ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: INFORMATYKA z. 1 Nr kol. 653

Jan BRUSKI

Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej
Politechnika Śląska

ZBIORY CHARAKTERYSTYCZNE STRUKTUR BINARNYCH

Streszczenie. Artykuł stanowi kontynuację opisu systemu struktur binarnych. Wprowadzono w nim pojęcia selektorów końcowych oraz zbiorów charakterystycznych obiektów i przedstawiono ich własności.

W artykule "Struktury binarne i ich własności" został zdefiniowany system struktur binarnych i przedstawione zostały podstawowe jego cechy. Wprowadzając pewne dodatkowe pojęcia i pokazując dzięki nim dalsze własności systemu struktur binarnych, można ułatwić korzystanie z tego systemu. Temu celowi służy niniejsza praca.

Na wstępie zostaną zdefiniowane pojęcia selektorów końcowych i zbiorów charakterystycznych.

Definicja 1

Selektorami końcowymi obiektu $A \in \mathcal{K}$ nazywa się takie selektory $k_A \in S^*$, które są równe I dla $A \in \mathfrak{A}$ oraz $k_A = v \circ k'$ dla $A \in \mathcal{B}\setminus\{\Omega\}$, przy czym wtedy $k_A(A) \in \mathfrak{A}$ i $k'(A) \in \mathcal{B}\setminus\{\Omega\}$.

Oznaczenia selektorów końcowych danego obiektu będą zaopatrywane w indeks stanowiący nazwę tego obiektu. Zbiór selektorów końcowych obiektu A będzie oznaczany symbolem S_A.

Definicja 2

Atomowym zbiorem charakterystycznym obiektu $A \in \mathcal{K}$ nazywa się zbiór $\chi(A) = \{< k_A : a > |\ k_A(A) = a\}$, gdzie $k_A \in S_A$, $a \in \mathfrak{A}$.

Definicja 3

Elementarnym zbiorem charakterystycznym obiektu $A \in \mathcal{K}$ nazywa się zbiór $\chi_{\mathcal{E}}(A) = \{<k_A : e>|\ k_A(A) = e \in \mathcal{E}\}$.

Wykorzystując podane definicje, zostaną teraz podane dalsze własności struktur binarnych w postaci kolejnych lematów i twierdzeń.

L e m a t 1

Każdy obiekt $A \in \mathcal{K}$ jest skończony w tym znaczeniu, że zbiór selektorów końcowych tego obiektu S_A zawiera skończoną liczbę selektorów.

Jeżeli $A \in \mathcal{A}$, to zbiór S_A zawiera tylko selektor tożsamościowy I. Gdy natomiast $A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$, to z definicji struktur binarnych wynika, że każdy taki obiekt może być zbudowany w skończonej liczbie kroków za pomocą skończonej liczby atomów. Stąd natychmiast wynika prawdziwość tezy lematu.

L e m a t 2

Dla każdego $A \in \mathcal{K}$ elementarny zbiór charakterystyczny tego obiektu jest podzbiorem atomowego zbioru charakterystycznego tego obiektu, czyli $\chi_{\mathcal{E}}(A) \subset \chi(A)$.

L e m a t 3

Jeżeli $(\forall k_A \in S_A) k_A(A) = e \in \mathcal{E}$, to $\chi_{\mathcal{E}}(A) = \chi(A)$.

Dowody obydwu lematów są natychmiastowe, gdyż:

$$\chi(A) = \{< k_A : e > \mid k_A(A) = e \in \mathcal{E}\} \cup \{< k_A : \Omega > \mid k_A(A) = \Omega\}$$

L e m a t 4

Jeżeli dla dowolnego $A \in \mathcal{K}$ i selektorów $k, t \in S^*$ zachodzi $k \circ t \circ A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$ to również $t \circ A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$.

Dowód jest trywialny. Załóżmy bowiem, że $k \circ t \circ A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$, ale $B = t \circ A \in \mathcal{A}$ Dla selektora $k = I$ mamy $I \circ B = B \in \mathcal{A}$, natomiast dla dowolnego selektora $k \neq I$ z definicji funkcji wyboru wynika $k(B) = \Omega$. Otrzymaliśmy więc wyniki sprzeczne z założeniem.

