ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: INFORMATYKA z. 1 Nr kol. 653

Jan BRUSKI
Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej
Politechnika Śląska

STRUKTURY BINARNE I ICH WŁASNOŚCI

Streszczenie. W pracy zdefiniowano system obiektów nazwanych strukturami binarnymi. W postaci twierdzeń przedstawiono podstawowe cechy tego systemu. Określono dwie zasadnicze funkcje: wyboru i konstrukcji obiektów.

Wiele współcześnie stosowanych algorytmicznych języków programowania pozwala na używanie w programach, opracowanych dla maszyn cyfrowych, nieregularnych obiektów zwanych strukturami danych. Możliwość posługiwania się strukturami danych można również stworzyć dla języków, których konstrukcja tego nie oferuje.

Zagadnienie tworzenia w maszynie cyfrowej struktur danych oraz wykonywania na nich określonych operacji jest złożone i trudne do rozwiązania. W obydwu wypadkach trudności wynikają głównie z faktu, że tworzenie tych obiektów musi się odbywać w ośrodku przechowywania informacji, a więc w pamięci maszyny cyfrowej. Istota struktur danych polega między innymi na tym, że nie określa się z góry ich rozmiarów ani konfiguracji i stąd bardzo trudno jest lokalizować je w pamięci jednorodnej, liniowo uporządkowanej z punktu widzenia adresów. Problem lokalizacji struktur danych w pamięci maszyny cyfrowej stanowi kluczowe zagadnienie, które trzeba rozwiązać, by uzyskać możliwość tworzenia i stosowania tych obiektów.

Przyjęto w tym celu koncepcję utworzenia specjalnej organizacji pamięci jednolicie adresowanej. Polega ona na hierarchicznym wiązaniu z sobą poszczególnych elementów pamięci. Każdy element pamięci może być powiązany z dwoma innymi, dowolnymi elementami. Można to zrealizować w ten sposób, że w każdym elemencie pamięci umieszcza się informacje określające, z jakimi dwoma dalszymi elementami będzie związany rozpatrywany element.

Takiej organizacji wiązania elementów pamięci odpowiada pewien specjalny rodzaj obiektów, które w dalszym ciągu będą nazywane strukturami binarnymi. Obiekty te nie stanowią szczególnego przypadku ogólnych struktur danych, lecz odznaczają się odrębnymi własnościami. Pierwszym zadaniem stało się więc zbudowanie ścisłej teorii struktur binarnych dające matematyczne podstawy wzmiankowanej organizacji pamięci maszyny cyfrowej. Teoria ta została zawarta w czterech kolejnych pracach. Przedmiotem pierwszej z nich jest zdefiniowanie systemu struktur binarnych i określenie ich podstawowych własności. Dwie następne stanowią uzupełnienie teorii struktur binarnych w celu uzyskania logicznie zwartej całości. Czwarta praca tej serii zawiera określenie związków istniejących między systemem ogólnych struktur danych i systemem struktur binarnych.

W oparciu o zbudowaną teorię struktur binarnych przewiduje się stworzenie możliwości swobodnej gospodarki pamięcią maszyny cyfrowej. Przewiduje się również możliwość wprowądzenia ogólnych struktur danych do języków programowania, które nie dysponują tymi obiektami (np. do języka ALGOL 60). Realizacja struktur danych w maszynie cyfrowej będzie wtedy oparta na systemie struktur binarnych i będzie wykorzystywała związek między tym systemem a systemem ogólnych struktur danych.

Na wstępie zostaną dokonane następujące założenia:

1^o Istnieje pewien dwuelementowy zbiór $S = \{v, h\}$, który nazwany zostanie zbiorem selektorów binarnych. Elementy tego zbioru spełniają warunek: $v \neq h$.

2^o Istnieje inny zbiór $\mathcal{A}$, w dalszym ciągu zwany zbiorem atomów, który oprócz elementu (zbioru) pustego $\emptyset$ zawiera jeszcze co najmniej jeden element. Element pusty będzie oznaczany symbolem Ω. Elementy zbioru $\mathcal{A}$ (atomy) uważa się za strukturalnie niepodzielne.

