ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: INFORMATYKA z. 2 Nr kol. 683

Jan BRUSKI

ZWIĄZEK STRUKTUR BINARNYCH Z SYSTEMEM OGÓLNYCH STRUKTUR DANYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono krótko własności systemu ogólnych struktur danych. Zdefiniowano również przekształcenia selektorów i obiektów systemu ogólnych struktur danych do systemu struktur binarnych i odwrotnie. W postaci twierdzeń przedstawiono podstawowe własności tych przekształceń.

System struktur binarnych zdefiniowany w sposób przedstawiony w pracach [1] i [2] został zbudowany w celu stworzenia prostej realizacji systemu ogólnych struktur danych w maszynach cyfrowych. Struktury binarne charakteryzują się tym, że każda z nich posiada zawsze dwie bezpośrednie składowe. Stanowi to zasadniczą cechę odróżniającą system struktur binarnych od systemu ogólnych struktur danych.

Każdy obiekt w systemie ogólnych struktur danych może zawierać dowolną liczbę bezpośrednich składowych. Z tego względu w systemie tym zakłada się, że istnieje pewien skończony zbiór Sel, tzw. prostych selektorów, których liczba może być dowolna. Niezależnie od tego zakłada się również, że istnieje zbiór $\mathcal{A}$ elementów strukturalnie niepodzielnych (zwanych atomami), identyczny ze zbiorem atomów, którego istnienie założono definiując system struktur binarnych. Zbiór $\mathcal{A}$ zawiera więc również element pusty Ω. W klasyczny sposób system ogólnych struktur danych definiuje się w sposób aksjomatyczny. Wygodniej jest jednak zbudować pewien teoriomnogościowy model struktur danych, dbając przy tym, aby spełniał on aksjomaty systemu.

Korzystając z założeń o istnieniu zbiorów $\mathcal{A}$, oraz Sel, definiuje się inne zbiory, które składają się na przyjęty model struktur danych.

Zbiorem obiektów złożonych nazywa się minimalny zbiór φ, taki że

a) $\varphi \cap \mathcal{A} = \{\Omega\}$

b) Dla dowolnego całkowitego $n > 0$ i parami różnych $s_1, s_2, \ldots, s_n \in$ Sel oraz $A_1, A_2, \ldots, A_n \in (\varphi \cup \mathcal{A}) \setminus \{\Omega\}$ ma miejsce:
$\{(s_1, A_1), (s_2, A_2), \ldots, (s_n, A_n)\} \in \varphi$

Każdy obiekt złożony, oprócz obiektu pustego, jest więc zbiorem uporządkowanych par, których pierwszym elementem jest prosty selektor, natomiast drugim - znowu obiekt złożony lub atom lecz nie obiekt pusty.

Zbiór $Ob = \mathcal{P} \cup \mathcal{A}$ nazywa się zbiorem obiektów przyjętego modelu lub krótko zbiorem obiektów, natomiast zbiór $\mathcal{E} = \mathcal{A} \setminus \{\Omega\}$ nazywa się zbiorem obiektów elementarnych. Zbiór $\mathcal{E}$ jest znowu identyczny ze zbiorem obiektów elementarnych w systemie struktur binarnych.

Tworząc iloczyn kartezjański zbiorów Sel oraz Ob określa się przekształcenie Δ : Sel x Ob $\longrightarrow$ Ob, zwane w dalszym ciągu funkcją wyboru składowej obiektu lub krótko funkcją wyboru:

$$\Delta(s, A) = \left[A = \{(s_1,A_1),(s_2,A_2),\ldots,(s_n,A_n)\} \wedge (\exists i)(1 \leqslant i \leqslant n \wedge s = s_i) \longrightarrow A_i,\ T \longrightarrow \Omega\right]$$

W uproszczeniu, zamiast zapisu Δ (s,A) najczęściej używa się zapisu s(A) lub $s \bullet A$. Natomiast w miejsce określenia funkcja wyboru często używa się określenia działanie selektora s na obiekt A.

W wyniku działania selektora $s \in Sel$ na obiekt $A \in Ob$ otrzymuje się zawsze obiekt $B \in Ob$. Działanie dowolnego selektora $s \in Sel$ na obiekt $A \in \mathcal{A}$ daje w wyniku zawsze obiekt pusty Ω. Nie istnieje natomiast taki selektor s, który działając na obiekt $A \neq \Omega$ dałby w wyniku ten sam obiekt A.

Określając nad zbiorem Sel operację kompozycji (tak samo jak w systemie struktur binarnych) można zbudować inny zbiór Sel^*, który nazywa się zbiorem selektorów złożonych. Działanie selektora złożonego $\gamma = s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n$ na dowolny obiekt $A \in Ob$ jest równoważne złożeniu działań prostych selektorów, a więc $\gamma(A) = s_1(s_2(\ldots(s_n(A))\ldots))$. Zbiór prostych selektorów Sel zawiera się oczywiście w zbiorze selektorów złożonych Sel^*. Zbiór selektorów złożonych uzupełnia się specjalnym selektorem złożonym I zwanym tożsamościowym, który posiada tę własność, że dla $(\forall \gamma \in Sel^*)\ [I \circ \gamma = \gamma \circ I = \gamma]$. Działanie selektora tożsamościowego I na dowolny obiekt $A \in Ob$ daje w wyniku ten sam obiekt, czyli $I(A) = A$.

Działanie selektora γ na dowolny obiekt $A \in Ob$ daje zawsze w wyniku obiekt należący do zbioru Ob. Działanie dowolnego selektora złożonego $\gamma \in Sel^*$ na obiekt pusty Ω daje w wyniku również obiekt pusty.