L e m a t 5

$(\forall A \in \mathcal{K}) [k_A \neq t_A \Longrightarrow k_A \not\sim t_A]$

Gdy $A \in \mathcal{A}$, to jedynym selektorem końcowym jest selektor tożsamościowy I, a więc nie istnieją dwa różne selektory końcowe k_A i t_A. Jeżeli $A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$ wtedy $k_A(A) = a_1 \in \mathcal{A}$ oraz $t_A(A) = a_2 \in \mathcal{A}$, ale także $k'(A) = B_1$ i $t'(A) = B_2$, gdzie $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$, a $k_A = v \circ k'$, $t_A = v \circ t'$. Załóżmy teraz, że istnieją takie k_A, $t_A \in S_A$, $k_A \neq t_A$, dla których $(k_A \sim t_A)$. Mamy wtedy $k_A = r \circ t_A$ lub $t_A = r \circ k_A$. Dalej więc otrzymujemy: $a_1 = k_A(A) = r \circ t_A \circ A = r \circ a_2$ lub $a_2 = t_A(A) = r \circ k_A \circ A = r \circ a_1$.

Rozpatrzmy pierwszy przypadek:

Jeżeli $a_1 \in \mathcal{E}$, to dla spełnienia tej równości musi zachodzić $r = I$, ale wtedy $k_A = t_A$, a to przeczy założeniu.

Jeżeli $a_1 = \Omega$, to musi zachodzić również $r \circ v \circ t' \circ A = \Omega$, ale równocześnie $t' \circ A = B_2$ i $v \circ B_2 = e \in \mathcal{E}$ lub $v \circ B_2 = \Omega$.

W obydwu jednak przypadkach ze względu na definicję 1 musi być $r = I$. W takim razie więc $k_A = t_A$, a to przeczy założeniu. Ten sam wynik otrzymamy rozpatrując drugi przypadek. Wynika stąd, że atomowy zbiór charakterystyczny dowolnego obiektu $A \in \mathcal{K}$ posiada następującą własność: dla dowolnych dwu różnych elementów $\langle k_A : a_1 \rangle$, $\langle t_A : a_2 \rangle \in \mathcal{X}(A)$ mamy $(k_A \not\leftrightarrow t_A)$. Własność tę nazywa się własnością charakterystyczną.

Lemat 6

Jeżeli dany jest obiekt $A \in \mathcal{K}$, to działanie na ten obiekt dowolnego selektora $t \in S^*$, dla którego $(\exists k_A \in S_A)\ [t = t' \circ s \circ k_A]$, gdzie $t' \in S^*$, $s \in S$, daje w wyniku obiekt pusty Ω.

Postać selektora $t = t' \circ s \circ k_A$ wyklucza sytuację taką, że $t = k_A$. Dowód lematu wynika natychmiast z definicji 1. Mamy bowiem $t(A) = t' \circ s \circ k_A \circ A = t' \circ s \circ a$, gdzie $a \in \mathfrak{A}$. Z definicji funkcji wyboru wynika dalej, że $s(a) = \Omega$, a więc również $t' \circ \Omega = \Omega$.

Lemat 7

Jeżeli dany jest obiekt $A \in \mathcal{K}$, to działanie na ten obiekt dowolnego selektora $t \in S^*$, dla którego $(\forall k_A \in S_A)\ [t \not\leftrightarrow k_A]$, daje w wyniku obiekt pusty Ω.

Załóżmy, że istnieje taki selektor t, że $(t \not\leftrightarrow k_A) \wedge t(A) \neq \Omega \wedge t \notin S_A$. Jeżeli $t(A) = a \in \mathfrak{A}$ i $t'(A) \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$, gdzie $t = v \circ t'$, to selektor t jest selektorem końcowym obiektu A, co przeczy założeniu. Jeżeli $t(A) = \Omega$ i $t'(A) \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$, gdzie $t = h \circ t'$, to przypadek ten jest zgodny z tezą lematu. Jeżeli natomiast $t(A) = B \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$, to istnieje takie $r = v \circ r'$, że $r'(B) \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$ a $r(B) \in \mathfrak{A}$. Wtedy jednak $r \circ t$ jest selektorem końcowym obiektu A, a to przeczy założeniu.

Lemat 8

Jeżeli dany jest obiekt $A \in \mathcal{K}$, a S_A stanowi zbiór selektorów końcowych tego obiektu, to dla każdego $k = h \circ t$, takiego, że: $(\forall k_A)[k \not\leftrightarrow k_A] \wedge (\exists k_A)[k_A = v \circ k' \circ t]$ jest spełnione $k(A) = \Omega \wedge t(A) \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$.

Z lematu 7 wynika, że $(\forall k)\ [(\forall k_A)(k \not\leftrightarrow k_A) \Longrightarrow k \circ A = \Omega]$. Obecnie więc wystarczy dowieść drugiej części tezy lematu.
Jeżeli $(\exists k_A)\ k_A = v \circ k' \circ t$, to mamy: $k_A(A) \in \mathfrak{A}$ i $k' \circ t \circ A \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$. Stąd wynika, że również $t(A) \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$.

