ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Hutnictwo z. 5 Nr kol. 416

Tadeusz Lamber
Grażyna Ober
Instytut Inżynierii Materiałowej

UJĘCIE TEORETYCZNE STANU NAPRĘŻENIA W POPRZECZNYM PRZEKROJU STRUMIENIA CIEKŁEGO METALU PŁYNĄCEGO PRZEZ PÓŁKOLISTĄ RYNNĘ

Streszczenie. W oparciu o równania ruchu cieczy lepkiej, określono pole naprężeń w poprzecznym przekroju strumienia płynnego metalu przepływającego przez pochyloną półkolistą rynnę w polu sił ciężkości.

1. Wprowadzenie

Racjonalna gospodarska materiałowa w hutnictwie wymaga automatyzacji procesów metalurgicznych [1, 2, 3, 4, 5] a między innymi transportu ciekłego metalu. Z teorii regulacji automatycznej wiadomo, że rzeczywisty obiekt regulowany wygodnie jest zastąpić tzw. schematem blokowym. Zezwala to na teoretyczne ujęcie analizy najistotniejszych cech dynamicznych układu. Upraszczające założenia w odniesieniu do przyjętego schematu blokowego decydować będą o rozbieżności między wynikami teoretycznych obliczeń a rzeczywistą charakterystyką. Ustalenie pełnej charakterystyki dynamicznej tzw. przepustowości nawet jednego z elementów układów zamkniętych, np. interesującego nas bloku obrazującego odcinek drogi, wzdłuż której odbywa się przepływ ciekłego metalu, wymaga uwzględnienia znacznej liczby czynników wpływających na charakterystyki przepływu. Niezbędne zatem staje się oddzielne rozważenie poszczególnych procesów przepływu. W pracy poddano analizie jedynie stan naprężenia w poprzecznym przekroju strugi płynnego metalu o wiskotycznym tłumieniu, płynącego przez półkolistą rynnę w polu sił ciężkości.

2. Ustalenie równań ruchu

Rozważmy przepływ płynnego metalu jako ruch laminarny i ustalony cieczy newtonowskiej nieściśliwej w nieskończenie długiej półkolistej rynnie nachylonej pod kątem α do poziomu (rys. 1).

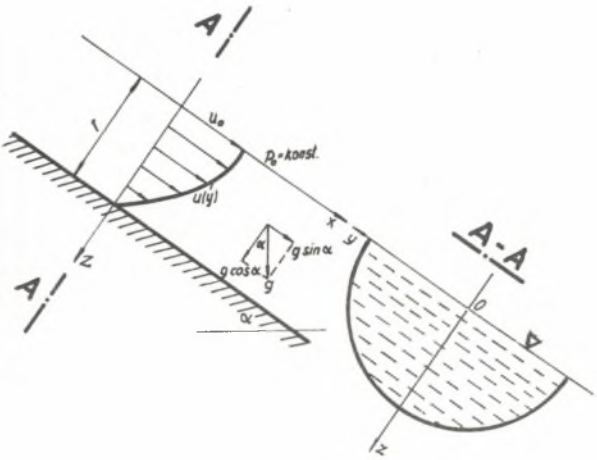
Równanie Naviera-Stookesa i równanie ciągłości opisujące omawiany ruch przyjmą postać:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \bar{v} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \tag{2}$$

gdzie:

$\bar{P}$ – wypadkowa siła masowa,
ϱ – gęstość ciekłego metalu,
$\bar{v}$ – prędkość,
p – ciśnienie,
ν – współczynnik lepkości kinematycznej,
t – czas.



Rys. 1. Rozkład prędkości przy przepływie laminarnym ciekłego metalu przez półkolistą rynnę

Z uwagi na przyjęcie ruchu laminarnego i stałości przekroju strugi jedyną składową prędkości różną od zera jest prędkość u w kierunku osi rynny (oś "x"). Równanie ciągłości (2) przyjmie wówczas postać $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, co oznacza niezależność u od zmiennej x. Zakłada się również $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Wektorową postać równania (1), po uwzględnieniu poczynionych założeń, zastąpimy układem trzech równań skalarowych:

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -g \varrho \sin\alpha \tag{3a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g\varrho \cos\alpha \tag{3c}$$

η - współczynnik lepkości dynamicznej.