Wszystkie obiekty należące do zbioru Ob mają tę własność, że dla każdego z nich istnieje pewien selektor złożony γ taki że $\gamma(A) = \Omega$.
Dwa obiekty $A, B \in Ob$ są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego złożonego selektora $\gamma \in Sel^*$, $\gamma(A) = \gamma(B)$. Tak samo jak w systemie struktur binarnych definiuje się relację zależności selektorów.
Jeżeli istnieje selektor złożony $\gamma \in Sel^*$ taki, że $\gamma(A) = \gamma(B) \neq \Omega$ gdzie $A, B \in Ob$ i $(\forall \xi)\ [\xi \neq \gamma \Longrightarrow \xi(A) = \xi(B)]$ to $A = B$.

W systemie ogólnych struktur danych korzysta się również z pojęcia zbioru charakterystycznego. Zbiorem charakterystycznym obiektu $A \in Ob$ nazywa się zbiór $\bar{A} = \{<\gamma : e> \mid \gamma(A) = e \in \mathcal{E}\}$. Dwa obiekty $A, B \in Ob$ są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są ich zbiory charakterystyczne, a więc: $A = B \Longleftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$. Zbiór charakterystyczny danego obiektu posiada własność charakterystyczną polegającą na tym, że każde dwa różne selektory wchodzące w skład elementów tego zbioru są od siebie niezależne, czyli: $(\gamma_1 \neq \gamma_2 \wedge \gamma_1(A) \in \mathcal{E} \wedge \gamma_2(A) \in \mathcal{E}) \Longrightarrow \gamma_1 \nsim \gamma_2$.

Jeżeli istnieje pewien zbiór $X = \{<\gamma_i : e_i> \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ posiadający własność charakterystyczną, to istnieje zawsze pewien obiekt $A \in Ob$, dla którego $\bar{A} = X$.

Korzystając z definicji obiektów złożonych można zawsze zbudować dowolny obiekt należący do zbioru $\mathcal{C}$. Dowolny obiekt można również utworzyć wykorzystując przekształcenie $\mu : Ob \times Sel \times \mathcal{E} \rightarrow Ob$ określone następująco:

$$\begin{aligned}\mu(A; <\gamma : e>) = [\,&\gamma = I \rightarrow e,\\ &A \in \mathcal{A} \rightarrow \{<\gamma : e>\},\\ &(\exists s)\ s \circ A \neq \Omega \wedge (\gamma \sim s) \rightarrow\\ &A \setminus \{<s : B> \mid s(A) = B \wedge (\gamma \sim s)\} \cup\\ &\cup \{<s : \mu(s \circ A; <\gamma' : e>)> \mid \gamma = \gamma' \circ s\},\\ T \longrightarrow\ &A \cup \{<s : \mu(\Omega; <\gamma' : e>)> \mid \gamma = \gamma' \circ s\}]\end{aligned}$$

Przekształcenie μ nazywa się funkcją konstrukcji nowego obiektu za pomocą obiektu $A \in Ob$, selektora złożonego $\gamma \in Sel^*$ oraz obiektu elementarnego $e \in \mathcal{E}$

Każdy obiekt B utworzony funkcją konstrukcji należy do zbioru Ob. Obiekt ten ma tę własność, że $\gamma(B) = e \in \mathcal{E} \wedge (\forall \xi)\ [\gamma \nsim \xi \Rightarrow \xi(B) = \xi(A)]$. Z własności tej wynika, że $\gamma \circ \mu(A; <\gamma : e>) = e$ oraz $\gamma \nsim \xi \Rightarrow \xi \circ \mu(A; <\gamma : e>) = \xi \circ A$.

Funkcję konstrukcji μ można uogólnić wprowadzając w miejsce obiektu elementarnego e dowolny obiekt $B \in Ob$.

Funkcja ta jest wtedy określona następująco:

$$\begin{aligned}\mu(A; <\gamma : B>) = (\imath C)[C = \{&<\xi : e> \mid \xi(A) = e \wedge \xi \nsim \gamma\} \cup\\ \cup \{&<\xi \circ \gamma : e> \mid \xi(B) = e\}]\end{aligned}$$

Stosując uogólnioną funkcję μ trzeba zwrócić uwagę, że $\mu(A; <\gamma : \gamma(A)>) = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma(A) \neq \Omega$ lub gdy $(\forall \xi) <\xi : e> \in \bar{A} \Rightarrow \gamma \nsim \xi$

Czasami stosuje się dalsze jeszcze uogólnienie funkcji μ. Wprowadza się mianowicie większą liczbę argumentów tej funkcji:

$$\mu(A; <\gamma_1 : B_1>, <\gamma_2 : B_2> \ldots <\gamma_n : B_n>) = \mu(\mu(A; <\gamma_1 : B_1>); <\gamma_2 : B_2> \ldots <\gamma_n : B_n>).$$

Jeżeli w uogólnionym zapisie funkcji μ obiekt $A = \Omega$, wówczas stosuje się zapis uproszczony: $\mu_o(<\gamma_1 : B_1>, <\gamma_2 : B_2> \ldots <\gamma_n : B_n>)$.

Kolejność występowania poszczególnych argumentów funkcji μ może nie być obojętna.

$\mu(A; <\gamma_1 : B_1>, <\gamma_2 : B_2>) = \mu(A; <\gamma_2 : B_2>, <\gamma_1 : B_1>)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków:

a) $\gamma_1 \nsim \gamma_2$

b) $|\gamma_1| \leqslant |\gamma_2| \wedge \begin{aligned}[t][&B_2 = \Omega \rightarrow \neg(\exists \xi)\ [\xi \circ B_1 \in \mathcal{E} \wedge (\gamma \sim \xi)],\\ &B_2 \neq \Omega \rightarrow \gamma' \circ B_1 = B_2]\end{aligned}$

$$c)\ |\gamma_1| > |\gamma_2| \wedge \left[B_1 = \Omega \longrightarrow \neg(\exists\xi)[\xi \cdot B_2 \in \mathcal{E} \wedge (\gamma'' \sim \xi)], \atop B_1 \neq \Omega \longrightarrow \gamma'' \cdot B_2 = B_1 \right]$$

W powyższym zapisie $|\gamma|$ oznacza liczbę prostych selektorów składających się na złożony selektor γ, natomiast γ' i γ'' wynikają z relacji zależności, a mianowicie $\gamma_2 = \gamma' \circ \gamma_1$ w przypadku b i $\gamma_1 = \gamma'' \circ \gamma_2$ w przypadku c.

