ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: HUTNICTWO z. 3 Nr kol. 370

Adam Gierek, Grzegorz Pucka,
Franciszek Binczyk

ANALIZA WARIANCJI JAKO METODA OPTYMALNEGO PLANOWANIA EKSPERYMENTÓW W ODLEWNICTWIE

Streszczenie. Badania materiałoznawczo-technologiczne wymagają zaangażowania znacznych środków materialnych i zespołów badawczych. W tym względzie nie bez znaczenia jest ekonomika pracy i czasu badacza. W artykule omówiono metodę analizy wariancji jako metodę optymalnego planowania eksperymentów, w tym również eksperymentów z dziedziny odlewnictwa. Omówiono pojęcia podstawowe i założenia analizy wariancji, przy planowaniu doświadczeń wg schematów kwadratów łacińskich, greko-łacińskich i arabo-greko-łacińskich. W drugiej części artykułu podano przykład praktycznego wykorzystania metody analizy wariancji do badania własności materiałów formierskich.

1. Wstęp

Badania eksperymentalne w odróżnieniu od badań teoretycznych wymagają na ogół zaangażowania liczniejszych zespołów badawczych i znaczniejszych środków materialnych. Dlatego też każdą pracę naukowo-badawczą należy zaczynać od analiz teoretycznych, ograniczając badania eksperymentalne do niezbędnego minimum. To niezbędne minimum można w większości przypadków określić metodami optymalnego planowania eksperymentów.

Zdobycie wszechstronnych naukowo-technicznych informacji o materiałach i technologiach ich wytwarzania wymaga przeprowadzenia szeregu prób i doświadczeń. W zależności od charakteru badań eksperymentalnych wystąpić może szereg trudności wynikających ze znacznej praco i czasochłonności doświadczeń. Niezbędnym staje się więc uważniejsze spojrzenie na ekonomikę pracy i czasu badacza, a co za tym idzie - na koszty badań, w tym również badań z dziedziny odlewnictwa. W takich przypadkach metody matematyki statystycznej umożliwiają badaczom zastosowanie odpowiednich testów statystycznych, na podstawie których z małej próbki można wyciągnąć wnioski o populacji. Metody te, zwane także mikrostatystyką matematyczną, dają szczególnie dobre wyniki w przypadku podejmowania wstępnych badań eksperymentalnych na drodze analizy wariancji wyników doświadczeń, planowanych w oparciu o specjalne schematy, tzw. kwadraty łacińskie, greko-łacińskie i arabo-greko-łacińskie. Planowanie doświadczeń metodą ww. kwadratów ułatwia ogólną orientację badacza przy rozważaniach wstępnych i pomaga w wyborze właściwych kierunków badań. Po doświadczeniach wstępnych powinny nastąpić badania liczniejszej partii próbek przeprowadzone już tylko w celu określenia dokładnej zależności między tymi wielkościami, dla których ustalono pewną siłę wzajemnego związku.

2. Pojęcia podstawowe i założenia analizy wariancji

W celu lepszego zrozumienia sposobu prowadzenia analizy wariancji należy poznać podstawowe pojęcia i założenia, na których się ta metoda opiera. Należy więc przede wszystkim wprowadzić pojęcie tzw. cechy wynikowej W, tj. własności poddanej badaniom; cech zabiegowych Z, tj. czynników zmienności mających decydujący wpływ na cechę wynikową; cech kontrolowanych K i cech ubocznych U.

Cechy kontrolowane różnią się od cech ubocznych tym tylko, że mają nieco większy wpływ na cechę wynikową i w trakcie przeprowadzania doświadczeń są niezmienne (np.: typ mieszarki do sporządzania masy formierskiej, typ pieca do wyżarzania próbek itp.).

Zarówno cechy uboczne, jak i cechy kontrolowane nie są brane pod uwagę przy zakładaniu doświadczenia. Ich wpływ na zmienną wynikową mieści się w tzw. zmienności resztowej. Im zmienność resztowa ma niższą wartość, tym mniejszy jest wpływ cech ubocznych. Reasumując można napisać, że

$$Z + K + U \text{ powoduje } W.$$

Cecha wynikowa W (np.: wytrzymałość masy na ściskanie, twardość próbki po hartowaniu itp.) jest zmienną losową, gdyż przy ustalonych cechach kontrolowanych, na wynik będą nieznacznie wpływały niekontrolowane cechy uboczne. Przy takim założeniu, w myśl centralnego twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa [2] i [3], cecha wynikowa W będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym.

