypadkach obliczanie pochodnych musi być dokonywane w inny sposób, np. przez przyjęcie innej bazy wielomianów lub wręcz innej postaci funkcji aproksymującej zbiór punktów. Wielomiany algebraiczne są stosowane najczęściej, ponieważ zgodnie ze znanym twierdzeniem Weierstrassa, każda funkcja ciągła może być w otoczeniu punktu ciągłości takim wielomianem aproksymowana. Głównymi jej zaletami to uniwersalność i prostota. Przy stałych wartościach L_1 i L_2 współczynniki $B_{k,l}$ wymagają tylko jednokrotnego rozwiązania układu równań. Obliczanie pochodnych trwa bardzo krótko i nie wymaga dużej pamięci komputera. Jej wadą jest często występująca niestabilność wyników liczbowych przy różniczkowaniu funkcji obarczonej błędami, zwłaszcza dla małych kroków h. Wymaga zatem pewnej dodatkowej obróbki wyników. Jeden z takich sposobów przedstawiono w rozdziale 9.

8.1.2. Wykorzystanie funkcji sklejanych

W wielu przypadkach efektywniejszą od tradycyjnych jest metoda polegająca na wykorzystaniu funkcji sklejanych stopnia trzeciego. Na możliwość taką zwrócono już uwagę w [34].

Jeżeli w przedziale $[a,b]$ osi s zadana jest siatka różnicowa $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = b$, w węzłach której zadane są wartości F_j funkcji $F(s)$, to interpolującą funkcją sklejaną trzeciego stopnia $g(s)$ nazywa się funkcję spełniającą następujące warunki:

a) $g(s)$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$ wraz ze swymi pochodnymi do drugiego rzędu włącznie,
b) w węzłach siatki zachodzi równość

$$g(s_j) = F_j \qquad j = 0,1,\ldots,N$$

c) spełnione są pewne warunki na brzegach przedziału,
d) w każdym z podprzedziałów $g(s)$ jest wielomianem stopnia trzeciego.

Najkorzystniejsze właściwości z uwagi na różniczkowanie posiada funkcja sklejana wtedy, gdy na brzegach przedziału przyjmie się warunki (warunki (c)):

$$g''(a) = g''(b) = 0, \tag{8.13}$$

Ponieważ przy wyznaczaniu nieustalonego pola temperatury zachodzi potrzeba wyznaczania pochodnych na brzegu przedziału (por. punkt 8.1.1), to warunki (8.13) nie mogą być wykorzystane. Przyjęto zatem inne, a mianowicie:

$$g'''(s_j + 0) = g'''(s_j - 0), \quad j = 1, N-1 \quad \text{(por. [39])}. \tag{8.14}$$

Ostatecznie funkcja sklejana dana jest zależnością

$$g(s) = m_{j-1}\frac{(s_j - s)^3}{6h_j} + m_j\frac{(s - s_{j-1})^3}{6h_j} + \left(F_{j-1} - \frac{m_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{s_j - s}{h_j} + \left(F_j - \frac{m_j h_j^2}{6}\right)\frac{s - s_{j-1}}{h_j}, \tag{8.15}$$

$$\text{dla } s_{j-1} \leqslant s \leqslant s_j, \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

gdzie:

$$h_j = s_j - s_{j-1},$$

$$m_j = g''(s_j).$$

Współczynniki m_j wyznacza się z układu równań, który otrzymuje się z wykorzystania warunków (a) - (c). Układ ten można zapisać w postaci:

$$A\,P = H\,F, \tag{8.16}$$

gdzie A jest macierzą $M \times M$ elementową ($M = N - 1$), przy czym:

$$A_{1,1} = \frac{h_1^2 + 3h_1h_2 + 2h_2^2}{6h_2}, \qquad A_{1,2} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{6h_2},$$

$$A_{j,j-1} = \frac{h_j}{6}, \qquad A_{j,j} = \frac{h_j + h_{j+1}}{3}, \qquad A_{j,j+1} = \frac{h_{j+1}}{6},$$

$$j = 2,3,\ldots,M-1,$$

$$A_{M,M-1} = \frac{h_M^2 - h_{M+1}^2}{6h_M}, \qquad A_{M,M} = \frac{2h_M^2 + 3h_M h_{M+1} + h_{M+1}^2}{6h_M},$$

macierz kolumnowa P zawiera M elementów

$$P^T = [m_1, m_2, \ldots, m_{N-1}],$$

macierz H jest macierzą $M \times (N+1)$ elementową, przy czym

$$H_{j,j} = \frac{1}{h_j}, \qquad H_{j,j+1} = -\frac{1}{h_j} - \frac{1}{h_{j+1}}, \qquad H_{j,j+2} = \frac{1}{h_{j+1}},$$

$$j = 1,\ldots,M,$$

a macierz kolumnowa F zawiera $N+1$ elementów

$$F^T = [F_0, F_1, \ldots, F_N].$$

Z rozwiązania układu (8.16) otrzymuje się współczynniki m_j ($j = 1,2,\ldots,N-1$), a następnie z warunków (8.14) oblicza się

$$m_0 = -\frac{h_1}{h_2}m_2 + \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)m_1,$$

$$m_N = \left(1 + \frac{h_N}{h_{N-1}}\right)m_{N-1} - \frac{h_N}{h_{N-1}}m_{N-2}.$$

Szczególne właściwości funkcji sklejanych przejawiają się tym, że jeżeli interpolowana funkcja $F(s)$ należy do klasy $C^{(k)}[a,b]$ $(k = 0,1,2,3,4)$, to zachodzi warunek [28]:

$$\max_{a \leqslant s \leqslant b} |F^{(n)}(s) - g^{(n)}(s)| \leqslant C\, h^{k-n}, \quad k \geqslant n, \tag{8.17}$$

gdzie C jest nieujemną stałą, która nie zależy od siatki różnicowej, zaś

$$h = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} |s_j - s_{j-1}|$$

Oszacowanie (8.17) jest dość zgrubne i w literaturze można znaleźć oceny dokładniejsze, w tym także dla warunków (8.14) (por. [39]).

Gdyby narzucić warunki (8.13), to funkcja sklejana minimalizuje funkcjonał

$$\mathcal{M}(u) = \int_a^b [u''(s)]^2\, ds,$$

gdzie funkcja $u(s)$ należy do klasy $C^2[a,b]$.

Różniczkowanie funkcji sklejanej pozwala zatem uzyskiwać stabilne wartości pochodnych do drugiego rzędu włącznie. Na tę właściwość zwrócono uwagę w [34], chociaż tam do wyznaczenia współczynników m_j wykorzystano warunki:

$$g'(s) = g'''(b) = 0 \tag{8.18}$$

Warunki te wymagają interpolacji funkcji w całym rozpatrywanym przedziale czasu, tj. od stanu początkowego do nowego stanu ustalonego. Z punktu widzenia postulatów sformułowanych w punkcie 8.1.1 ("kroczenie" wielomianu) są one nieprzydatne.

Jeżeli wartości funkcji F_j obarczone są błędami, to w miejsce interpolacji lepiej jest stosować aproksymację funkcjami sklejanymi. Analizowano przydatność minimalizacji funkcjonału o postaci

$$\mathcal{M}(g) = \int_a^b [g''(s)]^2\, ds + \sum_{j=0}^{N} \varrho_j^{-1} [g(s_j) - \tilde{F}_j]^2 \tag{8.19}$$

w klasie funkcji sklejanych stopnia trzeciego. Przez $\tilde{F}_j$ oznaczono przybliżone wartości funkcji $F(s)$, a ϱ_j - pewne nieujemne liczby. Funkcja $g(s)$ ma postać określoną równaniem (8.15), przy czym w miejsce wartości F_j należy wstawić $g_j = g(s_j)$. Współczynniki m_j uzyskuje się z rozwiązania układu równań (8.16), z tym że elementami macierzy F są wartości g_j.

Minimalizacja funkcjonału (8.19) względem $g(x_j)$ prowadzi do układu równań:

$$\left[A + \tfrac{1}{2} H Q (A^{-1} H)^T (C + C^T)\right] P = HF, \tag{8.20}$$

gdzie macierz Q jest $(N+1) \times (N+1)$ elementową o postaci

$$Q_{jj} = \varrho_j, \qquad j = 0,1,\ldots,N,$$

macierz kolumnowa F zawiera wartości $g(s_0), g(s_1),\ldots,g(s_N)$, zaś macierz C $M \times M$ elementów, przy czym

$$C_{1,1} = \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^2 \frac{h_1}{3} + \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) \frac{h_1}{3} + \frac{h_1 + h_2}{3},$$

$$C_{1,2} = \frac{h_2}{6} - \frac{h_1^2}{3h_2} - \frac{2}{3} \frac{h_1^2}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right),$$

$$C_{j,j-1} = \frac{h_j}{6}, \quad C_{j,j} = \frac{h_j + h_{j+1}}{6}, \quad C_{j,j+1} = \frac{h_{j+1}}{6}$$

$$j = 2,\ldots,M-1$$

$$C_{M,M-1} = \frac{h_M}{6} - \frac{h_{M+1}^2}{3h_M} - \frac{2}{3} \frac{h_{M+1}^2}{h_M} \left(1 + \frac{h_{M+1}}{h_M}\right),$$

$$C_{M,M} = \left(1 + \frac{h_{M+1}}{h_M}\right)^2 \frac{h_{M+1}}{3} + \left(1 + \frac{h_{M+1}}{h_M}\right) \frac{h_{M+1}}{3} + \frac{h_M + h_{M+1}}{3}$$

oraz

$$C_{2,2} = C_{2,2} + \frac{h_1^3}{3h_2^2}, \qquad C_{M-1,M-1} = C_{M-1,M-1} + \frac{h_M^3}{3h_{M-1}^2}$$

Współczynniki ϱ_j dobierano iteracyjnie, wykorzystując metodę podaną w [39]. W tym celu oblicza się $N+1$ elementową macierz kolumnową B z zależności

$$B = (A^{-1} H)^T (C + C^T) P, \tag{8.21}$$

a następnie dla $n+1$ iteracji

$$\varrho_{j,n+1} = \begin{cases} 0{,}95\,|B_j| & \text{gdy } |B_j| > 0{,}0001, \\ 0 & \text{gdy } |B_j| < 0{,}0001, \end{cases}$$

gdzie δ jest wartością odchylenia standardowego funkcji $\tilde{F}_j$ [m], przy czym $g_{j,0} = 0$, zaś wartości $g(s_j)$ w pierwszej iteracji przyjmuje się równe $\tilde{F}_j$.

Podstawową wadą metody opartej na różniczkowaniu funkcji sklejanych jest konieczność rozwiązywania układu równań w każdym momencie czasowym, a w przypadku aproksymacji - wielokrotnego rozwiązywania układu równań. Poza tym nie został rozwiązany problem zbieżności procedury iteracyjnej. Metoda ta umożliwia obliczanie pochodnych do trzeciego rzędu włącznie [mm].

8.1.3. Różniczkowanie funkcji przez rozwiązywanie równania całkowego

Odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła należą do zadań źle uwarunkowanych [36], tzn. mała niedokładność wielkości danych może powodować dużą niedokładność wielkości wynikowych. Problem ten rozważono obszerniej w rozdziale 9. Bezpośrednią przyczyną złego uwarunkowania rozwiązań przedstawionych w poprzednich rozdziałach jest różniczkowanie funkcji. Praktycznie jedyną metodą usunięcia tej niekorzystnej właściwości zagadnień odwrotnych jest metoda regularyzacji TICHONOWA [37]. Sprowadzenie zadania różniczkowania funkcji do rozwiązywania równania całkowego umożliwia opracowanie regularyzowanych algorytmów obliczania pochodnych, a zatem uzyskiwanie stabilnych wyników liczbowych.

Można wykazać, że pochodna

$$Z = \frac{d^k F(s)}{ds^k},$$

jest rozwiązaniem równania całkowego Volterry I rodzaju o postaci:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{(s-\eta)^{k-1}}{(k-1)!} Z(\eta)d\eta = G(s) \tag{8.22}$$

gdzie:

$$G(s) = F(s) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(s-s_0)^n}{n!} \frac{d^n F(s)}{ds^n}\Bigg|_{s=s_0} \tag{8.23}$$

Równanie (8.22) jest oczywiście źle uwarunkowane, ale istnieje wiele algorytmów regularyzowanych bądź stabilizowanych dla jego rozwiązania.

---

[m] Odchylenie standardowe δ jest związane z błędami pomiarowymi powstającymi przy wyznaczaniu wartości $\tilde{F}_j$ i w praktyce δ ocenia się na podstawie informacji o dokładności zastosowanych przyrządów pomiarowych i wykorzystywanych metod pomiarowych.

[mm] Pochodne wyższych rzędów można obliczać jako pochodne pochodnych.

Jedną z takich metod przedstawiono w [31]. Polega ona na tym, że w miejsce równania całkowego

$$\int_{s_0}^{s} K(s-\eta)\, Z(\eta)d\eta = G(s)$$

rozwiązuje się równanie

$$\int_{s_0}^{s} K(s-\eta+\gamma)Z_\gamma(\eta)d\eta = G(s), \tag{8.24}$$

gdzie $\gamma > 0$ - parametr liczbowy, Z_γ - wartość Z przy danym γ. Równanie (8.24) można już rozwiązywać klasycznymi metodami, tzn. bądź przez sprowadzenie do równania całkowego Volterry II rodzaju, bądź metodą kwadratur. Odpowiednie algorytmy zamieszczono w [31].

Inny sposób opisano w [26]. Wykorzystano tam metodę regularyzacji TICHONOWA, co sprowadza rozwiązywanie równania całkowego do minimalizacji funkcjonału

$$\Phi(z) = \|\mathcal{L}_1(z) - G\|^2_{L_2} + \gamma\|z\|^2_{W_2^1} \to \min, \tag{8.25}$$

gdzie:

$$\mathcal{L}_1(z) = \int_{s_0}^{s} \frac{(s-\eta)^{k-1}}{(k-1)!} z(\eta)d\eta$$

$\gamma > 0$ - parametr regularyzacji,

$\|.\|^2_{.}$ - kwadraty normy w przestrzeni L_2 i klasie W_2^1.

Przestrzeń funkcji L_2 i klasę W_2^1 definiuje się w sposób klasyczny (por. np. [15]). Minimalizacja funkcjonału (8.25) prowadzi do równania całkowo-różniczkowego o postaci [26]:

$$\mathcal{L}_2(z) + \gamma\left(z - \frac{d^2 z}{ds^2}\right) = C_k, \tag{8.26}$$

gdzie:

$$\mathcal{L}_2(z) = \int_{s_0}^{s_K} K_k(s,\eta,s_K)z(\eta)d\eta - \int_{s_0}^{s} K_k(s,\eta,s)z(\eta)d\eta,$$

$$K_k(s,\eta,\beta) = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l(\eta - s)^{k-1-l}\frac{(\delta-\eta)^{k+1}}{k+1},$$

$$C_k = \int_s^{s_K}(\eta - s)^{k-1}G(\eta)d\eta,$$

przy czym $s \in [s_0, s_K]$.

Rozwiązanie równania (8.26) wymaga określenia warunków brzegowych dla funkcji Z na granicach przedziału w postaci:

$$Z = Z_0 \quad \text{dla} \quad s = s_0$$
$$Z = Z_K \quad \text{dla} \quad s = s_K \qquad (8.27)$$

Pochodne oblicza się w kolejności wzrastających rzędów. Równanie (8.26) praktycznie rozwiązuje się metodą różnic skończonych, co sprowadza zagadnienie do rozwiązania układu równań algebraicznych. Również warunki brzegowe (8.27) wyznacza się na podstawie obliczonej k-1 pochodnej metodami różnicowymi, np. przy obliczaniu pierwszej pochodnej Z = dF/ds do wyznaczenia wartości Z_0 i Z_K wystarcza znajomość wartości funkcji i przykładowa aproksymacja pochodnej może mieć postać:

$$Z_0 = \frac{1}{6h}(-11\,F_0 + 18\,F_1 - 9F_2 + 2F_3) \qquad (8.28)$$

lub $$Z_0 = \frac{1}{12h}(-25\,F_0 + 48\,F_1 - 36\,F_2 + 16\,F_3 - 3F_4)$$

$$h = s_1 - s_0 = s_2 - s_1 = \ldots$$

Podobnie przy obliczaniu drugiej pochodnej wystarcza znajomość wartości pierwszej pochodnej.

Ważnym problemem dla obydwu opisanych metod jest dobór parametru γ, który powinien być optymalny. Wiąże się to z koniecznością iteracyjnego obliczania pochodnych. Istnieje wiele metod doboru wielkości γ. Opisano je m.in. [15], [27], [37]. Jeżeli znane jest odchylenie standardowe δ_0 prawej strony równania (8.22), to najczęściej zalecaną metodą jest metoda odchyłek.