Z równania (3c) otrzymujemy prawo rozkładu ciśnienia wzdłuż osi z

$$p(z) = p_0 + \gamma z \cos\alpha \tag{4}$$

gdzie

p_0 - ciśnienie otoczenia panujące nad zwierciadłem płynu,

γ - ciężar właściwy ciekłego metalu.

Korzystając z rozwiązania i jego dyskusji przedstawionej w pracy [5], całkę ogólną jednorodnego równania (3a) przedstawimy w postaci sumy sprzężonych funkcji zespolonych f i h:

$$u_0(y,z) = \frac{1}{2}\left[f(y + iz) + h(y - iz)\right] \tag{5}$$

Łatwo wówczas odgadnąć całkę ogólną równania niejednorodnego (3a), która ma postać

$$u(y,z) = \frac{1}{2}\left[f(y + iz) + h(y - iz)\right] - \frac{\varrho g \sin\alpha}{2\eta} z^2 \tag{6}$$

Jeśli przyjmiemy h = f, wówczas otrzymujemy pole prędkości przepływu symetryczne względem płaszczyzny z = 0. Przy tym założeniu rozważać będziemy wszystkie dalsze zagadnienia.

3. Analiza stanu naprężenia w przekroju poprzecznym rynny

Stan naprężenia w dowolnym punkcie cieczy newtonowskiej określa symetryczny tensor naprężeń o składowych

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Naprężenia normalne σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} znajdujące się na przekątnej tensora naprężeń, składają się z dwóch części a mianowicie z ciśnienia $-p(z)$ jak dla cieczy doskonałej oraz pewnego dodatkowego składnika uwarunkowanego lepkością płynnego metalu określonego w oparciu o wzór Newtona. Wynoszą one zatem

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p(z) + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} = -p_0 - \varrho g z \cos\alpha \\
\sigma_{yy} &= -p(z) + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} = -p_0 - \varrho g z \cos\alpha \\
\sigma_{zz} &= -p(z) + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} = -p_0 - \varrho g z \cos\alpha
\end{aligned}\right\}$$

Naprężenia styczne leżące po obu stronach przekątnej tensora w rozważanym przypadku wynoszą

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \eta \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\eta}{2}\left[f'(y + iz) + f'(y - iz)\right] \\
\tau_{yz} &= 0 \\
\tau_{zx} &= \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\eta\left[f'(y + iz) - f'(y - iz)\right] - \varrho g z \sin\alpha
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Z warunku brzegowego

$z = 0$ – przy pominięciu sił napięcia powierzchniowego otrzymujemy

$$\sigma_{zz} = -p_0 \qquad \tau_{zx} = 0$$

Prędkość górnej warstwy płynnego metalu dla przyjętych założeń w oparciu o równanie (6) przy $f = h$ wynosi

$$u(y,0) = f(y) \qquad (9)$$

Zależność tę można uzyskać przez pomiar prędkości górnej warstwy płynnego metalu.

Drugi warunek brzegowy wynika z faktu, że cząsteczki płynnego metalu przylegające do dna rynny mają prędkość równą zeru.