Wynika z tego, że im więcej cech ubocznych zaliczy się do grupy cech kontrolowanych, tym mniejsza będzie wariancja cechy wynikowej W, a tym samym dokładniejszych spodziewać się można wyników.

Ponieważ zmienna losowa jest wyznaczona, gdy znany jest jej rozkład [2], [3], [4], to po przyjęciu rozkładu normalnego cechy wynikowej zagadnienie sprowadza się do określenia dwóch parametrów - wartości średniej i wariancji.

Analiza wariancji ma właśnie odpowiedzieć na pytanie: czy i jak średnia i wariancja zmiennej wynikowej W zależą od cech zabiegowych Z?

3. Planowanie doświadczeń metodą kwadratów łacińskich, greko-łacińskich i arabo-greko-łacińskich

Jak już wspomniano, analiza wariancji wyników doświadczeń uzyskanych przy wykorzystaniu kwadratów łacińskich, greko-łacińskich i arabo-greko-łacińskich pozwala na wysnucie wstępnych wniosków z doświadczenia na podstawie minimalnej liczby prób. Liczba prób wynika z rodzaju zastosowanego kwadratu, a ściślej od jego rzędu, tj. od liczby kolumn i wierszy (liczba kolumn równa się liczbie wierszy). Na przykład: kwadrat trzeciego rzędu, to kwadrat o trzech kolumnach k i trzech wierszach p, który wymaga przeprowadzenia dziewięciu prób ($p \cdot k = 3 \cdot 3 = 9$).

Celem zbudowania kwadratu łacińskiego, np. czwartego rzędu, należy poszczególne cechy zabiegowe (cechy zmienności) oznaczyć następująco:

- cecha zmienności kolumnowa I, II, III, IV,
- cecha zmienności wierszowa a, b, c, d,
- cecha zmienności wewnętrzna A, B, C, D.

Po przyjęciu tych oznaczeń kwadrat łaciński czwartego rzędu będzie posiadał następujące trzy istotnie różniące się między sobą postacie (rys. 1).

	I	II	III	IV
a	A	B	C	D
b	B	A	D	C
c	C	D	A	B
d	D	C	B	A

a

	I	II	III	IV
a	A	B	C	D
b	C	D	A	B
c	D	C	B	A
d	B	A	D	C

b

	I	II	III	IV
a	A	B	C	D
b	D	C	B	A
c	B	A	D	C
d	C	D	A	B

c

Rys. 1

Wszystkie inne postacie można otrzymać zastępując wzajemnie poszczególne litery (np. A i B).

Z powyższego wynika, że zabiegi są rozmieszczone w kwadracie w ten sposób, że każdy zespół cech zabiegowych powtarza się tylko jeden raz w każdym wierszu i w każdej kolumnie (np. a I A).

Przez nałożenie na siebie dwóch kwadratów łacińskich czwartego rzędu (np. a i b, a i c, b i c) uzyskuje się tzw. kwadrat greko-łaciński, a przez nałożenie na siebie wszystkich trzech rodzajów kwadratów łacińskich czwartego rzędu - kwadrat arabo-greko-łaciński. Odpowiednie oznaczenia łacińskie zastępowane są w tych przypadkach przez oznaczenia greckie i arabskie (np. α, β, γ, δ, oraz 1, 2, 3, 4).

Zrozumiałym więc jest, że w przypadku kwadratu łacińskiego piątego i wyższych rzędów, możliwości tworzenia dalszych kwadratów są również większe.

Analiza wariancji wyników doświadczenia na podstawie kwadratu greko-łacińskiego, czy też arabo-greko-łacińskiego pozwala na wyciągnięcie wniosków z takiej samej ilości prób, jak w przypadku kwadratu łacińskiego lecz dla zwiększonej o jeden względnie dwa ilości zabiegów, co jeszcze w większym stopniu skraca przebieg doświadczenia.