Dla równania (8.24) ma ona postać [31]:

$$\sum_j \left[G(s_j) - \int_{s_0}^{s_j} K(s_j - \eta + \gamma)Z_\gamma(\eta)d\eta\right]^2 = \delta_0^2 \qquad (8.29)$$

Jak widać z powyższego równania, dobieranie wartości γ polega na rozwiązaniu uwikłanego równania w postaci $\varphi(\gamma) = \delta_0^2$.

Jeżeli jednak wielkość δ_0 nie jest znana, to zaleca się metodę quasi-optymalnego wyboru γ [27], [31]. Przyjmuje się pewną dużą wartość γ^* i następnie kolejne wartości z równania $\gamma_1 = \gamma^* \beta^1$ $(0 < \beta < 1,\ 1 = 0,1\ \ldots)$, Optymalna wartość γ wynika z warunku:

$$\min_1 \sum_j \left[Z_{\gamma_1}(s_j) - Z_{\gamma_{1-1}}(s_j)\right]^2 \qquad (8.30)$$

lub

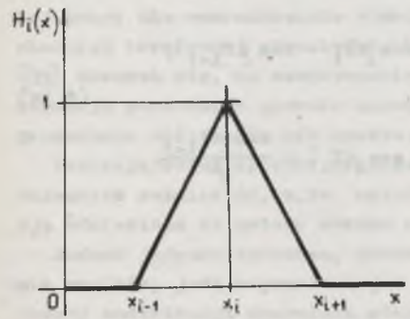
$$\min_1 \max_j \left[Z_{\gamma_1}(s_j) - Z_{\gamma_{1-1}}(s_j)\right]. \qquad (8.31)$$

Podstawową wadą powyższych metod jest ich złożoność, komplikacje w wyborze wartości γ, konieczność wielokrotnego rozwiązywania układu równań w każdym momencie czasowym. Również rząd pochodnych jest tu ograniczony, bo dla kolejnych pochodnych nakładają się niedokładności wyznaczania prawych stron równania (8.22).

8.2. Całkowanie termicznej odpowiedzi układu

Przy wyznaczaniu nieustalonego pola temperatury dla pola wielowymiarowego zachodzi potrzeba wyznaczania całek termicznej odpowiedzi układu (por. (5.47)), której wartości zadane są w dyskretnych punktach. Istnieje wiele algorytmów całkowania numerycznego. W przykładach rachunkowych, opisanych w rozdziale 10 zrealizowano je w trochę odmienny sposób, który pozwala ograniczyć niezbędną liczbę tych punktów.

Dyskretne wartości termicznej odpowiedzi układu aproksymowano za pomocą liniowych funkcji kształtu, znanych z metody elementu skończonego (por. rys. 12), tzn.



Rys. 12. Liniowa funkcja kształtu

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} H_i(x)\,F(x_i), \qquad (8.32)$$

gdzie N oznacza liczbę punktów, w których znana jest wartość F(x).

Po podstawieniu (8.32) do całek występujących w równaniu (5.47), dalej całkowanie prowadzono analitycznie.

Przykład: dwuwymiarowa płyta symetryczna

Przy wyznaczaniu dwuwymiarowego pola temperatury w płycie symetrycznej zachodzi potrzeba obliczania całek typu (por. (5.47))

$$W = \int_0^A T \cos\mu X\,dX. \qquad (8.33)$$

Niech

$$\Delta X_i = X_i - X_{i-1}.$$

Funkcje kształtu są zdefiniowane następująco:

$$H_i(X) = \begin{cases} \dfrac{X - X_{i-1}}{\Delta X_i}, & \text{dla} \quad X_{i-1} \leqslant X \leqslant X_i, \\ \dfrac{X_{i+1} - X}{\Delta X_{i+1}}, & \text{dla} \quad X_i \leqslant X \leqslant X_{i+1}, \\ 0, & \text{dla} \quad X \leqslant X_i \ \text{ lub } \ X \geqslant X_{i+1}. \end{cases}$$

Wartość całki (8.33) można przedstawić jako

$$W = \sum_{i=2}^{N} \left[P_i T_i + Q_i T_{i-1} \right], \tag{8.34}$$

gdzie:

$$P_i = \frac{\sin \mu X_i}{\mu} + \frac{1}{\mu^2 \Delta X_i} (\cos \mu X_i - \cos \mu X_{i-1}),$$

$$Q_i = \frac{1}{\mu^2 \Delta X_i} (\cos \mu X_{i-1} - \cos \mu X_i) - \frac{\sin \mu X_{i-1}}{\mu}. \tag{8.35}$$

9. ZASTOSOWANIE RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNYCH ZADAŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

Jak już wspomniano odwrotne zadania przewodzenia ciepła należą do grupy zadań źle uwarunkowanych [36]. Oznacza to, że mała niedokładność wielkości danych może powodować dużą niedokładność wielkości wynikowych. Właściwość ta jest oczywiście niezależna od przyjętej metody rozwiązywania i różne są tylko jej bezpośrednie przejawy. Dla metody transformacji Laplace'a na ogół nie istnieje retransformata rozwiązania. W takiej sytuacji rozwiązanie w obszarze transformaty aproksymuje się funkcją, dla której istnieje retransformata, ale operacja ta jest bardzo niestabilna.

W innej metodzie, polegającej na sprowadzeniu zadania odwrotnego do równania całkowego, układ równań algebraicznych, powstający przy numerycznym rozwiązywaniu tego równania, jest źle uwarunkowany. Dla metody opisanej w tej pracy złe uwarunkowanie rozwiązania przejawia się przy obliczaniu pochodnych termicznej odpowiedzi układu. Co prawda zarówno w [10], jak i w [35] dowodzi się, że zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do aproksymacji pochodnych pozwala usunąć tę niekorzystną właściwość, ale przeprowadzone obliczenia nie zawsze tę tezę potwierdzają.

Istnieją różne sposoby łagodzenia wpływu tej właściwości na jakość uzyskiwanych rezultatów, m.in. metoda najmniejszych kwadratów. Taką propozycję odniesioną do metody równań całkowych przedstawiono w [18].

Jednak jedynym sposobem, pozwalającym całkowicie usunąć złe uwarunkowanie wyników, jest wspomniana już metoda regularyzacji [37]. Polega ona na pewnej modyfikacji operatora równania różniczkowego przewodzenia ciepła przez wprowadzenie dodatkowego członu i związanego z nim tzw. parametru regularyzacji. Pozwala w efekcie uzyskiwać stabilne wyniki, ale prowadzi zwykle do złożonych problemów optymalizacyjnych.

W niniejszej pracy proponuje się wykorzystanie rachunku wyrównawczego [23]. Do rozwiązywania rozmaitych zagadnień cieplnych został on wprowadzony przez SZARGUTA [33]. Ponieważ przy źle uwarunkowanych zadaniach mała niedokładność wielkości danych może powodować dużą niedokładność wyników, to można domniemywać, że małe poprawki wielkości danych mogą spowodować pewną poprawę wyników.

Metoda ta wymaga bardzo prostych obliczeń i nie wnosi żadnych komplikacji rachunkowych (w przeciwieństwie do metody regularyzacji). Należy jednak podkreślić, że łagodzi ona jedynie wpływ złego uwarunkowania na wy-

niki obliczeń (nie usuwając go całkowicie), stąd też nie zawsze jest skuteczna.

Zastosowanie rachunku wyrównawczego jest możliwe, o ile dysponujemy pewnymi dodatkowymi informacjami o polu temperatury. Można je ująć w postaci tzw. równań warunków

$$G_u(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M) = 0, \qquad u = 1,2,\ldots,R \tag{9.1}$$

Te dodatkowe informacje mogą dotyczyć temperatury w pewnych punktach lub warunków brzegowych na powierzchniach zewnętrznych ciała. Warunki (9.1) są przydatne dla potrzeb rachunku wyrównawczego tylko wówczas, gdy obowiązują dla każdego momentu czasowego dla zadań nieustalonych lub dla każdej wartości współrzędnej Y (oznaczenie jak w rozdziale 7) dla stanów ustalonych.

Lista wielkości ξ_n może obejmować różne wielkości, m.in. temperaturę, wielkości opisujące przepływ ciepła itp., które w dalszym ciągu mogą być przedmiotem uzgodnienia. Ponieważ bezpośrednim źródłem niestabilności wyników jest wyznaczanie pochodnych, to lista ta powinna także obejmować pochodne termicznej odpowiedzi układu. W związku z tym rachunek wyrównawczy pełni tutaj trochę inną funkcję niż w klasycznych zastosowaniach. Pozwala on bowiem nałożyć na źle uwarunkowane rozwiązanie pewne dodatkowe niezależne ograniczenia, łagodzące wpływ złego uwarunkowania[x]).

Podstawienie do równań warunków (9.1) wielkości ξ_n zmierzonych bądź obliczonych w oparciu o dane pomiarowe umożliwia obliczenie niezgodności równań W_u, związanych z niedokładnościami wyników pomiaru.

$$G_u(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M) = - W_u, \qquad u = 1,2,\ldots,R \tag{9.2}$$

Zgodnie z zasadami rachunku wyrównawczego wprowadza się poprawki $P_n (n = 1,2,\ldots,M)$ dla wielkości ξ_n, występujących w równaniach (9.2). Wartości tych poprawek oblicza się z warunku minimum ważonej sumy kwadratów poprawek P_n

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{P_n^2}{\delta_n^2} = \min, \tag{9.3}$$

gdzie przez δ_n oznaczono odchylenie standardowe wielkości ξ_n.

Minimum (9.3) z warunkiem (9.2) prowadzi do układu równań, z którego można wyznaczyć poszukiwane poprawki P_n.

x) Złe uwarunkowanie zanika, jeżeli liczba informacji jest dostateczna, tzn. dla stanów nieustalonych znany jest warunek początkowy i warunki brzegowe, a dla stanów ustalonych wszystkie warunki brzegowe. Pozostaje wtedy do rozwiązania klasyczny, dobrze uwarunkowany, problem początkowo-brzegowy lub brzegowy.

Układ ten po linearyzacji równań (9.1) ma postać następującą [33]:

$$\sum_{n=1}^{M} a_{u,n} P_n = W_u, \qquad u = 1,2,\ldots,R \tag{9.4}$$

$$\frac{P_n}{\delta_n^2} = \sum_{u=1}^{R} a_{u,n} L_n \qquad n = 1,2,\ldots,M,$$

gdzie:

$$a_{u,n} = \frac{\partial G_u}{\partial \xi_n}, \tag{9.5}$$

a L_n są tzw. korelatami Lagrange'a, wynikającymi z zastosowania metody mnożników Lagrange'a do rozwiązania problemu (9.3), (9.2). W szczególnych przypadkach, jeżeli R=1, to

$$P_n = \delta_n^2 a_{1,n} L_1, \qquad n = 1,2,\ldots,M,$$

gdzie

$$L_1 = \frac{W_1}{\sum_{n=1}^{M} a_{1,n}^2 \delta_n^2} \tag{9.6}$$

Dla R=2 przy oznaczeniach

$$A = \sum_{n=1}^{M} a_{1,n}^2 \delta_n^2, \qquad B = \sum_{n=1}^{M} a_{1,n} a_{2,n} \delta_n^2, \qquad C = \sum_{n=1}^{M} a_{2,n}^2 \delta_n^2, \tag{9.7}$$

$$L_1 = \frac{W_1 C - W_2 B}{AC - B^2}, \qquad L_2 = \frac{W_2 A - W_1 B}{AC - B^2},$$

otrzymuje się

$$P_n = \delta_n^2 a_{1,n} L_1 + \delta_n^2 a_{2,n} L_2, \qquad n = 1,2,\ldots,M. \tag{9.8}$$

Zastosowanie rachunku wyrównawczego zostanie zilustrowane kilkoma typowymi przykładami.

Przykład 1: symetryczna płyta (por. rys. 2), pole nieustalone.

Pole temperatury w symetrycznej płycie opisywane jest równaniem (5.35)

$$T(X,Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{k-1}(X,X_1) T_A^{(k-1)}(Fo), \qquad (9.9)$$

gdzie:

$\phi_k(X,X_1)$ - znane funkcje współrzędnych,

$T_A(Fo) = T(X_1,Fo)$,

$T_A^{(k)}(Fo) \equiv d^k T_A / d Fo^k$.

W praktycznych obliczeniach szereg (9.9) ogranicza się do K wyrazów.

Dodatkową informacją może być np. informacja o warunku brzegowym na powierzchni X=1, o ile nie został on wykorzystany w rozwiązaniu (9.9). Może to być warunek brzegowy III rodzaju w postaci

$$G_1 \equiv \frac{\partial T}{\partial X} + BiT - Bi\, T_p = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1, \qquad (9.10)$$

gdzie:

Bi - liczba Biota,

T_p - zredukowana temperatura otoczenia.

Równanie (9.10) powinno być spełnione w każdym momencie czasowym Fo_j. Ponieważ jednak dla każdego momentu czasowego konstruuje się nowy wielomian (por. punkt 8.1), to także dla każdego Fo_j należy ponownie zastosować rachunek wyrównawczy.

Lista wielkości ξ_k może obejmować wartości K pochodnych obliczonych dla rozpatrywanego Fo_j, występujących w równaniu (9.9) oraz np. Bi, T_p itp. Podstawiając (9.9) do (9.10), otrzymuje się

$$G_1 \equiv \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{d\,\phi_{k-1}(1,X_1)}{dX} + \xi_{K+2}\,\phi_{k-1}(1,X_1)\right]\xi_k - \xi_{K+2}\,\xi_{K+1} = -W_1, \qquad (9.11)$$

gdzie oznaczono

$\xi_k \equiv T_A^{(k-1)}(Fo_j)$, $\quad k = 1,2,\ldots,K$,

$\xi_{K+1} = T_p$,

$\xi_{K+2} = Bi$.

Odchylenie standardowe temperatury T_p wynika z przyjętej dokładności pomiarów, niedokładność w szacowaniu liczby Biota może być wyznaczona zwykłymi metodami wyznaczania błędów wielkości złożonych, zaś niedokładność w szacowaniu pochodnych funkcji T_A zależy od sposobu ich wyznaczania i na przykład może być oszacowana na podstawie równania (8.12). Jeżeli odchylenie standardowe pomiaru temperatury można uważać za stałe i równe δT, to w przybliżeniu

$$\delta T_A^{(k)}(Fo_j) \leqslant \delta T \frac{k!}{h^k} \sum_{l=1}^{L_1+L_2+1} |B_{k,l}|. \qquad (9.12)$$

W przykładzie tym R=1, a poza tym

$$a_{1,k} = \frac{d\,\phi_{k-1}(1,X_1)}{dX} + \xi_{K+2}\ \phi_{k-1}(1,X_1), \quad k = 1,2,\ldots,K,$$

$$a_{1,K+1} = -\xi_{K+2},$$

$$a_{1,K+2} = \sum_{k=1}^{K} \phi_{k-1}(1,X_1)\,\xi_k - \xi_{K+1},$$

zaś rozwiązanie zadania przedstawiają zależności (9.6), gdzie N = K+2.

Przykład 2: jednowymiarowe pole niesymetryczne (por. rys. 5).

Pole temperatury opisuje równanie (5.16)

$$T(X,Fo) = \sum_{k=1}^{K} \left[\psi_{k-1}(X,X_1,X_2) T_1^{(k-1)}(Fo) + \psi_{k-1}(X,X_2,X_1) T_2^{(k-1)}(Fo)\right].$$

W tym przypadku mogą, ale nie muszą wystąpić dwa równania warunku w postaci:

$$G_1 \equiv \frac{\partial T}{\partial X} - Bi_1 T + Bi_1 T_{p1} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0,$$

$$G_2 \equiv \frac{\partial T}{\partial X} + Bi_2 T - Bi_2 T_{p2} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1.$$

Rozwiązanie zadania przebiega analogicznie, jak w przykładzie 1 i przedstawiają go równania (9.7) i (9.8).

