ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: INFORMATYKA z. 2 Nr kol. 683

Jan BRUSKI

UOGÓLNIENIE FUNKCJI KONSTRUKCJI STRUKTUR BINARNYCH

Streszczenie. W artykule zdefiniowano wielokrotną funkcję konstrukcji struktur binarnych. Określono również warunki niezależności wyniku działania tej funkcji od kolejności jej argumentów.

W pracy [1] został zdefiniowany system struktur binarnych. Tam też określone zostało przekształcenie: $\mathcal{H} : \mathcal{K} \times S^* \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ zwane funkcją konstrukcji obiektów. Posługując się funkcją konstrukcji, za pomocą dwóch obiektów $A, B \in \mathcal{K}$ oraz złożonego selektora $k \in S^*$, można zbudować inny obiekt należący również do zbioru $\mathcal{K}$. Oczywiście otrzymany obiekt może być znowu użyty jako podstawa do konstrukcji dalszego, jeszcze innego obiektu. Zamiast wielokrotnie wykonywać operację konstrukcji obiektów za pomocą funkcji $\mathcal{H}(A, k, B)$, można również użyć do tego celu wielokrotnej funkcji konstrukcji stanowiącej uogólnienie funkcji $\mathcal{H}(A, k, B)$.

DEFINICJA 1

Wielokrotną funkcją konstrukcji obiektu $C \in \mathcal{K}$ nazywamy funkcję określoną następująco:

$$\mathcal{H}(A;) = A$$

$$\mathcal{H}(A; \langle k : B \rangle) = \mathcal{H}(A, k, B)$$

$$\mathcal{H}(A; \langle k_1 : B_1 \rangle , \langle k_2 : B_2 \rangle , \ldots \langle k_n : B_n \rangle) =$$

$$= \mathcal{H}(\mathcal{H}(A; \langle k_1 : B_1 \rangle); \langle k_2 : B_2 \rangle , \ldots \langle k_n : B_n \rangle)$$

gdzie: $A \subset \mathcal{K}$, $k_i \in S^*$; $i = 1,2,\ldots,n$ i $(\forall i \neq j) k_i \not\leftarrow k_j$ a $B_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ gdy $k_i = I \vee k_i = v \circ k_i'$ oraz $B_i \in \mathcal{B}$ gdy $k_i = h \circ k_i'$.

Wielokrotną funkcję konstrukcji: $\mathcal{H}(A; \langle k_1 : B_1 \rangle \ldots \langle k_n : B_n \rangle)$ można zapisywać także w postaci:

$$\mathcal{H}(A; \left\{ \langle k_1 : B_1 \rangle , \langle k_2 : B_2 \rangle , \ldots \langle k_n : B_n \rangle \right\}) \quad \text{lub}$$

$$\mathcal{H}(A; \left\{ \langle k_i : B_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n \right\}).$$

Zanim zostaną pokazane podstawowe własności wielokrotnej funkcji konstrukcji rozpatrzymy przypadek, gdy do budowy nowego obiektu za pomocą funkcji $\mathcal{H}$ używa się tylko jednego obiektu $A \in \mathcal{K}$ oraz selektora $k \in S^*$.

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli dany jest obiekt $A \in \mathcal{K}$ oraz złożony selektor $k \in S^*$, to $\mathcal{X}(A; <k : k(A)>) = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\exists k_A \in S_A) k_A = t \circ k$ lub gdy $(\forall k_A)[k \not\sim k_A] \wedge k = h \circ k' \wedge (\exists k_A) k_A = v \circ t \circ k'$.

W wyniku działania funkcji $\mathcal{X}(A; <k : B>)$ otrzymujemy pewien nowy obiekt C. Sprawdzimy najpierw czy funkcja ta jest zawsze określona. Nieokreśloność funkcji $\mathcal{X}(A; <k : B>)$ występuje wtedy, gdy dla $k = h \circ t$, $B \in \mathcal{E}$. Ponieważ w rozpatrywanym przypadku $B = k(A)$ a $A \in \mathcal{K}$, więc również $B \in \mathcal{K}$. Dodatkowo wiadomo, że gdy $k = h \circ t$, to otrzymany obiekt $B \in \mathfrak{B}$, a więc nie może być obiektem elementarnym. Rozpatrywana funkcja jest więc zawsze określona. Rozpatrzymy teraz, jaki będzie wynik działania funkcji $\mathcal{X}(A; <k : B>)$ dla $B = k(A)$ w następujących sytuacjach:

1° gdy $(\forall k_A)[k \not\sim k_A] \wedge k = v \circ k'$

2° gdy $(\forall k_A)[k \not\sim k_A] \wedge k = h \circ k' \wedge (\exists k_A)[k_A = v \circ t \circ k']$

3° gdy $(\forall k_A)[k \not\sim k_A] \wedge k = h \circ k' \wedge (\forall k_A)[k' \not\sim k_A]$

4° gdy $(\exists k_A)[k = t \circ k_A] \wedge t \neq I$

5° gdy $(\exists k_A)[k_A = t \circ k]$

Rozważmy kolejno każdy z wymienionych przypadków:

1° Na mocy lematu 7 [2] mamy $k(A) = B = \Omega$. Nowy obiekt C powstaje więc w wyniku działania funkcji $\mathcal{X}(A; <k : \Omega>)$. Jeżeli $k = v \circ k'$, to ponieważ $\Omega \in \mathcal{A}$ można zastosować twierdzenie 1 [2], z którego wynika, że $k \in S_C$. Z kolei z twierdzenia 3 [2] wynika, że dla spełnienia równości $C = A$ potrzeba i wystarcza, aby $\chi(C) = \chi(A)$. Stąd jeżeli $k \in S_C$, to również $k \in S_A$, a to jest sprzeczne z założeniem.

2° Korzystając z lematu 8 [2] otrzymujemy, że $k(A) = \Omega$ i $k'(A) \in \mathfrak{B} \setminus \{\Omega\}$. Obiekt C jest określony jako $\mathcal{X}(A; <k : \Omega>)$. Na podstawie twierdzenia 7 [1] mamy: $(\forall t)[(t \not\sim k) \Longrightarrow t \circ \mathcal{X}(A; <k : \Omega>) = t \circ A]$. Ponieważ z założenia: $(\forall k_A)[k \not\sim k_A]$, zależność ta dotyczy również wszystkich selektorów końcowych obiektu A, a więc selektory te są także selektorami końcowymi obiektu C. Rozpatrzmy teraz selektory t spełniające relację $(t \sim k)$. Jeżeli $k = r \circ t$, wówczas mamy: $k \circ \mathcal{X}(A; <k : \Omega>) = r \circ \mathcal{X}(t \circ A; <r : \Omega>)$. Z wyjątkiem przypadku, gdy $r = I$, otrzymujemy zawsze: $\mathcal{X}(t \circ A; <r : \Omega>) \in \mathfrak{B} \setminus \{\Omega\}$. Gdy natomiast $r = I$, to $k = t$ i wtedy wprawdzie $\mathcal{X}(k \circ A; <I : \Omega>) = \Omega \in \mathcal{A}$, ale równocześnie $k = h \circ k'$. Wynika stąd, że wśród selektorów t takich, że $k = r \circ t$ nie ma żadnego selektora końcowego obiektu C. Jeżeli teraz $t = r \circ k$, to:
$t \circ C = t \circ \mathcal{X}(A; <k : \Omega>) = r \circ k \circ \mathcal{X}(A; <k : \Omega>) = r \circ \Omega = \Omega$. Przypadek, gdy $r = I$, czyli $t = k$ był rozpatrzony poprzednio, natomiast gdy $r \neq I$ selektory t nie spełniają definicji 1 [2], a więc żaden z nich nie jest selektorem końcowym obiektu C. Tak więc jedynymi selektorami

końcowymi obiektu C są selektory końcowe obiektu A, skąd wynika, że $\chi(C) = \chi(A)$, a stąd $C = A$.

