ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: INFORMATYKA z. 2 Nr kol. 683

Tadeusz CZACHÓRSKI

DYFUZYJNA METODA OPISU DZIAŁANIA SYSTEMÓW KOMPUTEROWYCH

Streszczenie. Artykuł zawiera krótki opis probabilistycznego modelu działania maszyny cyfrowej lub zespołu maszyn cyfrowych. Model ma postać sieci stanowisk obsługi o naturalnym lub priorytetowym bezwzględnym regulaminie szeregowania zgłoszeń. W modelu wykorzystano metodę aproksymacji dyfuzyjnej, opartą na analogii pomiędzy długością kolejki przed stanowiskiem obsługi a położeniem cząstki w jednowymiarowym ruchu Browna. Zamieszczone przykłady obliczeniowe ilustrują dokładność metody oraz możliwości jej zastosowania.

WPROWADZENIE

Duża złożoność współczesnych systemów komputerowych i niemożliwy do określenia z góry bieg wydarzeń w czasie ich pracy sprawiły, że wśród wielu sposobów matematycznego opisu działania tych systemów, sposobów takich jak modele algebraiczne czy skierowane grafy (graf stanów systemu, graf wykonywanych zadań, sieć Petriego), szczególną rolę odgrywają modele probabilistyczne, wykorzystujące aparat matematyczny teorii kolejek - jednego z działów badań operacyjnych.

Urządzeniowe i programowe zasoby systemu obliczeniowego są w ujęciu tych modeli uważane za połączone między sobą "stanowiska obsługi", przez które przechodzi "klient", czyli wykonywany program (lub część programu), do pewnych stanowisk powracając wielokrotnie, omijając zaś inne. Czas obsługi oraz odstępy czasu między zgłoszeniami klientów opisane są rozkładami prawdopodobieństwa. Charakterystyczne wielkości systemu obliczane za pomocą teorii kolejek, to:

- czas oczekiwania programów na wykonanie,
- czas, po jakim programy zostaną ukończone całkowicie oraz zostaną ukończone ich fazy, odpowiadające obsłudze w poszczególnych stanowiskach,
- liczba programów czekających na udostępnienie im żądanych zasobów,
- przepustowość systemu.

Siłą rzeczy modele probabilistyczne oddają rzeczywistość w sposób bardzo uproszczony i jak pisze Sherr, doświadczony autor tego typu modeli, fakt iż tak wiele szczegółów może być pominiętych w modelu, którego wyniki są mimo wszystko poprawne, jest zdumiewający. Nie brak jednak trudności. Teoria kolejek została rozwinięta wcześniej pod kątem widzenia innych zastosowań. Ostatnie dziesięciolecie przyniosło szereg modeli stworzonych

spełnia prospektywne równanie dyfuzji

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t;x_o) = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t;x_o) - \beta \frac{\partial}{\partial x} f(x,t;x_o), \tag{1}$$

w którym $\beta = \lambda - \mu$

$$\alpha = \lambda^3\sigma_a^2 + \mu^3\sigma_b^2 = \lambda C_a + \mu C_b,$$

gdzie:

$$C_a = \lambda^2\sigma_a^2, \quad C_b = \mu^2\sigma_b^2.$$

Równanie (1) rozwiązuje się zakładając warunek brzegowy w postaci umieszczonego w punkcie $x = 0$ ekranu, który przetrzymuje cząstkę, gdy ta dojdzie do początku układu przez czas określony rozkładem $a(t)$, a następnie odrzuca ją do punktu $x = 1$, [9]. Pobyt cząstki wewnątrz ekranu odpowiada okresowi, w którym w stanowisku nie ma klientów, a jej przeskok do punktu $x = 1$ opisuje pojawienie się pierwszego po okresie bezczynnym klienta. W stanie ustalonym (warunkiem jego istnienia jest $\beta < 0$) rozwiązanie ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \varrho & \text{dla} \quad x = 0 \\ \dfrac{(1-\varrho)\lambda}{\beta}(1 - e^{zx}) & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{(1-\varrho)\lambda}{\beta}(e^{z} - 1)e^{zx} & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