3^o Na temat przecięcia zbiorów $\mathcal{A}$ oraz S nie czyni się żadnych założeń, oprócz tego, że element pusty nie jest elementem tego przecięcia, czyli $\Omega \notin \mathcal{A} \cap S$.

<u>Definicja 1</u>

Zbiór $\mathcal{E} = \mathcal{A} \setminus \{\Omega\}$ nazywa się zbiorem obiektów elementarnych.

<u>Definicja 2</u>

Zbiorem struktur binarnych $\mathcal{B}$ nazywa się minimalny zbiór spełniający warunki:

1^o $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\Omega\}$

2^o Dla $v, h \in S$ i $v \neq h$ oraz $A_v \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ i $A_h \in \mathcal{B}$,

$A = \{(v, A_v), (h, A_h)\} \in \mathcal{B}$

Z pierwszej części definicji wynika, że element pusty Ω należy zarówno do zbioru atomów, jak i do zbioru struktur binarnych. Druga część definicji określa właściwe struktury binarne. Stanowią je pary par, z których każda składa się z selektora binarnego oraz struktury binarnej lub atomu w przypadku pierwszej pary i struktury binarnej w przypadku drugiej pary. Definicja jest więc rekurencyjna. Rekurencja może zachodzić jednak tylko skończoną liczbę razy. Określenie zbioru struktur binarnych jako minimalny oznacza bowiem, że jeśli definicję potraktować jako algorytm budowy struktur binarnych, to każdą z nich można utworzyć za pomocą skończonej liczby atomów, w skończonej liczbie kroków.

W skład pierwszej pary wchodzi zawsze selektor v, natomiast w skład drugiej - selektor h. Każda struktura binarna stanowi więc uporządkowany zbiór dwóch par, z których każda jest oczywiście także uporządkowana. Dodatkowo należy zwrócić uwagę na fakt, że dowolna składowa A_v lub A_h struktury binarnej $A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$ może być elementem pustym Ω.

Definicja 3

Zbiór $\mathcal{K} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ nazywa się zbiorem obiektów.

Definicja 4

Zbiorem złożonych selektorów jest taki zbiór (S^*), który wraz z operacją kompozycji ($\circ$) oraz specjalnym selektorem złożonym (I) zwanym selektorem tożsamościowym jest monoidem wolnym generowanym przez zbiór selektorów binarnych (S).

Z definicji wynika, że każdy złożony selektor $k \in S^*$ stanowi kompozycję skończonej liczby selektorów binarnych $s_1, s_2, \ldots, s_n$, gdzie $s_i = v, h$; $i = 1, 2, \ldots, n$, czyli $k = s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n$.

Kiedy liczba selektorów binarnych składających się na selektor złożony jest równa zeru, wówczas otrzymuje się selektor tożsamościowy $I \in S^*$. W zbiorze złożonych selektorów zawiera się również zbiór selektorów binarnych, a więc $S \subset S^*$. Z określenia, że trójka $(S^*, \circ, I)$ jest monoidem, wynikają następujące własności selektorów złożonych, należących do zbioru S^*:

1° $(\forall k, t \in S^*)[k \circ t \in S^* \wedge t \circ k \in S^*]$

2° $(\forall k, t, r \in S^*)[(k \circ t) \circ r = k \circ (t \circ r)]$

3° $(\forall k \in S^*)[k \circ I = I \circ k = k]$

4° $(\exists k, t \in S^*)[k \circ t = I] \Longrightarrow (k = t = I)$

Definicja 5

Selektory złożone $k_1, k_2 \in S^*$ nazywa się zależnymi, co zapisuje się $k_1 \sim k_2$, jeżeli istnieje taki złożony selektor $t \in S^*$, że $k_1 = t \circ k_2$ lub $k_2 = t \circ k_1$.