Każdemu obiektowi w systemie ogólnych struktur danych można jednoznacznie przyporządkować pewien obiekt w systemie struktur binarnych. Podobnie każdemu selektorowi należącemu do zbioru Sel^* można jednoznacznie przyporządkować złożony selektor należący do zbioru S^*. Związki te, między systemem ogólnych struktur danych oraz systemem struktur binarnych, można przedstawić za pomocą formalnych przekształceń określonych w niżej zamieszczonych definicjach. Założymy w tym celu, że zbiór prostych selektorów Sel zawiera selektory: $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

DEFINICJA 1

Wprowadzamy przekształcenie $\delta : Sel^* \longrightarrow S^*$ określone następująco:

$$\delta(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma = I \longrightarrow I, \\ \gamma = s_1 \longrightarrow v, \\ \gamma = s_i \wedge i = 2,3,\ldots,n \longrightarrow \delta(s_{i-1}) \circ h, \\ \gamma = \xi \circ s_i \longrightarrow \delta(\xi) \circ \delta(s_i) \end{bmatrix}$$

Przekształcenie δ przyporządkowuje każdemu złożonemu selektorowi $\gamma \in Sel^*$ pewien złożony selektor $k \in S^*$.

DEFINICJA 2

Wprowadźmy przekształcenie $\mathcal{T} : Ob \longrightarrow \mathcal{K}$ i zdefiniujmy je w następujący sposób:

$$\mathcal{T}(A) = \Big[A \in \mathcal{A} \longrightarrow A,$$
$$A = \{(p_1, A_1)\} \longrightarrow \big[p_1 = s_1 \longrightarrow \{(v, \mathcal{T}(A_1)), (h, \Omega)\},$$
$$p_1 = s_i \wedge i > 1 \longrightarrow \{(v, \Omega), (h, \mathcal{T}(\{(s_{i-1}, A_1)\}))\}\big],$$
$$A = \{(p_1, A_1), (p_2, A_2), \ldots, (p_m, A_m)\} \longrightarrow$$
$$\big[p_1 = s_1 \longrightarrow \{(v, \mathcal{T}(A_1)), (h, \mathcal{T}(\{(p_2, A_2), \ldots, (p_m, A_m)\}))\},$$
$$p_1 = s_i \wedge i > 1 \longrightarrow \{(v, \Omega), (h, \mathcal{T}(\{(s_{i-1}, A_1), (p_2, A_2) \ldots (p_m A_m)\}))\}\big]\Big]$$

Za pomocą przekształcenia $\mathcal{T}$ każdemu obiektowi $A \in Ob$ przyporządkowuje się obiekt $B \in \mathcal{K}$

Przekształcenia określone za pomocą definicji 1 i 2 pozwalają na transformację poszczególnych własności systemu ogólnych struktur danych do systemu struktur binarnych. Zostanie to przedstawione w formie kolejnych lematów i twierdzeń.

Lemat 1

Dla danych selektorów $\gamma,\xi \in Sel^*$: $\delta(\xi\circ\gamma) = \delta(\xi)\circ\delta(\gamma)$. Ponieważ każdy złożony selektor może być przedstawiony w postaci kompozycji prostych selektorów, dowód lematu wynika wprost z definicji 1.

Lemat 2

Dla danych selektorów $\gamma, \xi \in Sel^*$: $\gamma \sim \xi \Rightarrow \delta(\gamma) \sim \delta(\xi)$. Selektory γ i ξ są zależne wtedy, gdy $\gamma = \vartheta\circ\xi$ lub $\xi = \vartheta\circ\gamma$. Na mocy lematu 1 mamy więc $\delta(\gamma) = \delta(\vartheta)\circ\delta(\xi)$ oraz $\delta(\xi) = \delta(\vartheta)\circ\delta(\gamma)$. Oznaczając $\delta(\gamma) = k$, $\delta(\xi) = t$, $\delta(\vartheta) = r$ otrzymujemy $k = r\cdot t$ lub $t = r\cdot k$, a więc $k \sim t$.

T w i e r d z e n i e 1

Dla dowolnego obiektu $A \in Ob$ oraz złożonego selektora $\gamma \in Sel^*$:
$\mathcal{T}(\gamma\circ A) = \delta(\gamma)\circ\mathcal{T}(A)$.
Jeżeli $\gamma = I$, to $\gamma\circ A = A$ i $\delta(\gamma) = I$. W takim razie $\mathcal{T}(\gamma\circ A) = \mathcal{T}(I\circ A) = \mathcal{T}(A) = \delta(I)\circ\mathcal{T}(A)$.
Jeżeli $\gamma = s_i$, to gdy $A \in \mathcal{A}$ mamy $\gamma\circ A = s_i\circ a = \Omega$ oraz $\mathcal{T}(\Omega) = \Omega$. Z drugiej strony $\delta(s_i) = \delta(s_{i-1})\circ h$ oraz $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(a) = a$, a więc $\delta(s_i)\circ\mathcal{T}(a) = \delta(s_{i-1})\circ h\circ a = \delta(s_{i-1})\circ\Omega = \Omega$.
Gdy natomiast $A = \{(s_1,A_1), (s_2,A_2),\ldots,(s_n,A_n)\}$ to dla $i \leqslant n$ otrzymujemy: $s_i\circ A = A_i \Longrightarrow \mathcal{T}(s_i\circ A) = \mathcal{T}(A_i)$.
Z drugiej strony: $\mathcal{T}(A) = \{(v,\mathcal{T}(A_1)), (h,\mathcal{T}(\{(\ldots,A_2),\ldots,(s_n,A_n)\}))\}$ a $\delta(s_i) = \delta(s_{i-1})\circ h$