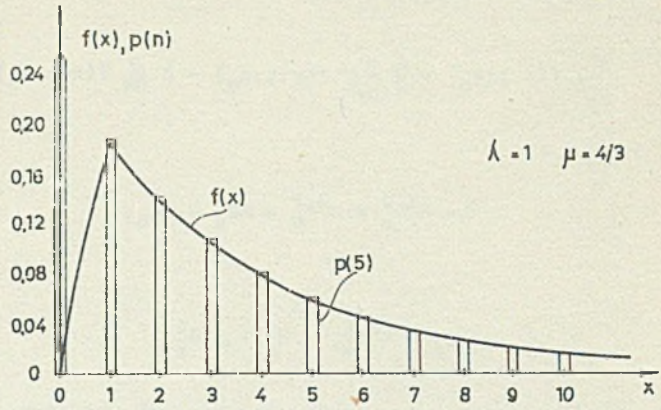
gdzie:

$z = 2\beta/\alpha$, $\varrho = \lambda/\mu$.

Rys. 1 przedstawia funkcję $f(x)$ obliczoną dla wykładniczych rozkładów $a(t)$, $b(t)$ (tzn. dla $C_a = 1$, $C_b = 1$) oraz znany w tym przypadku rozkład $p(n) = (1 - \varrho)\varrho^n$ ilości klientów w stanowisku. Wartości parametrów λ i μ zaznaczono na rysunku.

Dyskretyzując $f(x)$ można obliczyć przybliżone wartości $p_d(n)$ rozkładu $p(n)$

$$\begin{aligned} p_d(0) &= f(0) \\ p_d(1) &= \int_0^{3/2} f(x)dx \end{aligned} \tag{3}$$



Rys. 1. Rozwiązanie równania dyfuzji oraz rozkład p(n) ilości klientów w stanowisku

$$p_d(n) = \int_{n-1/2}^{n+1/2} f(x)dx, \quad n = 2,3,\ldots . \tag{3}$$

Tablica 1 zawiera wartości p(n) i $p_d(n)$ dla tych samych przykładowych danych; wyniki aproksymacji są w tym przypadku niemal dokładne.

Tablica 1

Rozkład ilości klientów w stanowisku - wartości dokładne i obliczone według aproksymacji dyfuzyjnej

n	p(n) dokładne	p(n) przybliżone
0	0,2500	0,2500
1	0,1875	0,1845
2	0,1406	0,1406
3	0,1056	0,1056
4	0,0791	0,0793
5	0,0593	0,0596
6	0,0445	0,0448
7	0,0334	0,0337
8	0,0250	0,0253
9	0,0188	0,0190
10	0,0141	0,0143
...	...	...
	$\sum_{n=0}^{1000} np(n) = 3,00$	$\sum_{n=0}^{1000} np_d(n) = 3,02$

Błędy opisywanej metody są tym większe, im bardziej a(t) i b(t) różnią się od rozkładów wykładniczych. Na podstawie obliczeń numerycznych i symulacji ustalono [10], że błąd obliczonych dzięki niej wartości średnich ilości klientów w stanowisku i czasu czekania nie przekracza 20%, o ile $0,7 \leq C_a \leq 5$, $0,7 \leq C_b \leq 5$.

Metoda aproksymacji dyfuzyjnej stała się podstawą modelu stanowiska z priorytetowym regulaminem kolejki, a następnie modelu w postaci sieci stanowisk obsługi [10], [11].