Relacja zależności jest symetryczna i zwrotna, ale nie przechodnia. Oprócz tego relacja zależności posiada następujące własności wynikające bezpośrednio z definicji 4 i 5:

1° $(\forall k)k \sim I$

2° $(\forall k, t)[(k \sim t) \Longleftrightarrow (t \sim k)]$

3° $v \neq h \Longrightarrow [\neg(v \sim h) \Longleftrightarrow v \not\sim h]$

4° $(t_1 \circ k_1 = t_2 \circ k_2) \Longrightarrow (k_1 \sim k_2)$

5° $(k_1 \sim k_2) \Longleftrightarrow [(k_1 \circ t) \sim (k_2 \circ t)]$

6° $[(t \circ k_1) \sim k_2] \Longrightarrow (k_1 \sim k_2)$

Definicja 6

Funkcją wyboru składowej obiektu $A \in \mathcal{K}$ za pomocą złożonego selektora $k \in S^*$ nazywa się funkcję określoną następująco:

$$k(A) = \{k = I \longrightarrow A,$$
$$T \longrightarrow [A = \{(v, A_v), (h, A_h)\} \longrightarrow$$
$$[k = t \circ v \longrightarrow t(A_v),$$
$$k = t \circ h \longrightarrow t(A_h)],$$
$$T \longrightarrow \Omega]\}$$

Funkcja wyboru zdefiniowana jest w postaci wyrażenia warunkowego zapisanego z użyciem notacji McCarthy'ego. W miejsce zapisu k(A) będzie stosowany również zapis $k \circ A$. Obydwa te zapisy stanowią pewne uproszczenie, gdyż w rzeczywistości funkcja wyboru jest przekształceniem $\circ : S^* \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ i powinna być zapisywana w postaci: $\circ(k, A) = B$. Czasami, zamiast mówić o wyborze składowej obiektu A za pomocą selektora k, będzie używane określenie: działanie selektora k na obiekt A.

Po zdefiniowaniu funkcji wyboru można zauważyć istnienie szeregu własności systemu struktur binarnych. Własności te zostaną niżej przedstawione w formie lematów i twierdzeń.

L e m a t 1

$(\forall A \in \mathcal{K})\ [I(A) = A]$

Prawdziwość lematu wynika bezpośrednio z definicji 6.

L e m a t 2

Dla obiektów $A, \Omega \in \mathcal{K}$ oraz złożonych selektorów $k, t \in S^*$ są prawdziwe następujące związki:

1° $k \circ A \in \mathcal{K}$

2° $(k \circ t) \circ A = k(t(A))$

Własności te wynikają bezpośrednio z definicji 2, 4 i 6.

Twierdzenie 1

$(\forall A \in \mathcal{K})(\exists k \in S^*)[k \circ A = \Omega]$

Na podstawie definicji 6 można stwierdzić, że jeżeli $A \in \mathcal{A}$, to $s(A) = \Omega$, gdzie $s \in S$. Jeżeli natomiast $A \in \mathcal{B}$, to twierdzenie 1 jest prawdziwe na mocy definicji 2 oraz 4. Definicja 2 gwarantuje bowiem, że "głębokość" dowolnej struktury binarnej jest skończona.

Twierdzenie 2

Istnieje jedyny obiekt $A = \Omega \in \mathcal{K}$ taki, że $(\forall k \in S^*)[k \circ A = A]$, czyli: $\Omega = (\imath A)(\forall k)[k \circ A = A]$.

Z definicji 6 wynika wprost, że działanie dowolnego selektora na obiekt pusty Ω daje w wyniku zawsze obiekt pusty. Załóżmy teraz, że istnieje jeszcze inny obiekt Ω' taki, że $(\forall k)[k \circ \Omega' = \Omega]$

Z twierdzenia 1 wynika wtedy, że $(\exists t)[t \circ \Omega' = \Omega]$. Jeżeli $t = I$, to oczywiście $\Omega' = \Omega$. Jeżeli natomiast $t \neq I$, to z poczynionego założenia wynika, że również $t \circ \Omega' = \Omega'$. Widać więc, że $\Omega' = \Omega$, a więc obiekt Ω, spełniający tezę twierdzenia, jest jedyny.

Twierdzenie 3

$(\forall k \in S^*)[k(A) = k(B)] \iff A = B$ gdzie: $A, B \in \mathcal{K}$

Jeżeli $A = B$, to równość $k(A) = k(B)$ wynika wprost z definicji 2 i 6. W celu udowodnienia implikacji przeciwnej można najpierw wykazać prawdziwość implikacji:

$(\forall s)[s(A) = s(B)] \implies A = B$, gdzie: $s \in S$.