Przykład 3: nieustalone i symetryczne pole dwuwymiarowe (por. rys. 6). Pole temperatury opisuje równanie (5.55)

$$T(X,Y,Fo) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{J}\left[\frac{\bar{\Psi}_{k-1,i}(X,1,\mu_i)\bar{T}_{1,i}^{(k-1)}(Fo)v_i(Y)}{\|v_i\|^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{\Psi}_{k-1,i}(Y,B,\vartheta_i)\bar{T}_{B,i}^{(k-1)}(Fo)w_i(X)}{\|w_i\|^2}\right] \qquad (9.13)$$

Mogą być dane na przykład następujące dwa równania warunków:

$$G_1 \equiv \frac{\partial T}{\partial X} + Bi_1 T - Bi_1 T_{p1} = 0, \quad \text{dla} \quad X = 1, \qquad (9.14)$$

$$G_2 \equiv \frac{\partial T}{\partial Y} + Bi_2 T - Bi_2 T_{p2} = 0, \quad \text{dla} \quad Y = B. \qquad (9.15)$$

Jak łatwo zauważyć G_1 pozostaje funkcją Y, a G_2 funkcją X. Zatem także poprawki P_n byłyby funkcjami współrzędnych. Aby tego uniknąć, wystarczy pomnożyć równanie (9.14) przez funkcję własną $v_i(Y)$, zaś (9.15) przez $w_i(X)$ i scałkować w granicach odpowiednio $[0,B]$ i $[0,1]$

$$\bar{G}_{1,i} = \int_0^B \left(\frac{\partial T}{\partial X} + Bi_1 T - Bi_1 T_{p1}\right)v_i(Y)dY, \quad \text{dla} \quad X = 1, \qquad (9.16)$$

$$\bar{G}_{2,i} = \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial Y} + Bi_2 T - Bi_2 T_{p2}\right)w_i(X)dX, \quad \text{dla} \quad Y = B. \qquad (9.17)$$

Podstawiając (9.13) do (9.16) i (9.17) otrzymuje się

$$\bar{G}_{1,i} = \sum_{k=1}^{K}\left[\frac{d\bar{\Psi}_{k-1,i}(1,1,\mu_i)}{dX} + Bi_1\,\bar{\Psi}_{k-1,i}(1,1,\mu_i)\right]\bar{T}_{1,i}^{(k-1)}(Fo) -$$

$$- Bi_1\,\bar{T}_{p1,i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,J,$$

$$\bar{G}_{2,i} = \sum_{k=1}^{K}\left[\frac{d\bar{\Psi}_{k-1,i}(B,B,\vartheta_i)}{dY} + Bi_2\,\bar{\Psi}_{k-1,i}(B,B,\vartheta_i)\right]\bar{T}_{B,i}^{(k-1)}(Fo) -$$

$$- Bi_2\,\bar{T}_{p2,i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,J,$$

gdzie:

$$\bar{T}_{p1,i} = \int_0^B T_{p1}\,v_i\,dY, \quad \bar{T}_{p2,i} = \int_0^1 T_{p2}\,w_i\,dX.$$

Zagadnienie sprowadza się zatem do ciągu 2xJ zagadnień typu (9.6) (i = 1,2,...,J).

Przykład 4: jednowymiarowe pole symetryczne (płyta), sformułowanie numeryczne (por. rys. 7).

Pole temperatury opisuje równanie (6.3) lub (6.13)

$$T_i(\tilde{z}) = \sum_{k=1}^{K}\phi_{k-1,i}\,T_A^{(k-1)}(\tilde{z}).$$

Równanie warunku może mieć postać:

$$G_1 \equiv \frac{T_N - T_{N+1}}{R_{N,N+1}} - \frac{T_{N+1} - T_p}{R_{N+1,p}} = 0,$$

gdzie:

$$R_{N,N+1} = \frac{\Delta x_N}{2\lambda_N}, \qquad R_{N+1,p} = \frac{1}{\alpha},$$

α - współczynnik wnikania ciepła.

Rozwiązanie przebiega analogicznie, jak w przykładzie 1.

W powyższych przykładach jako równanie warunku wykorzystywano tylko warunek brzegowy III rodzaju. W ogólnym przypadku może to być każdy inny warunek. Ważne jest tylko, aby obowiązywał w każdym rozpatrywanym momencie czasowym. Zupełnie podobnie można wykorzystać rachunek wyrównawczy dla zadań ustalonego przewodzenia ciepła. W porównaniu z regularyzowanymi algorytmami obliczenia pochodnych, metoda ta charakteryzuje się dużą prostotą oraz przy pewnych ograniczeniach, zadawalającą efektywnością. Może być także wykorzystywana przy stosowaniu algorytmów regularyzowanych dla uzyskania wyników bardziej prawdopodobnych.

10. WYNIKI OBLICZEŃ I WNIOSKI

Celem przeanalizowania właściwości rozwiązań, uzyskanych w poprzednich rozdziałach, wykonano wiele obliczeń liczbowych. Rozwiązania uzyskane w rozdziałach 5,6 i 7 są matematycznie ścisłe. Sprawdzenia wymaga natomiast zbieżność szeregów, wpływ błędów pomiarowych itp. Obliczenia te mają także wskazać na ograniczenia w stosowaniu tych rozwiązań, np. zakresy zmiennych i wielkości charakteryzujących przepływ ciepła.

10.1. Obliczenia liczbowe

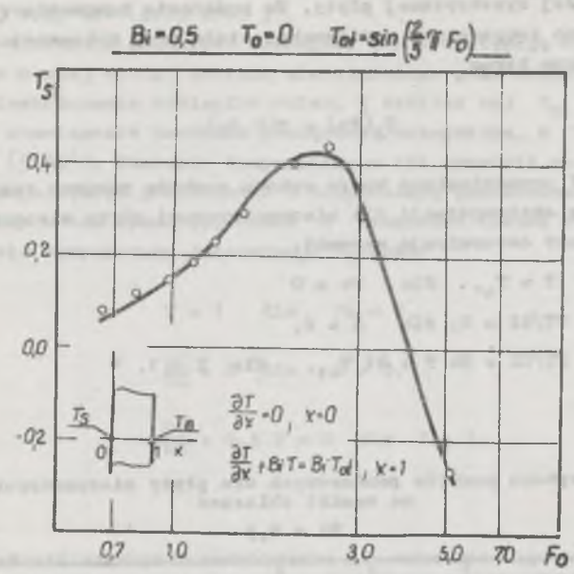
Analiza możliwie największej liczby przypadków możliwa jest przy zastosowaniu tzw. eksperymentu numerycznego. Rozwiązania klasycznych problemów początkowo-brzegowych i brzegowych posłużyły jako termiczna odpowiedź układu, z tym że wartości liczbowe tych rozwiązań ograniczono do 3-4 cyfr znaczących. Do wyznaczenia wartości pochodnych użyto głównie metody opisanej w punkcie 8.1.1. Stopień wielomianu nie był przedmiotem optymalizacji i na ogół przyjmowano go jako stały. Dla pól nieustalonych przyjmowano zwykle 3-4 stopień, dla ustalonych - wyższy. Obliczenia bowiem wykazały, że powinien on być wyższy o 1-2 od liczby pochodnych, uwzględnianych w rozwiązaniu. Przy zbyt wysokim stopniu mogą pojawić się trudności w stabilnym wyznaczaniu współczynników wielomianu, a przy zbyt niskim - pogarsza się jakość aproksymacji. Dobór stopnia wielomianu jest zresztą problemem teorii aproksymacji i dlatego nie był przedmiotem szczegółowej analizy.

Liczba węzłów aproksymacji była uzależniona od stopnia wielomianu i od jakości danych i zwykle nie przekraczała 10. Liczba ta nie powinna być zbyt duża, co stwierdzono już w punkcie 8.1.1. Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach i tabelach.

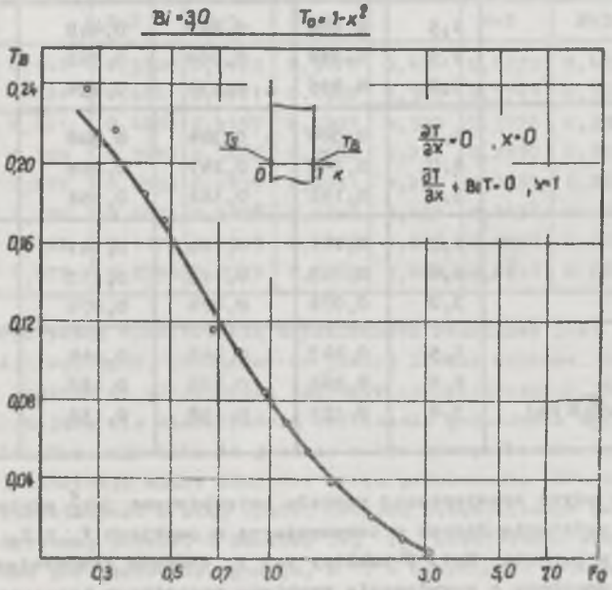
Na rys. 13 przedstawiono temperaturę w osi symetrii T_s płyty nieskończenie rozległej na podstawie informacji o temperaturze powierzchni T_B (zadanie wewnętrzne). Rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego przedstawia linia ciągła. Warunek początkowy T_0 i warunki brzegowe, określające proces nieustalonego przewodzenia ciepła, opisano także na rysunku. Do rozwiązania zadania wewnętrznego wykorzystano równanie (5.35), w którym

$$T_A(Fo) = T(1,Fo).$$

Wyniki liczbowe tego rozwiązania przedstawiono na rysunku kółeczkami.



Rys. 13. Temperatura w osi symetrii płyty na podstawie temperatury powierzchni



Rys. 14. Temperatura powierzchni płyty symetrycznej na podstawie temperatury w osi symetrii

Na rys. 14 przedstawiono rozwiązanie zadania ekstrapolacji dla nieskończenie rozległej symetrycznej płyty. Na podstawie temperatury w osi symetrii wyznaczono temperaturę powierzchni ciała przy wykorzystaniu równania (5.35), w którym teraz

$$T_A(Fo) = T(0,Fo).$$

W tablicy 1 przedstawiono wpływ wyboru punktów pomiaru temperatury na wyniki zadania ekstrapolacji dla niesymetrycznej płyty nieograniczonej. Pole temperatury determinują warunki:

początkowy $T = T_o$, dla $Fo = 0$

brzegowe $\partial T/\partial X = 0$, dla $X = 0$,

$\partial T/\partial X + Bi\ T = Bi\ T_{ot}$, dla $X = 1$.

Tablica 1

Wpływ wyboru punktów pomiarowych dla płyty niesymetrycznej na wyniki obliczeń

Bi = 0,5

	Fo	T_B	T przy $X_1 = 0$ oraz		
			$X_2 = 0,1$	$X_2 = 0,5$	$X_2 = 0,8$
$T_o = 1,0$	1,5	0,448	0,448	0,448	0,448
$T_{ot} = 0$	2,0	0,362	0,360	0,362	0,362
	3,0	0,236	0,234	0,234	0,236
$T_o = 1-X^2$	1,5	0,308	0,304	0,308	0,308
$T_{ot} = 0$	2,0	0,248	0,247	0,248	0,248
	3,0	0,162	0,162	0,162	0,162
$T_o = X^2$	1,5	0,141	0,140	0,141	0,141
$T_{ot} = 0$	2,0	0,113	0,113	0,113	0,113
	3,0	0,074	0,074	0,074	0,074
$T_o = 0$	1,5	0,443	0,448	0,444	0,445
	2,0	0,466	0,466	0,466	0,467
$T_{ot} = \sin(\frac{2}{5}\pi Fo)$	3,0	0,152	0,158	0,152	0,151

Zatem połowa płyty symetrycznej została potraktowana jako płyta niesymetryczna. Na podstawie danych o temperaturze w punktach X_1 i X_2 wyznaczono temperaturę w punkcie X=1. W tablicy tej T_B oznacza temperaturę powierzchni ciała, uzyskaną z rozwiązania problemu początkowo-brzegowego. Rozwiązanie zadania odwrotnego przedstawia równanie (5.16). Współrzędne $X_1 = 0$, zaś $X_2 = 0.1, 0.5, 0.8$ (por. rys. 5).

Tablica 2 ilustruje zbieżność szeregów, jakie występują w rozwiązaniach. Przedstawiono w niej wyniki dotyczą nieustalonego pola temperatury w symetrycznym nieskończenie rozległym walcu. W tablicy tej T_B i T_S przedstawiają wyniki rozwiązania problemu początkowo-brzegowego, a T - odwrotnego (równanie (5.35)). Pokazano temperaturę w osi symetrii na podstawie informacji o temperaturze powierzchni i temperaturę powierzchni na podstawie temperatury w osi symetrii. Przez N oznaczono liczbę wyrazów szeregu (5.35). Pole temperatury determinują warunki:

$$T = 1 \quad \text{dla} \quad Fo = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} + 0,5\ T = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1.$$

Tablica 2

Zbieżność szeregu w rozwiązaniu dla symetrycznego walca

Fo	Temperatura w osi symetrii				Temperatura powierzchni			
	T_S	T			T_B	T		
		N=2	N=3	N=4		N=2	N=3	N=4
0,80	0,548	0,5300	0,5463	0,5477	0,434	0,4273	0,4334	0,4337
0,95	0,481	0,4641	0,4781	0,4802	0,380	0,3743	0,3801	0,3800
1,10	0,421	0,4064	0,4187	0,4205	0,333	0,3278	0,3329	0,3328
1,25	0,369	0,3559	0,3666	0,3682	0,291	0,2870	0,2915	0,2914
1,50	0,295	0,2852	0,2939	0,2951	0,234	0,2301	0,2337	0,2336
2,0	0,190	0,1832	0,1888	0,1896	0,150	0,1478	0,1501	0,1501
2,5	0,122	0,1177	0,1213	0,1218	0,096	0,0950	0,0965	0,0964
3,0	0,078	0,0756	0,0779	0,0782	0,062	0,0610	0,0620	0,0619

Charakterystyczną właściwością uzyskiwanych rozwiązań jest pogarszanie się zbieżności szeregów, począwszy od pewnej liczby wyrazów. Są to więc właściwości podobne do właściwości szeregów asymptotycznych. Są one związane z pogarszającą się stabilnością obliczania pochodnych zbyt wysokiego rzędu (dla N=4 zjawisko to jeszcze w tym przypadku nie występuje).

Tablica 3 ilustruje wpływ długości kroku próbkowania ΔFo na zbieżność szeregów. Przedstawione w niej wyniki dotyczą nieustalonego pola temperatury w symetrycznej płycie. W tablicy tej T_B przedstawia wyniki rozwiązania problemu początkowo-brzegowego, a T - odwrotnego (równanie (5.35)).

Tablica 3

Wpływ długości kroku próbkowania ΔFo na zbieżność szeregów

Fo	T_B	T		
		N=2	N=3	N=4
$\Delta Fo = 0,005$				
1,045	0,544	0,537	0,509	0,410
1,095	0,533	0,523	0,422	0,045
1,145	0,521	0,513	0,425	0,067
$\Delta Fo = 0,025$				
1,225	0,504	0,500	0,506	0,506
1,475	0,453	0,448	0,447	0,447
1,725	0,407	0,404	0,407	0,406

Pokazano temperaturę na powierzchni płyty na podstawie informacji o temperaturze w osi symetrii. Przez N oznaczono liczbę wyrazów szeregu (5.35). Pole temperatury determinują warunki:

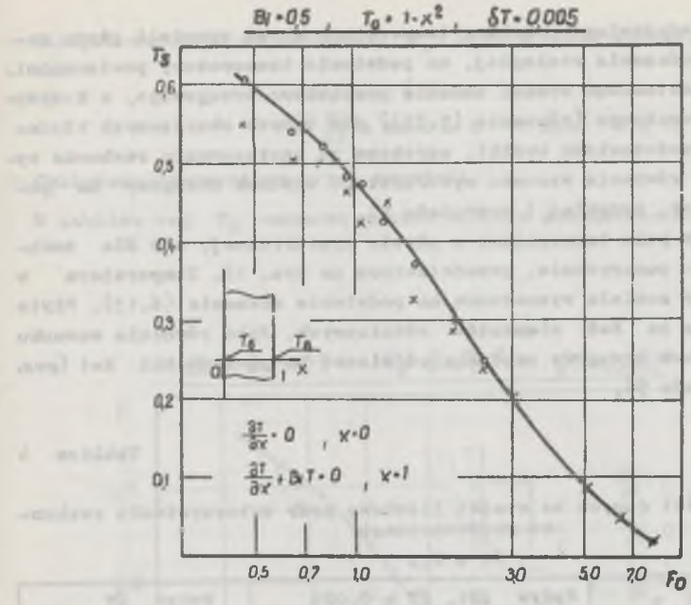
$$T = 1 \quad \text{dla} \quad Fo = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0,$$

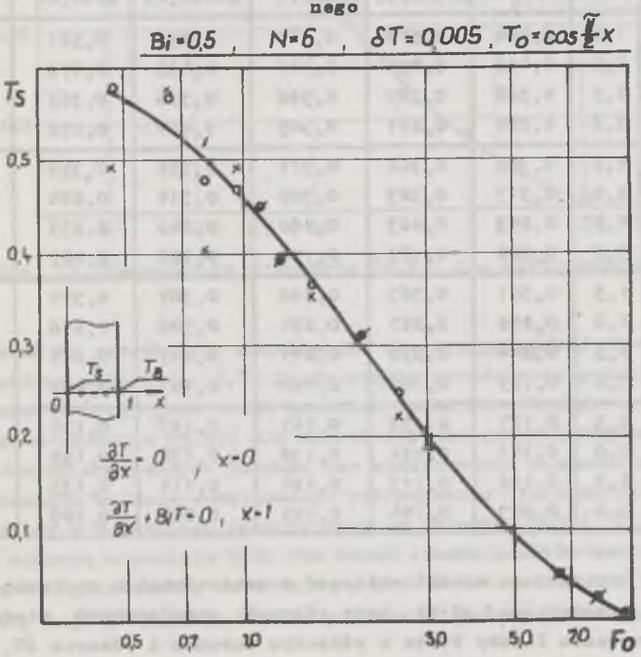
$$\frac{\partial T}{\partial X} + 0,5\,T = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1.$$

Dla bardzo małych ΔFo wyższe pochodne są wyraźnie niestabilne, co zmusza do ograniczania liczby wyrazów szeregu. W ogólnym przypadku spowoduje to, że nie zostanie osiągnięta pożądana zbieżność. Dla dłuższych kroków czasowych liczba wyrazów szeregu może być powiększona.