W oparciu o równanie (6) otrzymujemy zatem:

$$f(y + iz) + f(y - iz) - \frac{\varrho g \sin}{\eta} z^2 = 0 \qquad (10)$$

Stan naprężenia w dowolnym punkcie płynnego metalu, dla przyjętego układu osi x, y, z, opisany równaniami (7) i (8), można scharakteryzować prościej, a mianowicie przy pomocy trzech naprężeń normalnych - głównych. Z teorii stanu naprężenia dla ośrodków ciągłych i izotropowych wiadomo, że poszukiwanie kierunków głównych i naprężeń normalnych głównych, sprowadza się do zerowania wyznacznika utworzonego ze współczynników przy szukanych kierunkach w układzie trzech jednorodnych równań warunkowych.
W rozważanym przypadku otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \eta\frac{\partial u}{\partial y} & \eta\frac{\partial u}{\partial z} \\ \eta\frac{\partial u}{\partial y} & -\sigma & 0 \\ \eta\frac{\partial u}{\partial z} & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

gdzie σ - szukane naprężenie główne.

Po rozwinięciu wyznacznika, redukcji i uporządkowaniu otrzymamy

$$\sigma\left\{\sigma^2 - \eta^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\right\} = 0$$

Pierwiastki tego równania to trzy naprężenia normalne główne, które mają postać

$$\sigma_1 = \eta\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \quad \sigma_2 = -\eta\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \quad \sigma_3 = 0$$

Całkowite naprężenia σ_{oi}, (i = 1, 2, 3) dla kierunków głównych uzyskać można przez superpozycję istniejącego ciśnienia w cieczy p(z) z otrzymanymi składowymi stanu naprężenia

$$\begin{aligned} \sigma_{o1} &= -p(z) + \eta\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \\ \sigma_{o2} &= -p(z) - \eta\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \\ \sigma_{o3} &= -p(z) \end{aligned} \tag{11}$$

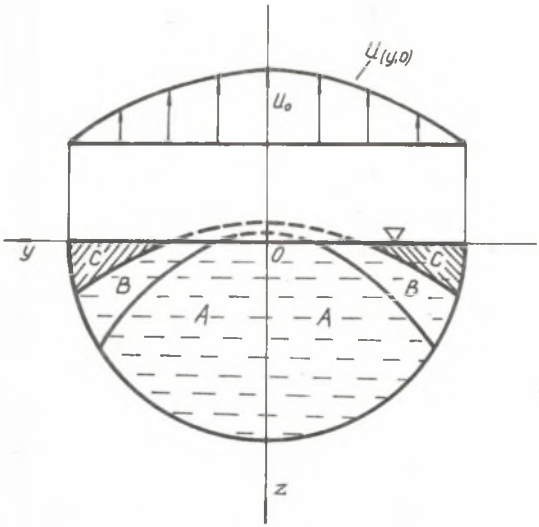
Z równań (11) wynika, że σ_{o2} i σ_{o3} w każdym punkcie przekroju poprzecznego strugi płynnego metalu są ciśnieniami, natomiast σ_{o1}, w za-

leżności od σ_1, może być również rozciąganiem. Oznaczmy wytrzymałość na rozciąganie płynnego metalu przez σ_{co}. Rozerwanie strugi nastąpi w punktach, gdzie spełniona będzie nierówność $\sigma_{c1} > \sigma_{co}$. Z uwagi na różne wartości σ_{c1} i σ_{co} w ruchu stacjonarnym strugi płynnego metalu mogą wystąpić następujące strefy (rys. 2)

σ_{c1} - obszar ściskania (A),

$0 < \sigma_{c1} < \sigma_{co}$ - obszar ciągnienia wolny od przerw w postaci szczelin (B),

$\sigma_{co} < \sigma_{c1}$ - obszar przerw (C).



Rys. 2. Przekrój poprzeczny przez strumień płynnego metalu, przepływającego przez pochyloną kolistą rynnę

A - obszar ściskania, B - obszar ciągnienia wolny od przerw, C - obszar przerw (szczelin)

Przyjmując [5] dla uproszczenia zagadnienia paraboliczny rozkład prędkości cząstek na powierzchni swobodnej płynnego metalu (rys. 2) w postaci równania

$$u(y,0) = f(y) = \frac{u_o}{r^2}(r^2 - y^2)$$

otrzymujemy

$$f(y + iz) = \frac{u_o}{r^2}\left[r^2 - (y + iz)^2\right]$$

Rozkład prędkości określony równaniem (6) przyjmie obecnie postać

$$u(y,z) = u_o - \frac{u_o}{r^2} y^2 - \frac{r^2 \varrho g \sin\alpha - 2\eta u_o}{2r^2\eta} z^2$$