Wynika ona wprost z definicji 6. Jeżeli bowiem $A = \{(v, A_v), (h, A_h)\}$ oraz $B = \{(v, B_v), (h, B_v)\}$, to dla równości A i B potrzeba i wystarcza spełnienie dwu równości: $A_v = B_v$, $A_h = B_h$.

Jeżeli natomiast $A \in \mathcal{A}$ a $B = \{(v, B_v), (h, B_h)\}$, to $s(A) = \Omega$ a $s(B) = \{s = v \longrightarrow B_v, T \longrightarrow B_h\}$. Gdy $B_v = \Omega$ i $B_h = \Omega$, to $v(B) = \Omega$ i $h(B) = \Omega$, ale wtedy $I(A) \neq I(B)$. Podobny wynik otrzymuje się, gdy $A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$ a $B \in \mathcal{A}$. Jeżeli $A, B \in \mathcal{A}$, to do wykazania prawdziwości implikacji potrzeba i wystarcza, by $I(A) = I(B)$. Działanie bowiem dowolnym selektorem $k \in S^* \setminus \{I\}$ na takie obiekty daje zawsze w wyniku obiekt pusty.

Korzystając z definicji selektorów złożonych i oznaczając: $k = s_{n+1} \circ k'$ założymy teraz, że implikacja jest prawdziwa dla k', czyli $[k'(A) = k'(B)] \implies A = B$.

Sprawdzamy, czy przy tym założeniu: $[k(A) = k(B)] \implies A = B$. Ponieważ $k = s_{n+1} \circ k'$, można napisać:

$(s_{n+1} \circ k') \circ A = s_{n+1}(k'(A)) = s_{n+1}(A_1)$ oraz

$(s_{n+1} \circ k') \circ B = s_{n+1}(k'(B)) = s_{n+1}(B_1)$, gdzie

$A_1 = k'(A)$ oraz $B_1 = k'(B)$.

Z założenia indukcyjnego wynika, że: $k'(A) = k'(B)$, a więc również: $A_1 = B_1$. Jest więc oczywiste, że: $s_{n+1}(A_1) = s_{n+1}(B_1)$. Wynika stąd, że jeśli dla wszystkich selektorów: $k(A) = k(B)$, to $A = B$.

T w i e r d z e n i e 4

Jeśli istnieje taki złożony selektor $t \in S^*$, że dla $A, B \in \mathcal{K}$ jest prawdziwa równość $t(A) = t(B) \neq \Omega$, to: $(\forall k \in S^*)\left[(k \not\sim t) \Longrightarrow k(A) = k(B)\right] \Longrightarrow A = B$

Dowód twierdzenia wynika z twierdzenia 3. Dla $(k \not\sim t)$ warunkiem równości $A = B$ jest $k(A) = k(B)$ dla wszystkich selektorów k. Natomiast dla $(k \sim t)$ mamy:

gdy $k = r \circ t$, to $k(A) = r(t(A)) = r(t(B)) = k(B) \Longrightarrow A = B$,

gdy $t = u \circ k$, to $t(A) = t(B) \Longrightarrow k(A) = k(B) \Longrightarrow A = B$.

Definicja 7

Funkcją konstrukcji obiektu C za pomocą obiektów $A, B \in \mathcal{K}$ oraz złożonego selektora $k \in S^*$ nazywa się funkcję $\mathcal{H}(A,k,B)$ określoną następująco:

$$\mathcal{H}(A, k, B) = \begin{cases} k = I \text{ --- } B, \\ k = h \circ k' \wedge B \in \mathcal{E} \text{ --- nieokreślona}, \\ T \text{ --- } \Big[k = t \circ v \wedge B \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \text{ --- } \\ \qquad \big\{(v, \mathcal{H}(v \circ A, t, B)), (h, h \circ A)\big\}, \\ \qquad k = t \circ h \wedge B \in \mathcal{B} \\ \qquad\qquad \big\{(v, v \circ A), (h, \mathcal{H}(h \circ A, t, B))\big\}\Big] \end{cases}$$

Funkcja $\mathcal{H}(A, k, B)$ jest nieokreślona dla przypadku, gdy $k = h \circ k'$ i $B \in \mathcal{E}$. Dzięki temu zachowana zostaje zgodność z definicją 2 i nie ma możliwości zbudowania za pomocą funkcji $\mathcal{H}$ takiego obiektu, dla którego dowolna składowa A_h byłaby obiektem elementarnym.