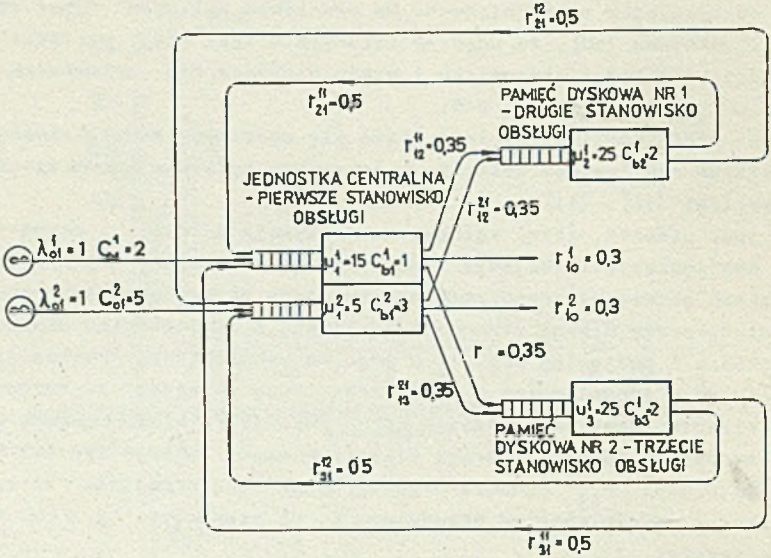
Sieć jest otwarta, (tzn. zgłoszenia napływają do niej z zewnątrz), ma dowolną konfigurację i obejmuje dowolną ilość stanowisk. W poszczególnych stanowiskach obowiązuje regulamin priorytetowy bezwzględny lub naturalny. Uwzględniono pracę własną stanowisk, związaną z rozpoznaniem nadchodzącego zgłoszenia i podjęciem decyzji o jego natychmiastowej realizacji lub o ustawieniu go w odpowiedniej kolejce oraz pracę związaną z rozpoczęciem obsługi klienta. Brak jest założeń co do rodzaju rozkładu czasów obsługi i typów strumieni zgłoszeń. Drogę klienta w sieci opisuje łańcuch Markowa pierwszego rzędu; r_{ij}^{kl} oznacza prawdopodobieństwo przejścia klienta ze stanowiska i, gdzie miał on priorytet k do stanowiska j, w którym przyjmie on priorytet l.

Rozwiązanie modelu sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych i obliczenia w ten sposób parametrów λ_i^k, C_{ai}^k strumieni wejściowych klientów poszczególnych priorytetów k do wszystkich stanowisk i. Dalej można już każde stanowisko traktować oddzielnie i opisywać je za pomocą modelu pojedynczego stanowiska. Poniższy przykład ilustruje możliwości opisywanego modelu i rodzaj jego zastosowań.

PRZYKŁAD

Rysunek 2 przedstawia analizowany system: jednostkę centralną wyposażoną w dwie jednostki pamięci dyskowej. Wykonywane przez system programy zostały podzielone na dwie klasy priorytetowe. Wyższy priorytet zapewnia pierwszeństwo w uzyskaniu czasu centralnego procesora, dostęp do dysków jest natomiast zorganizowany zgodnie z regulaminem naturalnym.

Aktywizacja nowego programu (czyli nadejście z zewnątrz zgłoszenia) następuje w odstępach czasu, których rozkłady opisują współczynniki λ_{01}^1, C_{01}^1 lub λ_{01}^2, C_{01}^2, zależnie od priorytetu programu. Każdy program po pewnym czasie (charakteryzują go μ_1^1, C_{b1}^1 lub μ_1^2, C_{b1}^2) pracy jednostki centralnej zostaje z prawdopodobieństwem r_{10}^1 lub r_{10}^2 zakończony bądź też odwołuje się do pamięci masowej, czeka w kolejce na dostęp do niej, uaktualnia lub odczytuje dane, po czym znów żąda czasu jednostki centralnej, ustawiając się w kolejce zadań swojego priorytetu. Czas dostępu wraz z czasem zapisu (odczytu) określają μ_2^1, C_{b2}^1 dla pierwszej pamięci dyskowej i μ_3^1, C_{b3}^1 dla drugiej pamięci dyskowej.



Rys. 2. Model analizowanego systemu obliczeniowego, wersja (a)

Programy posiadają pliki na obu dyskach i korzystają z nich z równą częstotliwością, jest więc $r_{12}^{11} = r_{12}^{21} = r_{13}^{11} = r_{13}^{21}$.