Na kolejnym rysunku (rys. 15) przedstawiono wpływ niedokładności danych na wyniki rozwiązania zadania odwrotnego. W tym celu wyniki liczbowe uzyskane z zagadnienia początkowo-brzegowego w sposób losowy obarczono błędem o maksymalnej wartości δT. Losowano zarówno znak, jak i wartość błędu, wykorzystując generator liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym. Pierwsza liczba pseudolosowa p_i określa znak, a druga wartość równą $p_{i+1}\delta T$. Generator ten powodował, że rozkład błędów był gorszy niż to bywa w rzeczywistości, bowiem zdarzało się, że prawie wszystkie miały ten sam znak, a tylko kilka ostatnich przeciwny. Ma to niewielki wpływ na wartość funkcji, a duży na wartości pochodnych.



Rys. 15. Wpływ niedokładności danych na wyniki rozwiązania zadania odwrotnego



Rys. 16. Temperatura w osi symetrii płyty dla zadania sformułowanego numerycznie

Na rys. 15 przedstawiono przebieg temperatury w osi symetrii płyty symetrycznej, nieskończenie rozległej, na podstawie temperatury powierzchni. Linią ciągłą przedstawiono wyniki zadania początkowo-brzegowego, a krzyżykami - zadania odwrotnego (równanie (5.35)) dla danych obarczonych błędami. Kółeczkami przedstawiono wyniki, uzyskane po zastosowaniu rachunku wyrównawczego. Jako równanie warunku wykorzystano warunek brzegowy na powierzchni X=1 (por. przykład 1 rozdziału 9).

Podobny problem pola temperatury w płycie symetrycznej, ale dla zadania sformułowanego numerycznie, przedstawiono na rys. 16. Temperatura w osi symetrii płyty została wyznaczona na podstawie równania (6.13). Płyta została podzielona na N=6 elementów różnicowych. Jako równanie warunku wykorzystano warunek brzegowy zapisany różnicowo na powierzchni X=1 (por. przykład 4 rozdziału 9).

Tablica 4

Wpływ niedokładności danych na wyniki liczbowe przy wykorzystaniu rachunku wyrównawczego

Bi = 0,5

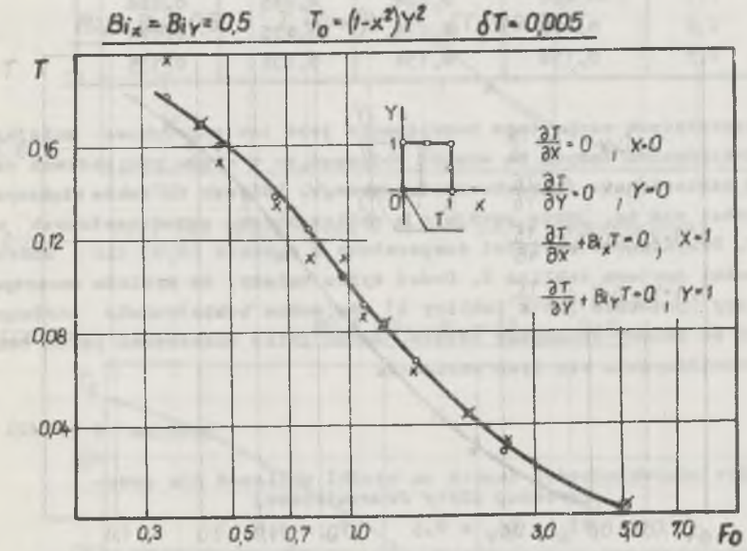
	Fo	T_S	Wpływ δBi, δT = 0,005			Wpływ δT	
			δBi=0,05	δBi=0,1	δBi=0,25	δT=0,01	δT=0,05
T_o = 1,0	1,5	0,564	0,570	0,580	0,558	0,581	0,534
	2,0	0,456	0,454	0,449	0,433	0,476	0,468
	2,5	0,368	0,369	0,366	0,376	0,369	0,350
	3,0	0,298	0,291	0,305	0,269	0,298	0,303
$T_o = 1-X^2$	1,5	0,387	0,368	0,371	0,355	0,355	0,356
	2,0	0,313	0,323	0,309	0,314	0,284	0,331
	2,5	0,253	0,263	0,260	0,246	0,239	0,251
	3,0	0,204	0,187	0,190	0,188	0,207	0,236
$T_o=\cos\frac{\pi}{2}X$	1,5	0,371	0,363	0,366	0,387	0,371	0,348
	2,0	0,299	0,297	0,294	0,306	0,296	0,274
	2,5	0,244	0,250	0,241	0,247	0,228	0,266
	3,0	0,195	0,189	0,188	0,193	0,202	0,196
$T_o = X^2$	1,5	0,177	0,178	0,165	0,193	0,170	0,148
	2,0	0,143	0,152	0,136	0,138	0,155	0,154
	2,5	0,116	0,113	0,124	0,114	0,135	0,023
	3,0	0,093	0,104	0,105	0,094	0,106	0,126

W tablicy 4 porównano wyniki obliczeń z zastosowaniem rachunku wyrównawczego dla symetrycznej płyty, przy różnych symulowanych niedokładnościach w szacowaniu liczby Biota w równaniu warunku i różnych δT, dla rozmaitych warunków początkowych T_o. Wykorzystane równanie warunku ma postać:

$$\frac{\partial T}{\partial X} + Bi\,T = 0 \qquad \text{dla} \quad X = 1.$$

Obliczono temperaturę w osi symetrii.

W tablicy tej T_S oznacza wyniki zadania początkowo-brzegowego.



Rys. 17. Temperatura w punkcie (0,0) dla płyty dwuwymiarowej

Rysunek 17 przedstawia rozwiązanie dla dwuwymiarowej płyty symetrycznej, opisane w punkcie 5.7. Linia ciągła przedstawia przebieg temperatury w punkcie (0,0) jako wynik problemu początkowo-brzegowego, kółeczka - wyniki z równania (5.55) dla danych nie obarczonych błędami, a krzyżyki - dla danych obarczonych błędami bez zastosowania rachunku wyrównawczego. W rozwiązaniu zadania wewnętrznego wykorzystano informację o przebiegu temperatury w 5 punktach zaznaczonych na rysunku. Całki (5.47) obliczono metodą opisaną w punkcie 3.2. Jak widać liczba punktów może być w tym przypadku dość ograniczona, co zresztą przedstawione w tablicy 5.

W tablicy tej N oznacza liczbę punktów na jednej powierzchni.

Tablica 5

Wpływ liczby punktów pomiarowych na wyniki obliczeń dla symetrycznej płyty dwuwymiarowej

$Bi_x = Bi_y = 0,5 \qquad T_o = 1,0$

Fo	T_S	T		
		N=3	N=5	N=7
1,3	0,378	0,373	0,376	0,376
1,6	0,292	0,290	0,291	0,292
1,9	0,226	0,224	0,225	0,226
2,2	0,175	0,174	0,175	0,175
2,5	0,136	0,134	0,135	0,135

Charakterystyczną cechą tego rozwiązania jest też stosunkowo mniejszy wpływ niedokładności danych na wyniki obliczeń,co w wielu przypadkach czyni zbędnym zastosowanie rachunku wyrównawczego. Dotyczy to także większych niedokładności niż te, jakie przyjęto w obliczeniach przedstawionych na rysunku 17. Przykładowe wartości temperatury w punkcie (0,0) dla innych niedokładności zawiera tablica 6. Dodać tylko należy, że wyników zawartych w tej tablicy (podobnie jak w tablicy 4) nie można bezpośrednio porównywać z uwagi na losowy charakter błędów. Można tylko obserwować pewne tendencje w kształtowaniu się tych wartości.

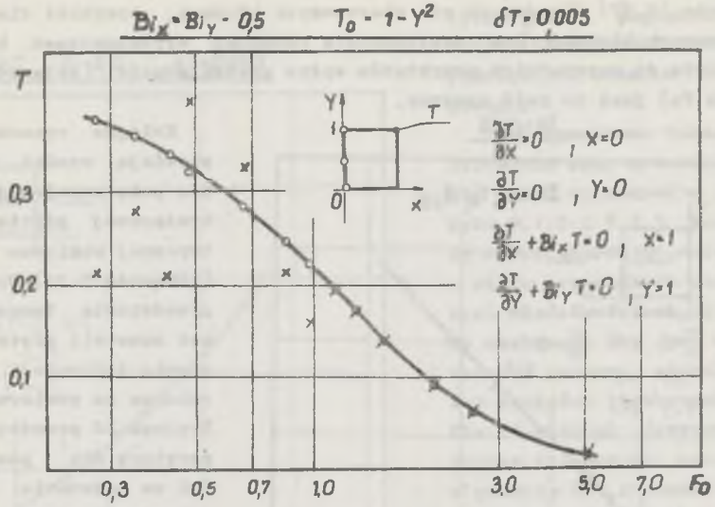
Tablica 6

Wpływ niedokładności danych na wyniki obliczeń dla symetrycznej płyty dwuwymiarowej

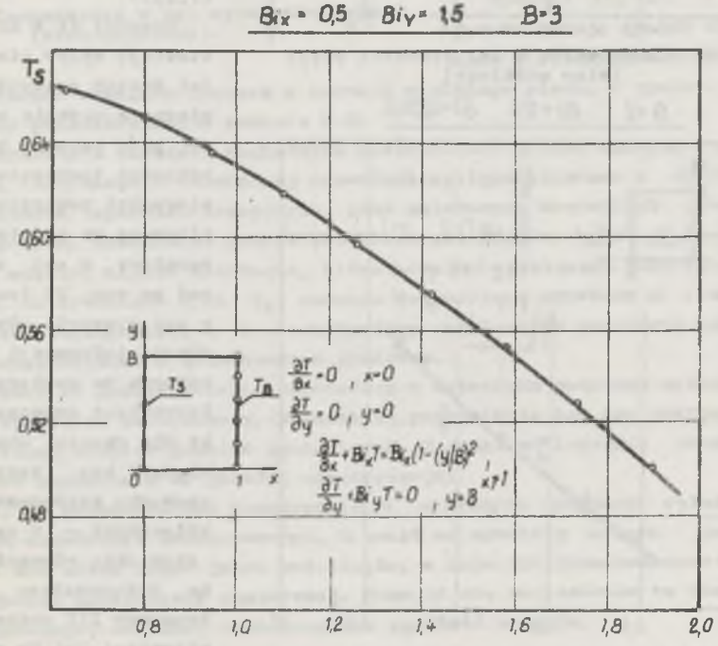
$Bi_x = Bi_y = 0,5 \qquad T_o = 1,0$

Fo	T_A	T		
		$\delta T=0,005$	$\delta T=0,01$	$\delta T=0,02$
1,4	0,347	0,341	0,336	0,337
1,8	0,246	0,244	0,239	0,254
2,2	0,175	0,175	0,160	0,175

Z kolei na rys. 18 przedstawiono temperaturę w narożu płyty, dla szczególnego przypadku omówionego w punkcie 5.7 (równanie (5.67)). W zadaniu zilustrowanym rys. 18 przyjęto, że dany jest warunek brzegowy na powierzchni Y=1 oraz temperatura w chwili początkowej w 3 punktach zaznaczonych na rysunku, a następnie temperatura w punkcie (0,0). Całkę występującą w równaniu (5.68) obliczono metodą opisaną w punkcie 8.2. Linia ciągła przedstawia wyniki zadania początkowo-brzegowego, kółeczka - wyniki z

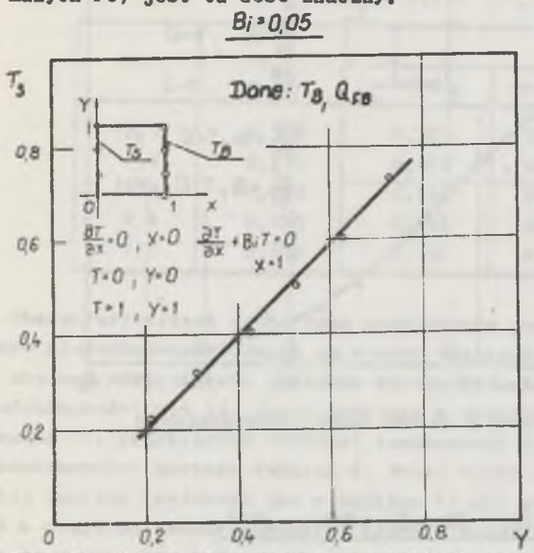


Rys. 18. Temperatura w narożu płyty dwuwymiarowej

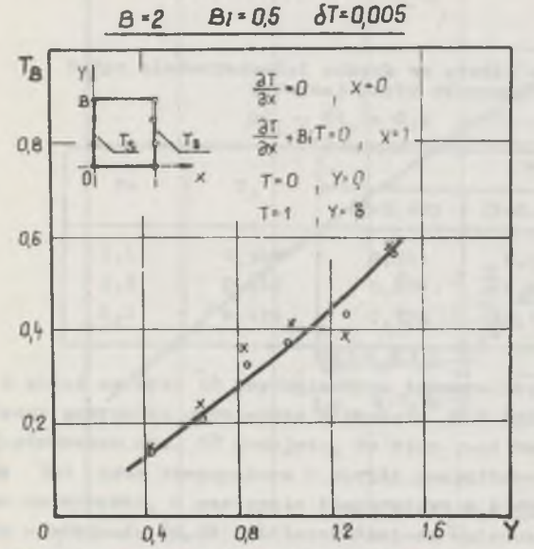


Rys. 19. Temperatura w osi symetrii płyty (stan ustalony)

równania (5.67) dla danych nie obarczonych błędami, krzyżyki dla danych obarczonych błędami bez zastosowania rachunku wyrównawczego. W przeciwieństwie do poprzednich przykładów wpływ niedokładności (zwłaszcza dla małych Fo) jest tu dość znaczny.



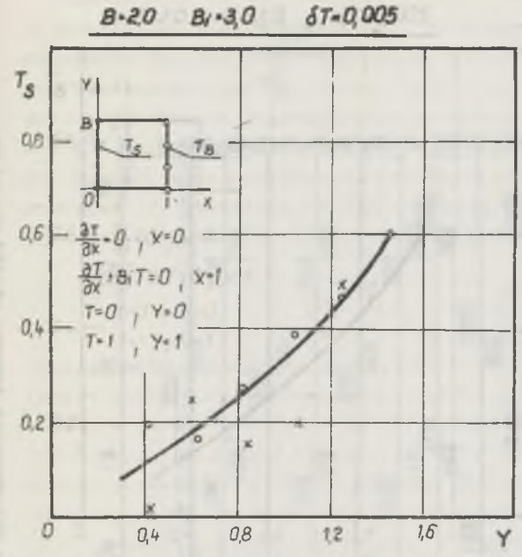
Rys. 20. Temperatura w osi symetrii płyty (stan ustalony)



Rys. 21. Temperatura na powierzchni zewnętrznej (stan ustalony)

Kolejne rysunki przedstawiają wyniki obliczeń dla pola ustalonego w dwuwymiarowej płycie, symetrycznej względem osi Y (równanie 7.31). Rysunek 19 przedstawia temperaturę w osi symetrii płyty na podstawie informacji o temperaturze na powierzchni X=1. Rysunek 20 przedstawia temperaturę dla powierzchni X=0 na podstawie informacji o temperaturze i gęstości strumienia ciepła na powierzchni X=1 (równanie (7.23)).

Rysunki 21 i 22 przedstawiają wpływ niedokładności danych na wyniki rozwiązania zadania odwrotnego, przy czym na rys. 21 pokazano temperaturę na powierzchni zewnętrznej, obliczoną na podstawie temperatury w osi symetrii, zaś na rys. 22 temperaturę w osi symetrii płyty na podstawie informacji o temperaturze na powierzchni X=1. Krzyżykami oznaczono wyniki dla danych obarczonych błędami bez zastosowania rachunku wyrównawczego, a kółeczkami - z zastosowaniem. Jako równanie warunku wykorzystano warunek brzegowy III rodzaju na powierzchni X=1. Na rysunkach



Rys. 22. Temperatura w osi symetrii płyty (stan ustalony)

tych (jak i poprzednich) linią ciągłą przedstawiono rozwiązanie zadania brzegowego.