Zakładając

$$\frac{2r^2\eta u_o}{r^2 \varrho g \sin\alpha - 2\eta u_o} = o^2 > 0$$

otrzymamy wyrażenie na rozkład prędkości

$$u(y,z) = u_o \left(1 - \frac{y^2}{r^2} - \frac{z^2}{o^2}\right)$$

Naprężenie σ_{01} opisze wówczas zależność

$$\sigma_{01} = -p_o - \varrho g \cos\alpha \cdot z + 2\eta u_o \sqrt{\frac{y^2}{r^4} + \frac{z^2}{o^4}} \tag{12}$$

W ostatnich dwóch równaniach r i o są półosiami elipsy.

Krzywa odgraniczająca obszar ściskania (A) od obszaru rozciągania (B) jest krzywą stożkową o równaniu

$$(p_o + z g \cos\alpha)^2 = 4\eta^2 u_o^2 \left(\frac{y^2}{r^4} + \frac{z^2}{o^4}\right) \tag{13}$$

Obszar wypełniony szczelinami (C) leży w przekroju poprzecznym między przekrojem stożkowym

$$(\sigma_{oo} + p_o + z g \cos\alpha)^2 = 4\eta^2 u_o^2 \left(\frac{y^2}{r^4} + \frac{z^2}{o^4}\right) \tag{14}$$

a swobodną powierzchnią płynnego metalu w rynnie.

Np. gdy stałe parametry rozważanego układu są tak dobrane, że

$$\frac{r^2 \varrho g \sin\alpha - 2\eta u_o}{r^2 \varrho g \cos\alpha} = 1$$

to półosie elipsy wynoszą r oraz

$$c = \sqrt{\frac{2\eta u_0}{\varrho g \cos\alpha}}$$

Krzywe odgraniczające obszary A i B oraz B i C są wówczas parabolami

$$p_0^2 + 2z\, p_0\, \varrho g \cos\alpha = \frac{4\eta^2 u_0^2}{r^4} y^2$$

$$(\sigma_{00} + p_0)^2 + 2(\sigma_{00} + p_0)\, z\, \varrho g \cos\alpha = \frac{4\eta^2 u_0^2}{r^4} y^2 \tag{15}$$

Przypadek ten zobrazowano na rysunku 2, na którym pokazano poszczególne obszary w przekroju poprzecznym [5] strugi płynnego metalu w rynnie.

Jeżeli na dużej części powierzchni swobodnej płynnego metalu można przyjąć szybkość $u(y,0) = u_0 = \text{const}$, wówczas otrzymujemy szczególnie proste rozwiązanie. Dla $f(y) = u_0$ z równania (6) wynika paraboliczny rozkład prędkości o równaniu:

$$u(z) = u_0 - \frac{\varrho g \sin\alpha}{2\eta} z^2$$

Wyrażenie na naprężenie σ_{01} w tym przypadku przyjmuje postać

$$\sigma_{01} = -p_0 - z\, \varrho g\, (\cos\alpha - \sin\alpha) \tag{16}$$

Z ostatniego równania wynika, że dla $\alpha < \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{p_0}{\sqrt{2}\, z\varrho}$ nie będą się tworzyć nieciągłości (przerwy) w strudze płynnego metalu. Natomiast przy $\alpha > \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{p_0}{\sqrt{2}\, z\varrho}$ naprężenie σ_{01} będzie rozciągającym. Przy $\sigma_{01} > \sigma_{00}$ tworzy się w strudze płynnego metalu obszar C przerw i szczelin, co sprzyja nadmiernemu utlenianiu na skutek zwiększonej swobodnej powierzchni metalu.