$\delta(s_i)\circ\mathcal{T}(A) = \delta(s_{i-1})\circ h\circ\mathcal{T}(A) =$
$= \delta(s_{i-1})\circ\mathcal{T}(\{(s_2,A_2),\ldots,(s_n,A_n)\}) =$
$= \delta(s_{i-2})\circ h\circ \{(v,\mathcal{T}(A_2)), (h,\mathcal{T}(\{(s_3,A_3),\ldots,(s_n,A_n)\}))\} =$
$= \delta(s_{i-2})\circ\mathcal{T}(\{(s_3,A_3),\ldots,(s_n,A_n)\}) =$
....
$= \delta(s_1)\circ h\circ\{(v,\mathcal{T}(A_{i-1})), (h,\mathcal{T}(\{(s_i,A_i),\ldots,(s_n,A_n)\}))\} =$
$= \delta(s_1)\circ\mathcal{T}(\{(s_i,A_i),\ldots,(s_n,A_n)\}) =$
$= v\circ\{(v,\mathcal{T}(A_i)), (h,\mathcal{T}(\{(s_{i+1},A_{i+1}),\ldots,(s_n,A_n)\}))\} = \mathcal{T}(A_i)$
Obydwoma drogami otrzymaliśmy więc identyczne wyniki.
Dla $i > n$ oczywiście $\gamma\circ A = \Omega$ i $\mathcal{T}(\Omega) = \Omega$. W taki sam sposób jak wyżej można pokazać, że także $\delta(s_i)\circ\mathcal{T}(A) = \Omega$. Załóżymy teraz, że selektor γ posiada postać: $\gamma = p_m\circ p_{m-1}\circ\ldots\circ p_2\circ p_1$, gdzie $p_i \in \{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$; $i = 1,2,\ldots,m$ oraz, że spełniony jest związek: $\mathcal{T}(\gamma\circ A) = \delta(\gamma)\circ\mathcal{T}(A)$. Sprawdzimy, jakie otrzymamy wyniki, gdy selektor ξ działający na obiekt A będzie miał postać: $\xi = p_{m+1}\circ\gamma$
Oznaczając $\gamma\circ A = B = \{(s_1,B_1), (s_2,B_2),\ldots,(s_k,B_k)\}$ na mocy poprzednich rozważań mamy $p_{m+1}\circ B = B_j$, jeżeli $p_{m+1} = s_j \wedge 1 \leqslant j \leqslant k$ lub $p_{m+1}\circ B = \Omega$ gdy $p_{m+1} = s_j \wedge j > k$. Otrzymujemy wtedy: $\mathcal{T}(p_{m+1}\circ B) = \delta(p_{m+1})\circ\mathcal{T}(B)$.
Z kolei z założenia:

$\mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(\gamma \circ A) = \delta(\gamma) \circ \mathcal{T}(A)$, a więc: $\mathcal{T}(p_{m+1} \circ B) = \mathcal{T}(\xi \circ A) =$
$= \delta(p_{m+1}) \circ \delta(\gamma) \circ \mathcal{T}(A) = \delta(\xi) \circ \mathcal{T}(A)$.
Na mocy indukcji wynika stąd, że dla dowolnych obiektów $A \in Ob$ i dowolnych złożonych selektorów $\gamma \in Sel^*$ teza twierdzenia jest prawdziwa.

T w i e r d z e n i e 2

Jeżeli dane są obiekty $A, B \in Ob$ takie, że $A = B$, to $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(B)$.
Dowód twierdzenia wynika wprost z twierdzenia 1. Jeżeli bowiem $A = B$, to $(\forall \gamma) \left[\gamma \circ A = \gamma \circ B\right]$. Mamy więc również: $(\forall \delta(\gamma)) \left[\delta(\gamma) \circ \mathcal{T}(A) = \delta(\gamma) \circ \mathcal{T}(B)\right]$ a stąd na mocy twierdzenia 1 otrzymujemy: $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(B)$

Lemat 3

Jeżeli dla dowolnego obiektu $A \in Ob$ jego zbiór charakterystyczny jest określony w postaci: $\bar{A} = \left\{ <\gamma_i : e_i> \mid \gamma_i(A) = e_i \wedge 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$, to selektory $\delta(\gamma_i)$ są selektorami końcowymi obiektu $\mathcal{T}(A)$, czyli $\delta(\gamma_i) \in S_{\mathcal{T}(A)}$, $i = 1,2,\ldots,n$.
Z twierdzenia 1 wynika, że $(\forall \gamma)\mathcal{T}(\gamma \circ A) = \delta(\gamma) \circ \mathcal{T}(A)$, a więc również $\mathcal{T}(\gamma_i \circ A) = \delta(\gamma_i) \circ \mathcal{T}(A)$.
Ponieważ $\gamma_i \circ A = e_i \in \mathcal{E}$ więc $\mathcal{T}(\gamma_i \circ A) = e_i$.
Z kolei z definicji 1 wynika, że $(\forall \gamma \neq I)\delta(\gamma) = v \circ k'$.
Oprócz tego, gdy $\gamma_i \neq I$, to $k'_i \circ \mathcal{T}(A) \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\}$
Kończy to dowód lematu.