W przypadku kwadratu greko-łacińskiego, dodatkową cechą zabiegową, oznacza się zwykle literami greckimi. Schemat tworzenia kwadratu greko-łacińskiego przedstawiony jest na rys. 2.

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

+

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

=

	I	II	III	IV
a	Aα	Bβ	Cγ	Dδ
b	Bγ	Aδ	Dα	Cβ
c	Cδ	Dγ	Aβ	Bα
d	Dβ	Cα	Bδ	Aγ

Rys. 2

Schemat tworzenia kwadratu arabo-greko-łacińskiego, w którym dodatkową cechą oznacza się cyframi arabskimi, przedstawiony jest na rys.3.

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

+

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

+

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

=

	I	II	III	IV
a	Aα1	Bβ2	Dγ3	Cδ4
b	bγ4	Aδ3	Cα2	Dβ1
c	Cδ2	Dγ1	Bβ4	Aα3
d	Dβ3	Cα4	Aδ1	Bγ2

Rys. 3

Podobnie jak dla kwadratu łacińskiego, w żadnym wierszu i kolumnie nie może powtórzyć się ten sam zespół zabiegów.

4. Analiza wariancji

Po przeprowadzeniu wszystkich zaplanowanych prób, wynikających z zastosowanego kwadratu i po wpisaniu uzyskanych wyników w odpowiednie jego rubryki, przystępuje się do analizy wariancji.

Ogólną wartość cechy wynikowej dla poszczególnych grup zabiegowych oznacza się przez X_{ij},

gdzie $i = 0, 1, 2, 3, \dots k$ - numer pierwszego zabiegu (numer kolumny)

$j = 0, 1, 2, 3, \dots p$ - numer drugiego zabiegu (numer wiersza).

Cecha wynikowa dla i-tego zabiegu jest zmienną losową ξ_i o rozkładzie normalnym (średnia m_i i wariancja σ_i^2 [1], [4].

W grupie cech ubocznych i kontrolowanych cecha wynikowa jest również zmienną losową ξ_o o rozkładzie normalnym (średnia m_o i wariancja σ_o^2).

Analiza wariancji sprowadza się do sprawdzenia tzw. hipotezy zerowej mówiącej o tym, że wszystkie cechy zabiegowe, cechy kontrolowane i cechy uboczne można traktować jako próbki wybrane losowo z populacji o takiej samej wartości średniej i wariancji.

Wobec tego

$$m_1 = m_2 = \dots\dots = m_i = m_o$$

i

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots\dots = \sigma_i^2 = \sigma_o^2.$$

Obalenie hipotezy zerowej dowodzi o wpływie zabiegów lub któregoś z nich na cechę wynikową W.

W pierwszym etapie prowadzenia analizy wariancji należy obliczyć ogólne średnie cech wynikowych

$$\bar{X} = \frac{1}{k.p} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} X_{ij}. \tag{1}$$

Następnie wyznacza się tzw. zmienność całkowitą, która mierzona jest wielkością sumy kwadratów odchyleń poszczególnych wartości cech wynikowych od ich wartości średniej

$$S_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2. \tag{2}$$

Po podstawieniu (1) do (2) uzyskuje się wyrażenie na zmienność całkowitą w postaci

$$S_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} X_{ij}^2 - \frac{1}{k.p} (\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} X_{ij})^2. \tag{3}$$

Wielkość wyznaczona z zależności (3) jest zmiennością całkowitą, zawierającą w sobie wpływy poszczególnych cech zabiegowych, cech kontrolowanych i cech ubocznych na badaną cechę wynikową.

W przypadku kwadratu łacińskiego analiza wariancji sprowadza się do wyznaczenia zmienności całkowitej wg (3) o

$$r_c = k \cdot p - 1 \tag{4}$$

stopniach swobody oraz takich jej składowych jak:

- zmienność międzykolumnowa

$$S_{mk}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{p} X_{ij})^2 - \frac{1}{k.p} (\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} X_{ij})^2 \tag{5}$$

o $r_{mk} = k - 1$ stopniach swobody; (6)

- zmienność międzywierszowa

$$S^2_{mw} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{k} X_{ij}\right)^2 - \frac{1}{k.p}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} X_{ij}\right)^2 \tag{7}$$

o $r_{mw} = p - 1$ stopniach swobody; (8)