Twierdzenie 1

Jeżeli dany jest dowolny obiekt $A \in \mathcal{K}$, atom $a \in \mathfrak{A}$ i złożony selektor $k \in S^*$, przy czym $k = I$ lub $k = v \circ k'$, to selektor k jest selektorem końcowym obiektu $C = \mathcal{H}(A, k, a)$, czyli $k \in S_C$.

Na podstawie twierdzenia 6 [1] mamy: $k \circ C = k \circ \mathcal{H}(A, k, a) = a$. Dla $k = I$, $C = a \in \mathfrak{A}$ i zgodnie z definicją 1 jedynym selektorem końcowym obiektu C jest selektor tożsamościowy I. Dla $k = v$ mamy $C = \{(v, a), (h, h \circ A)\}$ i jest oczywiste, że k jest selektorem końcowym obiektu C. Jeżeli $k = v \circ k'$, gdzie $k' \neq I$, to zgodnie z lematem 3 [1] mamy: $k \circ C = v \circ k' \circ \mathcal{K}(A, k, a) = v \circ \mathcal{K}(k' \circ A, v, a) = v \circ \{(v, \mathcal{K}(v \circ k' \circ A, I, a)), (h, h \circ k' \circ A)\} = v \circ \{(v, a), (h, h \circ k' \circ A)\}$.

Wynika stąd, że: $k' \circ C = \{(v, a), (h, h \circ k' \circ A)\} \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$. Ponieważ wcześniej określiliśmy, że $k \circ C = a \in \mathcal{R}$, wynika stąd, że $k \in S_c$, a więc k jest selektorem końcowym obiektu C.

T w i e r d z e n i e 2

Dla danych $A \in \mathcal{K}$, k, $k' \in S^*$ oraz $B \in \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$, gdy $k = I$ lub $k = v \circ k'$ i $B \in \mathcal{B}$, gdy $k = h \circ k'$, atomowy zbiór charakterystyczny obiektu $C = \mathcal{K}(A, k, B)$ jest równy:

$$\chi(C) = \{\langle t_A : a\rangle \mid t_A(A) = a \wedge (k \nsim t_A)\} \cup \{\langle t_B \circ k : a\rangle \mid t_B(B) = a\}$$

Zastrzeżenia związane z obiektem B wynikają z nieokreśloności funkcji $\mathcal{K}(A, k, B)$ dla $B \in \mathcal{E} \wedge k = h \circ k'$.

Z twierdzenia 7 [1] wynika: $(\forall t)[(t \nsim k) \Longrightarrow t \circ C = t \circ A]$. Zależność ta obowiązuje także dla odpowiednich selektorów końcowych obiektu A. Selektory te są również selektorami końcowymi obiektu C. Pozostałe selektory końcowe obiektu C należą do zbioru $\{t \mid t \sim k\}$. Z zależności t i k wynika, że $k = r \circ t$ lub $t = r \circ k$.

W pierwszym przypadku selektor k jest selektorem końcowym obiektu C tylko wtedy, gdy $B = a \in \mathcal{R}$. Wtedy jednak nie istnieje selektor t taki, że $k = r \circ t \wedge r \neq I \wedge t \in S_c$. Tym bardziej ma to miejsce wtedy, gdy $k \notin S_c$. W drugim przypadku, a więc gdy $t = r \circ k$, mamy na mocy twierdzenia 6 [1]: $t \circ C = r \circ k \circ C = r \circ B$. Zależność ta obowiązuje również dla selektorów końcowych obiektu B : $r_B \circ B = r_B \circ k \circ C$. Jest oczywiste, że selektory $r_B \circ k$ są selektorami końcowymi obiektu C.

Rozpatrzyliśmy wszystkie możliwe przypadki: dla $(t \nsim k)$ mamy $t_C = t_A$, natomiast dla $(t \sim k)$ mamy $t_C = t_B \circ k$.

Stanowi to dowód prawdziwości tezy twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 3

Dla danych $A, B \in \mathcal{K}$, $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(A) = \chi(B)$.

Załóżmy, że $A = B$. Zgodnie z twierdzeniem 3 [1] mamy wtedy $t(A) = t(B)$ dla wszystkich t, a więc również wtedy, gdy $t(A) = a$ i $t(B) = a$. Ze zbioru selektorów spełniających ostatnie równości można wyodrębnić selektory końcowe, dla których oczywiście zachodzi $t_A(A) = t_B(B)$. Elementy atomowego zbioru charakterystycznego każdego obiektu są określone dla wszystkich selektorów końcowych tego obiektu, a więc z ostatniej równości wynika, że $\chi(A) = \chi(B)$. Jest to spełnione także wtedy, gdy $A = B = a \in \mathcal{R}$.