Wartości liczbowe wszystkich parametrów zaznaczono na rysunku. Czas reakcji systemu, tj. czas od aktywizacji do zakończenia programu, obliczymy biorąc pod uwagę drogę programów w sieci stanowisk oraz jednakowe parametry obu dysków, jako

$$T^1 = E\left[w_1^1\right] + \frac{1}{\mu_1^1} + \frac{E\left[w_2^1\right] + 1/\mu_2^1 + E\left[w_1^1\right] + 1/\mu_1^1}{1 - (r_{12}^{11} + r_{13}^{11})}$$

dla programów wyższego priorytetu oraz

$$T^2 = E\left[w_1^2\right] + E\left[c_1^2\right] + \frac{E\left[w_2^1\right] + 1/\mu_2^1 + E\left[w_1^2\right] + E\left[c_1^2\right]}{1 - (r_{12}^{21} + r_{13}^{21})}$$

dla programów niższego priorytetu.

c_1^2 jest czasem ukończenia (tj. czasem pomiędzy rozpoczęciem a ukończeniem obsługi) w jednostce centralnej dla zgłoszeń o niższym priorytecie.

Powyższy model został rozwiązany

a) w postaci jak na rysunku oraz w kilku innych wariantach, obrazujących możliwości zmian systemu w celu podniesienia jego efektywności, rozumianego tutaj jako zmniejszenie czasów reakcji. Dla uproszczenia i dla większej jasności sytuacji pominięto czas pracy własnej stanowisk. Rozpatrzono następujące możliwości:

b) reorganizacja pamięci masowej - programy o priorytecie wyższym korzystają z dysku nr 1, programy o priorytecie niższym z dysku nr 2; w modelu należy zmienić współczynniki przejścia

$$r_{12}^{11} = r_{13}^{21} = 0{,}7, \quad r_{21}^{11} = r_{31}^{12} = 1,$$

$$r_{13}^{11} = r_{12}^{21} = r_{31}^{11} = r_{21}^{12} = 0,$$

c) wymiana dysków na szybsze - czas dostępu z czasem odczytu (zapisu) maleją czterokrotnie $\mu_2^1 = \mu_3^1 = 100$,

d) zakup dodatkowej pamięci operacyjnej; programy o wyższym priorytecie przechowują swe dane w całości w pamięci operacyjnej i nie korzystają z dysków, pozostawionych w całości do dyspozycji programów o niższym priorytecie: $r_{12}^{11} = r_{13}^{11} = r_{21}^{11} = r_{31}^{11} = 0$, $r_{12}^{21} = r_{13}^{21} = 0{,}35$, $r_{21}^{12} = r_{31}^{12} = 0{,}5$.

Każdy program wyższego priorytetu czeka tylko jeden raz w kolejce do procesora centralnego. Rozpocząwszy pracę wykonuje całość obliczeń bez przerwy, przez czas złożony z szeregu etapów, z których każdy określają te same parametry μ_1^1, C_{b1}^1. Etap pierwszy ma miejsce na pewno, każdy zaś następny z malejącym $(1 - r_{10}^1)$-krotnie prawdopodobieństwem. Całość ma wartość średnią

$$\frac{1}{\mu_1^1} = \frac{1}{\mu_1^1}\left(1 + \frac{1 - r_{10}^1}{r_{10}^1}\right) \approx 0{,}22$$

i współczynnik zmienności

$$C_{b1}^1 = \frac{\left(1 + \frac{1 - r_{10}^1}{r_{10}^1}\right)\left(\frac{1}{\mu_1^1}\right)^2}{\left[\frac{1}{\mu_1^1}\left(1 + \frac{1 - r_{10}^1}{r_{10}^1}\right)\right]^2} = r_{10}^1 = 0{,}3.$$

e) wymiana jednostki centralnej na czterokrotnie szybszą: $\mu_1^1 = 60$, $\mu_1^2 = 20$.