- zmienność wewnętrzna

$$S^2_{w} = \frac{1}{z}\sum_{l=1}^{z}\left(\sum_{j=1}^{p} X_{ij}\right)^2 - \frac{1}{k.p}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} X_{ij}\right)^2 \tag{9}$$

o $r_w = z - 1$ stopniach swobody; (10)

gdzie $l \rightarrow z$ (ilość zabiegów wg oznaczeń łacińskich)

- zmienność resztowa

$$S^2_r = S^2_c - S^2_{mk} - S^2_{mw} - S^2_w \tag{11}$$

o $r_r = r_c - r_{mk} - r_{mw} - r_w$ stopniach swobody. (12)

W przypadku kwadratu greko-łacińskiego zmienność wewnętrzna dzieli się na zmienność wewnętrzna łacińska i zmienność wewnętrzną grecką.

Zmienności te wyrażają się następującymi wzorami:

- zmienność wewnętrzna łacińska

$$S^2_{wł} = \frac{1}{z}\sum_{l=1}^{z}\left(\sum_{n=1}^{s} X_{ln}\right)^2 - \frac{1}{k.p}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} X_{ij}\right)^2 \tag{13}$$

o $r_{wł} = z - 1$ stopniach swobody (14)

- zmienność wewnętrzna grecka

$$S^2_{wg} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s}\left(\sum_{l=1}^{z} X_{ln}\right)^2 - \frac{1}{k.p}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} X_{ij}\right)^2 \qquad (15)$$

o $r_{wg} = s - 1$ stopniach swobody, (16)

gdzie $l \rightarrow z$ (ilość zabiegów wg oznaczeń łacińskich)

$n \rightarrow s$ (ilość zabiegów wg oznaczeń greckich).

Należy zaznaczyć, że dla kwadratów symbole p, k, z, s są sobie równe i posiadają wartości uzależnione od rzędu kwadratu.

Dla kwadratu greko-łacińskiego zmienność resztową oblicza się w następujący sposób:

$$S^2_r = S^2_c - S^2_{mk} - S^2_{mw} - S^2_{wł} - S^2_{wg} \qquad (17)$$

i

$$r_r = r_c - r_{mw} - r_{mw} - r_{wł} - r_{wg}. \qquad (18)$$

Kolejnym etapem analizy jest obliczenie wariancji

$$\sigma^2_{mk} = \frac{S^2_{mk}}{r_{mk}} \qquad (19)$$

$$\sigma^2_{mw} = \frac{S^2_{mw}}{r_{mw}} \qquad (20)$$

$$\sigma^2_{w} = \frac{S^2_{w}}{r_{w}} \qquad (21)$$

$$\sigma^2_{wł} = \frac{S^2_{wł}}{r_{wł}} \qquad (22)$$

$$\sigma^2_{wg} = \frac{S^2_{wg}}{r_{wg}} \tag{23}$$

$$\sigma^2_{r} = \frac{S^2_{r}}{r_{r}} \tag{24}$$

których wartości podzielone przez wariancję resztową dają tzw. funkcje testowe $\emptyset$

$$\emptyset_{mk} = \frac{\sigma^2_{mk}}{\sigma^2_{r}} \tag{25}$$

$$\emptyset_{mw} = \frac{\sigma^2_{mw}}{\sigma^2_{r}} \tag{26}$$

$$\emptyset_{w} = \frac{\sigma^2_{w}}{\sigma^2_{r}} \tag{27}$$

$$\emptyset_{wł} = \frac{\sigma^2_{wł}}{\sigma^2_{r}} \tag{28}$$

$$\emptyset_{wg} = \frac{\sigma^2_{wg}}{\sigma^2_{r}} \tag{29}$$

Ostatnim etapem analizy wariancji jest porównanie otrzymanych wartości funkcji testowych z wartościami odczytanymi z testu F Snedecora (tablica 1 i 2) [1], dla obliczonych stopni swobody i dla odpowiednio przyjętego poziomu ufności (0,95 lub 0,99). Tablice te zawierają maksymalne ilorazy dwóch wariancji empirycznych o r_1 i r_2 stopniach swobody, estymujących tę samą wariancję σ^2 populacji o rozkładzie normalnym.