L e m a t 3

Jeżeli istnieje obiekt $C = \mathcal{H}(A, k, B)$, gdzie $A, B \in \mathcal{K}$ i $k = r \circ t \in S^*$, to: $k \circ C = r \circ \mathcal{H}(t \circ A, r, B)$.

Istnienie obiektu C gwarantuje, że gdy $k = h \circ k'$, to $B \notin \mathcal{E}$. Jeżeli k jest dowolnym złożonym selektorem, to można go przedstawić w postaci:

$k = s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_m \circ s_{m+1} \circ \ldots \circ s_n$, gdzie $s_i = v, h$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Oznaczając: $r = s_1 \circ s_2 \ldots \circ s_m$ i $t = s_{m+1} \circ \ldots \circ s_n$, mamy oczywiście $k = r \circ t$.

Obiekt $\mathcal{H}(A, k, B)$ można przedstawić jako:

$\big\{(v, \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B)), (h, h \circ A)\big\}$ gdy $s_n = v$

$\big\{(v, v \circ A), (h, \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B))\big\}$ gdy $s_n = h$.

Operację $k \circ \mathcal{H}(A,k,B)$ można więc zapisać następująco:

$$s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n \circ \mathcal{H}(A, k, B) =$$
$$= s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1} \circ \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B)$$

niezależnie od tego, czy $s_n = v$, czy też $s_n = h$.

Tą samą drogą można uzyskać:

$$s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1} \circ \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B) =$$
$$= s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-2} \circ \mathcal{H}(s_{n-1} \circ s_n \circ A, s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-2}, B) =$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_m \circ \mathcal{H}(s_{m+1} \circ \ldots \circ s_n \circ A, s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_m, B) =$$
$$= r \circ \mathcal{H}(t \circ A, r, B)$$

T w i e r d z e n i e 5

Jeżeli istnieje obiekt $C = \mathcal{H}(A, k, B)$, gdzie $A, B \in \mathcal{K}$ i $k \in S^*$, to $C \in \mathcal{K}$.

Jeżeli $k = I$, to $\mathcal{H}(A, k, B) = B$. Ponieważ $B \in \mathcal{K}$, to oczywiście $C \in \mathcal{K}$.

Dla $k = v$ mamy:

$$C = \mathcal{H}(A, k, B) = \{(v, \mathcal{H}(v \circ A, I, B)), (h, h \circ A)\} = \{(v, B), (h, h \circ A)\}$$

Z lematu 2 wynika, że $h \circ A \in \mathcal{K}$, a ponieważ także $B \in \mathcal{K}$, na mocy definicji 2 mamy również $C \in \mathcal{K}$.

Podobnie mamy dla $k = h$:

$$C = \mathcal{H}(A, k, B) = \{(v, v \circ A), (h, \mathcal{H}(h \circ A, I, B))\} = \{(v, v \circ A), (h, B)\}$$

Oczywiście znowu: $v \circ A \in \mathcal{K}$ i $B \in \mathcal{K}$, a więc także $C \in \mathcal{K}$.

Rozpatrzymy teraz ogólny przypadek, gdy selektor k jest dowolny i określony kompozycją selektorów binarnych s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $s_i = v, h$, czyli: $k = s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1} \circ s_n$.