Wyniki - wartości średnie i współczynniki zmienności dla poszczególnych strumieni wejściowych, oraz średni czas czekania przed danym zasobem, średnią długość kolejki wraz z programem obsługiwanym, jak również czasy reakcji w poszczególnych przypadkach - zawiera tablica 2. Ponieważ zachowanie się obydwu pamięci dyskowych różni się w przypadku (b) niewiele, a w pozostałych przypadkach wcale, zamieszczono wyniki jedynie dla pamięci nr 1.

Tablica 2

Wyniki obliczeń dla poszczególnych wariantów modelu

Wariant	λ_1^1	C_{a1}^1	λ_1^2	C_{a1}^2	λ_2^1	C_{a2}^1	$E[n_1^1]$	$E[w_1^1]$	$E[n_1^2]$	$E[w_1^2]$	$E[n_2^1]$	$E[w_2^1]$	T^1	T^2
a	3,33	1,41	3,33	2,31	2,33	1,34	0,317	0,029	12,28	3,43	0,122	0,012	0,586	16,14
b	3,33	1,42	3,33	2,97	2,33	1,26	0,317	0,029	13,42	3,65	0,122	0,012	0,586	16,96
c	3,33	1,48	3,33	3,03	2,33	1,27	0,317	0,029	13,53	3,80	0,028	0,002	0,453	16,02
d	1,00	2,00	1,54	3,71	5,38	1,16	0,301	0,079	1,203	0,53	0,026	0,008	0,302	1,22
e	3,33	1,38	3,33	2,28	2,33	1,23	0,068	0,004	0,254	0,02	0,122	0,012	0,263	0,51

Jak widać, porządkowanie plików na dyskach nie daje w danych warunkach nic, a wymiana dysków na szybsze - niewiele. Nie dyski są wąskim gardłem systemu lecz jednostka centralna. Wymiana jej na szybszą jednostkę zmniejsza czas reakcji systemu dla programów o wyższym priorytecie ponad dwukrotnie, a dla programów o priorytecie niższym - ponad trzydziestokrotnie.

Jednostka centralna jest w tym przypadku słabo obciążona - współczynnik jej wykorzystania wynosi:

$$R_1^2 = \varrho_1^1 + \varrho_1^2 = \frac{\lambda_1^1}{\mu_1^1} + \frac{\lambda_1^2}{\mu_1^2} = \frac{3,33}{60} + \frac{3,33}{20} \approx 0,222$$

(poprzednio $R_1^2 = 0,888$), czyli jednostka pracuje jedynie przez ok. 22,2% czasu, co umożliwia wprowadzenie trzeciego poziomu priorytetowego dla programów tła. Zwiększenie pamięci operacyjnej jest dobrym rozwiązaniem pośrednim: T^1 maleje prawie dwukrotnie, a T^2 maleje ponad trzynastokrotnie.

Współczynnik wykorzystania jednostki centralnej ma wówczas wartość $R_1^2 = \frac{1}{35} + \frac{1,54}{5} = 0,375$.

WNIOSKI

Przedstawiony model systemu komputerowego pozwala opisać dwa, występujące w rzeczywistości i wymykające się dotąd analizie, fakty:

- priorytetowe szeregowanie programów w warunkach dowolnych strumieni zgłoszeń i dowolnych rozkładów czasów ich wykonania,
- czas pracy własnej wielostanowiskowego, złożonego systemu

i może z tego powodu stać się użytecznym narzędziem przy projektowaniu systemów obliczeniowych i sieci komputerów.

Uwzględnienie regulaminu priorytetowego umożliwia analizę systemów pracujących w czasie rzeczywistym, uwzględniających z reguły hierarchię programów. Wybrana metoda rozwiązania modelu jest metodą przybliżoną, co nie jest samo w sobie istotną wadą - wszak sam model systemu obliczeniowego w postaci sieci stanowisk obsługi jest poważnym przybliżeniem. Jednakże przeprowadzona w [6], [10] ocena dokładności wielu metod przybliżonych wskazuje, jak ostrożnie trzeba z nich korzystać, by ustrzec się poważnych błędów.