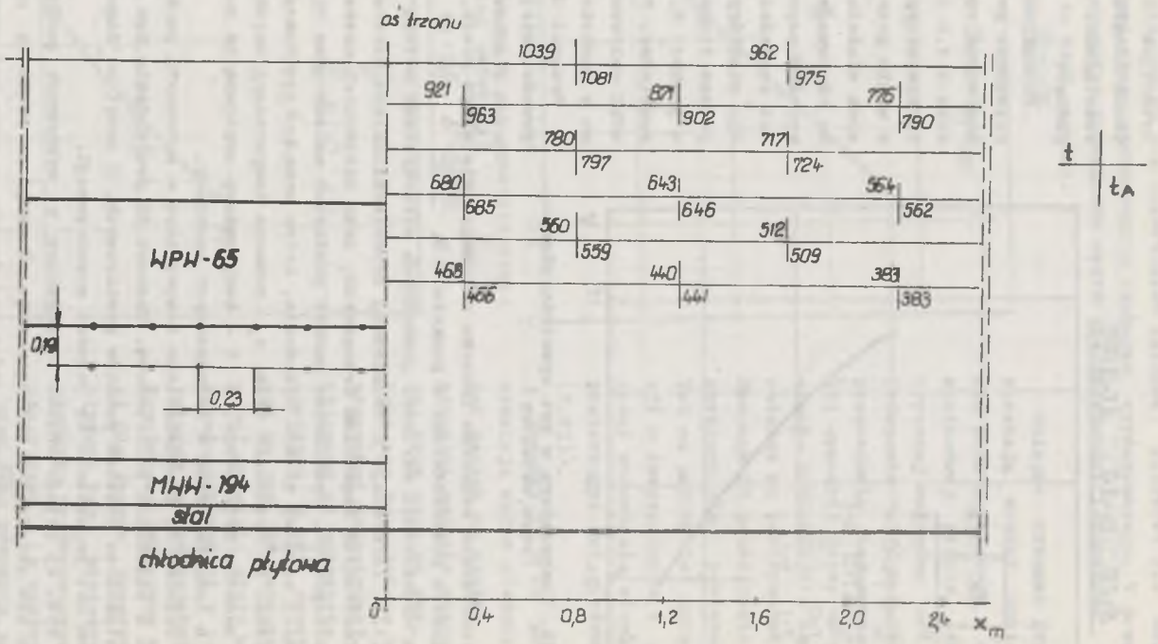
Przeprowadzono także obliczenia przy wykorzystaniu metod opisanych w punkcie 8.1.2 i 8.1.3. Wyniki te charakteryzują się w wielu przypadkach podobnymi właściwościami, z tym że obserwuje się na ogół wyraźną poprawę stabilności wartości liczbowych. Dla niektórych przypadków proces iteracyjny opisany w punkcie 8.1.2 okazał się rozbieżny. Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono w punkcie 10.2.

Rysunki 23, 24 i 25 przedstawiają wyniki obliczeń liczbowych dla zadania wyznaczenia rozkładu izoterm w trzonie wielkiego pieca, w oparciu o rozwiązanie przedstawione w punkcie 7.8.

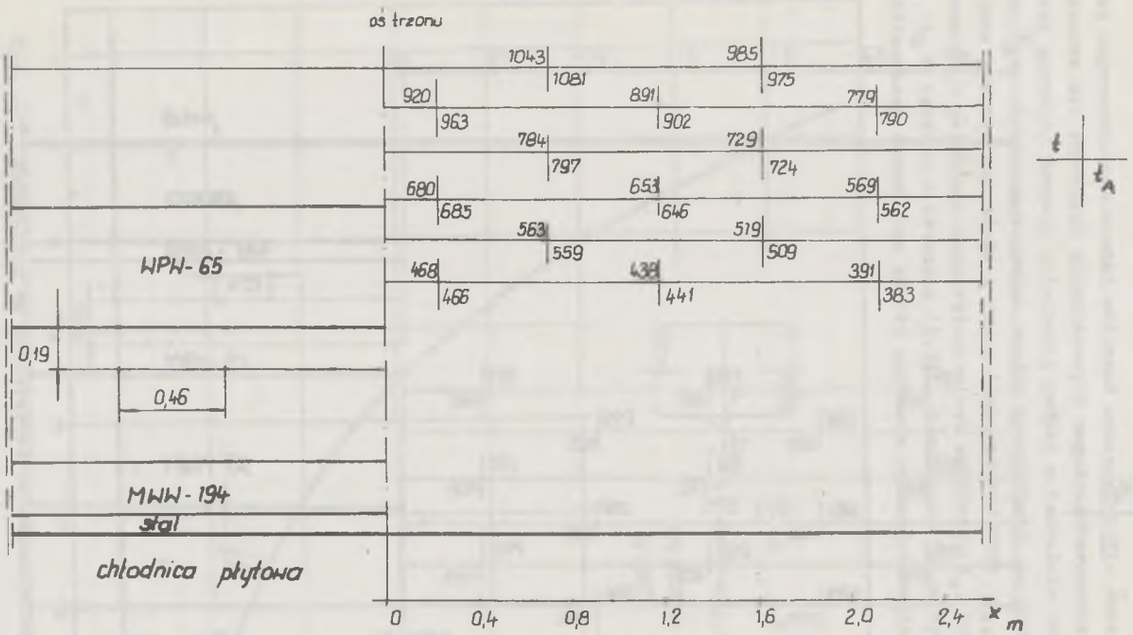
Dla wyznaczenia wartości pochodnych wykorzystano metodę opisaną w punkcie 8.1.1. Informacje o termicznej odpowiedzi układu uzyskano z obliczeń dla klasycznych zagadnień brzegowych, przy założonych wszystkich warunkach brzegowych. Symulowane punkty pomiarowe umieszczone były w obrębie pierwszej warstwy bloków wyłożenia, która może być traktowana jako warstwa pomiarowa. Na rysunkach tych t_A oznacza temperaturę uzyskaną z rozwiązania zadania brzegowego, a t - temperaturę uzyskaną na podstawie informacji o temperaturach w zaznaczonych punktach.

Na rysunku 23 przedstawiono temperaturę w wybranych punktach wyłożenia trzonu z chłodnicą podtrzonową. Rysunek 24 przedstawia ten sam przypadek, ale zwiększono rozstaw punktów pomiarowych. Z uwagi na łagodny przebieg izoterm nie pogorszyło to jakości aproksymacji.

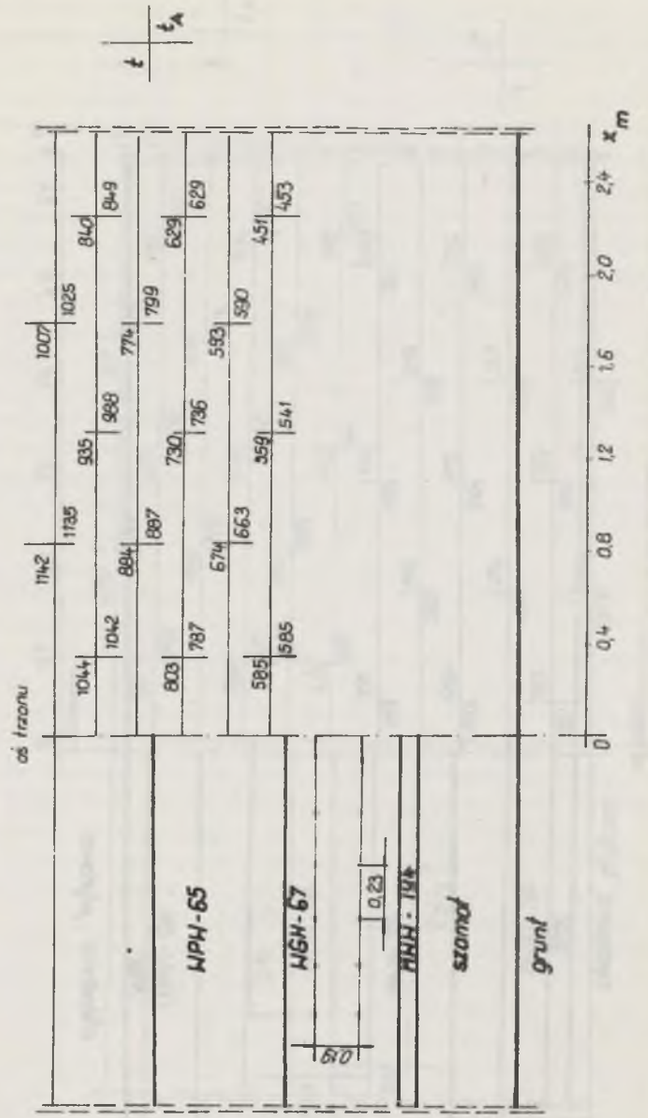
Na rys. 25 przedstawiono temperaturę w wybranych punktach wyłożenia trzonu bez chłodzenia podtrzonowego. Z uwagi na symetrię osiową punkty pomiarowe nie muszą leżeć jeden nad drugim, a mogą być rozmieszczone w różnych miejscach płaszczyzny pomiarowej. Mimo iż nie zastosowano tu rachunku wyrównawczego, uzyskano wystarczającą zgodność wyników.



Rys. 23. Temperatura w wybranych punktach chłodzonego trzonu wielkiego pieca



Rys. 24. Temperatura w wybranych punktach chłodzonego trzonu wielkiego pieca

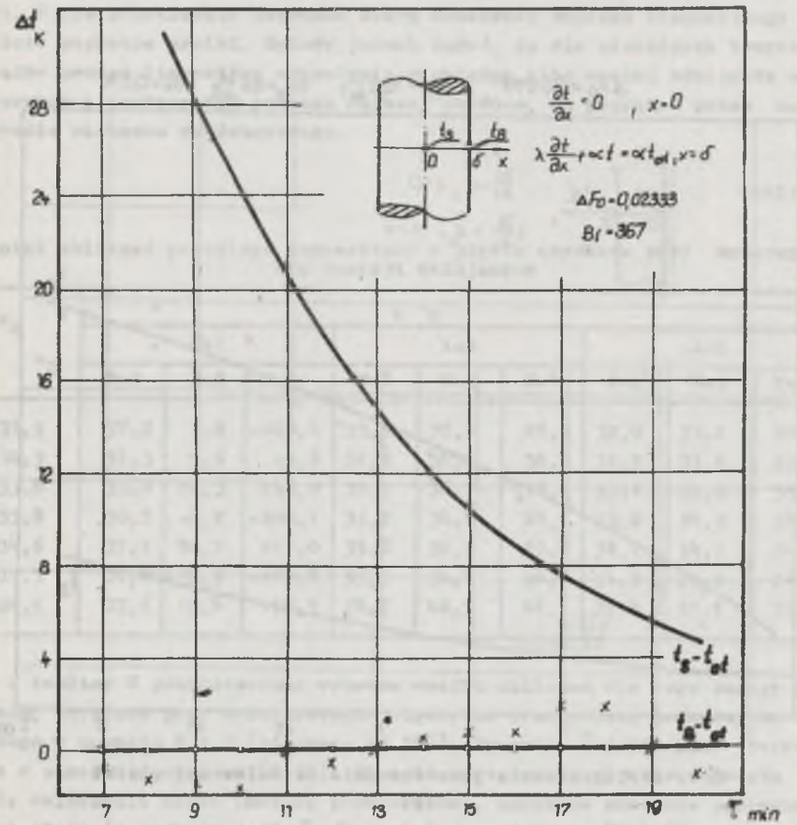


Rys. 25. Temperatura w wybranych punktach trzonu wielkiego pieca bez chłodzenia podtrzonowego

10.2. Przykłady oparte na wynikach eksperymentu

Poniżej zaprezentowano wyniki obliczeń wykonanych dla danych uzyskanych z eksperymentu dla wybranych przykładowych zagadnień przewodzenia ciepła.

Pierwszy przykład dotyczy chłodzenia próbki w kształcie walca[x)], Ponieważ próbka jest chłodzona w wodzie bardzo intensywnie, to temperatura brzegu t_B jest praktycznie stała i równa temperaturze wody t_{ot}. Na podstawie informacji o przebiegu temperatury w osi symetrii t_s, wyznaczono temperaturę t_B w oparciu o równanie (5.35). Zaznaczono ją na rysunku 26 krzyżykami. Kółeczkami zaznaczono wyniki uzyskane po zastosowaniu rachunku wy-

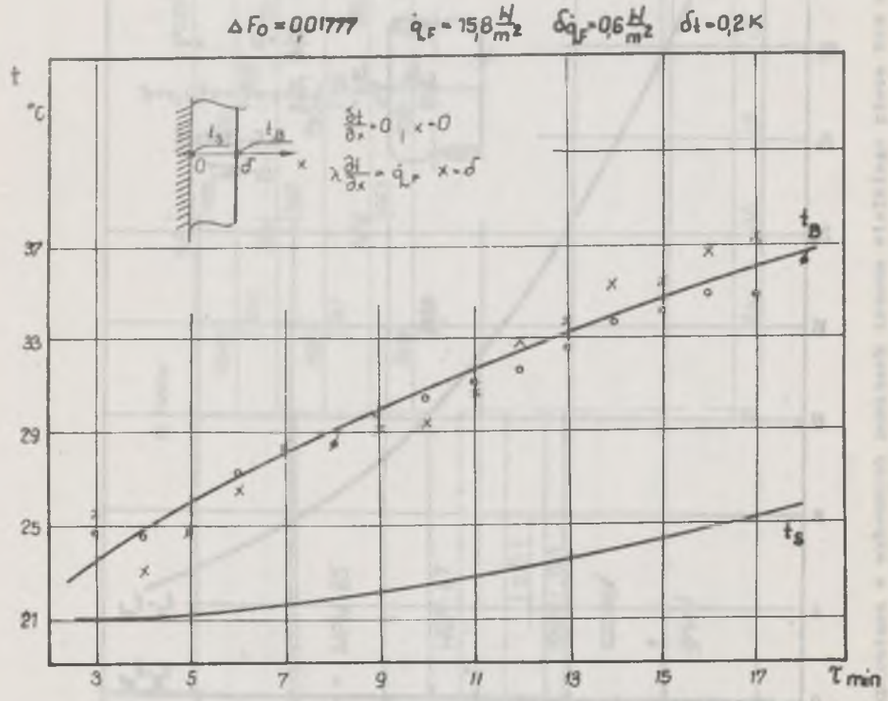


Rys. 26. Temperatura na powierzchni chłodzonego walca

x) Stanowisko wykonane w ramach pracy dyplomowej E. Krawczaka, wykonanej w ITC Pol.Śl. w 1979 roku.

równawczego. Należy jednak podkreślić, że przy tak dużej liczbie Biota, warunek brzegowy (wykorzystany jako równanie warunku) praktycznie determinuje temperaturę t_B i stąd wynika taka idealna zgodność tych wyników.

Modelem dla drugiego przykładu, pokazanego na rys. 27, może być płyta jednostronnie zaizolowaną, ogrzewana stałym strumieniem ciepła[*]. W rzeczywistości izolacja nie była idealna oraz strumień ciepła nieznacznie zmieniał się w czasie. Również dokładność odczytów temperatury była dość przeciętna (δt = 0,2K). Warunki takie wybrano świadomie, aby sprawdzić wpływ błędów. Mierzono temperaturę powierzchni zaizolowanej t_s i ogrzewanej t_B (linie ciągłe na rysunku).



Rys. 27. Ogrzewanie jednostronnie zaizolowanej płytki

Na podstawie informacji o temperaturze t_s obliczono temperaturę t_B w oparciu o równanie (5.35). Wyniki obliczeń zaznaczono krzyżykami. Kółeczkami zaznaczono wyniki uzyskane po zastosowaniu rachunku wyrównawczego. Równaniem warunku był warunek brzegowy II rodzaju na powierzchni x=δ. Pochodne występujące w równaniu (5.35) wyznaczano w oparciu o metodę opisaną w punkcie 8.1.1.

[*] Stanowisko wykonane w ramach pracy naukowo-badawczej NB-117/RME-3/78, kierowanej przez dr. inż. J. Nadziakiewicza, wykonanej w ITC Pol. Śl. w 1978 roku.

W tablicy 7 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń dla ostatniego przykładu, uzyskane przy wykorzystaniu metody funkcji sklejanych do wyznaczania pochodnych (punkt 8.1.2). Wyniki te pozwalają prześledzić proces iteracyjny i stabilizowanie się wartości liczbowych. W tablicy 7 przez l oznaczono numer kolejnej iteracji, t_B - zmierzoną temperaturę powierzchni ogrzewanej, t - temperaturę obliczoną, przy czym N oznacza liczbę wyrazów szeregu w rozwiązaniu (5.35). Przypadek l = 1 odpowiada interpolacji. W tym przykładzie uzyskano dobrą zbieżność procesu iteracyjnego i zupełnie poprawne wyniki. Należy jednak dodać, że dla niektórych innych przykładów proces iteracyjny okazał się rozbieżny albo wyniki odbiegały od poprawnych i powinny być poddane dalszej obróbce, na przykład przez zastosowanie rachunku wyrównawczego.