Tablica 1

Test F Snedecora. Maksymalne ilorazy F dwóch wariancji empirycznych o r_1 i r_2 stopniach swobody estymujących tę samą wariancję σ^2 populacji o rozkładzie normalnym. Poziom ufności 0,95

r_2 \ r_1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161	200	216	225	230	234	237	239
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07

W tablicach r_1 oznacza liczbę stopni swobody zmienności badanej, a r_2 liczbę stopni swobody zmienności resztowej; np. dla $r_1 = 3$ i $r_2 = 3$, wartość F odczytana z tablicy dla poziomu ufności 0,95 wyniesie 9,28. Przy porównaniu funkcji testowej z testem F Snedecora mogą zaistnieć następujące przypadki:

a) $$\phi > F$$

W przypadku tym hipotezę zerową należy odrzucić, ponieważ przy jej słuszności otrzymana z próby wartość ϕ zachodzi z prawdopodobieństwem mniejszym niż 0,05 (lub 0,01) przyjętym za poziom istotności testu. Zatem rozpatrywana cecha zabiegowa nie należy do populacji o jednej wartości średniej m i wariancji σ^2 i wywiera istotny wpływ na badaną cechę wynikową.

Tablica 2

Test F Snedecora. Poziom ufności 0,99

r_2 \ r_1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	405	500	540	563	576	586	593	598
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06

Uwaga: 1. Liczby w tablicy 2 w pierwszym wierszu (r_2 = 1) należy pomnożyć przez 10.

2. Tablice 1 i 2 stanowią wyciąg z tablic zamieszczonych w literaturze [1].

b)

$$\phi \leq F$$

W przypadku tym przeprowadzony test nie przeczy hipotezie wobec czego można przyjąć, że rozpatrywana cecha zabiegowa należy do populacji o jednej wartości średniej m i wariancji σ^2, wynikających z założonej hipotezy zerowej i nie wywiera istotnego wpływu na badaną wynikową.

Podczas przeprowadzania analizy wariancji może się zdarzyć że zmienność resztowa posiadać będzie wysoką wartość, równą, a nawet w pewnych przypadkach wyższą od wartości zmienności badanych cechą zabiegowych. Fakt ten pozwala wnioskować, że przy zakładaniu doświadczenia pominięto wpływ niektórych czynników zmienności. ~~mających znaczny wpływ~~ na badaną cechę wynikową; zaliczono je podczas planowania doświadczenia do czynników ubocznych lub kontrolowanych. W tym przypadku należy doświadczenie powtórzyć, zakładając dodatkowo jeden lub dwa czynniki zmienności. Można też wyrugować te czynniki, dla których w poprzednim doświadczeniu nie stwierdzono istotnego wpływu, a w ich miejsce wprowadzić czynniki z grupy ubocznej lub kontrolowanej.

5. Przykład

Załóżmy, iż należy ustalić wpływ zawartości wody, zawartości spoiwa i temperatury suszenia na wytrzymałość na ściskanie R_c syntetycznej masy formierskiej (spoiwo - glinka ogniotrwała GM III, wypełniacz - piasek kwarcowy). Czynniki zmienności to: zawartość wody, zawartość spoiwa i temperatura suszenia; jeden typ mieszarki, suszarki i ubijaka do wykonywania próbek, stały czas mieszania, jeden typ aparatu do badania wytrzymałości - to cechy kontrolowane; wytrzymałość na ściskanie R_c - to cecha wynikowa.

Dla każdego z założonych czynników zmienności przyjmujemy cztery wartości. I tak: kolejne cyfry rzymskie I, II, III, IV odpowiadać będą 4, 6, 8, 10% wody w masie. Drugi czynnik zmienności, tj. zawartość spoiwa oznaczmy cyframi 1, 2, 3, 4 z tym, że kolejne cyfry oznaczać będą odpowiednio 6, 10, 14 i 18% spoiwa w masie. Trzeci czynnik zmienności - temperaturę suszenia oznaczmy dużymi literami alfabetu łacińskiego, z tym, że kolejne litery A, B, C, D oznaczać będą odpowiednio 120, 160, 200 i 240°C.