W przykładach obliczeniowych zamieszczonych w [10] nie stwierdzono dla prezentowanego modelu błędów przekraczających 30%, co można uznać za wynik zadowalający, a nawet dobry, zważywszy, że dokładnej metody rozwiązania poruszonych problemów jak dotąd nie ma, a stosując inne przybliżenia łatwo uzyskać wynik, który różni się o rząd lub więcej od poprawnego.

Dalszy rozwój omawianego modelu powinien iść w kierunku wprowadzenia łańcucha Markowa wyższego niż pierwszy rzędu dla charakterystyki drogi klientów wewnątrz sieci, co pozwoli lepiej opisać sekwencje zdarzeń zachodzących w maszynie cyfrowej. Powinno się również wprowadzić do modelu inne, spotykane w praktyce, regulaminy obsługi.

LITERATURA

[1] W. Chang: Single-server queuing processes in computing systems, IBM System Journal, No. 1, pp. 36-71, 1970.

[2] J.C. Browne i in.: Hierarchical techniques for development of realistic models of complex computer systems, w: E. Gelenbe, R. Mahl (Editors), Computer Architectures and Networks, North Holland, Amsterdam 1974.

[3] F. Baskett: Mathematical models of multiprogrammed computer systems, TSN-17, Computer Center, University of Texas, Austin 1971.

[4] I.Le Faou: Mesure et analyse de l'utilisation d'un systeme informatique, These du docteur de troisieme cycle, Rennes 1973.

[5] J. Leroudier: Analyse d'un systeme a partage des ressources. Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Operationelle, No. Octobre B-3, pp. 3-30, 1973.

[6] T. Czachórski: Przybliżone rozwiązania dokładnych modeli i dokładne rozwiązania modeli przybliżonych w ocenie efektywności pracy złożonych układów komputerowych, Podstawy Sterowania, T. 7, zeszyt 1, ss. 11-24, 1977.

[7] G.F. Newell: Applications of Queuing Theory, Chapman and Hall, London 1971.

[8] H. Kobayashi: Application of the diffusion approximation to queueing networks, I: Equilibrium queue distributions, II: Nonequilibrium distributions and applications to computer modelling, Journal of the ACM, Vol. 21, No. 2, No. 3, pp. 316-328, 459-469, 1974.

[9] E. Gelenbe: On approximate computer system models, Journal of the ACM, Vol. 22, No. 2, pp. 261-269, 1975.

[10] T. Czachórski: Metoda doboru struktury i oceny wydajności pracy złożonego systemu komputerowego pracującego w czasie rzeczywistym, rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, 1979.

[11] T. Czachórski: Priorytetowe szeregowanie zgłoszeń i czas własny procesora w dyfuzyjnym wielostanowiskowym modelu systemu komputerowego, Podstawy Sterowania, T. 7, zeszyt 4, ss. 287-310, 1977.

[12] T. Czachórski: A multiqueue approximate computer performance model with priority scheduling and system overhead, Podstawy Sterowania, 1980 (w przygotowaniu).

Recenzent

Prof. dr inż. Stefan Węgrzyn

Wpłynęło do Redakcji 23.05.1979 r.

ДИФФУЗИОННЫЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ

Р е з ю м е

Статья содержит краткое описание вероятностной модели действия вычислительной машины или комплекса вычислительных машин. Модель представляет собой вид сети приборов обслуживания с естественным распорядком или абсолютным приоритетом распорядка систематизации заяблений. В модели использован метод диффузионной аппроксимации, основанный на аналогии между длиной очереди перед прибором обслуживания и позиции молекулы в одномерном брауновском движении. Представленные расчетные примеры иллюстрируют точность, а также возможности применения этого метода.

DIFFUSION APPROXIMATION FOR A COMPUTER SYSTEM PERFORMANCE EVALUATION

S u m m a r y

The paper briefly discusses a probabilistic model of computer system performance, the model being a queueing network of stations with first-in--first-out or preemptive-resume scheduling disciplines. The method of diffusion approximation which is used in the model seeks for analogy between queuing process and one-dimentional Brownian movement. Some numerical examples illustrate errors of the approximate method and possibilities of the model.