Tablica 7

Wyniki obliczeń przebiegu temperatury w płycie uzyskane przy wykorzystaniu funkcji sklejanych

t_B °C	t °C								
	l=1			l=3			l=5		
	N=2	N=3	N=4	N=2	N=3	N=4	N=2	N=3	N=4
31,5	37,2	3,8	-209,4	33,5	37,4	28,3	32,0	33,2	32,9
32,3	31,3	5,6	19,9	34,5	36,2	32,0	32,5	33,6	33,3
33,0	35,0	92,3	248,0	35,3	36,7	36,2	33,1	34,0	33,7
33,8	36,8	-8,2	-200,1	35,7	34,1	28,6	33,6	34,3	34,0
34,6	37,1	80,7	247,0	35,6	32,6	29,7	34,1	34,7	34,4
35,3	36,8	-12,5	-189,8	35,3	32,4	32,5	34,5	35,0	34,7
36,5	37,6	10,4	190,5	38,7	46,5	44,1	35,4	35,5	35,5

W tablicy 8 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń dla tego samego przykładu, uzyskane przy wykorzystaniu algorytmu wyznaczania pochodnych, opisanego w punkcie 8.1.3 (równanie (8.24)). Parametr γ dobierano iteracyjnie w oparciu o warunek (8.30). Mimo iż zastosowano wyjątkowo prostą metodę obliczania całki (metodę prostokątów), uzyskano zupełnie poprawne wyniki. Wartość pochodnej dla $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 = 0$ (por. równanie (8.24)) aproksymowano wyrażeniami (8.28). W tablicy tej (podobnie jak w tablicy 7) t_B oznacza zmierzoną temperaturę powierzchni ogrzewanej, a t - temperaturę obliczoną, zaś N oznacza liczbę wyrazów szeregu w rozwiązaniu (5.35). W tym przykładzie otrzymano także dobrą zbieżność i stabilność uzyskanych wyni-

ków. Dla niektórych przykładów obserwuje się dobrą stabilność wartości pochodnych, ale gorszą zbieżność. Zbieżność ta pogarsza się wraz ze zmniejszaniem się kroku próbkowania i ze wzrostem błędów pomiarowych. Także w tym przypadku zastosowanie rachunku wyrównawczego pozwala uzyskać wyniki jakościowo lepsze.

Tablica 8

Wyniki obliczeń przebiegu temperatury w płycie uzyskane przy wykorzystaniu algorytmu opisanego w punkcie 8.1.3

t_B °C	t °C	
	N=2	N=4
26,4	26,7	26,8
27,5	29,8	29,8
28,4	27,2	27,3
29,4	30,3	30,3
30,3	27,7	27,8
31,9	34,2	34,2
32,6	31,7	31,7

10.3. Wnioski

Przedstawione powyżej przykłady stanowią w miarę reprezentatywną próbkę przeprowadzonych obliczeń. Obliczenia te wykonywano dla różnych warunków brzegowych (na ogół jednak III rodzaju przy liczbach Biota zmienianych od 0,05 do 5,0) i dla różnych warunków początkowych dla stanów nieustalonych (wyrównanych, parabolicznych, cosinusoidalnych itp.). Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można wyciągnąć wiele wniosków, dotyczących głównie ograniczeń w stosowaniu prezentowanej metody.

Ograniczenia te związane są przede wszystkim ze sposobem wyznaczania pochodnych (punkt 8.1). Obliczenia przeprowadzone na szerokiej klasie funkcji elementarnych (typu sin, cos, exp, ln itp.) wykazały, że nawet przy dokładnych danych można oczekiwać poprawnych wyników tylko wtedy, jeżeli rząd pochodnej nie przekracza 4-5. Stanowi to istotne ograniczenie liczby wyrazów szeregu, zwłaszcza dla stanów ustalonych. Prezentowana metoda wyznaczania pola temperatury może być zatem stosowana w tych przypadkach, gdy gradienty temperatury wewnątrz ciała nie są zbyt duże. Duże gradienty temperatury obserwować można często dla początkowego okresu nieustalonego przewodzenia ciepła. Ponadto dla tego okresu temperatura wewnątrz ciała zmienia się nieznacznie i o wartościach liczbowych rozwiązania decydują pochodne wyższych rzędów, które wyznaczone są z mniejszą dokładnością. Duże gradienty temperatury obserwuje się także dla dużych liczb Biota.

Jeżeli dane są niedokładne, to przy korzystaniu z algorytmu opisanego w punkcie 8.1.1 mogą pojawić się niestabilności w wyznaczania pochodnych, zwłaszcza dla małych kroków próbkowania. Zjawisko to można zaobserwować przykładowo na rysunku 18 dla $Fo < 1,0$. Przy wykorzystaniu innych algorytmów obliczania pochodnych może okazać się, że dla dużych niedokładności lub małych kroków próbkowania proces iteracyjny staje się rozbieżny, lub wyniki są mało dokładne. Konieczne może okazać się wtedy zastosowanie rachunku wyrównawczego. W [35] proponuje się, aby liczbę wyrazów szeregu ograniczyć do takiej, dla której spełniony jest warunek:

$$\delta T_A^{(k)}(Fo_j) < \left| T_A^{(k)}(Fo_j) \right| .$$

Ograniczenie związane z minimalnym krokiem próbkowania wynika także z warunków stabilności wyznaczania współczynników wielomianu (dla metod opisanych w punktach 8.1.1 i 8.1.2) lub rozwiązywania równania całkowego czy różnicowo-całkowego (punkt 8.1.3). W analizowanych przykładach nieustalonego przewodzenia ciepła okazało się, że ΔFo nie powinno być mniejsze od 0,03 - 0,05, co przy ok. 10 węzłach aproksymacji i przyjęciu zasady (8.2) pozwala osiągać wyniki dla $Fo \geqslant 0,3 - 0,5$.*) Oznacza to, że proces nie może przebiegać zbyt szybko, aby przy takim ΔFo była w ogóle możliwa dobra aproksymacja termicznej odpowiedzi układu. Szybkość procesu także związana jest np. z liczbą Biota. Dla mniejszych liczb Fouriera możliwe jest uzyskiwanie wyników liczbowych po odrzuceniu zasady (8.2), ale obserwuje się pogarszanie ich jakości. Im większe są niedokładności, tym bardziej należy wydłużyć krok próbkowania. Przy dużych niedokładnościach stwierdzono, np. że dość stabilne rezultaty uzyskuje się dla $\Delta Fo \approx 0,1$. Podobne uwagi dotyczą zagadnień dla stanu ustalonego.

W podsumowaniu tej części wniosków można stwierdzić, że prezentowana metoda wyznaczania pola temperatury jest skuteczna, o ile warunki brzegowe determinujące przepływ ciepła są dość umiarkowane, tzn. na przykład liczba Biota nie powinna przyjmować zbyt dużych wartości (najlepiej $Bi < 5,0$). Występuje tu także pewna minimalna wartość kroku próbkowania**).

Kolejne wnioski wynikają wprost z przykładów prezentowanych w punkcie 10.1:

a) Wyniki jakościowo są tym lepsze, im większy wpływ na termiczną odpowiedź układu ma poszukiwane pole temperatury oraz im mniejszy wpływ mają warunki brzegowe i warunek początkowy.

*) por. tablica 3.

**) O takim ΔFo_{min} wspominają także i inni autorzy, stosujący inne metody (por. [3]).

b) Dla pól symetrycznych szeregi są tym lepiej zbieżne, im bliżej osi symetrii leży punkt pomiaru temperatury (por. tab. 2).

c) Dla pól niesymetrycznych położenie punktów pomiarowych nie wpływa w istotny sposób na wyniki (por. tablica 1).

d) Zastosowanie rachunku wyrównawczego nie usuwa przyczyn złego uwarunkowania zadań odwrotnych, ale w znacznym stopniu ogranicza jego skutki, nie komplikuje rachunkowo problemu, pozwala także zwiększyć liczbę wyrazów szeregu.

e) Jeżeli równaniem warunku jest warunek brzegowy III rodzaju, to niedokładność w szacowaniu liczby Biota nie wpływa w sposób zasadniczy na wyniki uzgadniania (por. tablica 4 - tam niedokładność dochodzi do 50%). Większy wpływ ma niedokładność w szacowaniu gęstości strumienia ciepła dla warunku brzegowego II rodzaju.

f) Dla układów wielowymiarowych liczba punktów pomiarowych może być bardzo ograniczona (por. tablica 3).

g) W związku ze złym uwarunkowaniem rozwiązań pomiary powinny być dokonywane z jak największą dokładnością (zwłaszcza dla stanu ustalonego).

11. UWAGI KOŃCOWE

Celem rozprawy było opracowanie metody wyznaczania pola temperatury w ciałach stałych, na podstawie obserwacji temperatury lub gęstości strumienia ciepła w pewnych wybranych punktach ciała. Uzyskane rozwiązania taką możliwość stwarzają. Wyniki tej obserwacji nazwano termiczną odpowiedzią układu. Od strony matematycznej stanowią one rozwiązanie zadania w tych wybranych punktach i ich wartości powinny zależeć od całego pola temperatury. W szczególnym przypadku punkty mogą być położone na powierzchni zewnętrznej ciała, chociaż nie jest to równoznaczne z rozwiązywaniem zadania z dowolnym warunkiem brzegowym I lub II rodzaju. Jeżeli ciało zanurzone jest w płynie, z którym wymienia ciepło przy dużych wartościach liczby Biota, to temperatura powierzchni zdeterminowana jest praktycznie przez warunek brzegowy i nie może być wykorzystywana jako odpowiedź termiczna układu. Szczegółowo problem ten omówiono w rozdziale 3.

Niezbędna ilość informacji wynika bezpośrednio z opisanej metody. W najczęściej spotykanych w literaturze tzw. granicznych zadaniach odwrotnych nieustalonego przewodzenia ciepła liczba niezbędnych warunków jednoznaczności jest taka sama, jak w zadaniach początkowo-brzegowych. Wymagany jest zatem warunek początkowy i umowne warunki brzegowe, sformułowane jednak nie dla powierzchni zewnętrznej, a dla pewnego konturu wewnątrz ciała (por. rys. 1).

W prezentowanej metodzie, dzięki narzuceniu dodatkowego warunku na termiczną odpowiedź układu (warunek (3.2)), można było wyeliminować z warunków jednoznaczności rozwiązania warunek początkowy. Stało się to jednak kosztem ograniczenia możliwości ekstrapolacji rozwiązania poza kontur, wzdłuż którego mierzono termiczną odpowiedź układu. Ekstrapolacja stała się możliwa tylko wzdłuż jednej współrzędnej, a zatem pełna ekstrapolacja rozwiązania możliwa jest tylko dla pola jednowymiarowego. Dla zagadnień sformułowanych analitycznie liczba niezbędnych warunków jest równa liczbie powierzchni ograniczających ciało, np. dla ciał jednowymiarowych - dwa warunki: informacja o termicznej odpowiedzi układu dla dwóch punktów, których położenie może być dowolne (wewnątrz ciała lub na powierzchni), dla ciał dwuwymiarowych - cztery warunki: informacja o termicznej odpowiedzi układu wzdłuż czterech powierzchni, przy czym przynajmniej dwie powinny pokrywać się z powierzchniami zewnętrznymi ciała (lub z powierzchnią symetrii), określonymi przez stałą wartość tej samej współrzędnej. Jeżeli termiczną odpowiedź układu stanowią warunki różnych typów, np. temperatu-

ra i gęstość strumienia ciepła, to dotyczyć one mogą tego samego punktu lub tej samej powierzchni, o ile nie jest to jedna ze wspomnianych powierzchni pokrywających się z brzegiem ciała.

Dla zadań sformułowanych numerycznie czasami trudno jest mówić o powierzchniach ograniczających. Poprawność doboru liczby i rozmieszczenia punktów pomiarowych można ocenić badając rząd macierzy układu równań (por. rozdział 6).

Rozwiązanie zagadnienia wymaga informacji nie tylko o wartościach liczbowych termicznej odpowiedzi układu, ale także o wartościach pochodnych tej funkcji. Dodatkowe warunki, jeżeli tylko obowiązują dla każdego momentu czasowego, mogą być wykorzystane dla potrzeb rachunku wyrównawczego. Z uwagi na otrzymaną postać rozwiązania dla tych potrzeb nieprzydatny jest warunek początkowy, gdyż nie występuje on w rozwiązaniu (por. rozdz. 9).

W podobny sposób można określić niezbędną ilość informacji dla zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła. Dla pól dwuwymiarowych, dzięki narzuceniu warunku (3.5) na termiczną odpowiedź układu, można było wyeliminować z warunków jednoznaczności rozwiązania warunki brzegowe na dwóch powierzchniach, określonych przez stałą wartość tej samej współrzędnej. Do rozwiązania wystarczą zatem dwa warunki: informacja o termicznej odpowiedzi układu i jej pochodnych wzdłuż jednej współrzędnej dla dowolnie ustalonych dwóch wartości drugiej współrzędnej lub przy różnych warunkach dla jednej wartości drugiej współrzędnej. Dodatkowe warunki mogą być wykorzystywane dla potrzeb rachunku wyrównawczego, przy czym z analogicznych powodów jak warunek początkowy, nieprzydatne tu są te dwa warunki brzegowe, które wyeliminowano z rozwiązania.

Ograniczenia w stosowaniu prezentowanej metody opisano szczegółowo w punkcie 10.3. Dotyczą one przede wszystkim minimalnego kroku próbkowania, dokładności pomiarów, gradientu temperatury wewnątrz ciała, szybkości zmian temperatury dla pól nieustalonych itp. Ograniczenia te spotyka się także dla innych metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych.

BECK [7] w swej pracy podał kryteria, według których można scharakteryzować metody rozwiązywania zadań odwrotnych. Poniżej podano je za [7] wraz z uwagami dotyczącymi metody opisanej w poprzednich rozdziałach. Kryteria te mogą posłużyć do uogólnienia wniosków dotyczących jej wad i zalet:

1. Identyfikowane temperatury i strumienie ciepła winny być dokładne, jeżeli dane pomiarowe są dokładne.
2. Metoda powinna być mało czuła na błędy pomiarowe.
3. Metoda powinna być stabilna dla małych czasów.
4. Metoda powinna dopuszczać wykorzystanie pomiarów z większej liczby termoelementów,
5. Metoda powinna dopuszczać skokowo-zmienną w czasie temperaturę powierzchni.
6. Nie powinna być wymagana informacja o precyzyjnym czasie rozpoczęcia procesu.

7. Metoda nie powinna być ograniczona do ustalonej liczby obserwacji
8. Dozwolone powinny być ciała o złożonej strukturze.
9. Współczynniki mogą być zmienne z temperaturą.
10. Grzanie kontaktowe nie powinno być wykluczone.
11. Metoda powinna być łatwa do weryfikacji numerycznej.
12. Koszt obliczeń numerycznych powinien być umiarkowany.
13. Użytkownik metody nie musi znać zaawansowanych metod matematycznych w celu jej wykorzystania.
14. Metoda powinna dać się stosować w różnych układach współrzędnych.
15. Metoda powinna dopuszczać rozszerzenie jej na więcej powierzchni.
16. Metoda powinna mieć bazę statystyczną.

Prezentowana metoda spełnia postulaty 4-15. W szczególności pomiary większej liczby termoelementów umożliwiają wykorzystanie rachunku wyrównawczego. Zastosowany aparat matematyczny jest wyjątkowo prosty (sumowanie szeregów, metoda najmniejszych kwadratów, równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu itp.). Postulat 16 jest spełniony o tyle, o ile bazę statystyczną ma metoda najmniejszych kwadratów. Postulat 5 jest natomiast dyskusyjny, bo nieuzasadniony fizykalnie.

Największe zastrzeżenia do prezentowanej metody można mieć przy rozpatrywaniu pierwszych trzech postulatów. Z nimi związane są najważniejsze ograniczenia w jej zastosowaniu. Omówiono je szczegółowo w punkcie 10.3. W miarę rozwoju techniki pomiarowej (por. np. [13]) i metod numerycznych postulaty te coraz łatwiej spełnić.

Jak widać z powyższych rozważań prezentowana metoda spełnia lepiej lub gorzej przedstawione kryteria, co może przesądzać o jej praktycznej przydatności.

12. LITERATURA

[1] Агеева З.Г.: О некоторых случаях равномерной сходимости метода квазиобращения, сб. "Методы регуляризации неустойчивых задач", Свердловск, 3-8, (1976).

[2] Алифанов О.М.: Численное решение нелинейной обратной задачи теплопроводности, Инж. Физ. Журнал, 25, № 2, 363-370, (1973).

[3] Алифанов О.М.: Граничные обратные задачи теплопроводности, Инж. Физ. Журнал, 29, № 1, 13-25, (1975).

[4] Алифанов О.М.: Обратные задачи теплопроводности в исследовании тепловых процессов и проектировании технических схем, Инж. Физ. Журнал, 33, № 6, 972-981, (1977).

[5] Алифанов О.М.: Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов, Изд. "Машиностроение", Москва (1979).

[6] Bapu Rao M.N.: Solutions to heat conduction problem by a mixed method, International Journal of Heat and Mass Transfer, 23, No 4, 443-450, (1980).