Schemat doświadczeń przyjmijmy wg kwadratu łacińskiego czwartego rzędu przedstawionego na rys. 1a. Tak więc wpływ trzech czynników zmienności można ująć w 16 próbach, co przedstawiono w tablicy 3.

W wyniku przeprowadzonych prób i pomiarów uzyskano dane o wartości wytrzymałości na ściskanie, które wpisano do tablicy 4, zgodnie z rozmieszczeniem poszczególnych prób w przyjętym kwadracie.

Dane z tablicy 4 pozwalają na obliczenie zmienności całkowitej S_c^2, zmienności międzykolumnowej S_{mk}^2 (wpływ zawartości wody) i zmienności międzywierszowej S_{mw}^2 (wpływ zawartości spoiwa).

Tak więc, zgodnie ze wzorem (3), zmienność całkowita

$$S_c^2 = 32,34.$$

Tablica 3

Plan doświadczeń wg kwadratu łacińskiego czwartego rzędu z rys. 1a

Lp.	Zawartość wody	Zawartość spoiwa	Temperatura suszenia
	%	%	°C
1	4	6	120
2	6	6	160
3	8	6	200
4	10	6	240
5	4	10	160
6	6	10	120
7	8	10	240
8	10	10	200
9	4	14	200
10	6	14	240
11	8	14	120
12	10	14	160
13	4	18	240
14	6	18	200
15	8	18	160
16	10	18	120

Liczba stopni swobody tej zmienności, zgodnie ze wzorem (4), będzie wynosiła $r_c = 15$.

Zmienność międzykolumnowa, zgodnie ze wzorem (5), przyjmuje wartość

$$S^2_{mk} = 4{,}57,$$

a liczba stopni swobody tej zmienności, zgodnie ze wzorem (6), będzie wynosiła

$$r_{mk} = 3.$$

Zmienność międzywierszowa, zgodnie ze wzorem (7), przyjmuje wartość

$$S^2_{mw} = 17,36,$$

a liczba stopni swobody tej zmienności, zgodnie ze wzorem (8), będzie wynosiła

$$r_{mw} = 3.$$

W celu obliczenia zmienności wewnętrznej łacińskiej, należy sporządzić tablicę, w której wytrzymałość na ściskanie R_c uzależniona jest od trzeciego zabiegu, tzn. od temperatury suszenia. Tablicę tę tworzy się w ten sposób, że w kolumnach rozmieszcza się czynnik zmienności oznaczony dużymi literami alfabetu łacińskiego.

I tak, na przecięciu np. kolumny C z wierszem 2, wpisujemy wartość, która w tablicy 4 znajduje się na przecięciu IV kolumny i drugiego wiersza. Sumy wierszy i kolumn z tablicy 4 muszą być sobie równe. Podobnie rzecz przedstawia się w tablicy 5. Oczywistym jest fakt, że sumy te z tablicy 4 i 5 muszą być sobie równe. Stanowi to pewną kontrolę porządkowania tablicy 5 wg zabiegów. W ten sposób wypełnia się całą tablicę 5. Dane z tablicy 5 pozwalają na obliczenie zmienności wewnętrznej łacińskiej ze wzoru (9). Tablica 4 i tablica 5 zawiera dane, które są członami równań 3-24. Korzystanie z tej tablicy sprowadza się więc do odpowiedniej manipulacji zawartych w niej danymi. Zgodnie ze wzorem (9) zmienność ta przyjmuje wartość