3^0 Jeżeli $(\forall k_A)[k \not\to k_A] \wedge k = h \circ k' \wedge (\forall k_A)[k_A \not\to k']$, wówczas na podstawie lematu 7 [2] można powiedzieć, że $k \circ A = \Omega$. Rozpatrujemy więc obiekt $C = \mathcal{X}(A; <k : \Omega>)$. Na podstawie znanych związków operację $k \circ C$ można zapisać w postaci: $k \circ C = h \circ k' \circ \mathcal{X}(A; <k : \Omega>) = h \circ \mathcal{X}(k' \circ A; <h : \Omega>)$. Ponieważ $(\forall k_A)[k_A \not\to k']$ więc $k' \circ A = \Omega$. Mamy więc: $h \circ \mathcal{X}(k' \circ A; <h : \Omega>) = h \circ \mathcal{X}(\Omega; <h : \Omega>) = h \circ \{(v,\Omega), (h,\Omega)\}$, czyli $k' \circ C = \{(v,\Omega), (h,\Omega)\} \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$ Obiekt ten posiada jeden selektor końcowy v spełniający oczywiście wymagania wynikające z definicji 1 [2]. Jest oczywiste, że selektor $v \circ k'$ jest selektorem końcowym obiektu C, natomiast ponieważ $k' \circ A = \Omega$, więc także $v \circ k' \circ A = \Omega$, skąd wynika, że selektor $v \circ k'$ nie jest selektorem końcowym obiektu A. Mamy więc $\chi(C) \neq \chi(A)$ i stąd $C \neq A$.

4^0 Na podstawie lematu 6 [2] otrzymujemy: $B = k(A) = \Omega$. Obiekt C jest więc określony jako: $C = \mathcal{X}(A; <k : \Omega>)$. Jeżeli $k = v \circ k'$, to z twierdzenia 1 [2] wynika, że $k \in S_C$. Na mocy twierdzenia 3 [2], aby $C = A$ musi być $\chi(C) = \chi(A)$. Stąd wynika: $k \in S_A$. Ponieważ $k \neq k_A$ więc $(k \not\to k_A)$ a to jest sprzeczne z założeniem. Jeżeli $k = h \circ k'$, to mamy równocześnie $k = h \circ t' \circ k_A$. Otrzymujemy więc:
$k \circ C = h \circ t' \circ k_A \circ \mathcal{X}(A; <h \circ t' \circ k_A : \Omega>) =$
$= h \circ t' \circ \mathcal{X}(k_A \circ A; <h \circ t' : \Omega>) = h \circ t' \circ \mathcal{X}(a; <h \circ t' : \Omega>)$.
Obiekt $\mathcal{X}(a; <h \circ t' : \Omega>) \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$ a więc istnieje co najmniej jeden selektor końcowy $t_x = v \circ t''$ tego obiektu, czyli taki, że $t_x \circ \mathcal{X}(a; <h \circ t' : \Omega>) \in \mathcal{A}$. Selektor ten spełnia oczywiście wymagania wynikające z definicji 1 [2]. Jest również oczywiste, że selektor $t_x \circ k_A$ jest selektorem końcowym obiektu C. Selektor ten nie jest selektorem końcowym obiektu A, gdyż $(t_x \circ k_A \not\to k_A)$. Stąd wynika, że $\chi(C) \neq \chi(A)$ a więc $C \neq A$.

5^0 Jeżeli $t = I$, to $k_A = k$ i $k(A) = a \in \mathcal{A}$. Wtedy $C = \mathcal{X}(A; <k : a>)$, selektorem końcowym obiektu a jest selektor tożsamościowy I i na mocy twierdzenia 2 [2] otrzymujemy:
$\chi(C) = \{<k_A : a> \mid k_A(A) = a \wedge k_A \not\to k\} \cup \{<I \circ k : a> \mid I(a) = a\}$.
Otrzymany atomowy zbiór charakterystyczny obiektu C jest identyczny ze zbiorem $\chi(A)$. Stąd na podstawie twierdzenia 3 [2] otrzymujemy, że $C = A$. Jeżeli $t \neq I$, to $k_A = t \circ k$ i $k(A) = B \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$. Wtedy na podstawie twierdzenia 2 [2] dostajemy:
$\chi(C) = \{<k_A : a> \mid k_A(A) = a \wedge k_A \not\to k\} \cup \{<t_B \circ k = a> \mid t_B(B) = a\}$
Ponieważ $t_B(B) = t_B \circ k \circ A = k_A(A)$ otrzymujemy:
$\chi(C) = \{<k_A : a> \mid k_A(A) = a\} = \chi(A)$. Stąd wynika, że $C = A$.