Uwagi końcowe

1. W przekroju poprzecznym strumienia płynnego metalu w rynnie w określonych warunkach powstają trzy obszary. W jednym z nich występują naprężenia rozciągające. W zależności od warunków transportu płynnego metalu przez rynnę i jej kąta nachylenia do poziomu, naprężenia te mogą powodo-

wać rozerwanie strugi, a w konsekwencji zwiększenie powierzchni utleniania metalu.

2. Ustalone równania mogą stanowić podstawę do badań ruchu płynnego metalu w polu elektromagnetycznym, co może mieć zastosowanie w dozownikach elektrodynamicznych dla płynnego metalu.

LITERATURA

[1] Gierek A.: Automatyczne linie odlewnicze, Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1967 r.

[2] Krasnow B.J.: Optimalnoje uprawlenije reżimami nieprerywnoj rozliwki stali. Izdatelstwo "Metałłurgia", Moskwa 1970.

[3] Garnow W.K. i inni: Unificirowannyje sistemy awtouprawlenija elektroprowodom w metałłurgii. Izdatelstwo "Metałłurgija", Moskwa 1971.

[4] Isajew K.S. i inni: Osnowy awtomatyzacji transportnowo stroitelstwa. Izdatelstwo "Transport", Moskwa 1966.

[5] Knesohke A.: Differentialgleichungen und Randwertprobleme: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1968 r.

Wykaz oznaczeń

α	– kąt nachylenia rynny do poziomu
v	– wektor prędkości cząstki ciekłego metalu
u	– składowa prędkości ciekłego metalu w kierunku osi rynny
u_0	– składowa prędkości ciekłego metalu w kierunku osi rynny na powierzchni swobodnej płynu
$\bar{P}$	– wypadkowa siła masowa
ϱ	– gęstość ciekłego metalu
γ	– ciężar właściwy ciekłego metalu
p	– ciśnienie
p_0	– ciśnienie otoczenia
ν	– współczynnik lepkości kinematycznej
η	– współczynnik lepkości dynamicznej
t	– czas
x, y, z	– współrzędne prostokątnego układu osi
g	– przyspieszenie ziemskie
f, h	– sprzężone funkcje zmiennej zespolonej
i	– jednostka urojona
(σ_{ij})	– tenzor naprężeń
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	– składowe normalne stanu naprężenia
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	– naprężenia normalne główne
σ_0	– wytrzymałość na rozciąganie płynnego metalu

σ_0 – naprężenie normalne całkowite

σ – poszukiwane naprężenie normalne główne

τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} – składowe styczne stanu naprężenia

r – promień rynny

c – półoś elipsy

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СОСТОЯНИЮ НАПРАЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТРУИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА ТЕКУЩЕГО ПО ПОЛУКРУГОВОМУ КАНАЛУ

Р е з ю м е

Исходя из уравнений вязкого течения несжимаемой жидкости определяется поле напряжений в поперечном сечении струи жидкого металла при его движении по наклонному полукруговому в поперечном сечении канналу в поле сил тяжести. Анализ теоретических результатов показывает, что в некоторых случаях в струи жидкого металла существуют зоны, в которых возникают растягивающие напряжения. Эти напряжения вызыдают щели и разрывы вследствие чего увеличивается поверхность окисления металла.

THEORETICAL APPROACH TO THE FIELD OF STRESSES IN THE CROSS SECTION OF THE STREAM OF FLUID METAL COMING THROUGH THE DOWNWARD HALF-GUTTER

S u m m a r y

On the basis of the equation of equilibrium of vosoous liquid, the field of stresses in the oross seotion of the stream of fluid metal, oo-ming through the downward half-round gutter in the field of foroe of gravity was determined. The analysis of the theoretical results showed that in oertain oirouumstanoes in the stream of fluid metal the region in whioh tensile stresses exist oan develop. These stresses oause interruption and gap in the stream and oonsequently the inorease of surfaoe exposed to oxidation of metal.