Lemat 4

Jeżeli dany jest zbiór charakterystyczny obiektu $A \in Ob$ w postaci: $\bar{A} = \left\{ <\gamma : e> \right\}$, gdzie $\gamma = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_m$; $p_i \in \left\{s_1, s_2, \ldots, s_n\right\}$; $i = 1, 2, \ldots, m$, to zbiór selektorów końcowych obiektu $\mathcal{T}(A)$ jest następujący:

$$S_{\mathcal{T}(A)} = \left\{\delta(\gamma)\right\} \cup \left\{ \delta(s_j) \circ \delta \mathop{\Delta}_{t=m-r+1}^{m} p_{t+1}) \,\middle|\, r = 1,2,\ldots,m \wedge p_{m-r+1} = \right.$$
$$\left. = s_i \wedge j = 1,2,\ldots,i-1 \right\}$$

gdzie oznaczono: $p_{m+1} = I$ a $\mathop{\Delta}_{t=m-r+1}^{m} p_{t+1} = p_{m-r+1} \circ p_{m-r+2} \circ \ldots \circ p_m \circ p_{m+1}$
Jeżeli $\gamma = p_1$, to obiekt A może być przedstawiony w postaci:
$A = \left\{(p_1, e)\right\}$, gdzie $p_1 \in \left\{s_1, s_2, \ldots, s_n\right\}$. Gdy $p_1 = s_1$, to $\mathcal{T}(A) = \left\{(v, e), (h, \Omega)\right\}$ i jedynym selektorem końcowym tego obiektu jest selektor binarny v. Gdy natomiast $p_1 = s_i \wedge i > 1$, to $\mathcal{T}(A) = \left\{(v, \Omega), (h, \mathcal{T}(\left\{(s_{i-1}, e)\right\}))\right\}$.
Z kolei:

$\mathcal{T}(\{(s_{i-1}, e)\}) = \{(v,\Omega), (h, \mathcal{T}(\{(s_{i-2}, e)\}))\}$

....

$\mathcal{T}(\{(s_2, e)\}) = \{(v,\Omega), (h, \mathcal{T}(\{(s_1, e)\}))\}$

$\mathcal{T}(\{(s_1, e)\}) = \{(v, e), (h,\Omega)\}$

Selektorami końcowymi obiektu $\mathcal{T}(A)$ są więc selektory:

$v, v\circ h, v\circ h\circ h, \ldots v\circ \underbrace{h\circ \ldots \circ h}_{i-1}$, czyli $\delta(s_1), \delta(s_2), \ldots, \delta(s_i)$.

Z lematu 4 dostajemy natomiast: $S_{\mathcal{T}(A)} = \{\delta(s_i)\} \cup \{\delta(s_j)\circ I \mid j = 1,2,\ldots,i-1\} = \{\delta(s_1), \delta(s_2), \ldots, \delta(s_{i-1}), \delta(s_i)\}$.

Jeżeli $\gamma = p_1\circ p_2\circ \ldots \circ p_m$, gdzie $p_i \in \{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$, $i = 1,2,\ldots,m$, to obiekt A, dla którego $\bar{A} = \{<\gamma : e>\}$ może być przedstawiony w postaci:

$A = \{(p_m, A_1)\}$

$A_1 = \{(p_{m-1}, A_2)\}$

$A_2 = \{(p_{m-2}, A_3)\}$

....

$A_{m-2} = \{(p_2, A_{m-1})\}$

$A_{m-1} = \{(p_1, e)\}$

Na podstawie poprzednich rozważań otrzymujemy, że selektory $\delta(s_1), \delta(s_2), \ldots, \delta(p_1)$ są selektorami końcowymi obiektu $\mathcal{T}(A_{m-1})$. Z kolei jeżeli $p_2 = s_i$, to selektory $\delta(s_1), \delta(s_2), \ldots, \delta(s_{i-1})$ należą do zbioru selektorów końcowych obiektu $\mathcal{T}(A_{m-2})$. Nie należy natomiast do tego zbioru selektor $\delta(p_2)$, gdyż $\delta(p_2)\circ \mathcal{T}(A_{m-2}) = \mathcal{T}(A_{m-1}) \in B \setminus \{\Omega\}$. Natomiast selektorami końcowymi obiektu $\mathcal{T}(A_{m-2})$ są również selektory:

$\delta(s_1)\circ\delta(p_1), \delta(s_2)\circ\delta(p_2), \ldots, \delta(p_1)\circ\delta(p_2)$.

Prowadząc rozważania tym samym torem otrzymamy, że selektorami końcowymi obiektu $\mathcal{T}(A)$ są selektory:

$\delta(s_1)$, $\delta(s_2)$, $\delta(s_{i-1})$, dla $p_m = s_i$

$\delta(s_1)\circ\delta(p_m)$, $\delta(s_2)\circ\delta(p_m)$, $\delta(s_j)\circ\delta(p_m)$, dla $p_{m-1} = s_j$

$\delta(s_1)\circ\delta(p_{m-1}\circ p_m)$, $\delta(s_2)\circ\delta(p_{m-1}\circ p_m) \ldots \delta(s_k)\circ\delta(p_{m-1}\circ p_m)$ dla $p_{m-2} = s_k$

....

$\delta(s_1)\circ\delta(p_2\circ\ldots\circ p_m)$, $\delta(s_2)\circ\delta(p_2\circ\ldots\circ p_m) \ldots \delta(s_l)\circ\delta(p_2\circ\ldots\circ p_m)$ dla $p_1 = s_l$

oraz na mocy lematu 3 - selektor $\delta(p_1\circ p_2\circ \ldots \circ p_m)$. Łatwo sprawdzić, że selektory te tworzą zbiór określony tezą lematu.