Rozpatrzone zostały wszystkie możliwe przypadki. Na ich podstawie można stwierdzić, że gdy spełnione są warunki narzucone na selektor k, określone w twierdzeniu, wtedy $\mathcal{X}(A; <k : k(A)>) = A$.

Traktując teraz warunki 1° - 5° jako wyrażenia logiczne, widać natychmiast, że gdy $\mathcal{X}(A; <k : k(A)>) = A$, to wartości wyrażeń 1°, 3° i 4° są fałszywe, natomiast prawdziwe są wartości wyrażeń 2° i 5°. Stanowi to dowód implikacji $C = A \Longrightarrow vl = T$ i równocześnie kończy dowód twierdzenia.

Własność funkcji konstrukcji obiektu określona twierdzeniem 1, może być łatwo przeniesiona na wielokrotną funkcję konstrukcji. Jednak zasadniczym problemem występującym podczas stosowania wielokrotnej funkcji konstrukcji obiektów jest wpływ kolejności występowania poszczególnych argumentów tej funkcji na otrzymywane wyniki.

Warunki niezależności wyniku działania wielokrotnej funkcji konstrukcji od kolejności jej argumentów określone są twierdzeniem 2.

T w i e r d z e n i e 2

Jeżeli dany jest dowolny obiekt $A \in \mathcal{K}$, selektory $k_1, k_2 \in S^*$ oraz obiekty B_1, B_2 takie, że dla $i = 1, 2$: $B_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, gdy $k_i = v \circ k_i'$ i $B_i \in \mathcal{B}$, gdy $k_i = h \circ k_i'$, wówczas równość $\mathcal{X}(A; <k_1 : B_1>, <k_2 : B_2>) = \mathcal{X}(A; <k_2 : B_2>, <k_1 : B_1>)$ spełniona jest wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:

1° $k_1 \nsim k_2$

2° $k_1 = k_2 \wedge B_1 = B_2$

3° $k_1 = s \circ t \circ k_2 \wedge [B_1 = \Omega \longrightarrow s \circ t \circ B_2 = \Omega \wedge t \circ B_2 \in B \setminus \{\Omega\};$
$B_1 \neq \Omega \longrightarrow s \circ t \circ B_2 = B_1]$

4° $k_2 = s \circ t \circ k_1 \wedge [B_2 = \Omega \longrightarrow s \circ t \circ B_1 = \Omega \wedge t \circ B_1 \in B \setminus \{\Omega\},$
$B_2 \neq \Omega \longrightarrow s \circ t \circ B_1 = B_2]$

Dla ułatwienia zapisu wprowadzimy oznaczenia:

$C_1 = \mathcal{X}(A; <k_1 : B_1>, <k_2 : B_2>)$

$C_2 = \mathcal{X}(A; <k_2 : B_2>, <k_1 : B_1>)$

Warunki określone twierdzeniem można przedstawić jako wyrażenie logiczne, którego wartość oznaczymy przez vl.

Treść twierdzenia można teraz w uproszczeniu zapisać w postaci:

$C_1 = C_2 \Longleftrightarrow vl = T$.

Założymy najpierw, że $C_1 = C_2$

Jeżeli $k_1 \nsim k_2$, to oczywiście $vl = T$.

Dla $k_1 \sim k_2$ rozważymy następujące sytuacje:

a) $k_1 = k_2 = k$

Mamy wtedy: $C_1 = \mathcal{X}(A; <k:B_1>, <k:B_2>) = \mathcal{X}(\mathcal{X}(A; <k : B_1>); <k : B_2>)$.

Dla $(\forall t)[k \nsim t]$ mamy: $t \circ C_1 = t \circ \mathcal{X}(A; <k : B_1>) = t \circ A$.

Dla selektora k : $k \circ C_1 = B_2$.