$$S^2_{wł} = 5,36.$$

Liczba stopni swobody tej zmienności, zgodnie ze wzorem (10), będzie wynosiła

$$r_{wł} = 3.$$

Tablica 4

Wyniki doświadczeń wg tablicy 3

$i \longrightarrow k$, $j \downarrow p$

		I	II	III	IV	$\sum_{i=1}^{k} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{k} x_{ij}^2$	$\left(\sum_{i=1}^{k} x_{ij}\right)^2$
1	x_{ij}	1,6	2,7	0,8	1,5	6,6		43,56
	x_{ij}^2	2,56	7,29	0,64	2,25		12,74	
2	x_{ij}	1,5	2,0	2,4	1,8	7,7		59,29
	x_{ij}^2	2,25	4,00	5,76	3,24		15,25	
3	x_{ij}	2,4	2,6	3,2	2,8	11,0		121,00
	x_{ij}^2	5,76	6,76	10,24	7,84		30,60	
4	x_{ij}	2,2	3,0	5,8	6,3	17,3		299,29
	x_{ij}^2	4,84	9,0	33,64	39,69		87,17	
$\sum_{j=1}^{p} x_{ij}$		7,7	10,3	12,2	12,4	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 42,6$		$\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{k} x_{ij}\right)^2$
$\sum_{j=1}^{p} x_{ij}^2$		15,41	27,05	50,28	53,02		$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}^2 = 145,76$	$= 523,14$
$\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)^2$		59,29	106,09	148,84	153,76	$\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)^2 = 471,98$		

Tablica 5

Uporządkowanie wg zabiegu łacińskiego

$l \longrightarrow z$

$j \downarrow p$

	A	B	C	D	$\sum_{l=1}^{z} x_{lj}$	$\left(\sum_{j=1}^{p} x_{lj}\right)^2$
1	1,6	2,7	0,8	1,5	6,6	43,56
2	2,0	1,5	1,8	2,4	7,7	59,29
3	3,2	2,8	2,4	2,6	11,0	121,00
4	6,3	5,8	3,0	2,2	17,3	299,29
$\sum_{j=1}^{p} x_{lj}$	13,1	12,8	8,0	8,7	42,6	
$\left(\sum_{j=1}^{p} x_{lj}\right)^2$	171,61	163,84	64,00	75,69	$\sum_{l=1}^{z}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{lj}\right)^2 = 475,14$	

Tablica 6

Analiza wariancji

Źródło zmienności	Zmienność	Ilość stopni swobody	Wariancja	$\emptyset$	$F_{0,95}$
Międzykolumnowa	4,57	3	1,52	1,81	
Międzywierszowa	17,36	3	5,78	6,90	4,76
Wewnętrzna łacin.	5,36	3	1,78	2,12	
Resztowa	5,05	6	0,84		
Całkowita	32,34	15			

Zgodnie ze wzorem (11) zmienność resztowa wynosi

$$S_r^2 = 5,05.$$

Liczba stopni swobody tej zmienności, zgodnie ze wzorem (12), będzie wynosiła

$$r_r = 6.$$

Po obliczeniu wszystkich zmienności przystępuje się do właściwej analizy wariancji. W tym celu sporządza się tablicę 6. Z testu F Snedecora (tabl. 1) odczytuje się wartości ilorazów dwóch wariancji empirycznych $r_1 = 3$, $r_2 = 6$ stopniach swobody ($r_{mk} = r_{mw} = r_{wł} = 3$; $r_r = 6$), przyjmując dodatkowo pewien poziom ufności.

W omawianym przykładzie przyjęto poziom ufności 0,95. Wartość F odczytana z tablicy 1 dla ww. parametrów wynosi 4,76. Jak widać z tablicy 6, zmienność międzykolumnowa i zmienność wewnętrzna łacińska mają wartości niższe od wartości funkcji F z testu Snedecora, natomiast zmienność wierszowa ma wartość wyższą od tej funkcji.

Zgodnie z metodą analizy wariancji wnioskujemy, że w badanym zakresie czynników zmienności, tylko zawartość spoiwa wpływa istotnie na wytrzymałość na ściskanie, natomiast zawartość wody i temperatura suszenia nie wykazuje tak istotnego wpływu na badaną własność.

W dalszych, szczegółowych już badaniach można pominąć wpływ zawartości wody i temperatury suszenia na wytrzymałość masy na ściskanie i skoncentrować badania tylko na tych kierunkach, które wyznaczyła analiza wariancji. W prowadzonych doświadczeniach nie należy się spodziewać istotnego wpływu zawartości wody i temperatury suszenia, o ile nie przekroczą one zakresu przebadanych wartości tych czynników.

W omawianym przykładzie zastosowano schemat doświadczeń kwadratu łacińskiego czwartego rzędu. Przy wprowadzeniu dodatkowego czynnika zmienności np. czasu suszenia, musielibyśmy skorzystać z kwadratu greko-łacińskiego czwartego rzędu i zmienność całkowitą rozbić na cztery zmienności zabiegowe.