Wprowadzając dla ułatwienia rozważań oznaczenia $\bar{s}_i$, gdzie $\bar{s}_i = v$, gdy $s_i = h$ oraz $\bar{s}_i = h$, gdy $s_i = v$, otrzymujemy:

$$C = \mathcal{H}(A,k,B) = [s_n = v \text{ — } \{(v, \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B)), (h, \bar{s}_n \circ A)\},$$
$$s_n = h \text{ — } \{(v, \bar{s}_n \circ A), (h, \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B))\}]$$

Obiekt $C \in \mathcal{K}$, jeżeli obydwie jego składowe należą do $\mathcal{K}$. Ponieważ $\bar{s}_n = v$ lub $\bar{s}_n = h$, więc $\bar{s}_n \circ A \in \mathcal{K}$. Należy jeszcze stwierdzić, czy $\mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B) \in \mathcal{K}$. Oznaczmy przez $C_n = \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-1}, B)$ a przez $A_n = s_n \circ A$. Oczywiście $A_n \in \mathcal{K}$.

Obiekt C_n można zapisać w postaci:

$$C_n = [s_{n-1} = v \text{ — } \{(v, \mathcal{H}(s_{n-1} \circ A, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-2}, B)), (h, \bar{s}_{n-1} \circ A_n)\},$$
$$s_{n-1} = h \text{ — } \{(v, \bar{s}_{n-1} \circ A_n), (h, \mathcal{H}(s_{n-1} \circ A_n, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-2}, B))\}]$$

Oczywiście, jak poprzednio: $\bar{s}_{n-1} \circ A_n \in \mathcal{K}$ oraz $s_{n-1} \circ A_n \in \mathcal{K}$. Trzeba znów stwierdzić, czy $\mathcal{H}(\bar{s}_{n-1} \circ A_n, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-2}, B) \in \mathcal{K}$. Wprowadzamy znowu oznaczenia: $A_{n-1} = s_{n-1} \circ A_n$ oraz $C_{n-1} = \mathcal{H}(s_{n-1} \circ A_n, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-2}, B)$.

Dalsze postępowanie przebiega tym samym torem, co poprzednio. Określa się obiekt C_{n-1} oraz warunki przynależności tego obiektu do zbioru $\mathcal{K}$:

$C_{n-1} \in \mathcal{K}$ gdy $C_{n-2} = \mathcal{H}(A_{n-2}, s_1 \circ \ldots \circ s_{n-3}, B) \in \mathcal{K}$.

Przez A_{n-2} oznaczono $s_{n-2} \circ A_{n-1}$.

Postępując w dalszym ciągu analogicznie, dochodzimy do określenia obiektu C_2: $C_2 = \mathcal{H}(A_2, s_1, B)$ i dalej:

$$C_2 = \left[s_1 = v - \left\{ (v, \mathcal{H}(s_1 \circ A_2, I, B)), (h, \bar{s}_1 \circ A_2) \right\},\; s_1 = h - \left\{ (v, \bar{s}_1 \circ A_2), (h, \mathcal{H}(s_1 \circ A_2, I, B)) \right\} \right]$$

Ponieważ z poprzednich rozważań wynika, że $A_2 \in \mathcal{K}$, więc również $\bar{s}_1 \circ A_2 \in \mathcal{K}$. Natomiast $\mathcal{H}(s_1 \circ A_2, I, B) = B$, a z założenia $B \in \mathcal{K}$. Obydwie składowe obiektu C_2 należą więc do zbioru $\mathcal{K}$, a z tego wynika, że i $C_2 \in \mathcal{K}$. W takim razie również $C_3 \in \mathcal{K}$, $C_4 \in \mathcal{K}$, ..., $C_n \in \mathcal{K}$ i $C \in \mathcal{K}$. Stanowi to zakończenie dowodu twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 6

Jeżeli istnieje obiekt $C = \mathcal{H}(A, k, B)$, gdzie $A, B \in \mathcal{K}$ i $k \in S^*$, to $k(C) = B$.

Prawdziwość twierdzenia dla $k = I$ wynika wprost z definicji 7. Mamy bowiem $\mathcal{H}(A, I, B) = B$ a $I(B) = B$.

Jeżeli $k \neq I$, to można napisać $k = I \circ k$ i na podstawie lematu 3 otrzymujemy: $k \circ C = I \circ \mathcal{H}(k \circ A, I, B) = I \circ B = B$.