Z kolei: $C_2 = \mathcal{K}(A; <k : B_2>, <k : B_1>) = \mathcal{K}(\mathcal{K}(A; <k : B_2>); <k : B_1>)$. Dla $(\forall t)[k \nrightarrow t]$ mamy: $t \circ C_2 = t \circ \mathcal{K}(A; <k : B_2>) = t \circ A$. Natomiast dla selektora k : $k \circ C_2 = B_1$.
Z założenia $C_1 = C_2$ a więc $k \circ C_1 = k \circ C_2$ i stąd wynika, że $B_1 = B_2$. Otrzymujemy stąd, że $vl = T$.

b) $k_1 = s \circ t \circ k_2$

Jeżeli $B_1 = \Omega$, to mamy:
$C_1 = \mathcal{K}(A; <k_1 : \Omega>, <k_2 : B_2>) = \mathcal{K}(\mathcal{K}(A; <k_1 : \Omega>); <k_2 : B_2>)$
$C_2 = \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>, <k_1 : \Omega>) = \mathcal{K}(\mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>); <k_1 : \Omega>)$
$(\forall t)[(t \nrightarrow k_1) \wedge (t \nrightarrow k_2)]$
$t \circ C_1 = t \circ \mathcal{K}(A; <k_1 : \Omega>) = t \circ A$
$t \circ C_2 = t \circ \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>) = t \circ A$
Dla selektora k_1:
$k_1 \circ C_1 = s \circ t \circ k_2 \circ C_1 = s \circ t \circ B_2$
$k_1 \circ C_2 = \Omega$
Z założenia $C_1 = C_2$ a więc $k_1 \circ C_1 = k_1 \circ C_2$, czyli $s \circ t \circ B_2 = \Omega$.
Jeżeli $k_1 = v \circ k_1'$, wówczas selektor k_1 jest selektorem końcowym obiektu C_2 a więc na podstawie definicji 1 [2]: $k_1' \circ C_1 \subset \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$. Oczywiście również $k_1' \circ C_2 = k_1' \circ C_1$. Stąd więc wynika: $k_1' \circ C_1 = t \circ k_2 \circ C_1 =$
$= t \circ B_2 \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$. Jeżeli $k_1 = h \circ k_1'$, wówczas można napisać:
$k_1 \circ C_2 = h \circ k_1' \circ C_2 = h \circ k_1' \circ \mathcal{K}(\mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>); <h \circ k_1' : \Omega>) =$
$= h \circ \mathcal{K}(k_1' \circ \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>); <h : \Omega>) =$
$= h \circ \{(v, v \circ k_1' \circ \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>)), (h, \mathcal{K}(h \circ k_1' \circ \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>);$
$<I : \Omega>))\} = h \circ \{(v, v \circ k_1' \circ \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>)), (h, \Omega)\}$
Mamy więc: $k_1' \circ C_2 = \{(v, v \circ k_1' \circ \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>)), (h, \Omega)\} \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$
Podobnie jak poprzednio: $k_1' \circ C_2 = k_1' \circ C_1$ oraz $k_1' \circ C_1 = t \circ k_2 \circ C_1 =$
$= t \circ B_2 \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$. Otrzymaliśmy więc w tym przypadku $vl = T$. Jeżeli $B_1 \neq \Omega$ otrzymujemy:
$C_1 = \mathcal{K}(A; <k_1 : B_1>, <k_2 : B_2>) = \mathcal{K}(\mathcal{K}(A; <k_1 : B_1>); <k_2 : B_2>)$
$C_2 = \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>, <k_1 : B_1>) = \mathcal{K}(\mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>); <k_1 : B_1>)$
$(\forall t)[(t \nrightarrow k_1) \wedge (t \nrightarrow k_2)]$
$t \circ C_1 = t \circ \mathcal{K}(A; <k_1 : B_1>) = t \circ A$
$t \circ C_2 = t \circ \mathcal{K}(A; <k_2 : B_2>) = t \circ A$.
Dla selektora k_1:
$k_1 \circ C_1 = s \circ t \circ k_2 \circ C_1 = s \circ t \circ B_2$
$k_1 \circ C_2 = B_1$
Z założenia $C_1 = C_2$ a więc $k_1 \circ C_1 = k_1 \circ C_2$ i stąd $B_1 = s \circ t \circ B_2$.
Otrzymujemy więc znowu $vl = T$.

c) $k_2 = s \circ t \circ k_1$
Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku b. Obecnie założymy, że $vl = T$ i dowiedziemy, że w każdym z wymienionych czterech przypadków $C_1 = C_2$.