Założymy teraz, że $\chi(A) = \chi(B)$. Wynika stąd, że dla wszystkich selektorów końcowych obiektów A i B zachodzi $t_A(A) = t_B(B)$. Jeżeli selektory końcowe $t_A = t_B = I$, to oczywiście $A = B = a \in \mathcal{R}$. W każdym innym przypadku selektory końcowe obydwu obiektów można przedstawić w postaci: $t_A = t_B = v \circ t$.

Ze zbioru selektorów końcowych obiektu A można wyodrębnić selektory $t_A = v \circ t''$, dla których $h \circ t'' \circ A = \Omega$. Dla tych selektorów mamy: $t'' \circ A = \{(v,a),\ (h,\Omega)\}$. Tak samo można postąpić w odniesieniu do obiektu B. Jest oczywiste, że: $(\forall t'')[t'' \circ A = t'' \circ B = \{(v,\ a),\ (h,\Omega)\}]$. W przeciwnym razie zbiory selektorów końcowych S_A i S_B nie byłyby sobie równe. Na podstawie twierdzenia 4 [1] można wyciągnąć wniosek, że dla każdego selektora w takiego, że $(w \sim t'')$, $w(A) = w(B)$. Dla sprawdzenia, czy obiekty A i B są sobie równe, wystarczy więc sprawdzić wynik działania na te obiekty selektorów k, dla których $(k \not\sim t'')$. Selektory te można podzielić na dwie grupy: $k_1 = r \circ v \circ t'$ i $k_2 = r \circ h \circ t'$.

Jest oczywiste, że $(\forall t')[(\exists t'')t' \sim t'']$.

Mamy więc: $k_1(A) = r \circ v \circ t' \circ A = r \circ v \circ t' \circ B = k_1(B)$ oraz w drugim przypadku: $k_2(A) = r \circ h \circ t' \circ A = r \circ h \circ t' \circ B = k_2(B)$. Dla dowolnych selektorów t otrzymaliśmy więc: $t(A) = t(B)$ i stąd na mocy twierdzenia 3 [1] mamy A=B.

Twierdzenie 3 ma fundamentalne znaczenie, gdyż dzięki niemu zamiast posługiwać się obiektami ze zbioru $\mathcal{K}$, można używać ich atomowych zbiorów charakterystycznych.

T w i e r d z e n i e 4

Dla danego zbioru Z, określonego jako $Z = \{\langle I : a\rangle \mid a \in \mathcal{A}\}$ lub $Z = \{\langle k_i : a_i\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ k_i = v \circ k_i' \wedge (\forall i,j)[i \neq j \Rightarrow k_i \not\sim k_j] \wedge a_i \in \mathcal{A}\}$, istnieje obiekt $A \in \mathcal{K}$, dla którego: $\chi(A) = Z \cup \{\langle k_A : \Omega\rangle \mid k_A \in S_A \wedge k_A \neq k_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$.

Jeżeli $Z = \{\langle I : a\rangle\}$, to $A = a \in \mathcal{A}$ i oczywiście $\chi(A) = \{\langle I : a\rangle\}$.

Jeżeli $n = 1$, to $Z = \{\langle k_1 : a_1\rangle\}$ i wtedy $A = \mathcal{H}(\Omega,\ k_1,\ a_1)$.

Rzeczywiście, gdy $k_1 = v$, to $A = \{(v,\ a_1),\ (h,\Omega)\}$, $k_1 = v$ jest jedynym selektorem końcowym obiektu A i atomowy zbiór charakterystyczny $\chi(A) = \{\langle v : a_1\rangle\}$

Gdy natomiast k_1 jest określone jako kompozycja m selektorów binarnych, wówczas mamy $k_1 \circ A = k_1 \circ \mathcal{H}(\Omega,\ k_1,\ a_1) = a_1$, a z twierdzenia 1 wynika, że $k_1 \in S_A$. Z kolei z twierdzenia 7 [1] wynika, że dla każdego selektora t takiego, że $(k_1 \not\sim t)$, $t \circ A = t \circ \mathcal{H}(\Omega,\ k_1,\ a_1) = t \circ \Omega = \Omega$. Ponieważ na mocy lematu 5 mamy, że wszystkie selektory końcowe obiektu A są niezależne, więc dla $(\forall k_A \neq k_1)[k_A(A) = \Omega]$. Atomowy zbiór charakterystyczny obiektu A jest więc równy:

$$\{\langle k_1 : a_1\rangle\} \cup \{\langle k_A : \Omega\rangle \mid k_A \neq k_1 \wedge k_A \in S_A\}.$$