Lemat 5

Jeżeli dany jest zbiór charakterystyczny obiektu $A \in Ob$ w postaci $\bar{A} = \{<\gamma_i : e_i> \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, który zapiszemy jako $\bar{A} = \bigcup_{i=1}^{k}\{<\gamma_i : e_i>\}$, to zbiór selektorów końcowych $S_{\mathcal{T}(A)}$ obiektu $\mathcal{T}(A)$ jest następujący:

$$S_{\mathcal{J}(A)} = \left\{ \delta(\gamma_i) \mid 1 \leq i \leq k \right\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \left\{ S_{\mathcal{J}(A_i)} \setminus \left\{ k \mid k \in S_{\mathcal{J}(A_i)} \wedge (\forall \gamma_i) k \sim \delta(\gamma_i) \right\} \right\}$$

gdzie symbolem $S_{\mathcal{J}(A_i)}$ oznaczono zbiór selektorów końcowych obiektu A_i, dla którego $\bar{A}_i = \left\{ < \gamma_i : e_i > \right\}$

W zbiorze $\bigcup_{i=1}^{k} \left\{ S_{\mathcal{J}(A_i)} \right\}$ zawierają się wszystkie selektory końcowe obiektu $\mathcal{J}(A)$. Zbiór ten zawiera jednak również takie selektory, które są selektorami końcowymi obiektów $\mathcal{J}(A_i)$ ale nie są selektorami końcowymi obiektu $\mathcal{J}(A)$. Są to takie selektory k, dla których $(\forall \gamma_i)[k \sim \delta(\gamma_i)]$. Wyodrębnienie tych selektorów z rozpatrywanego zbioru powoduje jednak, że usunięte zostają również wszystkie selektory γ_i. Otrzymany zbiór trzeba więc nimi uzupełnić.

T w i e r d z e n i e 3

Jeżeli dany jest zbiór charakterystyczny $\bar{A}$ obiektu $A \in Ob$, to elementarny zbiór charakterystyczny obiektu $\mathcal{J}(A) \in \mathcal{K}$ jest równy:

$$\chi_{\varepsilon}(\mathcal{J}(A)) = \left\{ < \delta(\gamma_i) : e_i > \mid \gamma_i(A) = e_i \wedge 1 \leq i \leq n \right\}$$

a atomowy zbiór charakterystyczny jest równy:

$$\chi(\mathcal{J}(A)) = \chi_{\varepsilon}(\mathcal{J}(A)) \cup \left\{ < k_{\mathcal{J}(A)} : \Omega > \mid (\forall \gamma_i) k_{\mathcal{J}(A)} \neq \delta(\gamma_i) \right\}$$

Selektory końcowe $k_{\mathcal{J}(A)}$ obiektu $\mathcal{J}(A)$ określone są za pomocą lematów 4 i 5. Dowód twierdzenia 3 wynika wprost z twierdzeń 1 i 4 [2].

T w i e r d z e n i e 4

Dla dowolnych obiektów $A, B \in Ob$ oraz złożonego selektora $\gamma \in Sel^{*}$: $\mathcal{J}(\mu(A; < \gamma : B >)) = \mathcal{H}(\mathcal{J}(A); < \delta(\gamma) : \mathcal{J}(B) >)$

Oznaczając $C = \mu(A; < \gamma : B >)$, wiadomo, że zbiór charakterystyczny obiektu C jest równy: $\left\{ < \xi : e > \mid \xi(A) = e \wedge \xi \nsim \gamma \right\} \cup \left\{ < \xi \circ \gamma : e > \mid \xi(B) = e \right\}$

Korzystając z twierdzenia 3 otrzymujemy:

$$\chi_{\varepsilon}(\mathcal{J}(C)) = \left\{ < \delta(\xi) : e > \mid \mathcal{J}(\xi \circ A) = e \wedge \delta(\xi) \chi \delta(\gamma) \right\} \cup \left\{ < \delta(\xi \circ \gamma) : e > \mid \mathcal{J}(\xi \circ B) = e \right\}$$

oraz $\chi(\mathcal{J}(C)) = \chi_{\varepsilon}(\mathcal{J}(C)) \cup \left\{ < k_{\mathcal{J}(C)} : \Omega > \mid (\forall \xi)[\xi \circ C = e \implies k_{\mathcal{J}(C)} \neq \delta(\xi)] \right\}$

Rozpatrując obiekt $D = \mathcal{H}(\mathcal{J}(A); < \delta(\gamma) : \mathcal{J}(B) >)$ na podstawie twierdzenia 2 [2] dostajemy:

$$\chi(D) = \left\{ < t_{\mathcal{J}(A)} : a > \mid t_{\mathcal{J}(A)}(\mathcal{J}(A)) = a \wedge \delta(\gamma) \chi t_{\mathcal{J}(A)} \right\} \cup \left\{ < t_{\mathcal{J}(B)} \circ \delta(\gamma) : a > \mid t_{\mathcal{J}(B)}(\mathcal{J}(B)) = a \right\}$$

Zbiór $\chi(D)$ można zapisać inaczej:

$$\chi(D) = \left\{ < t_{\mathcal{J}(A)} : e > \mid t_{\mathcal{J}(A)}(\mathcal{J}(A)) = e \wedge \delta(\gamma) \nsim t_{\mathcal{J}(A)} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ < t_{\mathcal{J}(B)} \circ \delta(\gamma) : e > \mid t_{\mathcal{J}(B)}(\mathcal{J}(B)) = e \right\} \cup \left\{ < t_{\mathcal{J}(A)} : \Omega > \mid \right.$$
$$\left. t_{\mathcal{J}(A)}(\mathcal{J}(A)) = \Omega \wedge \delta(\gamma) \nsim t_{\mathcal{J}(A)} \right\} \cup \left\{ < t_{\mathcal{J}(B)} \circ \delta(\gamma) : \Omega > \mid t_{\mathcal{J}(B)}(\mathcal{J}(B)) = \Omega \right\}$$