T w i e r d z e n i e 7

Jeżeli istnieje obiekt $C = \mathcal{H}(A, k, B)$, gdzie $A, B \in \mathcal{K}$, a $k \in S^*$, to dla dowolnych selektorów $t \in S^*$ $(k \nsim t) \Longrightarrow t \circ C = t \circ A$.

Jeżeli $k = I$, to $t \circ \mathcal{H}(A, k, B) = t \circ B$, ale wtedy nie istnieje żaden selektor t taki, że $(t \nsim k)$.

Jeżeli $k = v$, to:

$$\mathcal{H}(A, v, B) = \left\{ (v, \mathcal{H}(v \circ A, I, B)), (h, h \circ A) \right\} = \left\{ (v, B), (h, h \circ A) \right\}.$$

Jeśli wtedy $t = r \circ h$, to $t \circ \mathcal{H}(A, v, B) = r \circ h \circ A = t \circ A$. Gdy natomiast $t = r \circ v$, to $t \circ \mathcal{H}(A, v, B) = r \circ B$, ale jest to przypadek, gdy $(k \sim t)$.

Jeżeli $k = h$, to:

$$\mathcal{H}(A, h, B) = \left\{ (v, v \circ A), (h, \mathcal{H}(h \circ A, I, B)) \right\} = \left\{ (v, v \circ A), (h, B) \right\}.$$

Gdy teraz $t = r \circ v$, to $t \circ \mathcal{H}(A, h, B) = r \circ v \circ A = t \circ A$. Gdy natomiast $t = r \circ h$, to $t \circ \mathcal{H}(A, h, B) = r \circ B$, ale jest to znów przypadek, gdy $(k \sim t)$.

Teraz trzeba rozważyć ogólny przypadek, gdy:

$k = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_{n-1} \circ s_n$, gdzie $s_i = v, h$; $i = 1,2,\dots,n$.

Selektory k i t są zależne wtedy, gdy albo: $t = s_i \circ s_{i+1} \circ \dots \circ s_{n-1} \circ s_n$ i $k = r \circ t$, gdzie $r = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_{i-1}$, albo $t = u \circ k = u \circ s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_{n-1} \circ s_n$.

Dla niezależności selektorów złożonych k i t wystarcza, aby istniała niezgodność choćby jednego spośród odpowiadających sobie selektorów binarnych tworzących selektory k i t.

Dla ułatwienia zapisu wprowadzimy znów oznaczenia $\bar{s}_i$, $i = 1,2,\dots,n$. Jeżeli $s_i = h$, to $\bar{s}_i = v$ i odwrotnie, jeżeli $s_i = v$ to $\bar{s}_i = h$.

Rozpatrując selektor k określony wyżej za pomocą kompozycji selektorów binarnych, funkcję $\mathcal{H}(A, k, B)$ można zapisać:

$$\mathcal{H}(A,k,B) = \Big[s_n = v \longrightarrow \big\{(v, \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-1}, B)), (h, \bar{s}_n \circ A)\big\},$$
$$s_n = h \longrightarrow \big\{(v, \bar{s}_n \circ A), (h, \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-1}, B))\big\}\Big]$$

Jeżeli $t = w \circ \bar{s}_n$, czyli selektory k i t są niezależne, to $t \circ \mathcal{H}(A,k,B) = w \circ \bar{s}_n \circ A = t \circ A$.

Jeżeli natomiast $t = u_n \circ s_n$, wtedy $t \circ \mathcal{H}(A,k,B) = u_n \circ \mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-1}, B)$. W tym przypadku nie można jeszcze stwierdzić, czy selektory k i t są zależne czy niezależne, z wyjątkiem sytuacji, gdy $u_n = I$. Podobnie jak poprzednio funkcję $\mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-1}, B)$ można przedstawić w postaci:

$$\mathcal{H}(s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-1}, B) = \Big[s_{n-1} = v \longrightarrow \big\{(v, \mathcal{H}(s_{n-1} \circ s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-2}, B)),$$
$$(h, \bar{s}_{n-1} \circ s_n \circ A)\big\},$$
$$s_{n-1} = h \longrightarrow \big\{(v, \bar{s}_{n-1} \circ s_n \circ A),$$
$$(h, \mathcal{H}(s_{n-1} \circ s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-2}, B))\big\}\Big]$$

Jeżeli teraz $u_n = u_{n-1} \circ \bar{s}_{n-1}$, to:

$t \circ \mathcal{H}(A,k,B) = u_{n-1} \circ \bar{s}_{n-1} \circ s_n \circ A = u_n \circ s_n \circ A = t \circ A$.