Załóżmy teraz, że istnieje pewien dowolny zbiór

$$Z = \{\langle k_1 : a_1\rangle,\ \langle k_2 : a_2\rangle,\ \dots,\ \langle k_n : a_n\rangle \mid k_i = v \circ k_i' \wedge a_i \in \mathcal{A} \wedge (\forall i,j)[i \neq j \Rightarrow (k_i \not\sim k_j)],\ i = 1,2,\dots,n\}$$

oraz obiekt $A \in \mathcal{K}$ taki, że:

$$\chi(A) = Z \cup \{\langle k_A : \Omega\rangle \mid k_A \in S_A \wedge k_A \neq k_i,\ i = 1,2,\dots,n\}.$$

Rozpatrzmy zbiór:

$$Z' = Z \cup \left\{ < k_{n+1} : a_{n+1} > \mid k_{n+1} = v \circ k'_{n+1} \wedge (\forall i) \left[k_i \nsim k_{n+1} \right] \wedge a_{n+1} \in \mathcal{A}, \quad i = 1,2,\ldots,n \right\}$$

Określmy pewien obiekt B w sposób następujący:

$B = \mathcal{H}(A,\ k_{n+1},\ a_{n+1})$. Oczywiście $k_{n+1} \circ B = a_{n+1}$ i $k_{n+1} \in S_B$.
Mamy również: $(\forall t)\left[[t \nsim k_{n+1}] \Longrightarrow t \circ B = t \circ A \right]$.

Związek ten zachodzi również dla selektorów końcowych obiektu A, skąd wynika, że selektory te są również selektorami końcowymi obiektu B. Liczba selektorów końcowych obiektu B może być jednak większa niż liczba selektorów końcowych obiektu A. Wtedy oczywiście

$$(\forall k_B \neq k_{n+1} \wedge k_B \notin S_A)\left[k_B(A) = \Omega \right].$$

Ponieważ wszystkie selektory końcowe obiektu B są niezależne, mamy więc również $k_B(B) = \Omega$. Atomowy zbiór charakterystyczny obiektu B jest więc równy:

$$\chi(B) = \chi(A) \cup \left\{ < k_{n+1} : a_{n+1} > \right\} \cup \left\{ < k_B : \Omega > \mid k_B \in S_B \wedge k_B \notin S_A \wedge k_B \neq k_{n+1} \right\}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\chi(B) = Z' \cup \left\{ < k_B : \Omega > \mid k_B \in S_B \wedge k_B \neq k_i,\ i = 1,2,\ldots,n+1 \right\}.$$

Znaczenie atomowych zbiorów charakterystycznych polega na tym, że z jednej strony w pełni odzwierciedlają one budowę struktur binarnych, z drugiej zaś pokazują w jawny sposób, jakie atomy wchodzą w skład każdego obiektu. Jest to ważne z tego względu, że głównym celem operacji wykonywanych na strukturach są określone przekształcenia atomów wchodzących w skład tych struktur. Dzięki wprowadzeniu pojęcia atomowych zbiorów charakterystycznych możliwe jest również dokonanie przekształceń dowolnych struktur binarnych do postaci liniowej, co w przypadku realizacji struktur w maszynie cyfrowej pozwala na uproszczenie sposobu korzystania z tych obiektów i umożliwia zwiększenie szybkości wykonywania poszczególnych operacji określonych dla tych obiektów.

LITERATURA

[1] Bruski J.: Struktury binarne i ich własności. ZN Pol. Śl. Seria Informatyka z. 1.

[2] Ollongren A.: Definition of Programming Languages by Interpreting Automata. Academic Press. London 1974.

[3] Turski W.M.: Struktury danych. WNT, Warszawa 1976.

[4] Ehrich H.D.: Ein axiomatischer Ansatz für eine Algebra strukturierter Objekte. Graphen-Sprachen und Algorithmen auf Graphen. Carl Hanser Verlag. München 1976.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА БИНАРНЫХ СТРУКТУР

Р е з ю м е

Статья эта является продолжением описания системы бинарных структур. В ней вводится понятия окончательных селекторов и характеристических множеств объектов и даются их свойства.

CHARACTERISTIC SETS OF BINARY STRUCTURES

S u m m a r y

The paper constitutes a continuation of description of the system of binary structures. The idea of terminal selectors and characteristic sets of objects were introduced and their properties were represented.