[7] Beck J.V.: Criteria for comparison of methods of solution the inverse heat conduction problem, Nucl.Eng.Design, 53, 11-22, (1979).

[8] Безнощенко И.Я., Приленко А.И.: Обратные задачи для уравнений параболического типа, сб. "Проблемы математической физики и вычислительной математики", Изд. "Наука", М-ва (1977).

[9] Blackwell B.F.: Efficient technique for the numerical solution of the one dimensional inverse problem of heat conduction, Numerical Heat Transfer, 4, No 2, 229-238, (1981).

[10] Burggraf O.K.: An exact solution of the inverse problem in heat conduction. Theory and application, Trans. ASME, s.C, Journal of Heat Transfer, 86, 373-382,(1964).

[11] Carslaw H.S., Jaeger J.C.: Conduction of Heat in Solids, Oxford Univ. Press, 2nd ed., Oxford (1959).

[12] Галицын А.С., Жуковский А.Н.: Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности, Изд. "Наукова думка", Киев (1976).

[13] Gauthier Randal A.: Surface temperature measurements, Inst.Technol., 28, No 2, 57-60,(1981).

[14] Gdula S.J.: Przewodzenie ciepła w prętach pryzmatycznych i żebrach, ZN Pol.Śl., seria Energetyka, z.20,(1965).

[15] Гончарский А.В. и др.: Численные методы решения обратных задач астрофизики, Изд. "Наука", Москва 1978 .

[16] Grysa K., Ciałkowski M.J.: Zagadnienia odwrotne pól temperatury - przegląd literatury. Mech.Teoret. i Stos., 18, nr 4, 535-554,(1980).

[17] Grysa K.: Przegląd literatury dotyczącej zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła, praca nauk.-badawcza, umowa IMP PAN-PR8-28/81, zadanie U.6.4.10.07., Polit. Poznańska, (1981) (nie publikowana).

[18] Hills R.G., Mulholland G.P.: The accuracy and resolving power of the one-dimensional transient inverse heat conduction, theory and applied to discrete and inaccurate measurements, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 22, No 8, 1221-1229, (1979).

[19] Иманалиев М.И.: Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение, Изд, "ИЛИМ", Фрунзе (1977).

[20] Коздоба Л.А., Круковский П.Г.: Методы решения обратных задач теплопереноса, Изд. "Наукова думка" Киев (1982).

[21] Круковский П.Г.: Численное решение нелинейной обратной задачи нестационарной теплопроводности, сб. "Исследование процессов тепло- и массопереноса", Изд. "Наукова думка", Киев (1979).

[22] Kurpisz K.: Zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła dla pól ustalonych. Materiały XXI Sympozjonu PTMTS "Modelowanie w mechanice", 187-194, (1982).

[23] Kurpisz K.: Zastosowanie rachunku wyrównawczego do rozwiązywania odwrotnych zadań przewodzenia ciepła, ZN Pol. Śl. seria Energetyka z.82, 77-89,(1983).

[24] Kurpisz K.: Wyznaczanie pola temperatury w ciałach stałych przy braku informacji o warunkach brzegowych i początkowym, Archiwum Termodynamiki (w druku).

[25] Kurpisz K.: Wyznaczanie przebiegu izoterm w wyłożeniu węglowym trzonu wielkiego pieca, przy wykorzystaniu informacji o temperaturach w wybranych punktach wyłożenia, Materiały XXII Sympozjonu PTMTS "Modelowanie w mechanice", 247-252, (1983).

[26] Лазученков Н.М., Шмукин А.А.: Об обратной граничной задаче теплопроводности для двухмерной области, Инж. Физ. Журнал, 40, № 2, 352 - 358, (1981).

[27] Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В.: Идентификация в задачах теплопроводности, Изд. "Науковая думка", Киев (1982) .

[28] Марчук Г.М.: Методы вычислительной математики, Изд. "Наука", Москва (1977).

[29] Мишин В.П., Алифанов О.М.: Обратные задачи теплообмена - области применения при проектировании и испытаниях технических объектов, Инж. Физ. Журнал, 52, № 2, 181-191 (1982).

[30] Никитенко Н., Постил С.: Численное решение двухмерных обратных задач теплопроводности, Теплофизика и Теплотехника, вып. 37, (1979).

[31] Новиков И.А.: О решении линейных граничных обратных задач теплопроводности, Инж. Физ. Журнал, 34, № 3, 529-535, (1978).

[32] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych, Wyd. "Śląsk", Katowice (1977),

[33] Szargut J.: Zastosowanie rachunku wyrównawczego w technice cieplnej, Pomiary, Automatyka i Kontrola, nr 4, (1980).

[34] Шмукин А.А., Лазученков Н.М.: Об использовании сплайнов при решении граничных обратных задач теплопроводности, Инж. Физ. Журнал, 34, № 2, 338-343, (1978).

[35] Темкин А.Г.: Обратные методы теплопроводности, Изд. "Энергия", Москва (1973).

[36] Тихонов А.Н.: Обратные задачи теплопроводности, Инж. Физ. Журнал, 29, № 1, 7-12, (1975).

[37] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.: Методы решения некорректных задач, Изд. "Наука", 2 изд., Москва (1979).

[38] Wiśniewski S.: Wymiana ciepła, Wyd. PWN, Warszawa (1979).

[39] Завьялов Ю.С. и др.: Методы сплайн-функций, Изд. "Наука", Москва(1980).

Dodatek A

SPRAWDZENIE WARUNKU (4.6) DLA ZADANIA NIEUSTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

W punkcie 5.2 przedstawiono rozwiązanie (5.9) zadania nieustalonego przewodzenia ciepła sformułowanego analitycznie. W równaniu tym założono, że spełniony jest warunek (4.6). Dla rozpatrywanego przypadku warunek ten może być zapisany w postaci:

$$\bar{T}_o = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{S_1} \phi_{k,1} T_A^{(k)}(\vec{X},Fo)dS + \int_{S_2} \phi_{k,2} Q_A^{(k)}(\vec{X},Fo)dS\right], \qquad \text{dla } Fo \to 0. \tag{A.1}$$

Elementami macierzy kolumnowej $\bar{T}_o$ są kolejne transformaty $\bar{T}_{o,i}$ warunku początkowego $T_o(\vec{X})$. Transformaty te wyznacza się z zależności:

$$\bar{T}_{o,i} = \int_V T_o(\vec{X}) v_i \, dV, \tag{A.2}$$

gdzie V oznacza objętość ciała.

Z równania określającego funkcje własne (5.5) wynika:

$$v_i = -\frac{1}{\mu_i^2} \nabla^2 v_i. \tag{A.3}$$

Ponadto, zgodnie z założeniem (3.2) (rozdział 3), temperatura T_A spełnia równanie przewodzenia ciepła także dla $Fo \to 0$, tzn.

$$T_o(\vec{X}) = T_A(\vec{X},Fo) \quad \text{dla} \quad Fo \to 0,$$

i

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \nabla^2 T, \tag{A.4}$$

gdzie: $T_A(\vec{X},Fo) = T(\vec{X},Fo)$ dla $\vec{X} \in S_1$.

Podstawiając (A.3) do (A.2) i wykorzystując drugą tożsamość Greena oraz warunki (A.4), otrzymuje się:

$$\bar{T}_{o,i} = -\frac{1}{\mu_i^2}\int_V T_o \nabla^2 v_i \, dV = -\frac{1}{\mu_i^2}\int_{S_1} T_A \frac{\partial v_i}{\partial N} dS - \frac{1}{\mu_i^2}\int_{S_2} Q_A v_i \, dS - \tag{A.5}$$

$$-\frac{1}{\mu_i^2}\int_V v_i \nabla^2 T \, dV = -\frac{1}{\mu_i^2}\int_{S_1} T_A \frac{\partial v_i}{\partial N} dS - \frac{1}{\mu_i^2}\int_{S_2} Q_A v_i \, dS - \frac{1}{\mu_i^2}\frac{d}{d\,Fo}\int_V T v_i \, dV,$$

dla $Fo \to 0$.

Przekształcając dalej całkę objętościową, uzyskuje się ostatecznie:

$$\bar{T}_{o,i} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\mu_i^{2k+2}}\left[\int_{S_1} T_A^{(k)}(\vec{X},Fo)\frac{\partial v_i}{\partial N} dS + \int_{S_2} v_i Q_A^{(k)}(\vec{X},Fo)dS\right] \tag{A.6}$$

dla $Fo \to 0$,

lub inaczej (por. równanie (5.10)):

$$\bar{T}_o = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{S_1} -(c^{-1})^{k+1} B_1 T_A^{(k)}(\vec{X},Fo)dS + \int_{S_2} -(c^{-1})^{k+1} B_2 Q_A^{(k)}(\vec{X},Fo)dS\right],$$

dla $Fo \to 0$. (A.7)

Uwzględniając zależności (4.5), że

$$\phi_{k,p} = -(c^{-1})^{k+1} B_p, \quad p = 1,2,$$

otrzymuje się w końcu warunek (A.1).

Dodatek B

SPRAWDZENIE MOŻLIWOŚCI EKSTRAPOLACJI ROZWIĄZANIA JEDNOWYMIAROWEGO NIEUSTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

W punkcie 5.3 przedstawiono rozwiązanie odwrotnego zadania nieustalonego przewodzenia ciepła dla pola jednowymiarowego w postaci (równanie (5.16)):

$$T(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k(X,X_1,X_2) T_1^{(k)}(Fo) + \psi_k(X,X_2,X_1) T_2^{(k)}(Fo) \right] \qquad (B.1)$$

Jeżeli punkty X_1 i X_2 położone są na brzegu ciała, to równanie to spełnia warunek (4.6) (por. Dodatek A), a także równanie (5.13) i warunki (5.14). Obowiązuje zatem w całej objętości ciała i może być zapisane w postaci:

$$T(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k(X,0,1) F_1^{(k)}(Fo) + \psi_k(X,1,0) F_2^{(k)}(Fo) \right], \qquad (B.2)$$

gdzie:

$F_1(Fo) = T(0,Fo)$,

$F_2(Fo) = T(1,Fo)$.

Można zatem obliczyć temperaturę w dwóch dowolnych punktach X_1 i X_2, wykorzystując (B.2)

$$T_1(Fo) = T(X_1,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k(X_1,0,1) F_1^{(k)}(Fo) + \psi_k(X_1,1,0) F_2^{(k)}(Fo) \right],$$

$$T_2(Fo) = T(X_2,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k(X_2,0,1) F_1^{(k)}(Fo) + \psi_k(X_2,1,0) F_2^{(k)}(Fo) \right]. \qquad (B.3)$$

Można teraz wykazać, że podstawiając (B.3) do (B.1), uzyskuje się rozwiązanie tożsame z (B.2), które jak wspomniano obowiązuje w całej objętości ciała.

Po podstawieniu otrzymuje się:

$$T(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k(X,X_1,X_2) T_1^{(k)}(Fo) + \psi_k(X,X_2,X_1) T_2^{(k)}(Fo) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ F_1^{(k)}(Fo) \left[\sum_{n=0}^{k} \psi_n(X,X_1,X_2) \psi_{k-n}(X_1,0,1) + \psi_n(X,X_2,X_1) \psi_{k-n}(X_2,0,1) \right] + \right.$$

$$\left. F_2^{(k)}(Fo) \left[\sum_{n=0}^{k} \psi_n(X,X_1,X_2) \psi_{k-n}(X_1,1,0) + \psi_n(X,X_2,X_1) \psi_{k-n}(X_2,1,0) \right] \right\}. \qquad (B.4)$$

Jeżeli (B.4) ma być tożsame z (B.2), to muszą być spełnione warunki:

$$\phi_{1,k}(X) \equiv \sum_{n=0}^{k} \left[\psi_n(X,X_1,X_2) \psi_{k-n}(X_1,0,1) + \psi_n(X,X_2,X_1) \psi_{k-n}(X_2,0,1) \right] =$$

$$= \psi_k(X,0,1) \qquad (B.5)$$

oraz

$$\phi_{2,k}(X) \equiv \sum_{n=0}^{k} \left[\psi_n(X,X_1,X_2) \psi_{k-n}(X_1,1,0) + \psi_n(X,X_2,X_1) \psi_{k-n}(X_2,1,0) \right] =$$

$$= \psi_k(X,1,0). \qquad (B.6)$$

Słuszność tych warunków można sprawdzić metodą indukcji, przy czym dowód dla warunku (B.5) przebiega analogicznie, jak dla (B.6), stąd analiza zostanie ograniczona do (B.5).

Dla k=0 lewa i prawa strona warunku spełnia to samo równanie różniczkowe (5.17)

$$\frac{d^2\psi_0(X,0,1)}{dX^2} + \frac{r-1}{X} \frac{d\psi_0(X,0,1)}{dX} = 0$$

$$\frac{d^2 \phi_{1,0}(X)}{dX^2} + \frac{r-1}{X} \frac{d\phi_{1,0}(X)}{dX} = 0 \qquad (B.7)$$

Jeżeli lewa i prawa strona spełnia równanie (5.18), to jak łatwo wykazać spełnia także to równanie dla k = k + 1.

Należy teraz sprawdzić warunki brzegowe.
Dla k=0 funkcja $\psi_k(X,P,R)$ spełnia warunki (5.17)

$$\psi_0(X,P,R) = 1 \quad \text{dla} \quad X = P$$
$$\psi_0(X,P,R) = 0 \quad \text{dla} \quad X = R \tag{B.8}$$

Dla $X = X_1$ lewa strona warunku (B.5) jest równa:

$$\phi_{1,0}(X_1) = \psi_0(X_1,X_1,X_2)\psi_0(X_1,0,1) + \psi_0(X_1,X_2,X_1)\,\psi_0(X_2,0,1) = \psi_0(X_1,0,1), \tag{B.9}$$

czyli równa prawej stronie.
Podobnie dla $X=X_2$ lewa strona warunku (B.6) jest równa:

$$\phi_{2,0}(X_2) = \psi_0(X_2,X_1,X_2)\psi_0(X_1,1,0) + \psi_0(X_2,X_2,X_1)\,\psi_0(X_2,1,0) =$$
$$= \psi_0(X_2,1,0), \tag{B.10}$$

czyli równa prawej stronie.

Zatem dla k=0 lewa i prawa strona warunku (B.5) spełnia to samo równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego i takie same dwa warunki (z których można wyznaczyć dwie stałe całkowania, występujące w całce ogólnej równania). Z warunków jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego rzędu drugiego wynika, że lewa i prawa strona warunku (B.5) reprezentują tę samą funkcję. Stosując dla $k > 0$ metodę indukcji, można wykazać, że rozwiązania równania typu (5.18) będą miały taką samą całkę ogólną i taką samą całkę szczególną, bo prawe strony równania (5.18) są identyczne ($\phi_{1,k-1}(X) = \psi_{k-1}(X,0,1)$). Ponieważ spełniają takie same warunki brzegowe, to

$$\phi_{1,k}(X) \equiv \psi_k(X,0,1).$$

Sprawdzenie warunków brzegowych dla $k > 0$ przebiega analogicznie jak dla $k = 0$.

Dodatek C

SPRAWDZENIE WARUNKU (4.6) DLA ZADAŃ NIEUSTALONYCH SFORMUŁOWANYCH NUMERYCZNIE

W rozdziale 6 przedstawiono rozwiązanie odwrotnego zadania nieustalonego przewodzenia ciepła dla problemów sformułowanych numerycznie. Rozróżniono zadanie wewnętrzne i zadanie ekstrapolacji rozwiązania. To ostatnie nie wymaga sformułowania warunku początkowego, gdyż w przypadku ekstrapolacji nie rozwiązuje się układu równań różniczkowych. Może zatem posłużyć do weryfikacji warunku (4.6) dla zadań wewnętrznych. Weryfikacja ta zostanie przeprowadzona najpierw dla symetrycznego pola jednowymiarowego, a następnie uogólniona. Zostaną wykorzystane oznaczenia używane w punkcie 6.3.

Symetryczne pole temperatury w płycie (por. rys. 7) opisane jest układem równań różnicowych (6.1). Jeżeli dana jest temperatura w osi symetrii, to możliwa jest ekstrapolacja rozwiązania aż do węzła powierzchniowego. Na podstawie (6.3) otrzymuje się

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \phi_{k,i}\, T_1^{(k)}(\tau). \tag{C.1}$$

Współczynniki $\phi_{k,i}$ są rozwiązaniami układu równań (6.6) i (6.7). Rozwiązanie (C.1) jest słuszne w całej objętości ciała i jako wynik ekstrapolacji nie wymaga warunku początkowego.