Zachodzi pytanie, na ile zmienności zabiegowych można rozbić zmienność całkowitą, przy danym rzędzie kwadratu? Inaczej - na ile cech można grupować wyniki jednego doświadczenia? Odpowiedź na to pytanie, daje analiza ilości stopni swobody dla zmienności resztowej. Ilość ta nie może być ujemna, a co najwyżej może być równa 0. Oznaczając przez r_c ilości stopni swobody zmienności całkowitej, przez r_r ilość stopni swobody zmienności resztowej, przez p rząd dowolnego kwadratu, a przez m ilość grupowań danego kwadratu na zmienności wewnętrzne o (p-1) stopniach swobody, można napisać nierówność

$$r_r \geqslant 0$$

i dalej

$$(p^2 - 1) - m(p - 1) \geqslant 0.$$

Rozwiązując nierówność otrzymamy, że

$$m \leqslant p + 1.$$

Oznacza to, że np. kwadrat czwartego rzędu, możemy grupować najwyżej ze względu na 5 cech zabiegowych (w przypadku wykorzystania danego kwadratu do grupowania maksymalną ilością sposobów, zmienna resztowa i liczba stopni swobody tej zmienności będzie równa 0). Oznacza to również, że nie może być np. kwadratu arabo-greko-łacińskiego trzeciego stopnia, gdyż w tym przypadku ilość stopni swobody zmienności resztowej byłaby ujemna i wynosiła by (-2).

Zakończenie

W podanym przykładzie badano tylko wpływ zawartości spoiwa, zawartości wody i temperatury suszenia na wytrzymałość na ściskanie R_c, a więc wpływ trzech czynników na jedną cechę wynikową. Oczywistym jest fakt, że przy zadanym schemacie doświadczeń wg kwadratu łacińskiego można badać wiele cech wynikowych (np. przepuszczalność, gazotwórczość, wybijalność, ogniotrwałość itp.) z tym, że dla każdej cechy wynikowej należy wtedy przeprowadzić oddzielną analizę wariancji.

Analiza wariancji może znaleźć szerokie zastosowanie w badaniach materiałoznawczo-technologicznych np. w badaniach przebiegu procesów metalurgicznych, własności stopów, w badaniach wpływu obróbki cieplnej, cieplno-chemicznej itp. na własności tworzyw, a powinna znaleźć zastosowanie w badaniach wstępnych, aby już na początku wyeliminować czynniki, które nie mają zasadniczego wpływu na interesujące nas zjawisko.

LITERATURA

1. Perkal J. - Matematyka dla przyrodników, tom III, PWN Warszawa 1967.
2. Hellwig Z. - Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1972.
3. Kotlarski J. - Rachunek prawdopodobieństwa dla inżynierów, WNT, Warszawa 1971.
4. Ahrens H. - Analiza wariancji, PWN, Warszawa 1970.

АНАЛИЗ ВАРИАНЦИИ КАК ОДИН ИЗ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ЛИТЕЙНОМ ПРОИСВОДСТВЕ

Р а з ю м е

Материаловедческо-технологические исследования требуют вовлечения значительных средств и исследовательских коллективов, и в этом отношении не без значения являются экономия труда и времени исследователя.

В статье рассмотрен метод анализа как один из методов оптимального планирования экспериментов, и в том числе экспериментов в области литейного производства. Рассмотрены основные понятия анализа варианции, планируя опыты по схемам латинских, греко-латинских и арабо-греко-латинских квадратов.

Во второй части статьи приведён пример практического использования метода анализа варианции для исследования свойств формовочных материалов.

THE ANALYSIS OF VARIANCE AS A METHOD OF AN OPTIMUM EXPERIMENT PLANNING IN THE CASTING

S u m m a r y

It is necessary at the materials and technological researches to involve appreciable means and investigative teams. Economics of work and the time of a scientist has an importamt meaning from this point of view. In this article the analysis of variance method is regarded as a method of optimum experiment planning, and particularly, in applications of the method in the casting.

Fundamental conceptions and assumptions of an analysis of variance were considered in the case of on experiment planning according with the scheme of Latin, Greek - Latin and Arabic-Greek-Latin squares. In the second part of this article there was presented an example of practical utilization of the analysis of variance method in order to study the moulding materials properties.