Stosując oznaczenia jak przy zapisie zbioru $\chi_{\varepsilon}(\mathcal{J}(C))$ jest oczywiste, że jeżeli $\mathcal{J}(\xi \circ A) \in \mathcal{E}$, to $\delta(\xi) \in S_{\mathcal{J}(A)}$ ale również $t_{\mathcal{J}(A)} \in S_{\mathcal{J}(A)}$. W takim razie, gdy $\mathcal{J}(\xi \circ A) = e = t_{\mathcal{J}(A)}(\mathcal{J}(A))$, to $\delta(\xi) = t_{\mathcal{J}(A)}$. Taki sam wynik otrzymujemy dla obiektu $\mathcal{J}(B)$: gdy $\mathcal{J}(\xi \circ B) = e = t_{\mathcal{J}(B)}(\mathcal{J}(B))$, to $\delta(\xi) = t_{\mathcal{J}(B)}$. Stąd wynika, że $\chi_{\varepsilon}(D) = \chi_{\varepsilon}(\mathcal{J}(C))$.

Z kolei selektory końcowe obiektu $\mathcal{T}(C)$, dla których $t_{\mathcal{T}(C)}(\mathcal{T}(C)) = \Omega$, można przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów:

$\{t_{\mathcal{T}(A)} \mid t_{\mathcal{T}(A)} + \delta(\gamma)\} \cup \{t_{\mathcal{T}(B)} \circ \delta(\gamma)\}$

Wynika stąd natychmiast, że $\chi(D) = \chi(\mathcal{T}(C))$. Na podstawie twierdzenia 3 [2] mamy więc: $D = \mathcal{T}(C)$ i to kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 5

Dla dowolnych obiektów $A, B_i \in Ob$; $i = 1,2,\ldots,n$ oraz złożonych selektorów $\gamma_i \in Sel^*$:

$$\mathcal{T}(\mu(A;<\gamma_1 : B_1>,<\gamma_2 : B_2>,\ldots,<\gamma_n : B_n>)) = \mathcal{H}(\mathcal{T}(A);\ <\delta(\gamma_1): \mathcal{T}(B_1)>\ <\delta(\gamma_2) : \mathcal{T}(B_2)> \ldots <\delta(\gamma_n) : \mathcal{T}(B_n)>)$$

Dowód wynika wprost z definicji 1 [3] oraz twierdzenia 4.

Dzięki określeniu przekształceń $\delta : Sel^* \longrightarrow S^*$ oraz $\mathcal{T} : Ob \longrightarrow \mathcal{K}$, mając do wykonania pewne operacje na ogólnych strukturach danych należących do zbioru obiektów Ob, można te operacje wykonać w systemie struktur binarnych. Po uzyskaniu wyników odpowiednich operacji, którymi będą selektory lub obiekty w systemie struktur binarnych, trzeba wrócić z nimi do systemu ogólnych struktur danych. Oznacza to, że trzeba dokonać odwrotnych przekształceń. W tym celu wprowadzimy dalsze dwie definicje.

DEFINICJA 3

Wprowadźmy przekształcenie selektorów $\vartheta : S^* \longrightarrow Sel^*$ i określmy je następująco:

$$\vartheta(k) = \Big[k = I \longrightarrow I,\quad k = h \circ t \longrightarrow \text{nieokreślone},\quad k = t \circ v \longrightarrow \vartheta(t) \circ s_1,\quad k = t \circ v \circ \bigwedge_{j=1}^{i} h \longrightarrow \vartheta(t) \circ s_{i+1}\Big]$$

gdzie $\bigwedge_{j=1}^{i} h$ oznacza kompozycję selektorów binarnych h w liczbie i.

DEFINICJA 4

Niech $\chi(A) = \chi_{\mathcal{E}}(A) \cup \{<k_A : \Omega> \mid k_A \in S_A \wedge k_A(A) = \Omega\}$ będzie atomowym zbiorem charakterystycznym obiektu $A \in \mathcal{K}$

Wprowadzamy przekształcenie $\psi : \mathcal{K} \longrightarrow Ob$, które definiujemy w następujący sposób:

$$\psi(A) = \Big[\chi_{\mathcal{E}}(A) = \emptyset \longrightarrow \Omega,\quad T \longrightarrow (\iota C)\big[\bar{C} = \{<\vartheta(k_A) : e> \mid k_A \in S_A \wedge k_A(A) = e\}\big]\Big]$$

Korzystając z definicji 3 i 4 można dokonać transformacji własności systemu struktur binarnych do systemu ogólnych struktur danych i określić warunki wykonalności takich transformacji. Tutaj ograniczymy się jedynie do pokazania związków zachodzących między przekształceniami δ i ϑ oraz $\mathcal{T}$ i ψ.

T w i e r d z e n i e 6

Dla dowolnego złożonego selektora $\gamma \in Sel^{*}$: $\vartheta(\delta(\gamma)) = \gamma$ Jeżeli $\gamma = I$, to $\delta(I) = I$ i $\vartheta(\delta(I)) = \vartheta(I) = I$. Gdy $\gamma = s_1$, to $\delta(s_1) = v$ i $\vartheta(v) = s_1$. Gdy natomiast $\gamma = s_i$, to $\delta(s_i) = v \circ \underbrace{h \circ h \ldots \circ h}_{i-1} = v \circ \bigwedge_{j=1}^{i-1} h$ i $\vartheta(v \circ \bigwedge_{j=1}^{i-1} h) = s_i$. Jeżeli $\gamma = \xi \circ s_i$, to $\delta(\gamma) = \delta(\xi) \circ \delta(s_i) = \delta(\xi) \circ (v \circ \bigwedge_{j=1}^{i-1} h)$. Mamy więc $\vartheta(\delta(\gamma)) = \vartheta(\delta(\xi)) \circ s_i$. Ponieważ każdy selektor złożony może być przedstawiony jako kompozycja skończonej liczby prostych selektorów, prowadząc rozumowanie jak wyżej, widać, że w wyniku złożenia obydwu przekształceń otrzymamy tę samą co założyliśmy kompozycję prostych selektorów, a więc ten sam złożony selektor.