Jeżeli dana jest temperatura węzła powierzchniowego, to możliwe jest rozwiązanie zadania wewnętrznego, które przyjmuje postać (6.13)

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k,i}\, T_{N+1}^{(k)}(\tau). \tag{C.2}$$

Można teraz obliczyć T_{N+1} z (C.1) i podstawić do (C.2). Uzyskany wynik powinien być tożsamy z (C.1), tzn. skoro

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} T_1^{(k)}(\tau) \sum_{n=0}^{k} \psi_{n,i}\, \phi_{k-n,N+1}\,^{x)} \tag{C.3}$$

x) W równaniu tym przyjęto, że wskaźnik n także dąży do nieskończoności. Jest oczywiste, że współczynniki $\phi_{N+1,i}$, $\phi_{N+2,i}$ ... są równe zero.

to

$$\phi_{k,i} = \sum_{n=0}^{k} \psi_{n,i}\ \phi_{k-n,N+1}, \qquad i = 1,2,\ldots,N+1 \qquad (C.4)$$

$$k = 0,1,\ldots$$

lub w postaci macierzowej

$$\phi_k = \sum_{n=0}^{k} \Psi_n\, \phi_{k-n,N+1}. \qquad (C.5)$$

Aby udowodnić (C.5), wprowadza się dwie macierze Q i S M x M elementowe (M = N + L - suma węzłów wewnętrznych i powierzchniowych, tu: L = 1 - por. pkt. 6.3), takie że

$$Q = \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ D \end{bmatrix},$$

a zatem macierz H (por. (6.21)) jest równa

$$H = Q + S \qquad (C.6)$$

Macierz D jest w tym przypadku macierzą wierszową, której ostatni element jest równy jeden, a pozostałe zero. Współczynniki Ψ_k spełniają układy równań (6.27)

$$H\,\Psi_k = P_k, \qquad k = 0,1,\ldots, \qquad (C.7)$$

gdzie macierz kolumnowa P_0 ma tylko jeden ostatni element niezerowy (M= = N + 1) równy jedynce. A zatem macierz D i macierze kolumnowe P_k odpowiadają zadaniu wewnętrznemu, a macierz A jest taka sama dla zadania wewnętrznego i ekstrapolacji.
Łatwo zauważyć, że

$$S = P_0\, P_0^T \qquad (C.8)$$

oraz (por. (6.6))

$$Q\ \phi_0 = 0. \qquad (C.9)$$

Łatwo'teŁ sprawdzić pozostałe związki (por. (6.7))

$$Q\ \phi_k = U_k, \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (C.10)$$

gdzie M elementowa macierz kolumnowa U_k ma ogólną postać

$$U_k^T = \left[\phi_{k-1,1},\ \phi_{k-1,2},\ \ldots,\ \phi_{k-1,N}, 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\right] \ \text{x)} \qquad (C.11)$$

oraz (por. (6.17) przy (6.14))

$$Q\ \Psi_k = P_k, \qquad k = 0,1,\ldots \qquad (C.12)$$

Dowód warunku (C.5) można przeprowadzić metodę indukcji. Dla k=0 należy wykazać, że

$$\Psi_0 \phi_{0,\,N+1} = \phi_0. \qquad (C.13)$$

W tym celu wystarczy obustronnie pomnożyć (C.13) przez macierz H = Q + S
Lewa strona równa się:

$$\phi_{0,N+1}(Q + S)\ \Psi_0 = \phi_{0,N+1}\ P_0, \quad \text{(na podstawie (C.12),}$$

zaś prawa strona

$$(Q + S)\,\phi_0 = Q\,\phi_0 + S\phi_0 = 0 + P_0\, P_0^T\ \phi_0 = P_0\, \phi_{0,N+1}.$$

Jak łatwo zauważyć, jeżeli słuszny jest warunek (C.13), to słuszne jest także równanie

$$P_1\ \ \phi_{0,N+1} = U_1, \qquad (C.14)$$

gdzie ogólnie

$$P_k^T = \left[\Psi_{k-1,1},\ \Psi_{k-1,2},\ldots,\ \Psi_{k-1,N},\ 0,\ \ldots,\ \ 0\right]$$

Jeżeli k=1, to warunek (C.5) przyjmuje postać:

$$\Psi_0\ \ \phi_{1,N+1} + \Psi_1\ \ \phi_{0,N+1} = \phi_1 \qquad (C.15)$$

Mnożąc obustronnie przez H, otrzymuje się:
lewa strona:

$$(Q + S)\Psi_0\ \phi_{1,N+1} + (Q + S)\Psi_1\ \phi_{0,N+1} = P_0\ \phi_{1,N+1} + P_1\ \phi_{0,N+1},$$

---

x) W tym przypadku tylko jeden M = N+1 element zerowy.

prawa strona

$$(Q + S)\phi_1 = Q\phi_1 + S\phi_1 = U_1 + P_0\ \phi_{1,N+1}.$$

Uwzględniając (C.14), lewa strona równa jest prawej. Ponadto skoro słuszny jest warunek (C.15), to można też zapisać:

$$P_1\ \phi_{1,N+1} + P_2\,\phi_{0,N+1} = U_2. \tag{C.16}$$

Niech zatem

$$\sum_{n=0}^{k} \psi_n\,\phi_{k-n,N+1} = \phi_k \tag{C.17}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{k} P_{n+1}\ \ \phi_{k-n,N+1} = U_{k+1}. \tag{C.18}$$

Powinno być

$$\sum_{n=0}^{k+1} \psi_n\ \phi_{k+1-n,N+1} = \phi_{k+1}, \tag{C.19}$$

Mnożąc obie strony przez H, otrzymuje się:
lewa strona:

$$(Q + S)\psi_0\ \ \phi_{k+1,N+1} + \sum_{n=0}^{k} (Q + S)\psi_{n+1}\,\phi_{k-n,N+1} =$$

$$= P_0\,\phi_{k+1,N+1} + \sum_{n=0}^{k} P_{n+1}\ \ \phi_{k-n,N+1},$$

prawa strona:

$$(Q + S)\phi_{k+1} = Q\,\phi_{k+1} + S\,\phi_{k+1} = U_{k+1} + P_0\,\phi_{k+1,N+1},$$

co przy wykorzystaniu warunku (C.18) kończy dowód.

W analogiczny sposób przebiega weryfikacja warunku (4.6) dla pól wielowymiarowych. W dowodzie tym wykorzystane zostaną oznaczenia przyjęte w punkcie 6.3 oraz w rozważaniach niniejszego Dodatku, dotyczących pola jednowymiarowego.

Najważniejsze zostaną poniżej przypomniane:

L - liczba węzłów powierzchniowych równa liczbie węzłów L_p, w których znana jest temperatura,

N - liczba węzłów brzegowych i wewnętrznych (M = L+N),

J - macierz kolumnowa L elementowa zawierająca indeksy węzłów, dla których znana jest temperatura dla zadania ekstrapolacji,

I - macierz kolumnowa L elementowa zawierająca indeksy węzłów, dla których znana jest temperatura dla zadania wewnętrznego,

$\phi_{k,j}$ - macierze kolumnowe M elementowe zawierające współczynniki rozwiązania zadania ekstrapolacji (j = 1,2,...,L),

$\psi_{k,j}$ - macierze kolumnowe M elementowe zawierające współczynniki rozwiązania zadania wewnętrznego (j = 1,2,...,L),

$P_{k,j}$ - macierze kolumnowe opisane równania (6.24) i (6.25) dla zadania wewnętrznego, czyli

$$H\psi_{k,j} = P_{k,j} \tag{C.20}$$

T - macierz kolumnowa M elementowa zawierająca temperatury w węzłach dla zadania wewnętrznego*), przy czym $T_1, T_2, \ldots, T_N$, temperatury w węzłach wewnętrznych lub brzegowych, $T_{N+1}, T_{N+2}, \ldots, T_{N+L}$ - temperatury w węzłach powierzchniowych,

W - macierz kolumnowa M elementowa zawierająca temperatury w węzłach dla zadania ekstrapolacji o numeracji jak w T.

Jeżeli węzły określone przez macierz J zostały dobrane prawidłowo, to możliwe jest rozwiązanie zadania ekstrapolacji, które jak wiadomo, nie wymaga znajomości warunku początkowego, gdyż nie wymaga rozwiązania układu równań różniczkowych (6.20). Zatem

$$W(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{L} \phi_{k,j}\ T_{J_j}^{(k)}(\tau), \tag{C.21}$$

gdzie T_{J_j} (j = 1,2,...,L) oznacza dane temperatury, a dla wygody przyjęto (podobnie jak poprzednio), że $k \to \infty$.

Rozwiązanie zadania wewnętrznego dane jest wzorem:

$$T(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{L} \psi_{k,i}\ W_{I_i}^{(k)}(\tau). \tag{C.22}$$

*) Tu występuje różnica w definicji T w stosunku do równania (6.20).

Podstawiając niezbędne temperatury Ψ_i z (C.21) do (C.22) otrzymuje się:

$$T(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{L} T_j^{(k)}(\tau) \sum_{n=0}^{k} \sum_{i=1}^{L} \phi_{n,j,I_i} \Psi_{k-n,i} \qquad (C.23)$$

i uzyskany wynik powinien być tożsamy z (C.21). Powinno być zatem

$$\phi_{k,j} = \sum_{n=0}^{k} \sum_{i=1}^{L} \phi_{n,j,I_i} \Psi_{k-n,i} \qquad (C.24)$$

Dalej dowód przebiega analogicznie, jak dla pola jednowymiarowego. Wprowadza się w tym celu macierze M x M elementowe Q i S, takie że

$$Q = \begin{bmatrix} A & & \\ & & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & & \\ D & & \end{bmatrix}$$

oraz

$$H = Q + S,$$

gdzie macierze A i D są określone równaniami (6.20) i (6.22), przy czym macierz A jest taka sama dla zadania wewnętrznego i ekstrapolacji, a macierz D dotyczy zadania wewnętrznego.

Macierz S można przedstawić w postaci sumy

$$S = \sum_{i=1}^{L} S_i,$$

gdzie jak łatwo zauważyć

$$S_i = P_{0,i} P_{0,i}^T. \qquad (C.25)$$

Dla k=0 wykorzystuje się zależności:

$$Q \phi_{0,j} = 0, \qquad S\phi_{0,j} = \sum_{i=1}^{L} P_{0,i} \phi_{0,j,I_i}, \qquad (C.26)$$

$$(Q + S) \Psi_{0,j} = P_{0,j}.$$

Dla k=0 warunek (C.24) przyjmuje postać:

$$\phi_{0,j} = \sum_{i=1}^{L} \phi_{0,j,I_i} \Psi_{0,i} \qquad (C.27)$$

Mnożąc obie strony przez Q + S, otrzymuje się:
z lewej strony

$$(Q + S) \phi_{0,j} = \sum_{i=1}^{L} P_{0,i} \phi_{0,j,I_i},$$

z prawej strony

$$\sum_{i=1}^{L} \phi_{0,j,I_i} (Q + S) \Psi_{0,i} = \sum_{i=1}^{L} \phi_{0,j,I_i} P_{0,i}.$$

Dla k > 0 dowód prowadzi się tak, jak dla pola jednowymiarowego, wykorzystując metodę indukcji.

Dodatek D

SPRAWDZENIE WARUNKU (4.6) DLA USTALONEGO POLA DWUWYMIAROWEGO

Sprawdzenie warunku (4.6) dla ustalonego pola dwuwymiarowego przebiega analogicznie, jak dla pola nieustalonego. Warunek ten można zapisać w postaci (por. (7.13))

$$\bar{Z}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\phi_{k,1} F_1^{(k)}(0) + \phi_{k,2} F_2^{(k)}(0) \right], \tag{D.1}$$

przy czym

$$\bar{Z}_{2i-1}(0) = \bar{T}_i(Y), \quad \text{dla} \quad Y = 0 \tag{D.2}$$

$$\bar{Z}_{2i}(0) = \frac{d\bar{T}_i(Y)}{dY}, \quad \text{dla} \quad Y = 0. \tag{D.3}$$

Zatem $\bar{T}_i(Y)$ dla $Y=0$ są kolejnymi transformatami warunku brzegowego dla $Y=0$, wyznaczanymi z zależności

$$\bar{T}_i(0) = \int_{X_1}^{X_2} X^{r-1} T(X,0) v_i \, dX. \tag{D.4}$$

Wykorzystując (podobnie jak w Dodatku A) własności funkcji własnych v_i oraz termicznej odpowiedzi układu, która spełnia równanie przewodzenia ciepła także dla $Y \to 0$, można przez wielokrotne obliczenie przez części całki (D.4) sprawdzić poprawność warunku (D.1):

$$\bar{T}_i(0) = -\frac{1}{\mu_i^2} \int_{X_1}^{X_2} X^{r-1} T(X,Y) \frac{1}{X^{r-1}} \frac{d}{dX} \left(X^{r-1} \frac{dv_i}{dX} \right) dX =$$

$$= -\frac{1}{\mu_i^2} \left\{ \left[X^{r-1} \frac{dv_i}{dX} T(X,Y) \right] \Big|_{X_1}^{X_2} - \left[X^{r-1} v_i \frac{dT(X,Y)}{dX} \right] \Big|_{X_1}^{X_2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\mu_i^2} \frac{d^2}{dY^2} \int_{X_1}^{X_2} X^{r-1} T(X,Y) v_i \, dX, \quad \text{dla} \quad Y \to 0 \tag{D.5}$$

Kontynuując całkowanie można sprawdzić poprawność warunku (D.1) dla nieparzystych elementów wektora $\bar{Z}$. Podobnie można postąpić dla elementów parzystych lub też sprawdzić warunek (D.1) dla elementów nieparzystych na powierzchni $Y = B$.

WYZNACZANIE POLA TEMPERATURY W CIAŁACH STAŁYCH NA PODSTAWIE OBSERWACJI TEMPERATURY LUB GĘSTOŚCI STRUMIENIA CIEPŁA W WYBRANYCH PUNKTACH CIAŁA

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono metodę rozwiązywania różnych zadań przewodzenia ciepła w przypadku, gdy warunek początkowy (dla stanów nieustalonych) lub niektóre warunki brzegowe (dla stanów ustalonych) nie są znane. Metoda wymaga informacji o rozwiązaniu zadania w pewnych punktach ciała, nazywanej termiczną odpowiedzią układu. Termiczną odpowiedź układu stanowi przebieg bądź temperatury, bądź strumienia ciepła. Przedstawiono szczegółowe rozwiązania jedno- i dwuwymiarowych zadań nieustalonego przewodzenia ciepła i dwuwymiarowych zadań ustalonego przewodzenia ciepła. Zadania te mogą być sformułowane analitycznie lub numerycznie. Rozwiązania mają postać szeregów, zawierających pochodne termicznej odpowiedzi układu. W pracy przedstawiono różne propozycje obliczania tych pochodnych. Celem zmniejszenia niestabilności wyników liczbowych przeanalizowano przydatność rachunku wyrównawczego.

Praca zawiera liczne przykłady obliczeń rachunkowych, wykorzystujących dane z symulowanych eksperymentów oraz z obiektów rzeczywistych. Na podstawie uzyskanych rezultatów podano ograniczenia metody oraz opisano jej wady i zalety. Obliczenia te potwierdziły także korzystny wpływ rachunku wyrównawczego na stabilność i dokładność wyników liczbowych.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНФОРМАЦИЙ О ТЕМПЕРАТУРЕ ИЛИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА В НЕКОТОРЫХ ТОЧКАХ ТЕЛА

Р е з ю м е

В работе представлен метод решения различных задач теплопроводности, когда начальное условие (для нестационарных проблем) или некоторые граничные условия (для стационарных проблем) неизвестные. Метод требует информаций о решении задачи в некоторых точках тела, называемых термическим ответом. Термический ответ это протекание температуры или плотности теплового потока. Представлены подробно решения одно- и двухмерных задач нестационарной теплопроводности и двухмерных задач стационарной теплопроводности, в виде аналитической и численной постановки. Решения представлены в виде рядов, в которых выступают производные термического ответа. Описано различные методы вычисления этих производных. Для улучшения результатов анализирована пригодность метода наименьших квадратов.

В работе приводится много результатов расчетов для численных и действительных экспериментов. Описаны ограничения метода, его достоинства и недостатки. Было подтверждено полезное влияние метода наименьших квадратов на корректность результатов.

DETERMINING TEMPERATURE FIELD IN SOLIDS KNOWING TEMPERATURE OR HEAT FLUX IN SOME CHOSEN POINTS

Summary

A method of solving various heat conduction problems, when the initial condition (for the unsteady-state problems) or some boundary conditions (for the steady-state problems) are unknown, is presented. The solution in some chosen points, called thermal response, being a variation of temperature or a variation of heat flux is demanded. Solutions of one- and two-dimensional non-steady heat conduction problems and two-dimensional steady-state heat conduction problems are presented in detail. These problems are formulated analytically or numerically. The solutions are presented in terms of series containing the derivatives of the thermal response. Various methods of determining these derivatives are described. In order to diminish the non-stability of the numerical results, applying of the least square method has been analysed.

Many results of numerical and real experiments are included. Based on these results advantages, disadvantages and limitations of the presented method are described. The carried out computations confirmed the effectiveness of the least square method as a method of improving stability and accuracy of the numerical results.

P. 3349/84/84

Cena zł 74.–

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-800 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.