Jeżeli natomiast $u_n = u_{n-1} \circ s_n$, to:

$t \circ \mathcal{H}(A,k,B) = u_{n-1} \circ \mathcal{H}(s_{n-1} \circ s_n \circ A, s_1 \circ \dots \circ s_{n-2}, B)$.

W pierwszym przypadku dla $(k \nsim t)$ otrzymaliśmy poprawny rezultat $t \circ A$, natomiast przypadek drugi pozostał w dalszym ciągu nierozstrzygnięty, chyba że $u_{n-1} = I$, ale wtedy $(k \sim t)$. Prowadząc przedstawione rozumowanie tą samą drogą, otrzymujemy w końcu:

$$\mathcal{H}(s_2 \circ s_3 \circ \dots \circ s_n \circ A, s_1, B) =$$
$$= \Big[s_1 = v \longrightarrow \big\{(v, \mathcal{H}(s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n \circ A, I, B)), (h, \bar{s}_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n \circ A)\big\}$$
$$= \big\{(v, B), (h, \bar{s}_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n \circ A)\big\},$$

$$s_1 = h — \left\{(v,\ \bar{s}_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n \circ A),\ (h,\ \mathcal{H}(s_1 \circ s_2 \circ ,,, \circ s_n \circ A, I, B))\right\} = $$
$$= \left\{(v,\ \bar{s}_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n \circ A),\ (h,\ B)\right\}]$$

Jeżeli teraz $u_2 = u_1 \circ \bar{s}_1$, to:

$$t \circ \mathcal{H}(A,k,B) = u_2 \circ \mathcal{H}(s_2 \circ s_3 \circ \ldots \circ s_n \circ A, s_1, B) = u_2 \circ \bar{s}_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n \circ A = t \circ A$$

Gdy natomiast $u_2 = u_1 \circ s_1$, to $t \circ \mathcal{H}(A,k,B) = u_1 \circ B$.

Przypadek ten zachodzi wtedy, gdy selektory k i t są zależne. W toku rozumowania zostały rozpatrzone wszystkie możliwe przypadki i zawsze, gdy selektory k i t były niezależne, otrzymaliśmy $t \circ \mathcal{H}(A,k,B) = t \circ A$, co stanowi dowód twierdzenia.

Przedstawione w artykule definicje i twierdzenia opisują system struktur binarnych oraz jego własności. Stanowią one podstawę do rozszerzenia teorii struktur binarnych o zbiory charakterystyczne i stwarzają teoretyczne możliwości przekształcenia liniowej organizacji pamięci maszyny cyfrowej do organizacji listowej, szczególnie przydatnej w procesach przetwarzania symboli.

LITERATURA

[1] Berztiss A.T.: Data Structures. Theory and Practice. Academic Press. New York 1975.

[2] Turski W.M.: Struktury danych. WNT, Warszawa 1976.

[3] Ollongren A.: Definition of Programming Languages by Interpreting Automata. AP, London 1974.

[4] Ehrich H.D.: Ein axiomatischer Ansatz für eine Algebra strukturierter Objekte. Graphen-Sprachen und Algorithmen auf Graphen. Carl Hanser Verlag, München 1976.

[5] Rasiowa H.: Wstęp do matematyki współczesnej. PWN, Warszawa 1969.

БИНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Р е з ю м е

В статье определено систему объектов называемых бинарными структурами. В виде теорем приводятся основные признаки этой системы. Определено тоже две основные функции: выбор и конструкция объектов.

BINARY STRUCTURES AND THEIR PROPERTIES

S u m m a r y

In the paper the system of objects called binary structures was defined. The basic attributes of the system were represented in form of theorems. Two fundamental functions: those of selection and construction were defined.