T w i e r d z e n i e 7

Jeżeli dany jest złożony selektor $k \in S^{*}$ taki, że $k = I$ lub $k = v \circ t$, to $\delta(\vartheta(k)) = k$.

Wykorzystując definicje 1 i 3 widać, że dowód twierdzenia jest oczywisty.

T w i e r d z e n i e 8

Dla dowolnego obiektu $A \in Ob$: $\psi(\mathcal{T}(A)) = A$.

Gdy $A = \Omega$, to oczywiście $\mathcal{T}(\Omega) = \Omega$, $\chi_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}(\Omega)) = \emptyset$ i $\psi(\mathcal{T}(\Omega)) = \Omega$. Jeżeli $A = e \in \mathcal{E}$, $\bar{A} = \{<I : e\}$. Wtedy $\chi_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}(A)) = \{<\delta(I) : e>\} = \{<I : e>\}$ a $\psi(\mathcal{T}(A)) = (\iota C)[\bar{C} = \{<\vartheta(I) : e>\} = \{<I : e>\} = \bar{A}]$. Gdy natomiast $A \in \mathcal{C}$ to istnieje $\bar{A} = \{<\gamma_i : e_i> | \gamma_i(A) = e_i\}$ Wtedy $\chi_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}(A)) = \{<\delta(\gamma_i) : e_i>\}$.

Z kolei $\psi(\mathcal{T}(A)) = (\iota C)[\bar{C} = \{<\vartheta(\delta(\gamma_i)) : e_i>\} = \{<\gamma_i : e_i>\} = \bar{A}]$. Przekształcenie ψ nie jest przekształceniem różnowartościowym. Gdy na przykład $\chi_{\mathcal{E}}(A) = \emptyset$, gdzie $A \in \mathcal{K}$, to $\psi(A) = \Omega$ niezależnie od tego, ile i jakie selektory końcowe należą do zbioru S_A. Również w wypadku, gdy $\chi_{\mathcal{E}}(A) \neq \emptyset$, jednemu obiektowi w systemie ogólnych struktur danych mogą odpowiadać różne obiekty w systemie struktur binarnych. Wynika to stąd, że w systemie struktur binarnych dopuszcza się takie sytuacje, że składowymi dowolnego obiektu mogą być obiekty puste, co jest z kolei zabronione w systemie ogólnych struktur danych. Aby uzyskać wzajemną jednoznaczność przekształceń wystarczy dokonać pewnego prostego zabiegu, a mianowicie zastąpić w strukturach binarnych każdy obiekt pusty Ω, wybierany za pośrednictwem selektora końcowego, zastępczym obiektem elementarnym, który oznaczymy symbolem $\mathcal{E}$. Otrzymujemy wtedy $\chi_{\mathcal{E}}(A) = \chi(A)$.

T w i e r d z e n i e 9

Dla dowolnego obiektu $A \in \mathcal{K}$, dla którego $\chi_{\mathcal{E}}(A) = \chi(A)$: $\mathcal{T}(\bar{\psi}(A)) = A$.

Dowód jest analogiczny jak w przypadku twierdzenia 8.

Przeprowadzone rozważania i wyprowadzone zależności miały na celu pokazanie wzajemnych związków systemu ogólnych struktur danych i systemu struktur binarnych. Dzięki nim można zrealizować struktury danych w maszynie cyfrowej, przy czym realizacja ta może wykorzystywać system struktur binarnych, natomiast na zewnątrz można posługiwać się ogólnymi strukturami danych. Wymaga to oczywiście zdefiniowania pewnego języka umożliwiającego programowanie operacji w systemie struktur danych. Język taki może mieć cechy uniwersalne i służyć zarówno do programowanie zagadnień związanych z przetwarzaniem danych, jak i do programowania procesów translacji, a więc z jego pomocą można zbudować kompilator kompilatorów.

LITERATURA

[1] J. Bruski: Struktury binarne i ich własności.

[2] J. Bruski: Zbiory charakterystyczne struktur binarnych.

[3] J. Bruski: Uogólnienie funkcji konstrukcji struktur binarnych.

[4] A. Ollongren: Definition of Programming Languages by Interpreting Automata. Academic Press. London 1974.

[5] H.D. Ehrich: Ein axiomatischer Ansatz für eine Algebra Strukturierter Objekte. Graphen - Sprachen und Algorithmen auf Graphen. Carl Hanser Verlag. München 1976.

Recenzent
Prof. dr hab. Władysław M. Turski

Wpłynęło do Redakcji 14.04.1979 r.

СВЯЗЬ ДВОИЧНЫХ СТРУКТУР С СИСТЕМОЙ ОБЩИХ СТРУКТУР ДАННЫХ

Р е з ю м е

В статье кратко представлены свойства системы общих структур данных. Определены тоже преобразования селекторов и объектов системы общих структур данных для системы двоичных структур и наоборот. В виде теорем представлены основные свойства этих преобразований.

RELATIONSHIP BETWEEN BINARY STRUCTURES AND A SYSTEM OF GENERAL DATA STRUCTURES

S u m m a r y

In the paper the properties of the system of general data structures were briefly described. Transformations of selectors and objects of the system of general data structures into the system of binary structures, inverse transformations were defined as well. Basic properties of the transformations were stated in form of theorems.