Jeżeli $k_1 \not\sim k_2$, to:

$C_1 = \varkappa(\varkappa(A;\ <k_1 : B_1>);\ <k_2 : B_2>)$

$C_2 = \varkappa(\varkappa(A;\ <k_2 : B_2>);\ <k_1 : B_1>)$

$(\forall t)\left[(t \not\sim k_1) \wedge (t \not\sim k_2)\right]$

$t \circ C_1 = t \circ \varkappa(A;\ <k_1 : B_1>) = t \circ A$

$t \circ C_2 = t \circ \varkappa(A;\ <k_2 : B_2>) = t \circ A$

Dla selektora k_1:

$k_1 \circ C_1 = k_1 \circ \varkappa(A;\ <k_1 : B_1>) = B_1$

$k_1 \circ C_2 = B_1$

Dla selektora k_2:

$k_2 \circ C_1 = B_2$

$k_2 \circ C_2 = k_2 \circ \varkappa(A;\ <k_2 : B_2>) = B_2$

Mamy więc: $(\forall t)\left[t \circ C_1 = t \circ C_2\right]$ a z tego wynika $C_1 = C_2$.

Jeżeli teraz $k_1 \sim k_2$, to znowu rozpatrzymy trzy przypadki:

a) $k_1 = k_2 = k \wedge B_1 = B_2 = B$

przypadek ten jest trywialny, gdyż:

$C_1 = C_2 = \varkappa(A;\ <k : B>;\ <k : B>)$

b) $k_1 = s \circ t \circ k_2$

Jeżeli $B_1 = \Omega$, to $s \circ t \circ B_2 = \Omega \wedge t \circ B_2 \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$

Obiekty C_1 i C_2 można zapisać w postaci:

$C_1 = \varkappa(\varkappa(A;\ <s \circ t \circ k_2 : \Omega>);\ <k_2 : B_2>)$

$C_2 = \varkappa(\varkappa(A;\ <k_2 : B_2>);\ <s \circ t \circ k_2 : \Omega>)$

$(\forall t')\left[(t' \not\sim k_1) \wedge (t' \not\sim k_2)\right]$

$t' \circ C_1 = t' \circ \varkappa(A;\ <s \circ t \circ k_2 : \Omega>) = t' \circ A$

$t' \circ C_2 = t' \circ \varkappa(A;\ <k_2 : B_2>) = t' \circ A$

Dla selektora k_1:

$k_1 \circ C_1 = s \circ t \circ k_2 \circ C_1 = s \circ t \circ B_2 = \Omega$

$k_1 \circ C_2 = s \circ t \circ k_2 \circ C_2 = \Omega$

Równocześnie mamy:

$s \circ t \circ k_2 \circ C_1 = s \circ t \circ \varkappa(k_2 \circ \varkappa(A;\ <s \circ t \circ k_2 : \Omega>);\ <I : B_2>) =$

$= s \circ t \circ B_2 = s \circ B'$ gdzie $B' \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$

Obiekt B' ma więc postać:

$B' = \left[s = v \longrightarrow \{(v, \Omega), (h, h \circ B')\},\right.$

$\left. s = h \longrightarrow \{(v, v \circ B'), (h, \Omega)\}\right]$

$s \circ t \circ k_2 \circ C_2 = s \circ t \circ \varkappa(k_2 \circ \varkappa(A;\ <k_2 : B_2>);\ <s \circ t : \Omega>) =$

$= s \circ \varkappa(t \circ B_2;\ <s : \Omega>) = s \circ \varkappa(B';\ <s : \Omega>)$

a więc: $t \circ k_2 \circ C_2 = \varkappa(B';\ <s : \Omega>) = \left[s = v \longrightarrow \{(v, \Omega), (h, h \circ B')\},\right.$

$\left. s = h \longrightarrow \{(v, v \circ B'), (h, \Omega)\}\right]$

W ten sposób otrzymaliśmy: $t \circ k_2 \circ C_1 = t \circ k_2 \circ C_2$

Własność $r \circ C_1 = r \circ C_2$ można tą samą drogą wykazać dla dowolnego r, takiego że $(r \sim k_1) \vee (r \sim k_2)$.

Otrzymaliśmy więc w rozpatrywanym przypadku $(\forall t)\ t \circ C_1 = t \circ C_2$ skąd wynika, że $C_1 = C_2$.

Jeżeli teraz $B_1 \neq \Omega \wedge s \circ t \circ B_2 = B_1$, to dostajemy:

$C_1 = \varkappa(\varkappa(A;\ <k_1 : B_1>);\ <k_2 : B_2>)$

$C_2 = \varkappa(\varkappa(A;\ <k_2 : B_2>);\ <k_1 : B_1>)$

$(\forall t')[(t' \not\vdash k_1) \wedge (t' \not\vdash k_2)]$

$t' \circ C_1 = t' \circ \varkappa(A;\ <k_1 : B_1>) = t' \circ A$

$t' \circ C_2 = t' \circ \varkappa(A;\ <k_2 : B_2>) = t' \circ A$

Dla selektora k_1:

$k_1 \circ C_1 = s \circ t \circ k_2 \circ C_1 = s \circ t \circ B_2 = B_1$

$k_1 \circ C_2 = B_1$

Również dla każdego selektora r, takiego że $(r \sim k_1) \vee (r \sim k_2)$ można stosunkowo łatwo wykazać, że $r \circ C_1 = r \circ C_2$.

Ponieważ $(\forall w)\ w \circ C_1 = w \circ C_2$ więc $C_1 = C_2$.

c) Gdy $k_2 = s \circ t \circ k_1$, dowód prawdziwości $C_1 = C_2$ przebiega analogicznie jak w punkcie b.

T w i e r d z e n i e 3

Jeżeli dany jest obiekt $A \in \mathcal{X}$, selektory $k_i \in S^*$; $i = 1,2,\dots,n$ oraz obiekty B_i takie, że $B_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, gdy $k_i = v \circ k_i'$ i $B_i \in \mathcal{B}$, gdy $k_i = h \circ k_i'$, a selektory k_i spełniają warunek: $\forall(i \neq j)\ [k_i \not\vdash k_j]$, to funkcja $\varkappa(A;\ <k_1 : B_1>, <k_2 : B_2>, \dots <k_n : B_n>)$ nie zależy od porządku argumentów $<k_i : B_i>$; $i = 1,2,\dots,n$.

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.

Uogólnienie funkcji konstrukcji obiektów zamyka zbudowaną teorię struktur binarnych. Na podstawie tej teorii, w określonym języku programowania, można opracować system procedur realizujący struktury binarne w konkretnej maszynie cyfrowej. Można również zdefiniować specjalny język programowania służący do przetwarzania struktur binarnych. Zwrócić należy przy tym uwagę na fakt, że np. listy w języku LISP spełniają wszystkie wymagania struktur binarnych a więc język do przetwarzania struktur binarnych może zawierać także wszystkie mechanizmy i operacje LISPu. Istnieje wiele algorytmów opracowanych dla celów przetwarzania list i wszystkie te algorytmy z niewielkimi modyfikacjami mogą być łatwo przeniesione na grunt systemu struktur binarnych [4]. Ponieważ równocześnie struktury binarne można traktować jako uogólnienie list w sensie języka LISP, stosowanie tych struktur daje bogatsze i pełniejsze możliwości niż stosowanie list. Szczególne zastosowanie mogą znaleźć struktury binarne w procesach przetwarzania danych oraz w procesach translacji i interpretacji języków programowania.

LITERATURA

[1] J. Bruski: Struktury binarne i ich własności.

[2] J. Bruski: Zbiory charakterystyczne struktur binarnych.

[3] A. Ollongren: Definition of Programming Languages by Interpreting Automata. Academic Press. London 1974.

[4] W.D. Maurer: The Programmer's Introduction to LISP.Mc Donald Co. London 1972.

Recenzent
Prof. dr hab. Władysław M. Turski

Wpłynęło do Redakcji 14.04.1979 r.

ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИИ КОНСТРУКЦИИ ДВОИЧНЫХ СТРУКТУР

Р е з ю м е

В статье определена многократная функция конструкции двоичных структур. Определены тоже условия независимости результата действия этой функции от последовательности ее аргументов.

GENERALIZATION OF FUNCTION OF CONSTRUCTION
OF BINARY STRUCTURES

S u m m a r y

In the paper the multiple function of construction of binary structures was defined. Terms of function effect independence of sequence of arguments in the function were defined as well.